



LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HÂN

CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68

CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan

CS4: Trung Tâm THPT Nguyễn Trường Tộ

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 4 TOÁN 11-CTST

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

Mục lục

Chương IV: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN.	4
BÀI 1: ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	4
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	4
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	7
Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng	7
1. Phương pháp	7
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	7
3. Bài tập trắc nghiệm	12
Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	12
1. Phương pháp	12
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	12
Dạng 3. Thiết diện	15
1. Phương pháp	15
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	16
Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy	17
1. Phương pháp	17
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	18
Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng	21
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	23
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	27
BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	50
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	50
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	51
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy	51
1. Phương pháp	51
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	51
Dạng 2. Tìm giao điểm và thiết diện của hình chóp	54
1. Phương pháp	54
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	54
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	57
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	60
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	75
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	75

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	76
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy	76
1. Phương pháp	76
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	76
Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng	80
1. Phương pháp	80
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	80
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	83
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	88
BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	98
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	98
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	99
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song	99
1. Phương pháp	99
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	100
Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng	102
1. Phương pháp	102
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	102
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	105
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	110
BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG	126
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	126
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	127
Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian	127
1. Phương pháp	127
2. Các ví dụ	128
Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song	130
1. Phương pháp	130
2. Các ví dụ	130
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	131
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	133
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV	137
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	137

BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	141
BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG IV	145
PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM.....	145
PHẦN 2: TỰ LUẬN.....	170

Chương IV: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

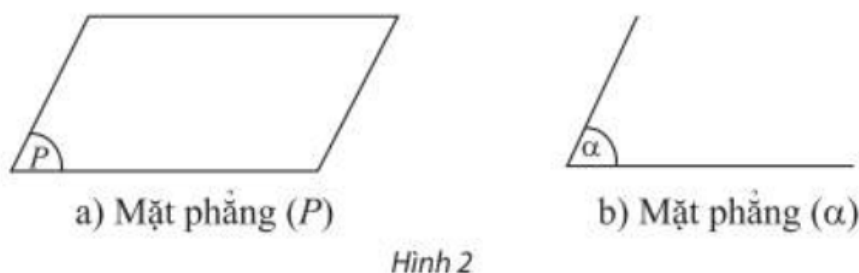
BÀI 1: ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.

1. Mặt phẳng trong không gian

Mặt bảng, mặt bàn, mặt sàn nhà, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không hề có bề dày và không có giới hạn.

Ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc để biểu diễn mặt phẳng và dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp trong dấu ngoặc để ký hiệu mặt phẳng.

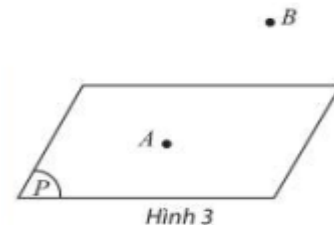


Chú ý: Mặt phẳng (P) còn được viết tắt là $mp (P)$ hoặc (P) .

Điểm thuộc mặt phẳng

Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P) như Hình 3.

- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A , hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.
- Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.



Biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng

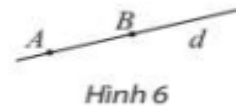
Để biểu diễn một hình trong không gian lên một mặt phẳng (tờ giấy, mặt bảng, ...), ta thường dựa vào các quy tắc sau:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính song song, tính cắt nhau giữa các đường thẳng.
- Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.

2. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian

Tính chất 1

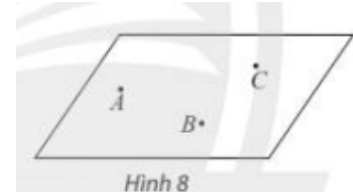
Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước. Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B được kí hiệu là AB . Ta cũng nói đường thẳng AB xác định bởi hai điểm A, B .



Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

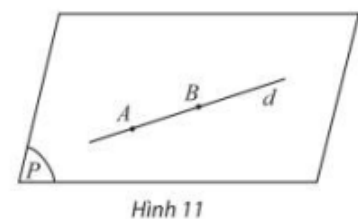
Chú ý: Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là mặt phẳng (ABC) .



Tính chất 3

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Chú ý: Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thường được kí hiệu là $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.



Tính chất 4

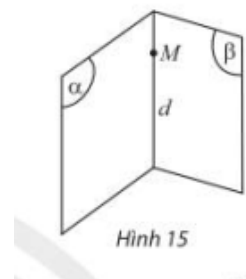
Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Chú ý: Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Chú ý: Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q) , kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.



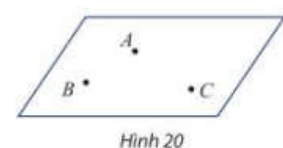
Tính chất 6

Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học đều đúng.

3. Các xác định mặt phẳng

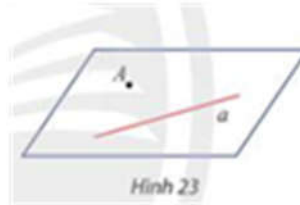
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.

Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu là $mp(ABC)$ hay (ABC) (Hình 20).



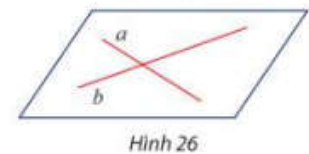
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A kí hiệu là $mp(A, a)$ hay (A, a) (Hình 23)



Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Một mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là $mp(a, b)$ (Hình 26).



4. Hình chóp và hình tứ diện

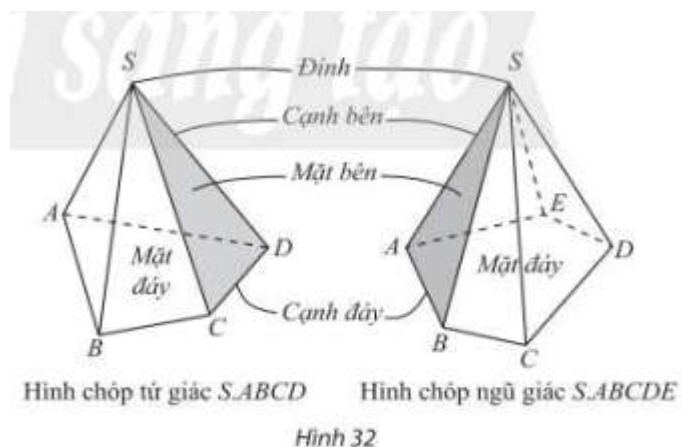
Hình chóp

Cho đa diện lồi $A_1A_2...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α) . Nối S với các đỉnh $A_1A_2...A_n$ ta được n tam giác

$SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là **hình chóp**, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ta gọi:

- Điểm S là **đỉnh**;
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các **mặt bên**;
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ là **mặt đáy**;
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các **cạnh bên**;
- Các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các **cạnh đáy**.



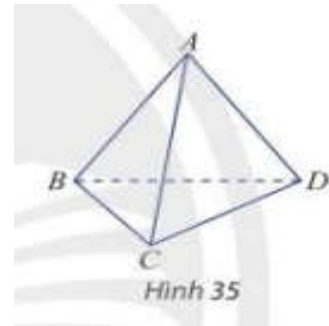
Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB, BCD được gọi là **hình tứ diện** (hay **tứ diện**), kí hiệu $ABCD$.

Trong tứ diện $ABCD$ (Hình 35), ta gọi:

- Các điểm A, B, C, D là các **đỉnh**;
- Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, BD là các **cạnh** của tứ diện;
- Hai cạnh không đi qua một đỉnh là **hai cạnh đối diện**;
- Các tam giác ABC, ACD, ADB, BCD là các **mặt** của tứ diện;
- Đỉnh không thuộc một mặt phẳng của tứ diện là **đỉnh đối diện** của mặt đó.



Chú ý:

- Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là **hình tứ diện đều**.
- Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tùy ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

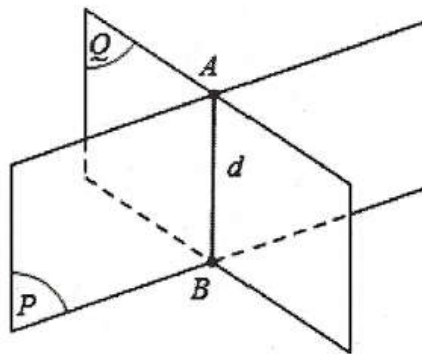
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta đi tìm hai điểm chung của chúng.

Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó chính là giao tuyến



Chú ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) thường được tìm như sau:

- Tìm hai đường thẳng a và b lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và (Q) cùng nằm trong một mặt phẳng (R) .
- Giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của mặt phẳng (P) và (Q) .

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi M là điểm trên cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- a. (SAC) và (SBD) b. (SAB) và (SCD)
 c. (SBC) và (SAD) d. (BCM) và (SAD)
 e. (CDM) và (SAB) f. (BDM) và (SAC)

Giải

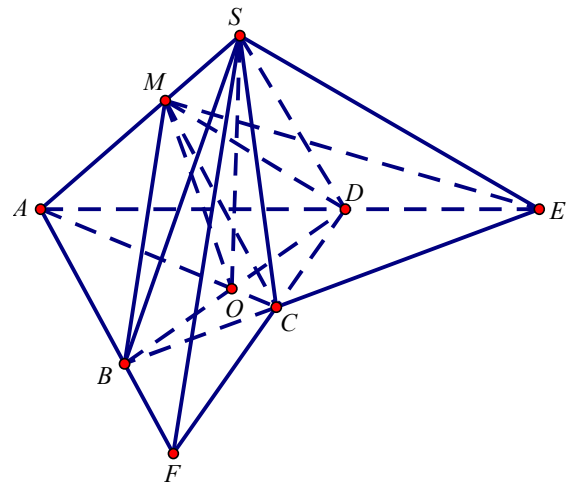
a. Trong mp (ABCD):

$$\left. \begin{array}{l} AC \cap BD = \{O\} \\ AC \subset (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBD)$ nên $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b. Trong (ABCD) ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \cap CD = \{F\} \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow F \in (SAB) \cap (SCD)$$



Mà $S \in (SAB) \cap (SCD)$ nên $SF = (SAB) \cap (SCD)$.

c. Trong $(ABCD)$ ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \cap AD = \{E\} \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$$

Mà $S \in (SAD) \cap (SBC)$ nên $SE = (SAD) \cap (SBC)$.

d. Ta có: $M \in (MBC) \cap (SAD)$

$$E \in BC \cap AD \Rightarrow E \in (MBC) \cap (SAD)$$

Nên $ME = (MBC) \cap (SAD)$.

e. Ta có: $M \in (MCD) \cap (SAB)$

$$F = AB \cap CD \Rightarrow F \in (MCD) \cap (SAB)$$

Vậy $MF = (MCD) \cap (SAB)$.

f. Ta có: $M \in (BDM) \cap (SAC)$

$$O \in (BDM) \cap (SAC)$$

Do đó $MO = (BDM) \cap (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, AD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (ABN) và (CDM) ;

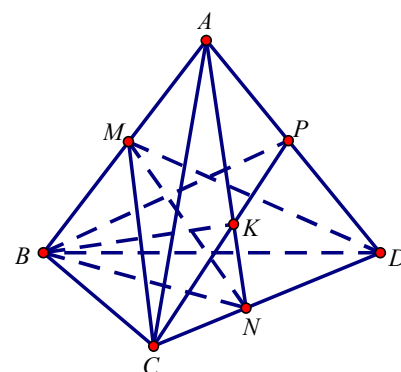
b. (ABN) và (BCP) .

Giải

a. Ta có M và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (CDM) , nên giao tuyến của hai mặt phẳng này chính là đường thẳng MN .

b. Trong mặt phẳng (ACD) : AN cắt CP tại K . Do đó K là điểm chung của hai mặt phẳng (BCP) và (ABN) .

Mà B cũng là điểm chung của hai mặt phẳng này nên giao tuyến của chúng là đường thẳng BK .

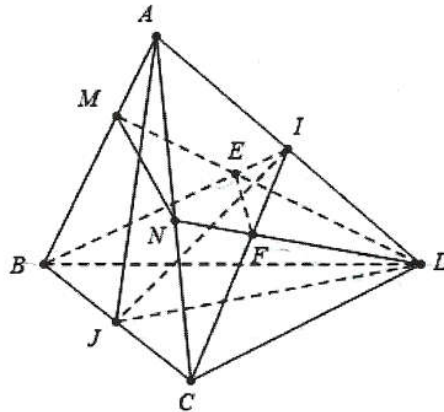


Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (JAD) .

b) Điểm M nằm trên cạnh AB , điểm N nằm trên cạnh AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) .

Lời giải



a) Ta có: $I \in AD \Rightarrow I \in (JAD) \cap (IBC)$.

$J \in BC \Rightarrow J \in (JAD) \cap (IBC)$.

Do đó $IJ = (IBC) \cap (JAD)$.

b) Trong mặt phẳng (ABC) gọi $E = DM \cap IB$ suy ra $E \in (DMN) \cap (IBC)$.

Trong mặt phẳng (ACD) gọi $F = DN \cap IC$ suy ra $F \in (DMN) \cap (IBC)$.

Do đó $EF = (DMN) \cap (IBC)$.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M nằm bên trong tam giác ABD , điểm N nằm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (AMN) và (BCD) .

b) (DMN) và (ABC) .

Lời giải

a) Trong mặt phẳng (ABD) gọi $Q = AM \cap BD$.

Khi đó $Q \in (AMN) \cap (BCD)$.

Tương tự gọi $P = AN \cap CD \Rightarrow P \in (AMN) \cap (BCD)$.

Do vậy $PQ \in (AMN) \cap (BCD)$.

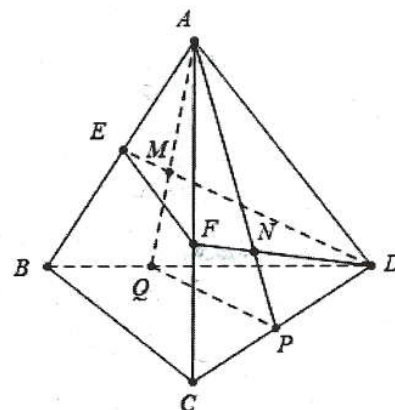
b) Trong mặt phẳng (ABD) gọi $E = DM \cap AB$ suy ra

$E \in (DMN) \cap (ABC)$.

trong mặt phẳng (ACD) gọi $F = DN \cap AC$ suy ra

$F \in (DMN) \cap (ABC)$.

Do đó $EF \in (DMN) \cap (ABC)$.

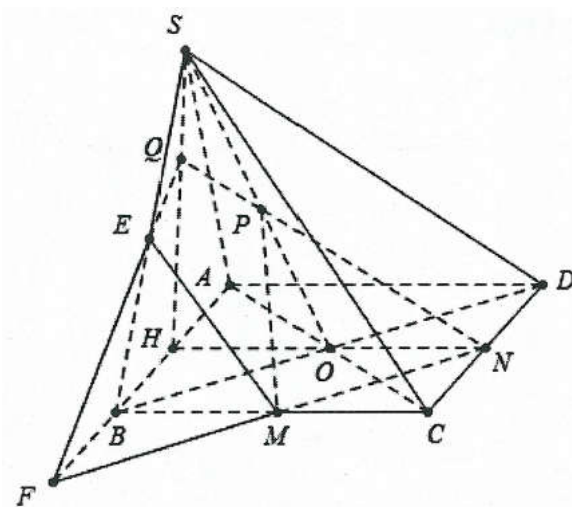


Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và SO . Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng (MNP) và (SAB) .

b) Mặt phẳng (MNP) và (SBC) .

Lời giải



a) Gọi $H = NO \cap AB$, trong mặt phẳng (SHN) dựng NP cắt SH tại $Q \Rightarrow Q \in (MNP) \cap (SAB)$.

Gọi $F = NM \cap AB \Rightarrow F \in (MNP) \cap (SAB)$.

Do đó $QF \in (SAB) \cap (MNP)$.

b) Trong mặt phẳng (SAB) , gọi $E = QF \cap SB \Rightarrow E \in (SBC) \cap (MNP)$

Do đó $ME \in (MNP) \cap (SBC)$.

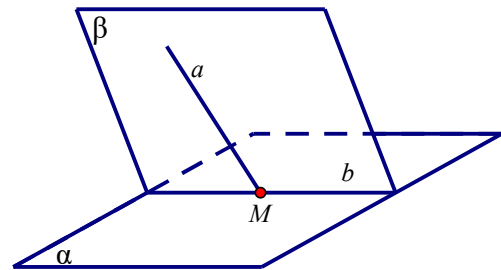
3. Bài tập trắc nghiệm

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (α) , ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (α) .

$$\left. \begin{array}{l} a \cap b = M \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$$

*Phương pháp:*

- Bước 1: Xác định mp(β) chứa a .
- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Bước 3: Trong $(\beta): a \cap b = M$, mà $b \subset (\alpha)$, suy ra $M = a \cap (\alpha)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α) . S là điểm không nằm trên (α) .

- a. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
- b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).
- c. Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Giải

- a. * Giao tuyến của mặt mp(SAC) và mp(SBD): Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$$

Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\left. \begin{array}{l} O \in AC \\ AC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \quad \left. \begin{array}{l} O \in BD \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SBD) \quad \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\text{Vậy } SO = (SAC) \cap (SBD).$$

* Giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD): Gọi E là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\left. \begin{array}{l} E \in AB \\ AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAB) \quad \left. \begin{array}{l} E \in CD \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SCD) \quad \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\text{Vậy: } SE = (SAB) \cap (SCD).$$

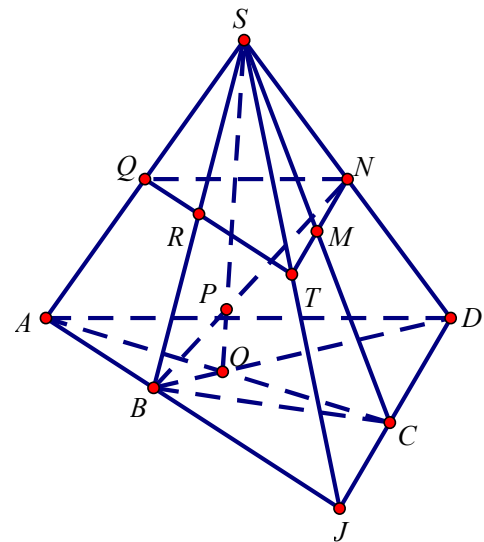
b. Trong mp(SBD), hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in BN \\ P \in SO \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow P \in (SAC) \Rightarrow P \text{ là giao điểm của BN và } (SAC).$$

Vậy P là giao điểm cần tìm.

c. Chứng minh bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng:

- Trong mp(SCD), gọi T là giao điểm của MN và SE. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $MN \parallel CD$. Xét tam giác SDE, ta có:



$\left. \begin{array}{l} MN \parallel CD \\ N \text{ là trung điểm của } SD \end{array} \right\} \Rightarrow T \text{ là trung điểm của } SE.$

- Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên $QR \parallel AB$. Xét tam giác SAE, ta có:

$\left. \begin{array}{l} QR \parallel AB \\ Q \text{ là trung điểm của } SA \end{array} \right\} \Rightarrow QR \text{ đi qua trung điểm } T \text{ của } SE.$

Như vậy, bốn điểm M, N, Q, R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α) , cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc (α) , M là điểm nằm trong tam giác SCD.

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).
- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Giải

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD): Gọi N là giao điểm của SM và CD, gọi E là giao điểm của AN và BD. Rõ ràng $mp(SAM) \equiv mp(SAN)$. Ta có:

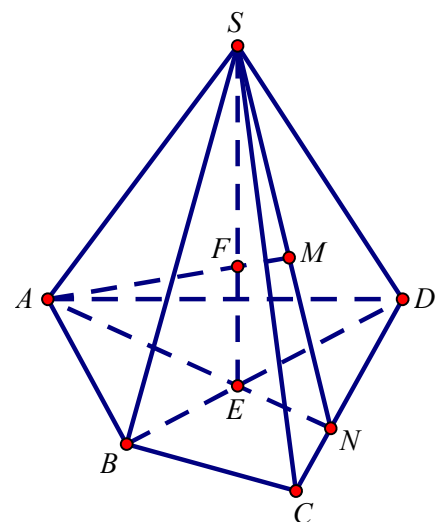
$$\left. \begin{array}{l} E \in AN \Rightarrow E \in (SAM) \\ E \in BD \Rightarrow E \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S \in (SAM) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $SE = (SAM) \cap (SBD)$.

- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SAM) \supset AM \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{array} \right\} \Rightarrow F = AM \cap (SBD)$$



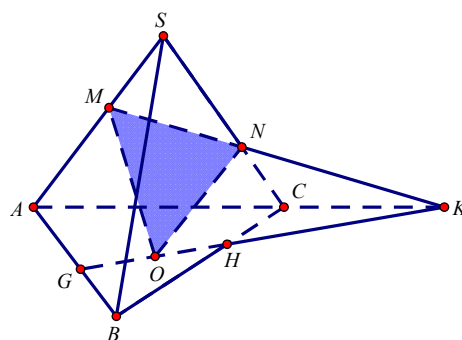
Ví dụ 3. Cho tứ diện SABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Giải

Trong mp(SAC): $MN \cap AC = \{K\}$, mà $MN \subset (OMN)$ nên $\{K\} = AC \cap (OMN)$.

Trong mp(ABC): $OK \cap BC = \{H\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{H\} = BC \cap (OMN)$.

Ta có: $OK \cap AB = \{G\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{G\} = AB \cap (OMN)$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

- Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

Giải

a. Ta có $EF \subset (SBF)$.

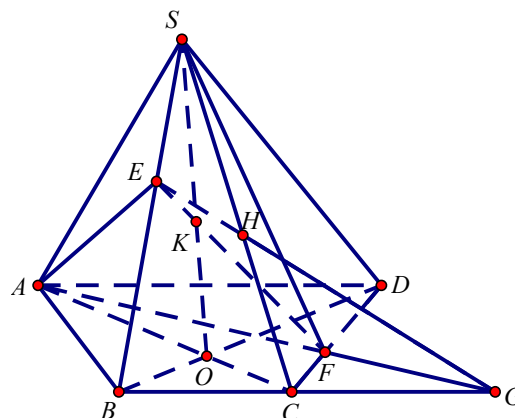
Trong mp(ABCD): $BF \cap AC = \{O\}$, suy ra $(SAC) \cap (SBF) = SO$.

Trong mp(SBF): $EF \cap SO = \{K\}$, mà $SO \subset (SAC)$, suy ra $\{K\} = EF \cap (SAC)$.

b. Trong mp(ABCD): $AF \cap BC = \{G\}$, mà $AF \subset (AEF)$, suy ra $\{G\} = BC \cap (AEF)$.

Khi đó: $(AEF) \equiv (AEG)$.

Trong mp(SBC): $EG \cap SC = \{H\}$, mà $EG \subset (AEF)$, suy ra $\{H\} = SC \cap (AEF)$.



Dạng 3. Thiết diện

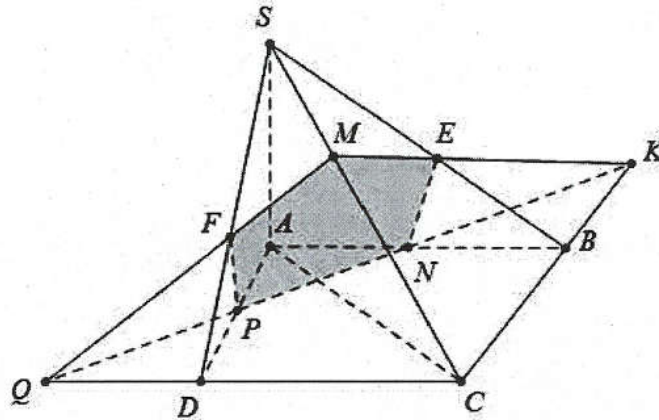
1. Phương pháp

Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC , N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $Q = NP \cap CD$ và $K = NP \cap BC$

Trong $mp(SBC)$ gọi $E = SB \cap KM$, trong $mp(SAD)$ gọi $F = SD \cap QM$.

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $NEMFP$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng a . Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a$. Gọi M là trung điểm của AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF) .

b) Tính diện tích của thiết diện.

Lời giải

a) Trong $mp(ABC)$: Dựng ME cắt AC tại I .

Trong $mp(ABD)$: Dựng MF cắt AD tại J .

Từ đó thiết diện của tứ diện với $mp(MEF)$ là ΔMIJ .

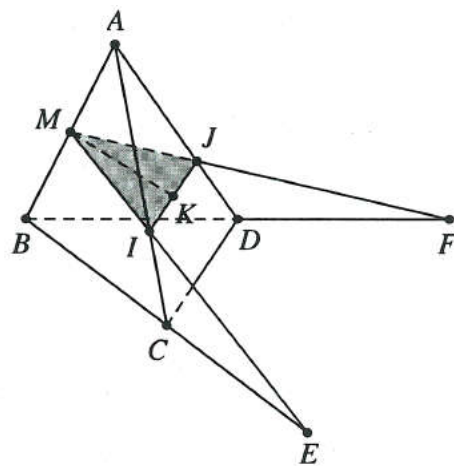
b) Theo cách dựng thì I và J lần lượt là trọng tâm tam giác ABE và ABF

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{3} \\ AJ = \frac{2}{3} AD = \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{tam giác } AIJ \text{ đều} \Rightarrow IJ = \frac{2a}{3}.$$

Mặt khác $AI = AJ$ nên $\Delta AMI = \Delta AMJ \Rightarrow MI = MJ$.

$$\text{Trong } \Delta AMI, MI = \sqrt{MA^2 + IA^2 - 2MA \cdot IA \cdot \cos A} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$S_{\Delta MIJ} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot 2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a^2}{6}.$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với đáy lớn AD . Gọi M là một điểm trên cạnh SB . Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (AMD) .

Giải

Trong $mp(ABCD)$: $AB \cap CD = \{E\}$.

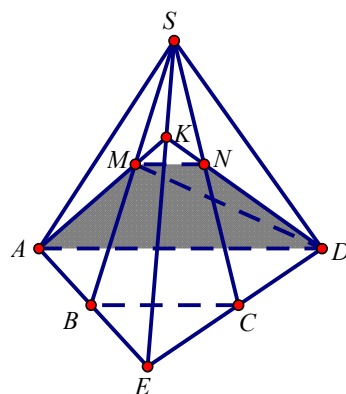
Trong $mp(SAB)$: $AM \cap SE = \{K\}$.

Do đó $mp(AMD) \equiv mp(AKD)$.

Trong $mp(SCD)$: $KD \cap SC = \{N\}$

Do đó $MN = (AMD) \cap (SBC)$, $ND = (AMD) \cap (SCD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $AMND$.

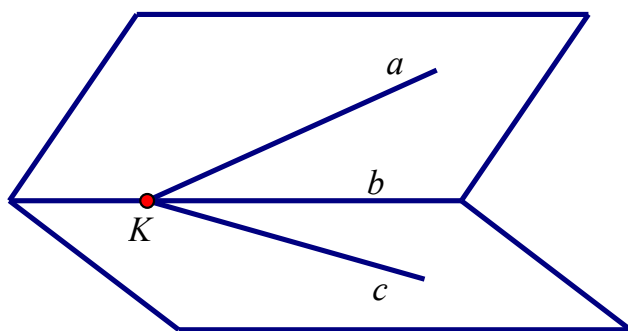


Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy

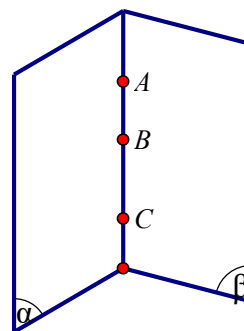
1. Phương pháp

- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau và giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ 3 (Hình a).

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (Hình b).



Hình a.

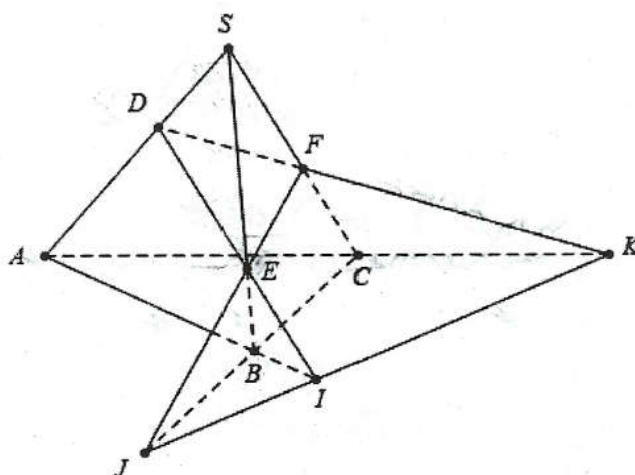


Hình b.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có: $I = DE \cap AB \Rightarrow \begin{cases} I \in (DEF) \\ I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in \text{giao tuyến của hai mặt phẳng } (DEF) \text{ và } (ABC).$

Tương tự $J = EF \cap BC \Rightarrow J$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (DEF) và (ABC) .

$K = FD \cap AC \Rightarrow K$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (DEF) và (ABC) .

Do đó I, J, K thẳng hàng do cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (DEF) và (ABC) .

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, S là điểm không thuộc $(ABCD)$, M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC .

a) Xác định giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.

b) Xác định giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.

c) Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Lời giải

a) Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = AN \cap SO$

Khi đó $I \in SO \Rightarrow I \in (SBD) \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$

b) Gọi $E = CM \cap BD$

Trong mặt phẳng (SCM) gọi $J = MN \cap SE$

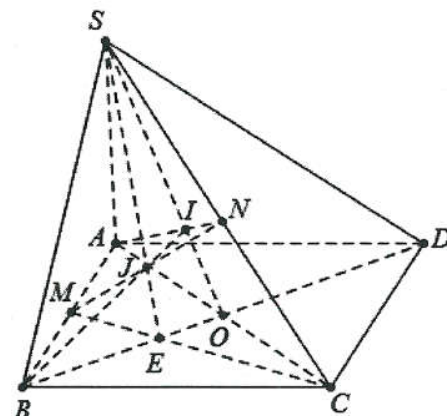
Khi đó $J = MN \cap (SBD)$.

c) Các điểm I, J, B lần lượt thuộc các đường thẳng AI, MN, AM nên $I, J, B \in mp(AMN)$

Mặt khác các điểm $I, J, B \in mp(SBD)$

Do đó I, J, B thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng (AMN)

và $(SBD) \Rightarrow I, J, B$ thẳng hàng.



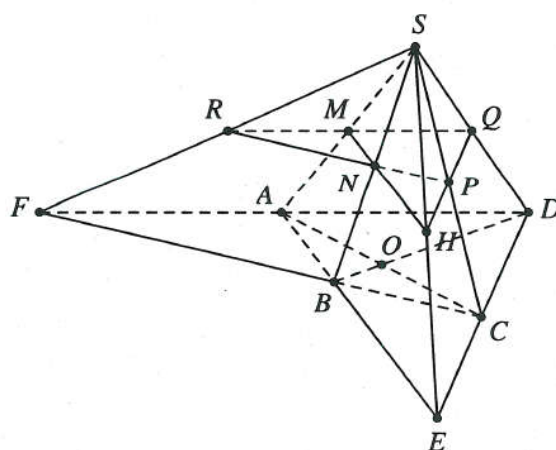
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC .

a) Tìm giao điểm $Q = SD \cap (MNP)$.

b) Giả sử $MN \cap PQ = H$. Chứng minh S, H, E thẳng hàng.

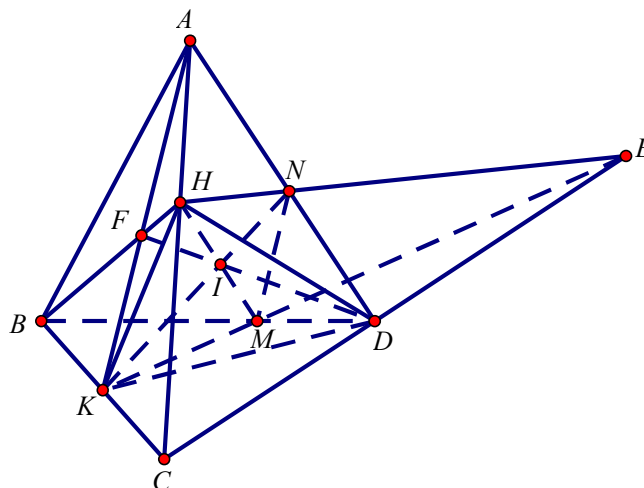
c) Chứng minh SF, MQ, NP đồng qui.

Lời giải



a) Qua P kẻ đường thẳng $d \parallel CD$, cắt SD tại $Q \Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$

b) Ta có $(SAB) \cap (SCD) = A$



a. Trong mp(BCD): $KM \cap CD = \{E\}$.

Trong mp(ACD): $HE \cap AD = \{N\}$.

Mà $HE \subset (P)$ nên $N = AD \cap (P)$ là điểm cần tìm.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} I = HM \cap KN \\ HM \subset (HBD) \\ KN \subset (AKD) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in (HBD) \cap (AKD) \quad (1)$$

Trong mp(ABC): $BH \cap AK = \{F\} \Rightarrow F \in (HBD) \cap (AKD)$

Mà $D \in (HBD) \cap (AKD)$, nên $DF = (HBD) \cap (AKD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I chạy trên đường thẳng cố định DF.

Giới hạn:

Cho $M \rightarrow D$ thì $N \rightarrow D$. Khi đó $I \rightarrow D$.

Cho $M \rightarrow B$ thì $N \rightarrow A$. Khi đó $I \rightarrow F$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn DF.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và AC, sao cho MN không song song với BC. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

- Chứng minh EF luôn đi qua điểm cố định.
- Tìm tập hợp giao điểm của ME và NF.
- Tìm tập hợp giao điểm của MF và NE.

Giải

a. Trong $mp(ABC)$: $MN \cap BC = K$.

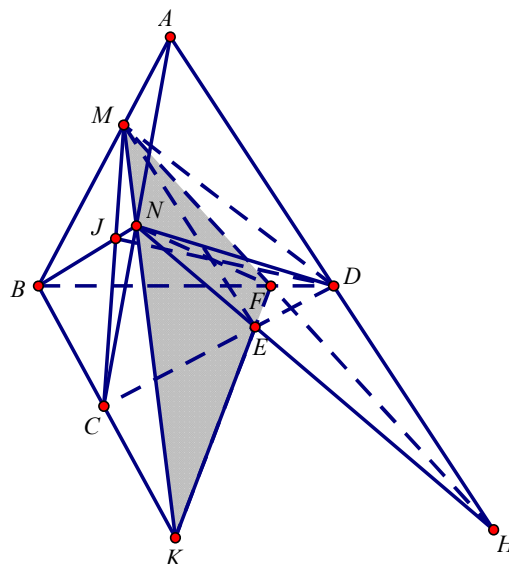
Khi đó K là điểm chung của (BCD) và (P) , mà EF là giao tuyến của (BCD) và (P) nên EF đi qua điểm K cố định.

b. Gọi I là giao điểm của ME và NF thì I là điểm chung của (NBD) và (MCD) , suy ra I thuộc giao tuyến DJ của $mp(MCD)$ và (NBD) .

Giới hạn: Tập hợp cần tìm là đoạn DJ .

c. Gọi H là giao điểm của MF và NE thì H là điểm chung của (ABD) và (ACD) , suy ra H thuộc giao tuyến AD của $mp(ABD)$ và $mp(ACD)$.

Giới hạn: Tập hợp điểm cần tìm là đường thẳng AD trừ đi đoạn AD .



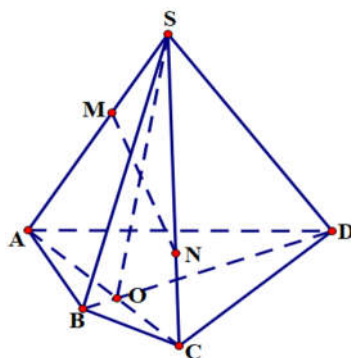
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

a) Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .

b) Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Lời giải



a) $M \in SA$ và $SA \subset (SAC)$ nên $M \in (SAC)$.

$N \in SC$ và $SC \subset (SAC)$ nên $N \in (SAC)$.

Vậy $MN \subset (SAC)$.

b) Ta có: $O \in AC, AC \subset (SAC)$ nên $O \in (SAC)$.

$O \in BD, BD \subset (SBD)$ nên $O \in (SBD)$.

Nên O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

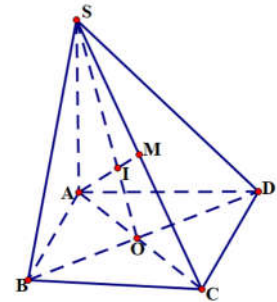
a) Gọi I là giao điểm của SO và AM . Ta có: $I \in AM$

Do $I \in SO; SO \subset (SBD)$ nên $I \in (SBD)$.

Vậy I là giao điểm của AM và (SBD) .

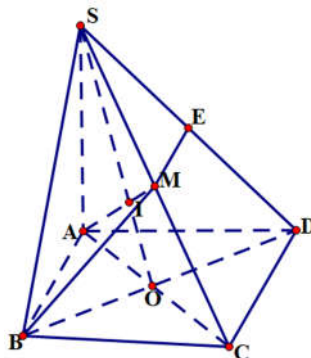
Trong tam giác SAC , ta có: M là trung điểm của SC , O là trung điểm của AC nên SO cắt AM tại I là trọng tâm của tam giác (SAC) .

Suy ra $AI = \frac{2}{3}AM$ hay $AI = 2IM$.



b) Trên mặt phẳng (SCD) kẻ một đường thẳng song song với AB cắt SD tại E .

Do $ME // AB$ nên A, B, M, E cùng thuộc một mặt phẳng, hay $E \in (ABM)$ Vậy E là giao của (ABM) và SD .



c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi NC cắt BD tại P .

Ta có S và P là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SNC) và (SBD) nên SP là giao tuyến của (SNC) và (SBD) .

Trong mặt phẳng (SNC) , gọi MN cắt SP tại Q .

Do $SP \subset (SBD)$ nên $Q \in (SBD)$

Vậy giao điểm của MN và (SBD) là Q .

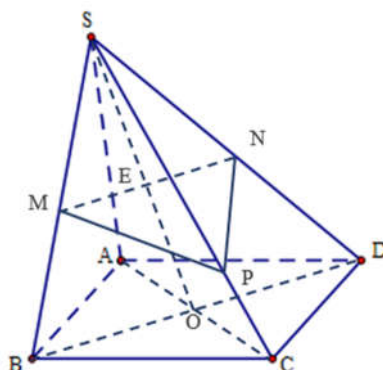
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

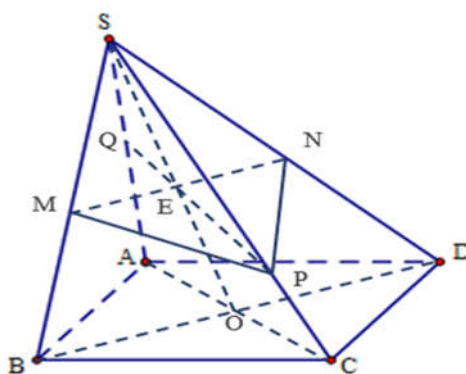
Lời giải

a)



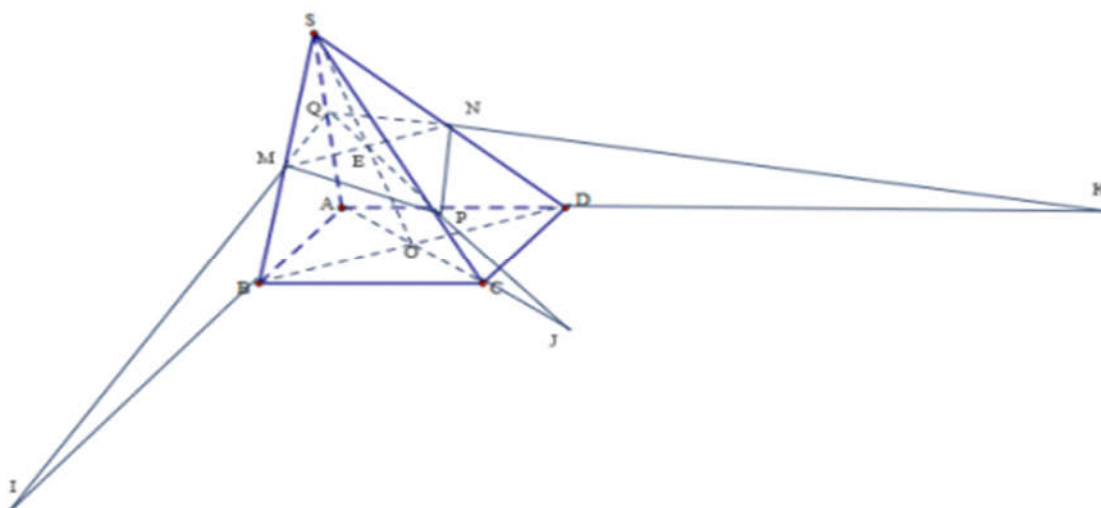
Trong mặt phẳng SBD . Gọi E là giao điểm của SO và MN . Do $MN \subset (MNP)$ nên $E \in (MNP)$.
 Vậy E là giao điểm của SO và (MNP) .

b)



Trong mặt phẳng (SAC) , gọi Q là giao điểm của EP và SA . Do $EP \subset (MNP)$ nên $Q \in (MNP)$.
 Vậy Q là giao điểm của SA và (MNP) .

c)



Ta có: I và K là điểm chung của hai mặt phẳng (QMN) và $(ABCD)$.

Nên IK là giao tuyến của $(MNPQ)$ và $(ABCD)$.

Ta có $J \in QP, QO \subset (MNPQ)$ nên $J \in (MNPQ)$ $J \in AC, AC \subset (ABCD)$ nên $J \in (ABCD)$.

Do đó J là giao điểm của hay J nằm trên giao tuyến của $(ABCD)$ và $(MNPQ)$.

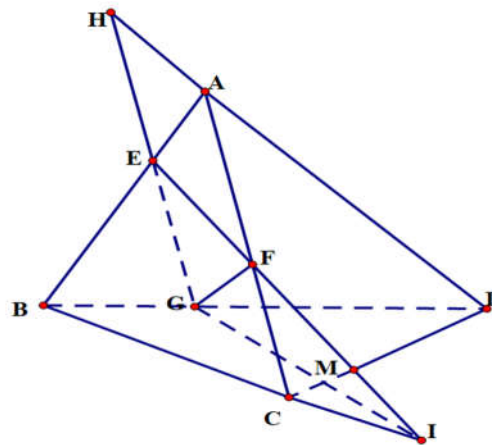
Vậy I, J, K thẳng hàng.

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại $I (I \neq C), EG$ cắt AD tại $H (H \neq D)$.

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và $(BCD); (EFG)$ và (ACD) .

b) Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

Lời giải



a) Ta có I và G là hai điểm chung của mặt phẳng (EFG) và (BCD) nên giao tuyến của (EFG) và (BCD) là GI .

Gọi M là giao điểm của GI và $CD, CD \subset (ACD)$ nên $M \in (ACD)$.

Ta có M và F là điểm chung của mặt phẳng (EFG) và (ACD) nên giao tuyến của (EFG) và (ACD) là MF .

b) Ta có $H \in AD, AD \subset (ACD)$ nên $H \in (ACD)$

$$H \in EG; EG \subset (EFG) \text{ nên } H \in (EFG).$$

Suy ra H là giao điểm của (EFG) và (ACD) nên H nằm trên giao tuyến của (EFG) và (ACD)

: $H \in FM$ hay HF đi qua M .

Do đó, CD, IG, HF cùng đi qua điểm M .

Bài 5. Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng (Hình 41). Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.



Hình 41

Lời giải

Do tia laser tạo ra một mặt phẳng, mặt phẳng này giao với mặt phẳng tường hoặc sàn nhà tại một đường thẳng.

Do đó có thể giúp người thợ kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C

- A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.
- B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 2: Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- A. 6.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 2.

Lời giải

Chọn B

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Khi đó, với 4 điểm không đồng phẳng ta tạo được tối đa $C_4^3 = 4$ mặt phẳng.

Câu 3: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A.** Ba điểm phân biệt.
B. Một điểm và một đường thẳng.
C. Hai đường thẳng cắt nhau.
D. Bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Chọn C

- A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.
- B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn A

4 điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm A, B, C, D đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.
- B.** Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .
- C.** Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.
- D.** Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng phân biệt không song song với nhau thì chúng có duy nhất một giao tuyến.

- A sai. Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì 2 mặt phẳng có vô số điểm chung. Khi đó, chưa đủ điều kiện để kết luận A, B, C thẳng hàng.
- B sai. Có vô số đường thẳng đi qua A , khi đó B, C chưa chắc đã thuộc giao tuyến của (P) và (Q) .
- C sai. Hai mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt giao nhau tại 1 giao tuyến duy nhất, nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng thì A, B, C cùng thuộc giao tuyến.

Câu 6: Trong mặt phẳng (α) , cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Với điểm S không thuộc mặt phẳng (α) và 4 điểm A, B, C, D thuộc mặt phẳng (α) , ta có C_4^2 cách chọn 2 trong 4 điểm A, B, C, D cùng với điểm S lập thành 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 6.

Câu 7: Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

- A. 10. B. 12. C. 8. D. 14.

Lời giải

Chọn A

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Ta có C_5^3 cách chọn 3 điểm trong 5 điểm đã cho để tạo được 1 mặt phẳng xác định. Số mặt phẳng tạo được là 10.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

- A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.
- B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Nếu 2 mặt phẳng trùng nhau, khi đó 2 mặt phẳng có vô số điểm chung và chung nhau vô số đường thẳng.

- Câu 9:** Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. 3 đường thẳng trên đồng quy.
 B. 3 đường thẳng trên trùng nhau.
 C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác.
 D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Lời giải

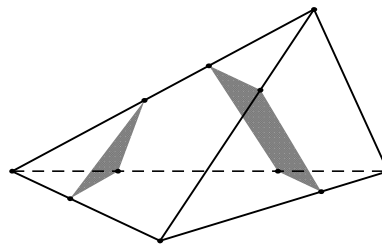
Chọn A

- B sai. Nếu 3 đường thẳng trùng nhau thì chúng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.
- C sai. Nếu 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác khi đó sẽ tạo được 3 điểm phân biệt không thẳng hàng (là 3 đỉnh của tam giác), chúng lập thành 1 mặt phẳng xác định, 3 đường thẳng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

- Câu 10:** Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:
- A. Tam giác. B. Tứ giác.
 C. Ngũ giác. D. Tam giác hoặc tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Khi thiết diện cắt 3 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 3 giao tuyến. Ba giao tuyến lập thành 1 hình tam giác.

Khi thiết diện cắt cả 4 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 4 giao tuyến. Bốn giao tuyến lập thành 1 hình tứ giác.

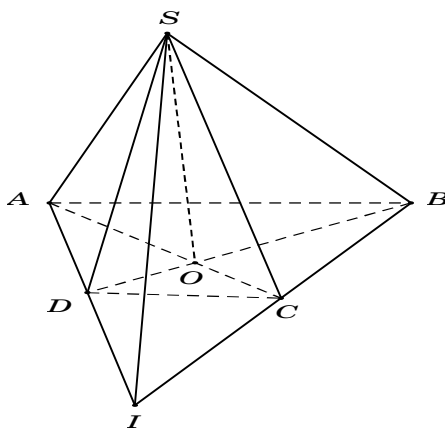
Thiết diện không thể là ngũ giác vì thiết diện có 4 mặt, số giao tuyến tối đa là 4.

- Câu 11:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Hình chóp S.ABCD có 4 mặt bên.

- B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).
- D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$

Lời giải

Chọn D



- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$. Do đó A đúng.
- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \text{ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng } (SAC) \text{ và } (SBD).$$

$\longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$. Do đó B đúng.

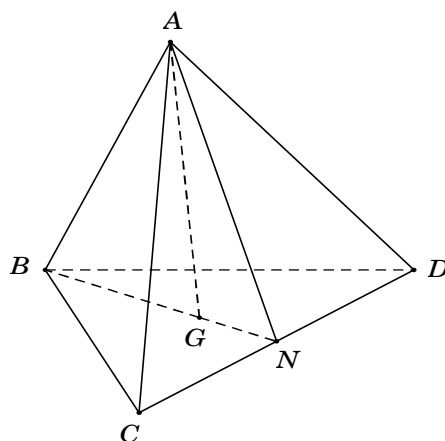
- Tương tự, ta có $(SAD) \cap (SBC) = SI$. Do đó C đúng.
 - $(SAB) \cap (SAD) = SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$
- Do đó D sai.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

- A. AM (M là trung điểm của AB). B. AN (N là trung điểm của CD).
- C. AH (H là hình chiếu của B trên CD). D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải

Chọn B



- A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .
- Ta có $BG \cap CD = N \longrightarrow \begin{cases} N \in BG \subset (ABG) \Rightarrow N \in (ABG) \\ N \in CD \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

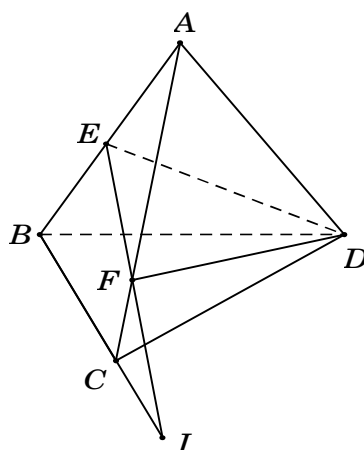
Vậy $(ABG) \cap (ACD) = AN$.

Câu 13: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD . Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC . Khi EF và BC cắt nhau tại I , thì I **không** phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCD) và (DEF) . B. (BCD) và (ABC) . C. (BCD) và (AEF) . D. (BCD) và (ABD) .

Lời giải

Chọn D



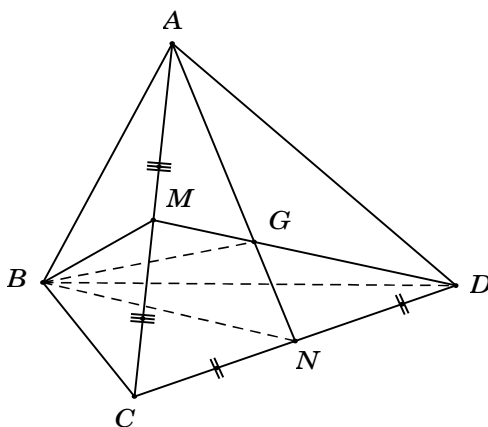
Điểm I là giao điểm của EF và BC mà $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC) \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

- A. đường thẳng MN .
- B. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).
- C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
- D. đường thẳng AM .

Lời giải

Chọn C



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) .
- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD . Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) .

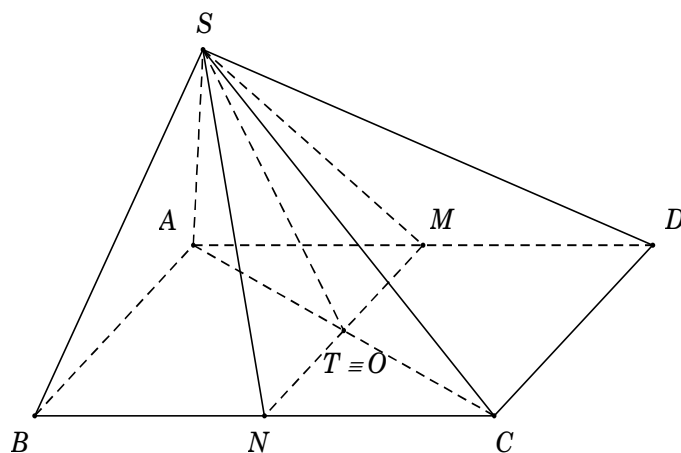
Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

- A. SD .
- B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
- C. SG (G là trung điểm AB).
- D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải

Chọn B



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) .
- Gọi $O = AC \cap BD$ là tâm của hình bình hành.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $T = AC \cap MN$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) .

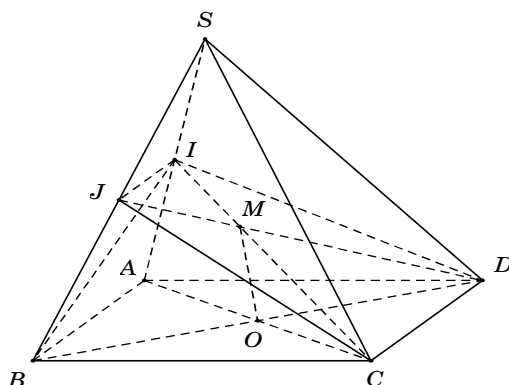
Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| A. $IJCD$ là hình thang. | B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$. |
| C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$. | D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$). |

Lời giải

Chọn D



- Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel CD$
 $\Rightarrow IJCD$ là hình thang. Do đó A đúng.

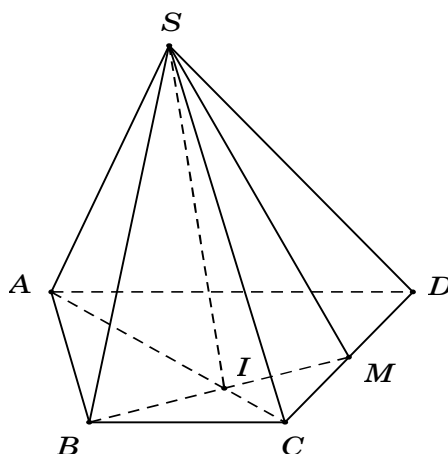
- Ta có $\begin{cases} IB \subset (SAB) \\ IB \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IBC) = IB$. Do đó B đúng.
- Ta có $\begin{cases} JD \subset (SBD) \\ JD \subset (JBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (JBD) = JD$. Do đó C đúng.
- Trong mặt phẳng (IJD) , gọi $M = IC \cap JD \Rightarrow (IAC) \cap (JBD) = MO$. Do đó D sai.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SI (I là giao điểm của AC và BM).
- B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
- C. SO (O là giao điểm của AC và BD).
- D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải

Chọn A



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) .
- Ta có $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) .

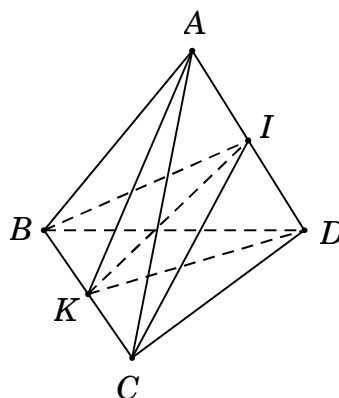
Vậy $(MSB) \cap (SAC) = SI$.

Câu 18: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

- A. IK .
- B. BC .
- C. AK .
- D. DK .

Lời giải

Chọn A



Điểm K là trung điểm của BC suy ra $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$.

Điểm I là trung điểm của AD suy ra $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$.

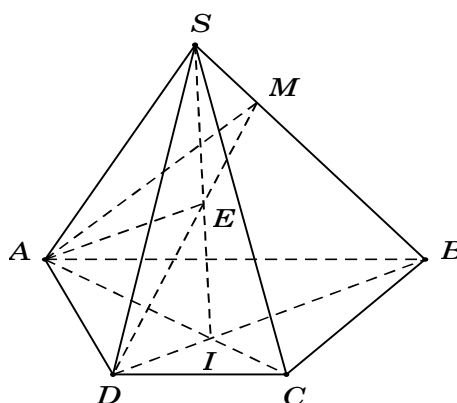
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là IK .

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Trên cạnh SB lấy điểm M . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC) .

- A. SI .
- B. AE (E là giao điểm của DM và SI).
- C. DM .
- D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Lời giải

Chọn B



Ta có A là điểm chung thứ nhất của (ADM) và (SAC) . Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $E = SI \cap DM$.

Ta có:

- $E \in SI$ mà $SI \subset (SAC)$ suy ra $E \in (SAC)$.

- $E \in DM$ mà $DM \subset (ADM)$ suy ra $E \in (ADM)$.

Do đó E là điểm chung thứ hai của (ADM) và (SAC) .

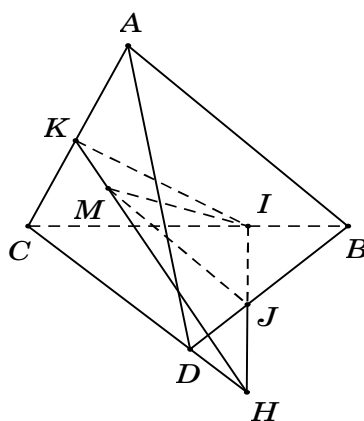
Vậy AE là giao tuyến của (ADM) và (SAC) .

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD . Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD . Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

- A. KI . B. KJ . C. MI . D. MH .

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (BCD) , IJ cắt CD tại $H \Rightarrow H \in (ACD)$.

Điểm $H \in IJ$ suy ra bốn điểm M, I, J, H đồng phẳng.

Nên trong mặt phẳng (IJM) , MH cắt IJ tại H và $MH \subset (IJM)$.

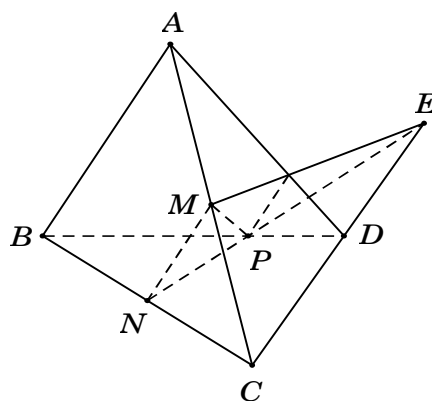
Mặt khác $\begin{cases} M \in (ACD) \\ H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow MH \subset (ACD)$. Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$.

Câu 21: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A. CD và NP . B. CD và MN . C. CD và MP . D. CD và AP .

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét mặt phẳng BCD chứa CD . Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E .

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E .

Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

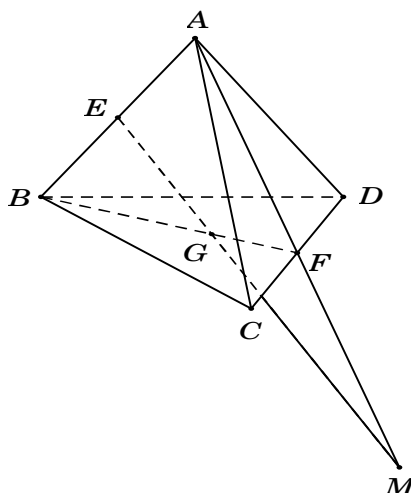
Vậy giao điểm của CD và $mp(MNP)$ là giao điểm E của NP và CD .

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là:

- A. điểm F .
- B. giao điểm của đường thẳng EG và AF .
- C. giao điểm của đường thẳng EG và AC .
- D. giao điểm của đường thẳng EG và CD .

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm tam giác BCD , F là trung điểm của $CD \Rightarrow G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.

Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

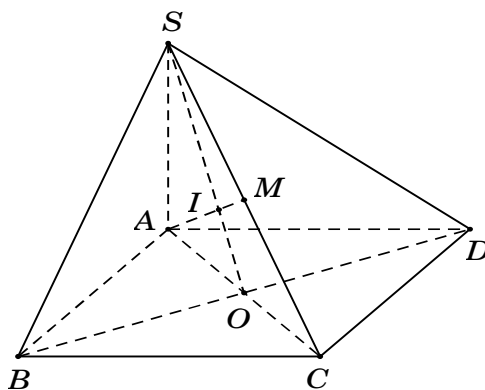
Vậy giao điểm của EG và $mp(ACD)$ là giao điểm $M = EG \cap AF$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD) . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$. B. $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$. C. $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$. D. $IA = 2,5IM$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm của AC .

Nối AM cắt SO tại I mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $I = AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có M, O lần lượt là trung điểm của SC, AC .

Mà $I = AM \cap SO$ suy ra I là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow IA = 2IM$.

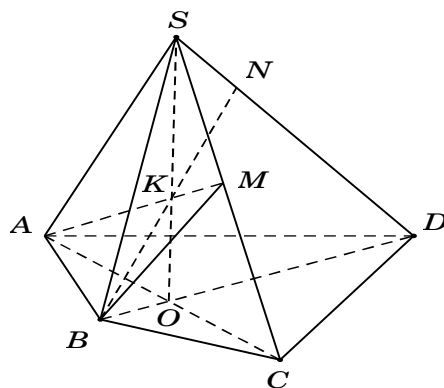
Điểm I nằm giữa A và M suy ra $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{IM}$.

Câu 24: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là:

- A. giao điểm của SD và AB .
 B. giao điểm của SD và AM .
 C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).
 D. giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải

Chọn C



- Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM) .

Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM) .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $K = AM \cap SO$. Ta có:

- $K \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $K \in (SBD)$.
- $K \in AM$ mà $AM \subset (ABM)$ suy ra $K \in (ABM)$.

Suy ra K là điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM) .

Do đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

- Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $N = SD \cap BK$. Ta có:

- $N \in BK$ mà $BK \subset (ABM)$ suy ra $N \in (ABM)$.
- $N \in SD$.

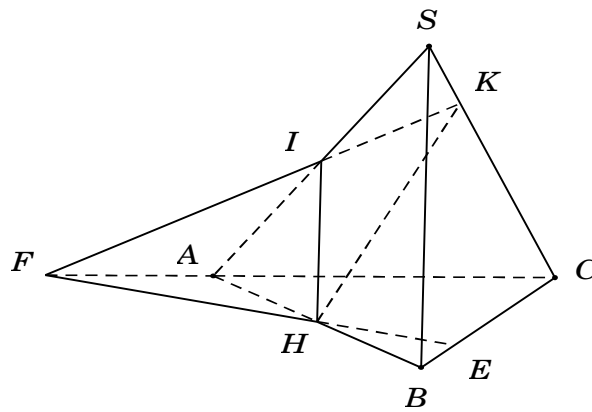
Vậy $N = SD \cap (ABM)$.

Câu 25: Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. E nằm ngoài đoạn BC về phía B .
- B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C .
- C. E nằm trong đoạn BC .
- D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B, E \neq C$.

Lời giải

Chọn D



- Chọn mặt phẳng phụ (ABC) chứa BC .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IHK) .

Ta có H là điểm chung thứ nhất của (ABC) và (IHK) .

Trong mặt phẳng (SAC) , do IK không song song với AC nên gọi $F = IK \cap AC$. Ta có

- $F \in AC$ mà $AC \subset (ABC)$ suy ra $F \in (ABC)$.
- $F \in IK$ mà $IK \subset (IHK)$ suy ra $F \in (IHK)$.

Suy ra F là điểm chung thứ hai của (ABC) và (IHK) .

Do đó $(ABC) \cap (IHK) = HF$.

- Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = HF \cap BC$. Ta có
- $E \in HF$ mà $HF \subset (IHK)$ suy ra $E \in (IHK)$.
- $E \in BC$.

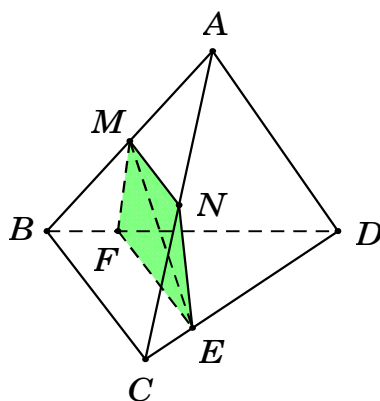
Vậy $E = BC \cap (IHK)$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

- A. Tam giác MNE .
- B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
- C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
- D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF \parallel BC$.

Do đó $MN \parallel EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

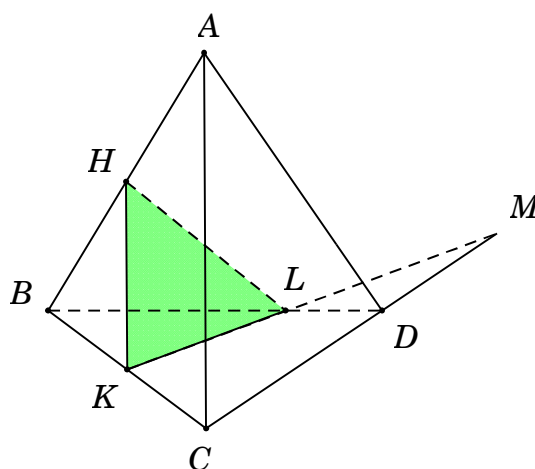
Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD . Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

- A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.
- B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK \parallel MN$.
- C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.
- D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD) .

Trong mặt phẳng (BCD) , do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

Vậy thiết diện là tam giác HKL .

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a ($a > 0$). Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

A. a^2 .

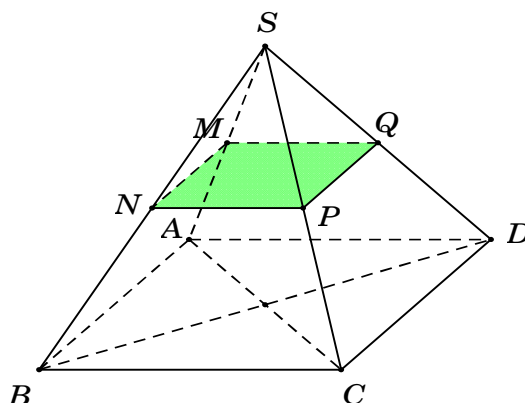
B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{4}$.

D. $\frac{a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm của SD .

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ \parallel AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP \parallel BC$.

Mặt khác $AD \parallel BC$ suy ra $MQ \parallel NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với $mp(MNP)$.

Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

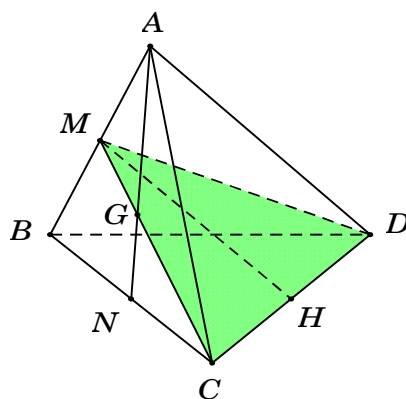
B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M .

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot CD$

Với $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 30: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC ; P là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$.

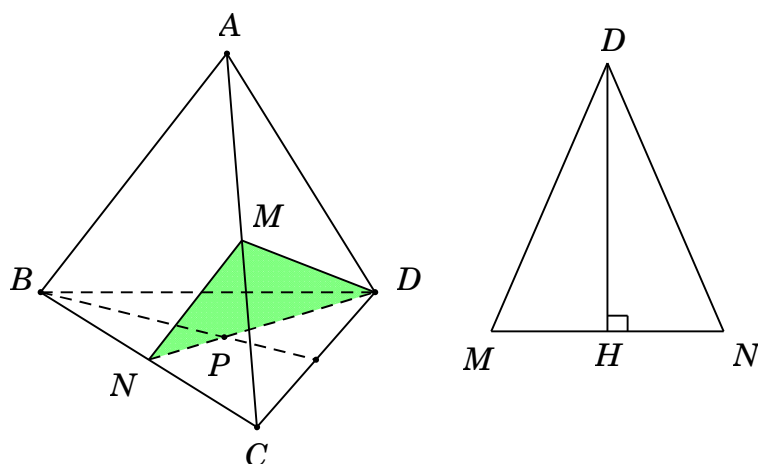
B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC . Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND .

Xét tam giác MND , ta có $MN = \frac{AB}{2} = a$; $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D .

Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

Diện tích tam giác $S_{\triangle MND} = \frac{1}{2}MN \cdot DH = \frac{1}{2}MN \cdot \sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C .

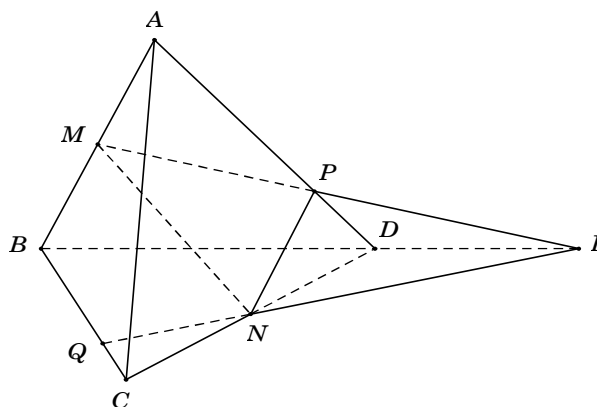
B. I, B, D .

C. I, A, B .

D. I, C, D .

Lời giải

Chọn B



Ta có $(ABD) \cap (BCD) = BD$.

Lại có $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

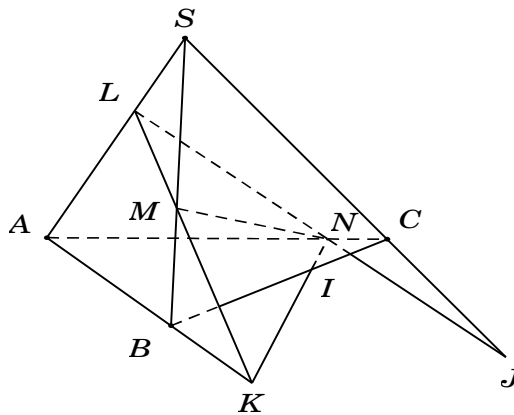
$$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I, B, D \text{ thẳng hàng.}$$

Câu 32: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. K, I, J . B. M, I, J . C. N, I, J . D. M, K, J .

Lời giải

Chọn B



Ta có

- $M \in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC) .
- I là điểm chung của (LMN) và (SBC) .
- J là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

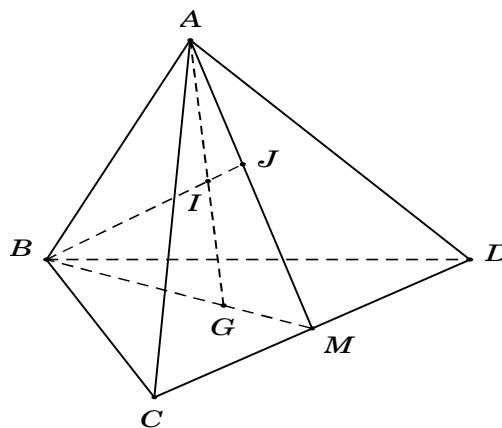
Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC) .

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
 B. A, J, M thẳng hàng.
 C. J là trung điểm của AM .
 D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM \longrightarrow A$ đúng.

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng $\longrightarrow B$ đúng.

Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ) \longrightarrow D$ đúng.

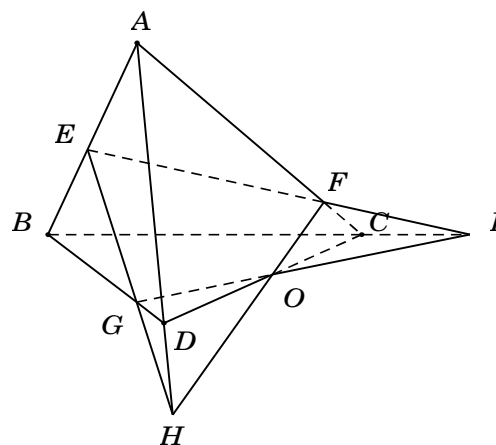
Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM
 $\longrightarrow C$ sai.

Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I , EG cắt AD tại H . Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

- A. CD, EF, EG . B. CD, IG, HF . C. AB, IG, HF . D. AC, IG, BD .

Lời giải

Chọn B



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) ; đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β) .

Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có

- $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.
- $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mà $(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

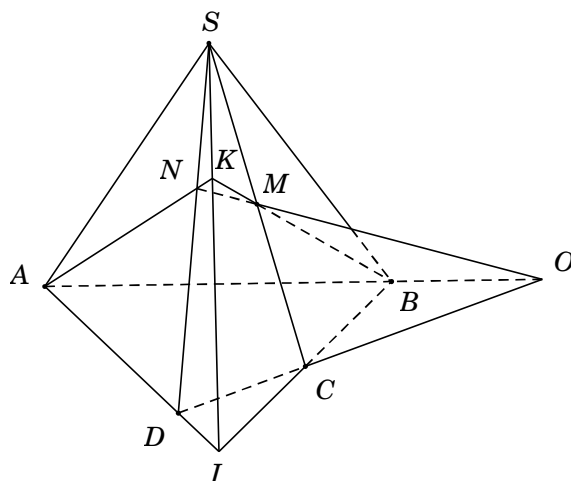
Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.
- B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.
- C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.
- D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = AD \cap BC$. Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $N = AK \cap SD$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) .

Gọi $O = AB \cap CD$. Ta có:

- $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.
- $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra $O \in (SCD)$.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$. (1)

Mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng AB , CD , MN đồng quy.

BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

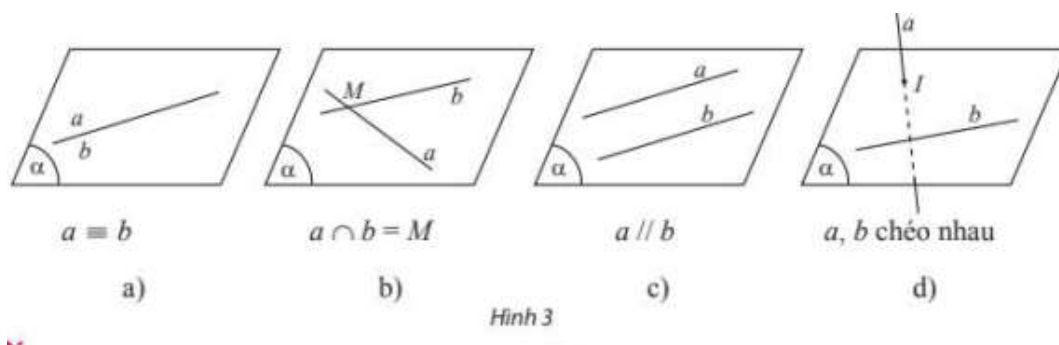
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

-Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b . Khi đó ta nói a và b đồng phẳng. Theo kết quả của hình học phẳng, có ba khả năng sau đây xảy ra:

- Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng b , kí hiệu $a \equiv b$.
- Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói a và b cắt nhau tại M , kí hiệu $a \cap b = M$.
- Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói a và b song song với nhau, kí hiệu $a // b$.

- Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b . Khi đó ta nói đường thẳng a và b chéo nhau hay a chéo với b .



Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chú ý:

a) Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.

b) Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $mp(a, b)$.

2. Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

Định lý 1

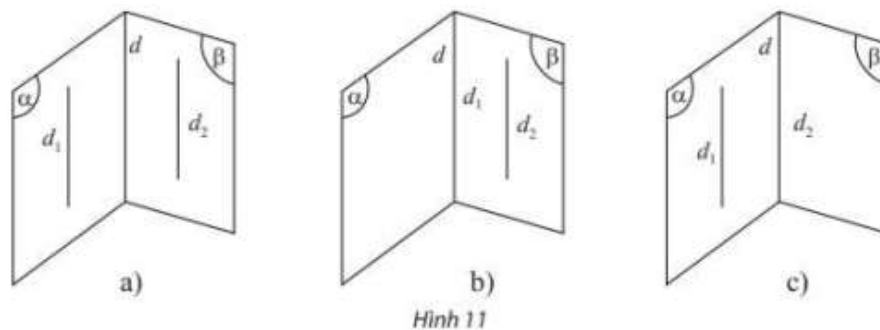
Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Định lý 2

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Định lý 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Chú ý: Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a // b // c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy

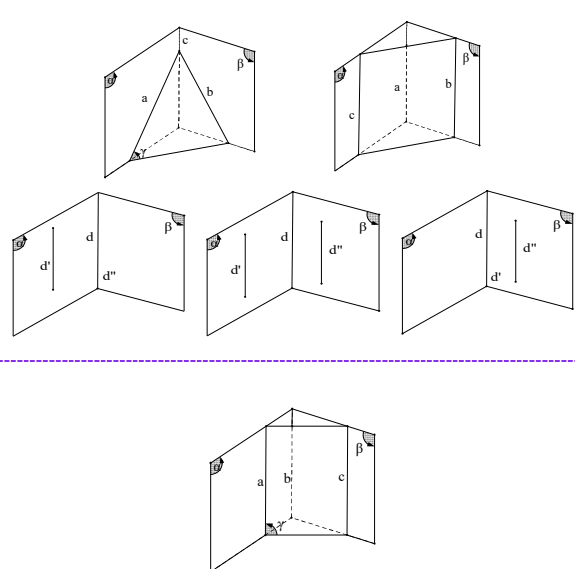
1. Phương pháp

- Nếu ba mp phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

❖ **Hệ quả:** Nếu hai mp phân biệt lần lượt chứa hai đt song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đt đó hoặc trùng với một trong hai đt đó.

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \neq b \\ a // c \Rightarrow a // b \\ b // c \end{cases}$$



2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R, S là bốn điểm lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA. CMR nếu bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì:

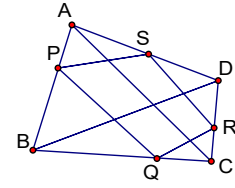
a) PQ, SR, AC hoặc song song hoặc đồng quy.

b) PS, RQ, BD hoặc song song hoặc đồng qui.

Lời giải

Theo định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng.

- a) Nếu $PQ \parallel SR$ thì $PQ \parallel SR \parallel AC$.
b) Nếu PQ cắt SR tại I thì AC đi qua I.



Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC . Trên cạnh PD lấy điểm P sao cho $DP = 2PB$.

- a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng $(ABD), (BCD)$.
b) Trên cạnh AD lấy điểm Q sao cho $DQ = 2QA$. Chứng minh: PQ song song với mặt phẳng (ABC) , ba đường thẳng DC, QN, PM đồng quy.

Lời giải

1) Do đó:

$$\begin{cases} MN \subset (MNP) \\ AB \subset (ABD) \Rightarrow (MNP) \cap (ABD) = Px \parallel AB \parallel MN \\ MN \parallel AB \end{cases}$$

Xác định giao tuyến của (MNP) và (BCD) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (BCD)$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MNP) \cap (BCD)$$

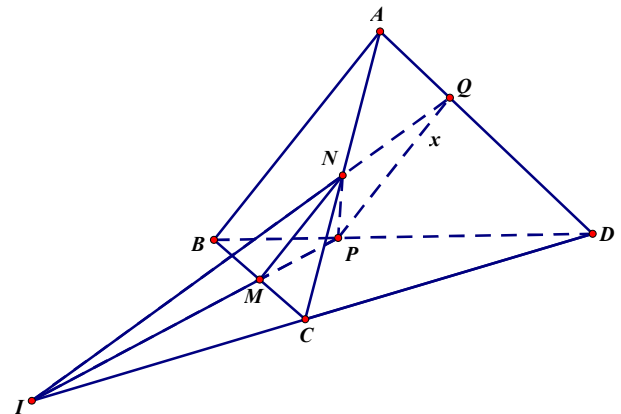
Vậy $(MNP) \cap (BCD) = MP$ là giao tuyến cần tìm

Chứng minh PQ song song với mặt phẳng (ABC) :

$$\text{Vì } \frac{DQ}{QA} = \frac{DP}{PB} \text{ nên } PQ \parallel AB. \text{ Do đó: } \begin{cases} PQ \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel (ABC)$$

2) Ta có: $Q \in (MNP)$. Do đó:

- $(MNP) \cap (ACD) = QN$
- $(MNP) \cap (BCD) = PM$
- $(ACD) \cap (BCD) = CD$



- Vì $\frac{CM}{MB} \neq \frac{DP}{PB}$ nên DC cắt PM tại I .
- Vậy DC, QN, PM đồng quy

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và SB .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)
- Chứng minh: ON song song với mặt phẳng (SAD)
- Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC)

Lời giải

- Xét 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Ta có: S là điểm chung của 2 mặt phẳng

Mặt khác:

$$\begin{cases} AB // CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S_x qua S và song song với AB và CD .

- Xét tam giác SBD , ta có:

$ON // SD$ (Vì O, N lần lượt là trung điểm BD và SB)

Mà $SD \subset (SAD)$

Suy ra ON song song mặt phẳng (SAD)

- Xét mặt phẳng $(ABCD)$

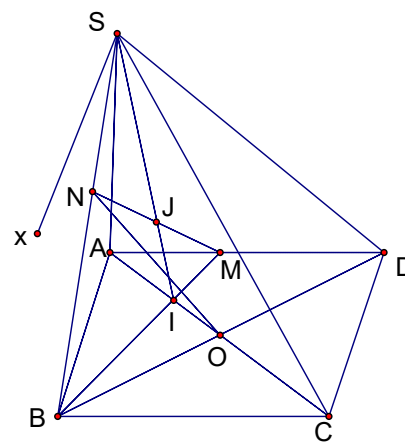
Gọi I là giao điểm của AC và BM

Xét 2 mặt phẳng (SAC) và (SBM)

Ta có: $(SAC) \cap (SBM) = SI$

Gọi J là giao điểm của SI và MN

Khi đó:



$$\begin{cases} J \in SI \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC) \\ J \in MN \end{cases}$$

Vậy J là giao điểm của MN và mặt phẳng (SAC)

Dạng 2. Tìm giao điểm và thiết diện của hình chóp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC, gọi M, P và I lần lượt là trung điểm của AB, SC và SB. Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q.

- Chứng minh đường thẳng BC song song với mặt phẳng (IMP) .
- Xác định thiết diện của (α) và hình chóp. Thiết diện này là hình gì?
- Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ) .

Lời giải

a) Có IP là đường trung bình của $\triangle SBC \Rightarrow IP \parallel BC$

mà $IP \subset (IMP) \Rightarrow BC \parallel (IMP)$.

b) Có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ (ABC) \supset AC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel AC, Q \in BC$.

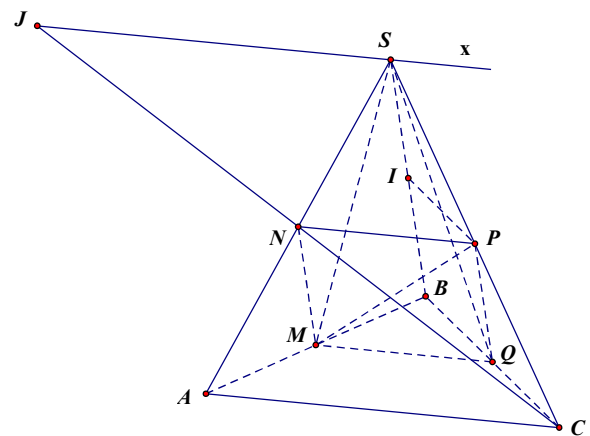
Có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (SAC) \supset AC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = PN \parallel AC, N \in SA$.

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành MNPQ. Thật vậy dễ dàng chứng minh Q, N lần lượt là trung điểm của BC và SA. Do đó $\overline{MQ} = \overline{NP} = \frac{1}{2} \overline{AC}$

c) Chọn mặt phẳng (SAC) chứa NC. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SMQ) :

Có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMQ) \\ AC \parallel MQ; AC \subset (SAC), MQ \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SMQ) = Sx \parallel AC \parallel MQ$



Trong mp(SAC) gọi $J = CN \cap Sx$, có $\begin{cases} J \in CN \\ J \in Sx \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow J = CN \cap (SMQ)$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC.

- Tìm giao tuyến của (α) với mp(ABCD).
- Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mp(α).
- Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng(α).

Lời giải

$$a) \text{ Có } \begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AC \subset (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = NE \parallel AC; E \in AD.$$

$$b) \text{ Có MN là đường trung bình của } \Delta SCD \Rightarrow MN \parallel SD.$$

Trong mp(ABCD) gọi $F = BD \cap NE$.

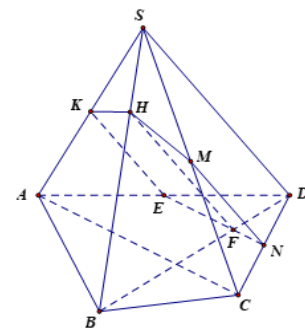
$$\text{Có } \begin{cases} F \in (\alpha) \cap (SBD) \\ MN \parallel SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Fx \parallel MN \parallel SD$$

$$\text{Trong mp(SBD) gọi } H = Fx \cap SB, \text{ vì } \begin{cases} H \in SB \\ H \in Fx \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow H = SB \cap (\alpha).$$

$$c) \text{ Có } \begin{cases} E \in (\alpha) \cap (SAD) \\ MN \parallel SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = EK \parallel SD; K \in SA.$$

Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác MNEKH.



Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).
- Tìm giao điểm của SB và (IMN).
- Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp S.ABCD.

Lời giải

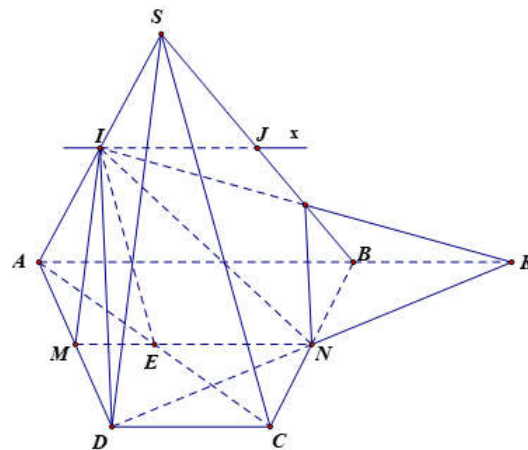
a) Có $I \in (IMN) \cap (SAC)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi

$$E = MN \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \subset (IMN) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E \in (IMN) \cap (SAC) \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $(IMN) \cap (SAC) = EI$.



b) Có MN là đường trung bình của hình thang ABCD $\Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$.

$$\text{Có } \begin{cases} I \in (IMN) \cap (SAB) \\ MN \parallel AB \\ MN \subset (IMN); AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (IMN) \cap (SAB) = Ix \parallel MN \parallel AB.$$

c) Trong mp(SAB) gọi $J = Ix \cap SB \Rightarrow \begin{cases} J \in SB \\ J \in Ix \subset (IMN) \end{cases} \Rightarrow J = SB \cap (IMN).$

$$I \in (IDN) \cap (SAB) \text{ (3)}$$

$$\text{Trong mp(ABCD) gọi } K = DN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} K \in DN \subset (IDN) \\ K \in AB \subset (SAB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in (IDN) \cap (SAB) \text{ (4)}.$$

Từ (3) và (4) suy ra $(IDN) \cap (SAB) = IK$

Trong mp(SAB) gọi $P = IK \cap SB \Rightarrow$ thiết diện cần tìm là tứ giác MNPI.

Câu 4: Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và N là trung điểm SA .

a) Tìm giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD)

b) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (NBC) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải

1) Gọi O là giao điểm giữa AC và BD . Khi đó:

$$\begin{cases} O \in AC \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

Vậy O là giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD)

2) Ta có:

$$+ (NBC) \cap (ABCD) = BC$$

$$+ (NBC) \cap (SBC) = BC$$

$$+ (NBC) \cap (SAB) = NB$$

$$+ \begin{cases} N \in (NBC) \\ N \in (SAD) \end{cases} \quad (1)$$

$$(NBC) \supset BC \parallel AD \subset (SAD) \quad (2)$$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow (NBC) \cap (SAD) = NM \parallel AD \parallel BC$

$$+ (NBC) \cap (SCD) = MC$$

Vậy thiết diện là hình thang $MNCD$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hai đường thẳng song song a và b . Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

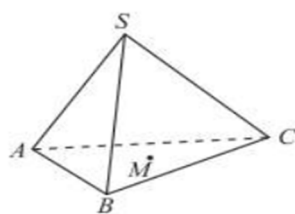
a) Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b .

b) Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b .

Lời giải

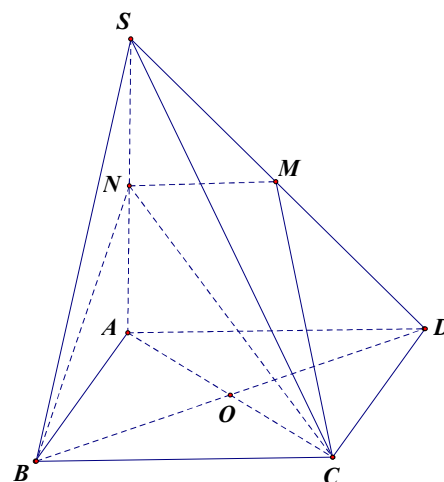
2 mệnh đề trên đều sai.

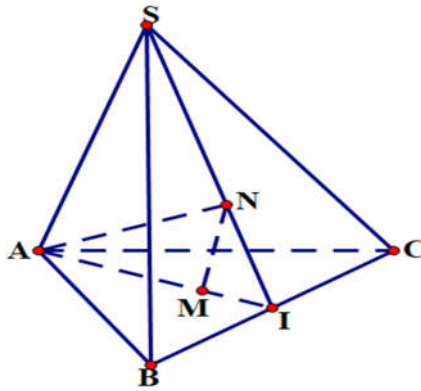
Bài 2. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (Hình 17). Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) .



Hình 17

Lời giải





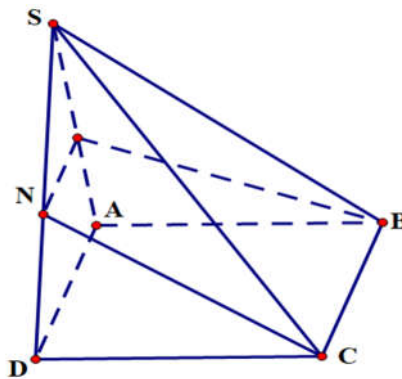
Gọi I là giao điểm của AM và BC . Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ đường thẳng d song song SA cắt SI tại N .

Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) là đường thẳng đi qua C và song song với SA và MN .

Bài 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Lời giải

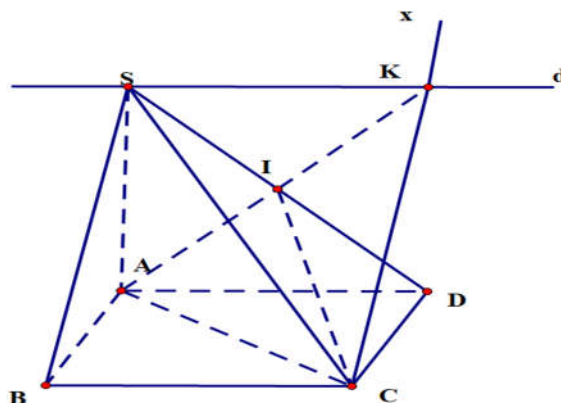


- a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) là đường thẳng đi qua S và song song với AB và CD .
- b) Giao tuyến của (BCM) với (SAD) là đường thẳng MN song song với BC.

Do đó $CBMN$ là hình thang.

Bài 4. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Lời giải



Mặt phẳng (SBC) và (SAD) giao nhau tại đường thẳng d đi qua S và song song với BC . Trong mặt phẳng (SAD) , kéo dài AI cắt d tại K .

$$AI \subset (AIC) \text{ nên } K \in (ACI)$$

Ta có C và K là 2 điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (CIA) nên CK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (CIA) .

Trong mặt phẳng $(SADK)$ ta có $AD \parallel SK$, I là trung điểm của SD nên $AD = SK$. Mà $AB = BD$. Suy ra $SK = BC$.

Ta có $SK \parallel BC, SK = BC$ nên $SBCK$ là hình bình hành.

Suy ra $CK \parallel SB$ hay $Cx \parallel SB$.

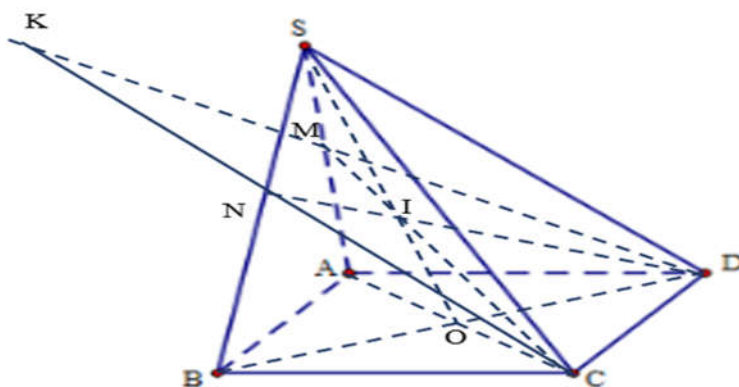
Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .

b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh

$$SK \parallel BC \parallel AD.$$

Lời giải



a) Trong mặt phẳng (SAC) , gọi M là giao của CI và SA . $CI \subset (ICD)$ nên $M \in (ICD)$. Trong mặt phẳng (SBD) , gọi N là giao của DI và SB . $DI \subset (ICD)$ nên $N \in (ICD)$.

Ta có MN là giao của (KCD) và (SAB) . Mà $AB // CD$ nên $MN // CD$.

Theo định lý Menelaus, trong tam giác SOA , ta có: $\frac{SM}{MA} \cdot \frac{AC}{CO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1$.

Hay $\frac{SM}{MA} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Suy ra: $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$ Nên $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

Ta có $MN // AB$ nên $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB}$.

Vậy $MN = \frac{1}{3}a$.

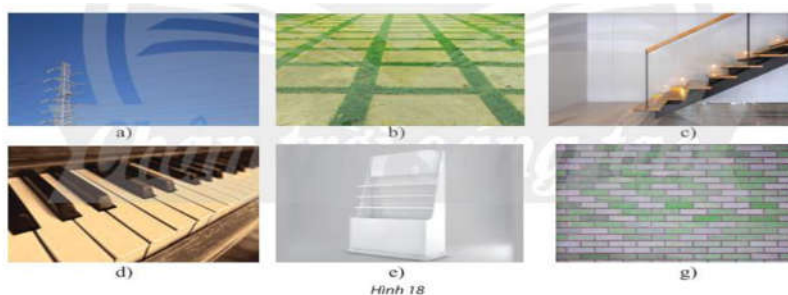
b) $K \in CN; CN \subset (SBC)$ nên $K \in (SBC)$.

$K \in DM; DM \subset (SAD)$ nên $K \in (SAD)$.

Ta có S và K là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

Mà $AD // BC$ nên $SK // BC // AD$.

Bài 6. Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



Lời giải

Hình a: Các dây điện song song với nhau.

Hình b: Các mép của viên gạch lát song song với nhau.

Hình c: Các mép của bậc thang song song với nhau.

Hình d: Các mép của phím đàn piano song song với nhau.

Hình e: Các mép của tầng ngăn kệ song song với nhau.

Hình g: Các mép của viên gạch lát song song với nhau.

Một số ví dụ khác về đường thẳng song song: các gáy của quyển sách trong chồng sách, các mép của chân bàn thẳng đứng,...

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

- C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải**Chọn A**

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải**Chọn D**

- A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.
- B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải**Chọn C**

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải**Chọn B**

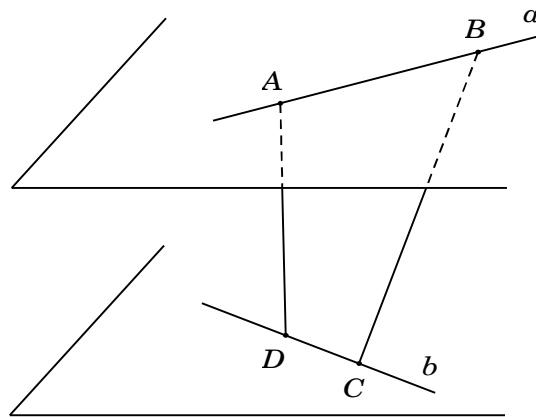
- A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.
- C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.
- D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

- A. Có thể song song hoặc cắt nhau. B. Cắt nhau.
C. Song song với nhau. D. Chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow a$ và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

- Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a; b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I .
- Nếu $AD \parallel BC \Rightarrow a$ và b đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α) , (β) , (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 :

- A. Đôi một cắt nhau. B. Đôi một song song.
C. Đồng quy. D. Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

Chọn D

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c , biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c :

- A. Trùng nhau hoặc chéo nhau. B. Cắt nhau hoặc chéo nhau.
C. Chéo nhau hoặc song song. D. Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.
B. Nếu c cắt a thì c cắt b .
C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.
D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

Lời giải

Chọn B

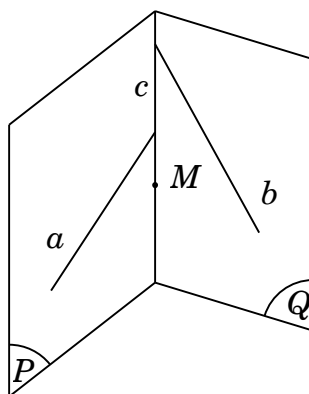
Nếu c cắt a thì c cắt b hoặc c chéo b .

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b . Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b ?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A



Gọi (P) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng a và M ; (Q) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng b và M .

Giả sử c là đường thẳng qua M cắt cả a và b .

$$\Rightarrow \begin{cases} c \in (P) \\ c \in (Q) \end{cases} \Rightarrow c = (P) \cap (Q).$$

Vậy chỉ có 1 đường thẳng qua M cắt cả a và b .

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a .

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c . Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c .

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d .

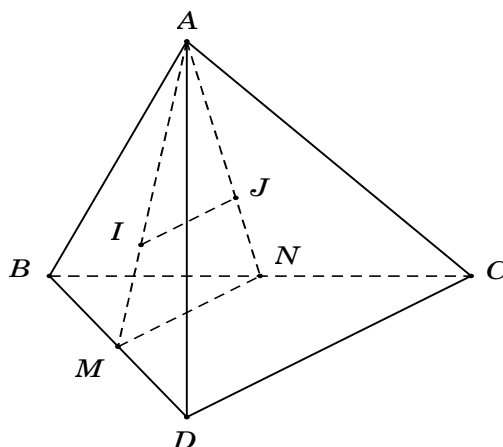
Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c .

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. IJ song song với CD .
 B. IJ song song với AB .
 C. IJ chéo CD .
 D. IJ cắt AB .

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

$$\Rightarrow MN \text{ là đường trung bình của tam giác } BCD \Rightarrow MN // CD \quad (1)$$

$$I, J \text{ lần lượt là trọng tâm các tam giác } ABC \text{ và } ABD \Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN \quad (2)$$

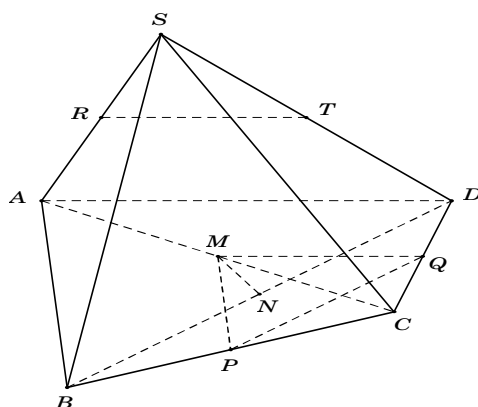
Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- A. MP và RT . B. MQ và RT . C. MN và RT . D. PQ và RT .

Lời giải

Chọn B



Ta có: M, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD

$$\Rightarrow MQ \text{ là đường trung bình của tam giác } CAD \Rightarrow MQ \parallel AD \quad (1)$$

Ta có: R, T lần lượt là trung điểm của SA, SD

$$\Rightarrow RT \text{ là đường trung bình của tam giác } SAD \Rightarrow RT \parallel AD \quad (2)$$

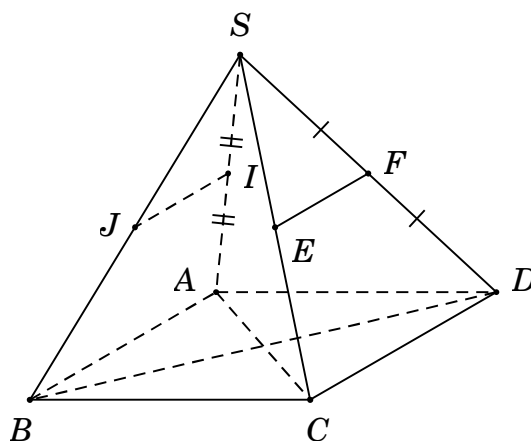
Từ (1), (2) suy ra: $MQ \parallel RT$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A. EF . B. DC . C. AD . D. AB .

Lời giải

Chọn C



Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).

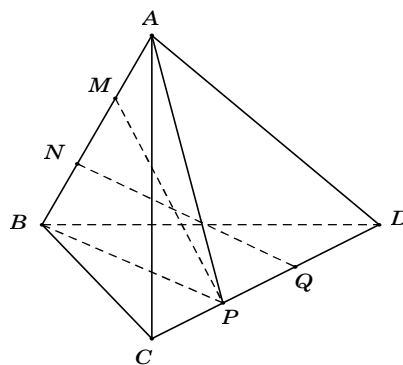
Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\longrightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .

- A. $MP \parallel NQ$. B. $MP \equiv NQ$.
C. MP cắt NQ . D. MP, NQ chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Xét mặt phẳng (ABP) .

Ta có: M, N thuộc $AB \Rightarrow M, N$ thuộc mặt phẳng (ABP) .

Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.

Mà: $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d qua S và song song với BC .

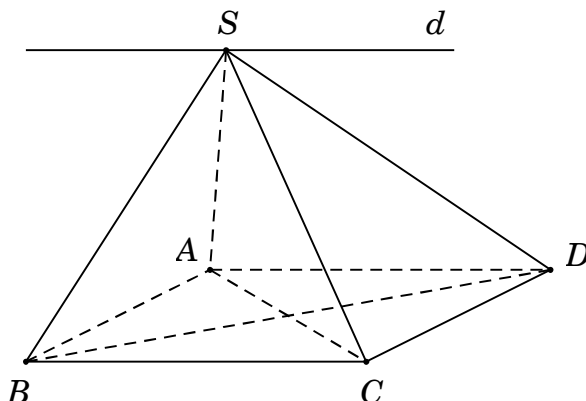
B. d qua S và song song với DC .

C. d qua S và song song với AB .

D. d qua S và song song với BD .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = S \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \longrightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC \text{ (với } d \equiv Sx \text{)}.$$

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

A. qua I và song song với AB .

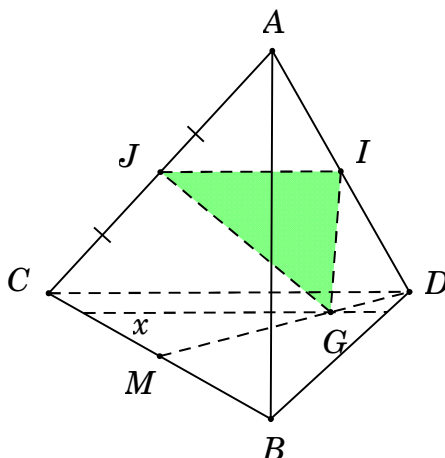
B. qua J và song song với BD .

C. qua G và song song với CD .

D. qua G và song song với BC .

Lời giải

Chọn C



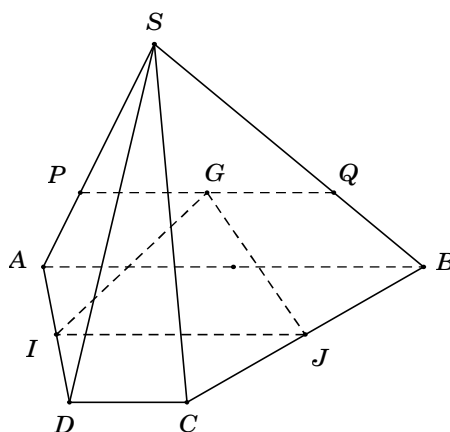
$$\text{Ta có } \begin{cases} (GIJ) \cap (BCD) = G \\ IJ \subset (GIJ), CD \subset (BCD) \\ IJ \parallel CD \end{cases} \longrightarrow (GIJ) \cap (BCD) = Gx \parallel IJ \parallel CD.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- A. SC .
- B. đường thẳng qua S và song song với AB .
- C. đường thẳng qua G và song song với DC .
- D. đường thẳng qua G và cắt BC .

Lời giải

Chọn C



Ta có: I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC

$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD$.

Gọi $d = (SAB) \cap (IJG)$

Ta có: G là điểm chung giữa hai mặt phẳng (SAB) và (IJG)

Mặt khác: $\begin{cases} (SAB) \supset AB; (IJG) \supset IJ \\ AB \parallel IJ \end{cases}$

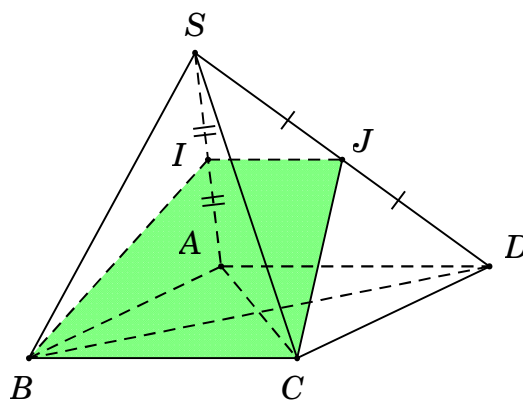
$\Rightarrow$ Giao tuyến d của (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với AB và IJ .

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

- A. Tam giác IBC .
- B. Hình thang $IBCI$ (J là trung điểm SD).
- C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
- D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \begin{cases} (IBC) \cap (SAD) = I \\ BC \subset (IBC), AD \subset (SAD) \longrightarrow (IBC) \cap (SAD) = Ix \parallel BC \parallel AD \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

Trong mặt phẳng (SAD) : $Ix \parallel AD$, gọi $Ix \cap SD = J \longrightarrow IJ \parallel BC$

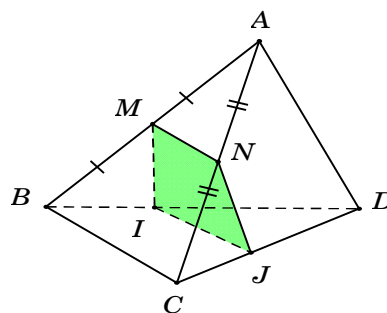
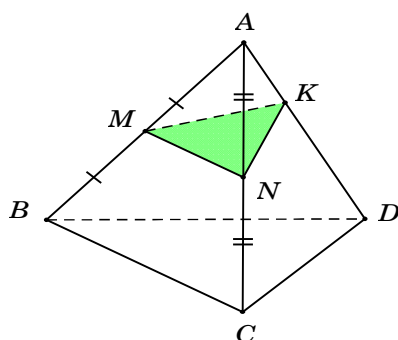
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình thang $IBCJ$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC . Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (T) là hình chữ nhật.
- B. (T) là tam giác.
- C. (T) là hình thoi.
- D. (T) là tam giác; hình thang hoặc hình bình hành.

Lời giải

Chọn D



Trường hợp $(\alpha) \cap AD = K$

$\longrightarrow (T)$ là tam giác MNK . Do đó A và C sai.

Trường hợp $(\alpha) \cap (BCD) = IJ$, với $I \in BD, J \in CD$; I, J không trùng D .

$\longrightarrow (T)$ là tứ giác. Do đó B đúng.

Câu 20: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S , $SB = 8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:

A. $6\sqrt{2}$.

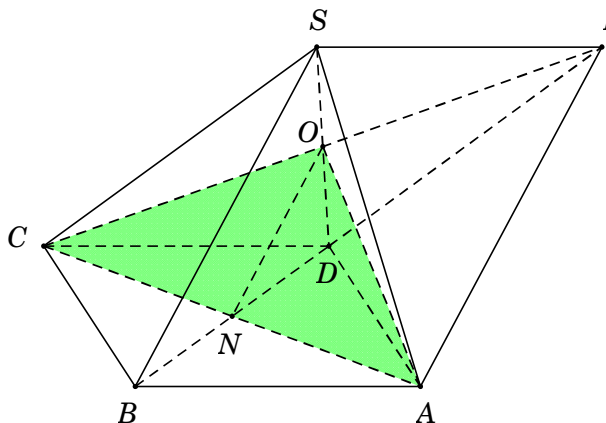
B. $8\sqrt{2}$.

C. $10\sqrt{2}$.

D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = SD \cap CI$; $N = AC \cap BD$.

$\Rightarrow O, N$ lần lượt là trung điểm của $DS, DB \Rightarrow ON = \frac{1}{2}SB = 4$.

Thiết diện của $mp(ACI)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác $\triangle OCA$.

Tam giác $\triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow SC = SA \Rightarrow \triangle SDC = \triangle SDA$

$\Rightarrow CO = AO$ (cùng là đường trung tuyến của 2 định tương ứng) $\Rightarrow \triangle OCA$ cân tại O

$\Rightarrow S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2}ON.AC = \frac{1}{2}.4.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành.

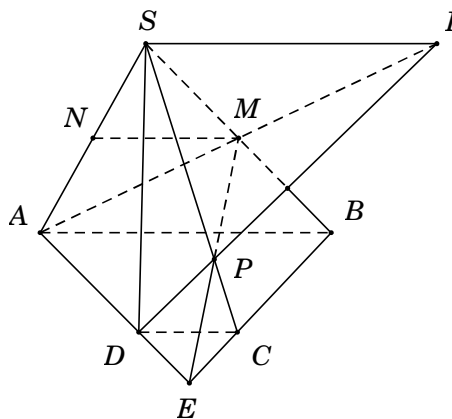
B. Hình chữ nhật.

C. Hình vuông.

D. Hình thoi.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E = AD \cap BC$, $P = NE \cap SC$. Suy ra $P = SC \cap (AND)$.

Ta có

- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) ;
- $I = DP \cap AN \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$. Mà $AB \parallel CD \longrightarrow SI \parallel AB \parallel CD$.

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB và chứng minh được cũng là đường trung bình của tam giác SAI nên suy ra $SI = AB$.

Vậy $SABI$ là hình bình hành.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD .

Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

A. 2.

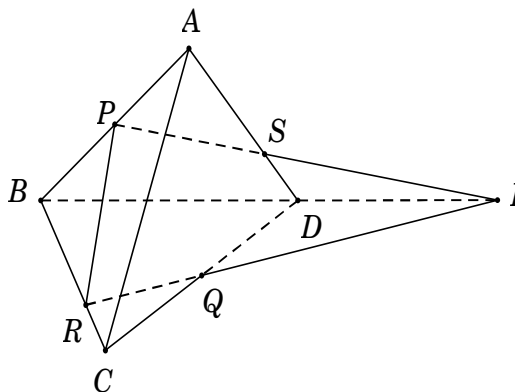
B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ . Nối P với I , cắt AD tại S .

Xét tam giác BCD bị cắt bởi IR , ta có $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}$.

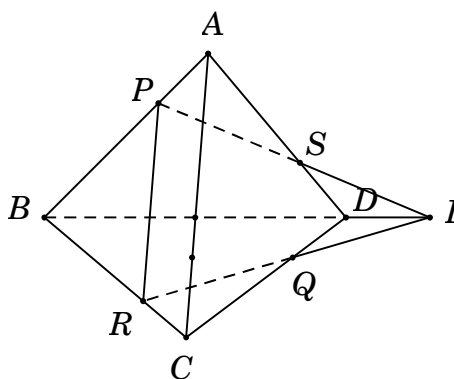
Xét tam giác ABD bị cắt bởi PI , ta có $\frac{AS}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 2$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC . Cho $PR \parallel AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S . Chọn khẳng định đúng?

- A. $AD = 3DS$. B. $AD = 2DS$. C. $AS = 3DS$. D. $AS = DS$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ . Nối P với I , cắt AD tại S .

Ta có $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1$ mà $\frac{CQ}{QD} = 2$ suy ra $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{RC}{BR}$.

Vì PR song song với AC suy ra $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB}$.

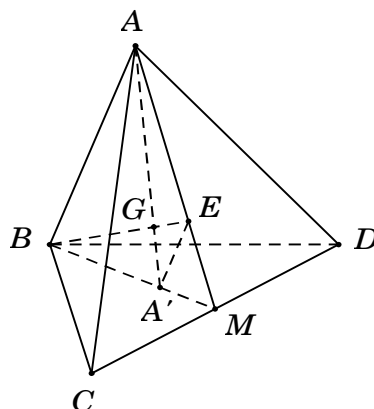
Lại có $\frac{SA}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 2 \longrightarrow AD = 3DS$.

Câu 24: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD . Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

- A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trọng tâm của tam giác ACD , M là trung điểm của CD .

Nối BE cắt AA' tại G suy ra G là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác MAB , có $\frac{ME}{MA} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}$ suy ra $A'E \parallel AB \Rightarrow \frac{A'E}{AB} = \frac{1}{3}$.

Khi đó, theo định lí Talet suy ra $\frac{A'E}{AB} = \frac{A'G}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = 3$.

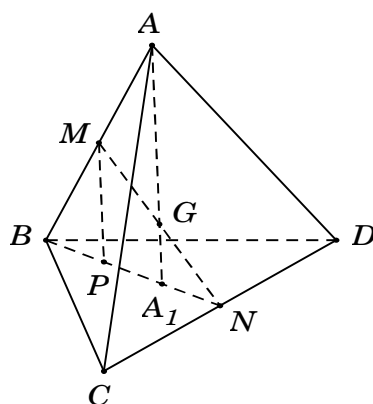
Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD) .

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD .
- B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .
- C. A_1 là trực tâm tam giác BCD .
- D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD .

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (ABN) cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến BN .

Mà $AG \subset (ABN)$ suy ra AG cắt BN tại điểm A_1 .

Qua M dựng $MP \parallel AA_1$ với $M \in BN$.

Có M là trung điểm của AB suy ra P là trung điểm $BA_1 \Rightarrow BP = PA_1$ (1).

Tam giác MNP có $MP \parallel GA_1$ và G là trung điểm của MN .

$\Rightarrow A_1$ là trung điểm của $NP \Rightarrow PA_1 = NA_1$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $BP = PA_1 = A_1N \Rightarrow \frac{BA_1}{BN} = \frac{2}{3}$ mà N là trung điểm của CD .

Do đó, A_1 là trọng tâm của tam giác BCD .

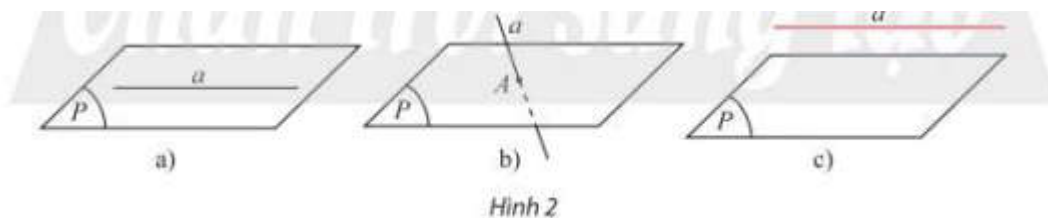
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Khi đó có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** a và (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên (Hình 2a), suy ra mọi điểm thuộc a đều thuộc (P) , ta nói a nằm trong (P) , kí hiệu $a \subset (P)$.
- **Trường hợp 2:** a và (P) có một điểm chung duy nhất A (Hình 2b), ta nói a cắt (P) tại A , kí hiệu $a \cap (P) = A$.
- **Trường hợp 3:** a và (P) không có điểm chung nào (Hình 2c), ta nói a song song với (P) , kí hiệu $a // (P)$.

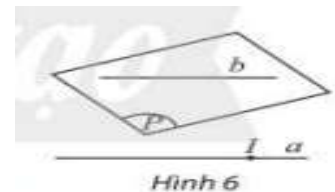


Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lý 1

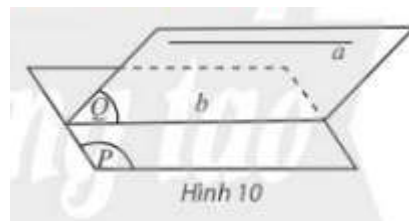
Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P) .



3. Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

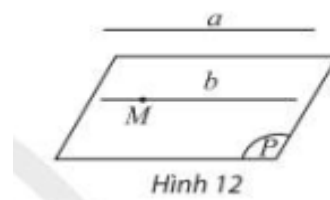
Định lý 2

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a , cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b .



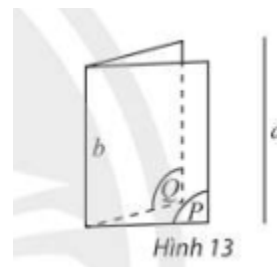
Hệ quả 1

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P) .



Hệ quả 2

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Mặt phẳng đi qua một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường còn lại

Định lý 3

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a , có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy

1. Phương pháp

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Nếu không có sẵn đường thẳng b trong mặt phẳng (P) thì ta tìm đường thẳng b bằng cách chọn một mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) , giao tuyến của (P) và (Q) chính là đường thẳng b cần tìm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$.

- Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .
- Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF . Chứng minh $GG' \parallel (DCEF)$.

Giải

a. Ta có OO' là đường trung bình của tam giác ACE và tam giác BDF nên: $OO' \parallel CE$ và $OO' \parallel DF$.

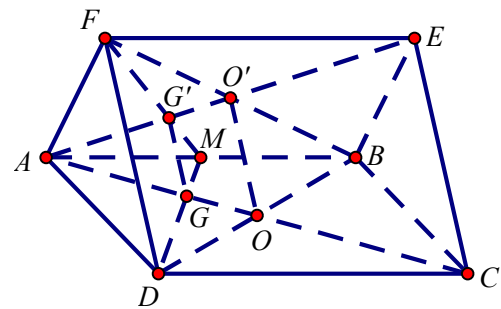
Mà $CE \subset (BCE)$, $DF \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (BCE)$ và $OO' \parallel (ADF)$.

b. Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có:

$$\frac{AG}{AO} = \frac{AG'}{AO'} = \frac{2}{3}$$

Vậy $GG' \parallel OO'$ Cd $OO' \parallel CE$ nên $GG' \parallel CE$.

Mà $CE \subset (CDEF)$ nên $GG' \parallel (DCEF)$.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD . M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

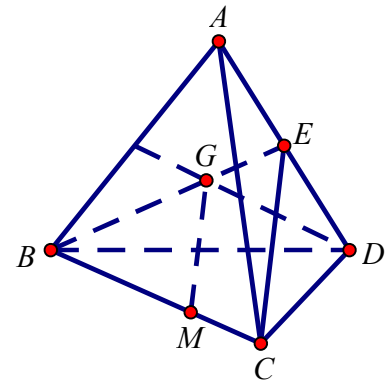
Giải

Gọi E là trung điểm của AD . Ta có: $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ (do G là trọng tâm của tam giác ABD).

$$\text{Mà } \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \text{ (do } MB = 2MC \text{) nên } \frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC}.$$

Suy ra $MG \parallel CE$.

Mà $CE \subset (ACD)$ do đó $MG \parallel (ACD)$.



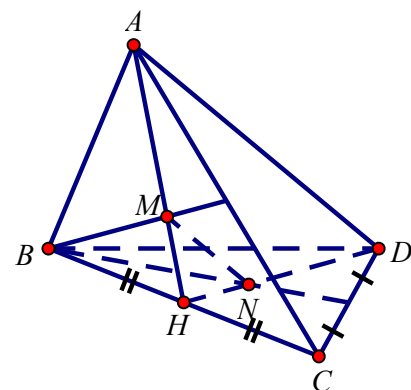
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD . Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Giải

Gọi H là trung điểm của BC , ta có: $M \in AH$, $N \in DH$. Do đó:

$$\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm tam giác)} \Rightarrow MN \parallel AD.$$

Như vậy:



$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD)$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD)$$

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Giải

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{array} \right\} \Rightarrow MQ \parallel AB \quad (1)$$

Tương tự, ta có: $NP \parallel AB$
(2)

$$\left. \begin{array}{l} CD \parallel (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel CD \quad (3)$$

Tương tự, ta có: $MN \parallel CD$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra: $MQ \parallel NP$ (5)

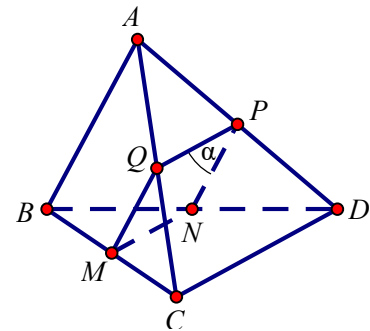
Từ (3) và (4) suy ra: $PQ \parallel MN$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra MNPQ là hình bình hành.

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

Giải



a. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} FG \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow FG \parallel (SAD)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $FG \parallel (SBC)$

b. Gọi $(EFG) \cap SD = H$. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (ABCD) \cap (EFG) = FG \\ (ABCD) \cap (SAD) = AD \\ (SAD) \cap (EFG) = EH \\ FG \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow EH \parallel AD \parallel FG$$

Suy ra H là trung điểm của SD.

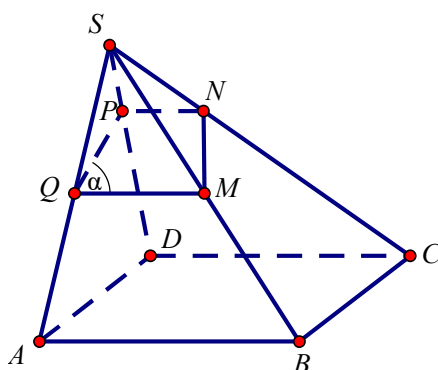
Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} GH \parallel SC \text{ (tính chất đường trung bình)} \\ HG \subset (EFG) \end{array} \right\} \Rightarrow SC \parallel (EFG).$$

Tương tự, ta có: $SB \parallel (EFG)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB, song song với cạnh AB, cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N. Hãy xác định hình tính của tứ giác MNPQ?

Lời giải



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\left. \begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow DC \parallel QM^{(1)} (*) \\ QM \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow DC // (\alpha)$$

Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} DC // (\alpha) \\ PN = (\alpha) \cap (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PN // DC \quad (2)$$

Từ (*) và (2) suy ra MNPQ là hình bình thang.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng

1. Phương pháp

Ngoài hai cách đã đề cập ở Bài 1 và Bài 2 ta có hai cách sau để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cách 1. Dùng định lí 2.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Cách 2. Dùng hệ quả 2.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel a$$

Tìm thiết diện là tìm các đoạn giao tuyến theo phương pháp tìm giao tuyến được nêu ở trên, cho đến khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

- Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $SB \parallel (OMN)$, $SC \parallel (OMN)$.
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN). Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có $MN \parallel AD$ (MN là đường trung bình của tam giác SAD) và $AD \parallel BC$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành), suy ra $MN \parallel BC$.

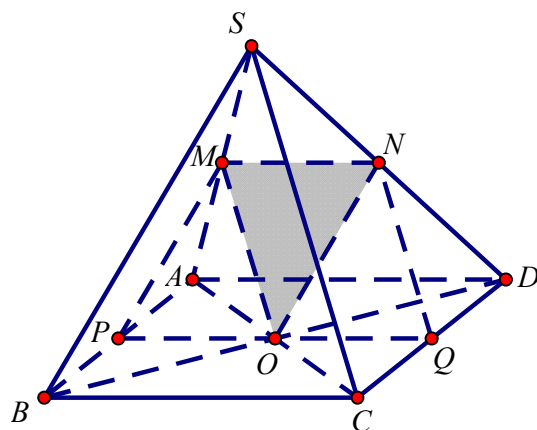
Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta có: $ON \parallel SB$ (ON là đường trung bình của tam giác SBD) nên $ON \subset (OMN)$.

Do đó: $SB \parallel (OMN)$.

Ta có $OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của ΔSAC) và $OM \subset (OMN)$.

Vậy $SC \parallel (OMN)$.



b. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Từ đó có: $PQ \parallel AD$, suy ra $PQ \parallel MN$.

Vậy MN và PQ đồng phẳng, nghĩa là $(OMN) \equiv (MNPQ)$.

Ta có thiết diện do $mp(OMN)$ cắt hình chóp là hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$).

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

a. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .

b. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có:

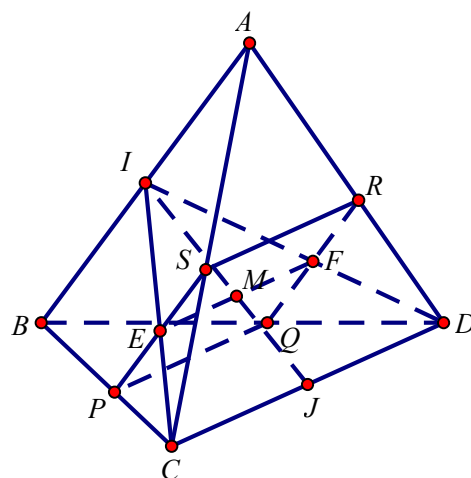
$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (P) \cap (ICD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ICD) = Mx \parallel CD.$$

Trong $mp(ICD)$ ta có Mx cắt IC tại E và cắt ID tại F .

Suy ra $EF = (P) \cap (ICD)$.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ E \in (P) \cap (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Ey \parallel AB.$$



Trong mp(ABC) ta có Ey cắt BC tại P và cắt AC tại S.

Suy ra $PS = (P) \cap (ABC)$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ F \in (P) \cap (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABD) = F \parallel AB.$$

Trong mp(ABD) ta có Ft cắt BD tại Q và cắt AD tại R.

Suy ra $QR = (P) \cap (ABD)$.

Khi đó: $PQ = (P) \cap (CBD)$ và $RS = (P) \cap (ACD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác PQRS.

Theo chứng minh trên ta có thể suy ra được: $PS \parallel AB, QR \parallel AB$ nên $PS \parallel QR$.

(1)

Mặt khác, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ RS = (P) \cap (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel CD \\ PQ = (P) \cap (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

$$\left. \begin{array}{l} RS \parallel CD \\ PQ \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel PQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện PQRS là hình bình hành.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC .

a) Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SBC), (SCD), (SAC)$.

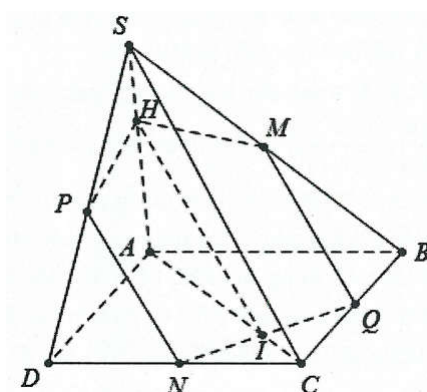
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) .

Lời giải

a) Trong mặt phẳng (SBC) , từ M kẻ đường thẳng song song với SC cắt BC tại Q .

Trong mặt phẳng (SCD) , từ N kẻ đường thẳng song song với SC cắt SD tại P .

Khi đó giao tuyến của (P) với (SBC) và (SCD) lần lượt là MQ và NP .



Gọi $I = AC \cap NQ$. Từ I kẻ đường thẳng song song với SC cắt SA tại H .

Khi đó $(P) \cap (SAC) = IH$.

b) Thiết diện của mặt phẳng (P) với khối chóp là ngũ giác $MQNPH$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC , H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAC, SBC .

a) Chứng minh $AB // (SMN)$, $HK // (SAB)$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (CHK) và (ABC) .

c) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) đi qua MN và $(P) // SC$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải

a) Dễ thấy MN là đường trung bình trong tam giác SAB do đó $AB // MN \Rightarrow AB // (SMN)$

H, K là trọng tâm của tam giác SAC, SBC suy ra

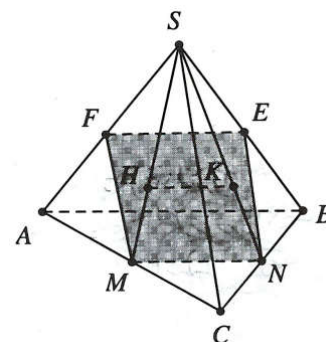
$$\frac{SH}{SM} = \frac{SK}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK // MN // AB \Rightarrow HK // (SAB).$$

b) Do $HK // AB$ nên giao tuyến của (CAB) và (CHK) là đường thẳng qua C và song song với HK và AB .

c) Qua M dựng $MF // SC$ ($F \in SA$) thì MF là đường trung bình trong tam giác $SCA \Rightarrow F$ là trung điểm của SA .

Tương tự dựng $NE // SC$ ($E \in SB$) thì E là trung điểm của SB .

Khi đó thiết diện là hình bình hành $MNEF$ vì có $MN // EF$, $MN = EF = \frac{AB}{2}$.



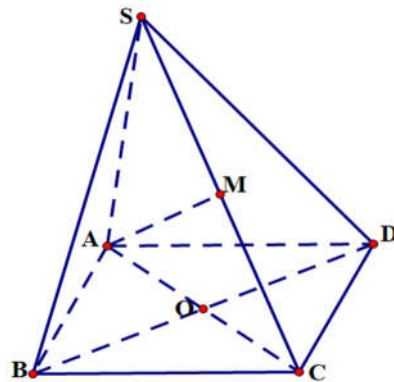
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Lời giải



a) Trong tam giác SAC, O và M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên $OM // SA$.

Mà $SA \subset (SAD); SA \subset (SBA)$.

Nên $OM // (SAD), OM // (SBA)$.

b) Hai mặt phẳng (SAD) và (OMB) có $SA // OM$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua D song song với SA và OM.

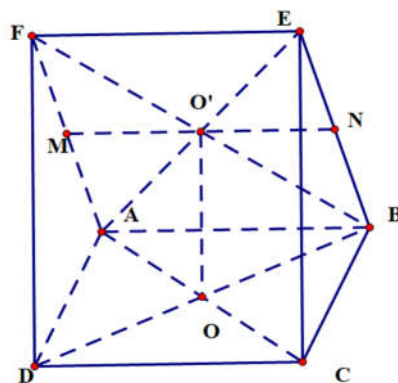
Bài 2. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF.

a) Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF), (ADF)$ và (BCE) .

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE. Chứng minh $MN // (CDFE)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



a) Trong tam giác FBD, O và O' lần lượt là trung điểm của BD và BF nên $OO' // FD$. Mà $FD \subset (EFDC), FD \subset (ADF)$ nên $OO' // (EFDC), OO' // (ADF)$.

Trong tam giác AEC, O và O' lần lượt là trung điểm của AE và AC nên $O' // EC$.

Mà $EC \subset (BCE)$ nên $OO' // (BCE)$.

b) Trong hình bình hành ABEF có M, N lần lượt là trung điểm của AE và BF nên $MN // EF // AB$.

Mà $EF \subset (CDFE)$ nên $MN // (CDFE)$.

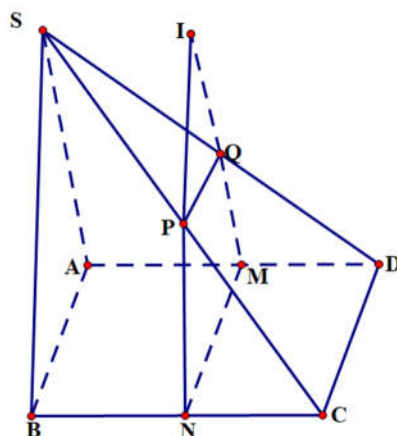
c) Hai mặt phẳng (OMN) và (ABCD) có điểm O chung, $MN//AB$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua O và song song với AB.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

a) $MNPQ$ là hình gì?

b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Lời giải



a) $CD//(\alpha)$, (SCD) chứa CD cắt (α) tại PQ nên $PQ//CD$, $CD//(\alpha)$, $(ABCD)$ chứa CD cắt (α) tại MN nên $MN//CD$.

Suy ra $MN//PQ$.

b) Mặt phẳng (SBC) và (SAD) giao nhau tại đường thẳng đi qua S và song song với BC và AD . $I \in NP, NP \subset (SBC)$ nên $I \in (SBC)$

$I \in QM, QM \subset (SAD)$ nên $I \in (SAD)$.

Do đó I là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) nên I nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

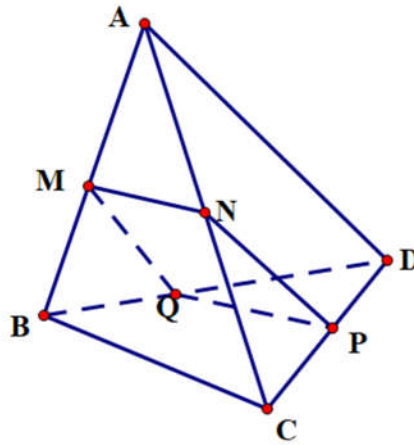
Suy ra I nằm trên đường thẳng đi qua S và song song với BC .

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Lời giải



a) $(\alpha) \parallel BC, BC \subset (ABC)$ và (α) cắt (ABC) tại MN nên $MN \parallel BC$.

$(\alpha) \parallel BC, BC \subset (BCD)$ và (α) cắt (BCD) tại PQ nên $PQ \parallel BC$.

Suy ra: $MN \parallel PQ$.

$(\alpha) \parallel AD, AD \subset (ABD)$ và (α) cắt (ABD) tại MQ nên $MQ \parallel AD$.

$(\alpha) \parallel AD, AD \subset (ACD)$ và (α) cắt (ACD) tại NP nên $NP \parallel AD$.

Suy ra: $MQ \parallel NP$.

Do đó, $MNPQ$ là hình bình hành.

b) $MNPQ$ là hình thoi khi $MN = NP$.

Ta có: $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$

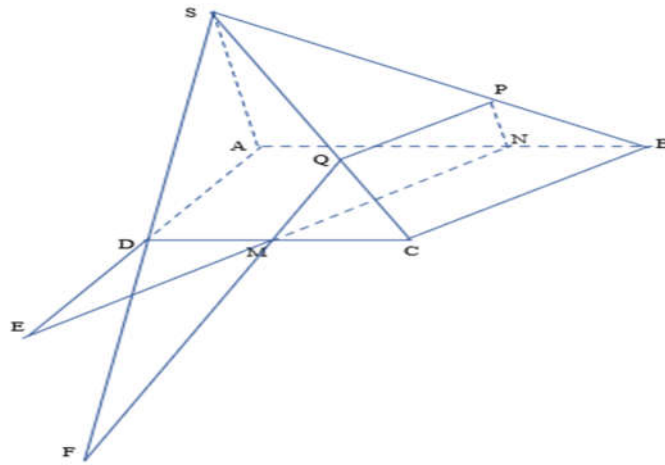
$$\frac{NP}{AD} = \frac{CN}{AC} \text{ hay } \frac{MN}{AD} = \frac{CN}{AC}.$$

$$\text{Mà } \frac{AN}{AC} + \frac{CN}{AC} = 1 \text{ nên } \frac{MN}{BC} + \frac{MN}{AD} = 1$$

$$\text{Suy ra: } MN = \frac{AD \cdot BC}{AD + BC}.$$

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại N .

Qua N kẻ đường thẳng song song với SA cắt AB tại P .

Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại Q .

Mặt phẳng $(MNPQ)$ có $MN \parallel SB, NP \parallel SA$ nên mặt phẳng $(MNPQ)$ là mặt phẳng (P) .

Giao tuyến của (P) với $(ABCD), (SAB), (SBC), (SCD)$ lần lượt là MN, NP, PQ và QM .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN và AD .

Trong mặt phẳng (ACD) , gọi F là giao điểm của MQ và SD .

Ta có: E và F là hai điểm chung của mặt phẳng (P) và (SAD) nên giao tuyến của (P) với (SAD) là EF .

Bài 6. Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà (Hình 19).

Lời giải



Hình 19

Đường thẳng a, e nằm trong mặt phẳng (P) .

Đường thẳng b, c song song với mặt phẳng (P) .

Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .

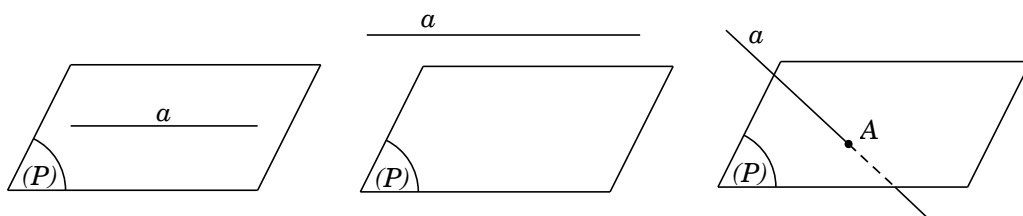
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn B



Có 3 vị trí tương đối của a và (P) , đó là: a nằm trong (P) , a song song với (P) và a cắt (P) .

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó:

- A. $a \parallel (\alpha)$. B. $a \subset (\alpha)$.
C. a cắt (α) . D. $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Lời giải

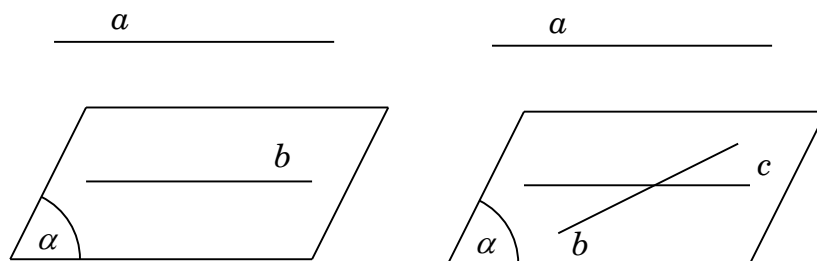
Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

- A. $a \parallel b$. B. a, b chéo nhau.
C. $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau. D. a, b cắt nhau.

Lời giải

Chọn C



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

- Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.

- Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 4: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
- B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
- C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
- D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

Lời giải

Chọn C

- A sai. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.
- B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.
- D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a .

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. a và b không có điểm chung.
- B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
- C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
- D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b .
- B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b .
- C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b .
- D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn B

Gọi $(Q) \equiv (a, b)$.

- A sai. Khi $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$.

- C sai. Khi $(P) \neq (Q) \Rightarrow b \parallel (P)$.
- Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b \subset (P)$ hoặc $b \parallel (P)$. Khi đó, vì $b \parallel a$ nên $a \subset (P)$ hoặc a cắt (P) (mâu thuẫn với giả thiết (P) cắt a).

Vậy khẳng định B đúng.

Câu 7: Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khi đó:

- A. $d \parallel d'$. B. d cắt d' . C. d và d' chéo nhau. D. $d \equiv d'$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$.

Nếu d cắt d' . Khi đó, d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết).

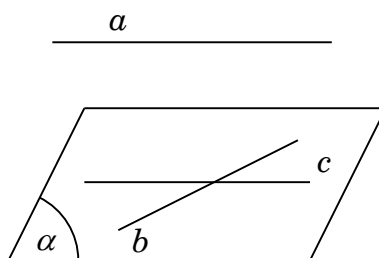
Vậy $d \parallel d'$.

Câu 8: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D



Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b .

Gọi $(\alpha) \equiv (b, c)$. Do $a \parallel c \Rightarrow a \parallel (\alpha)$.

Giả sử $(\beta) \parallel (\alpha)$. Mà $b \in (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\beta)$.

Mặt khác, $a \parallel (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\beta)$.

Có vô số mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .

- C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).
- D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

Lời giải

Chọn A

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

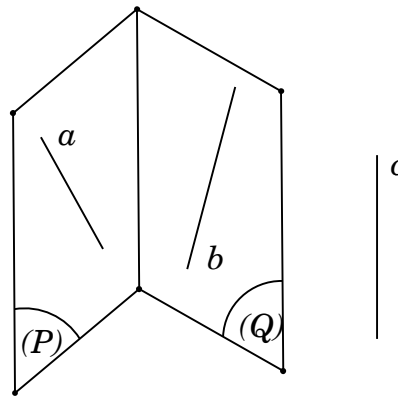
Do đó A sai.

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
- B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
- C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
- D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

Chọn A



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MN \parallel mp(ABCD)$. B. $MN \parallel mp(SAB)$. C. $MN \parallel mp(SCD)$. D. $MN \parallel mp(SBC)$.

Lời giải

Chọn A

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

Suy ra $MN \parallel AC$ mà $AC \subset (ABCD) \longrightarrow MN \parallel mp(ABCD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

- A. MN nằm trên $mp(ABCD)$. B. MN cắt $mp(ABCD)$.
C. MN song song $mp(ABCD)$. D. MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB .

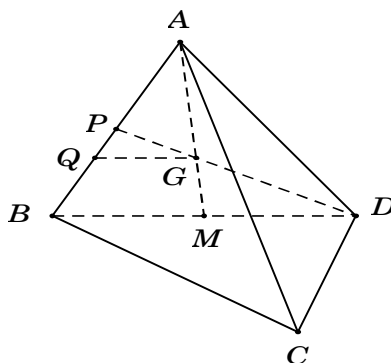
Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MN \parallel (BCD)$. B. $GQ \parallel (BCD)$.
C. MN cắt (BCD) . D. Q thuộc mặt phẳng (CDP) .

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BD .

Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.

Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ = 2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} \longrightarrow GQ \parallel BD$.

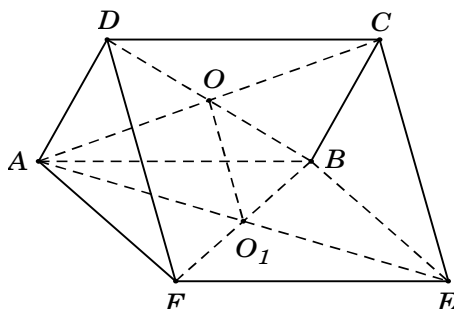
Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ \parallel (BCD)$.

Câu 14: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $OO_1 \parallel (BEC)$. B. $OO_1 \parallel (AFD)$.
C. $OO_1 \parallel (EFM)$. D. MO_1 cắt (BEC) .

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE .

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$.

Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.

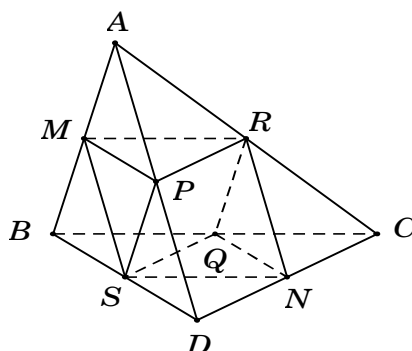
Vậy $OO_1 \parallel (BEC)$, $OO_1 \parallel (AFD)$ và $OO_1 \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

- A. P, Q, R, S . B. M, P, R, S . C. M, R, S, N . D. M, N, P, Q .

Lời giải

Chọn C



Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS \parallel AC \parallel QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng

Tương tự, ta có được $PM // BC // NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

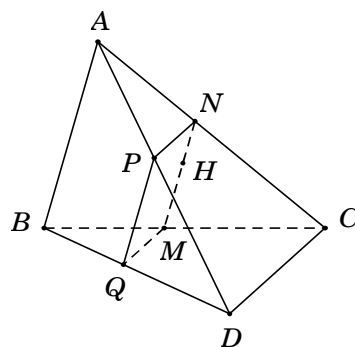
Và $NR // CD // SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC , (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD . Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của (α) của tứ diện?

- A. Thiết diện là hình vuông. B. Thiết diện là hình thang cân.
C. Thiết diện là hình bình hành. D. Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn C



Qua H kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AC lần lượt tại M, N .

Từ N kẻ NP song song với CD ($P \in CD$). Từ P kẻ PQ song song với AB ($Q \in BD$).

Ta có $MN // PQ // AB$ suy ra M, N, P, Q đồng phẳng và $AB // (MNPQ)$.

Suy ra $MNPQ$ là thiết diện của (α) và tứ diện.

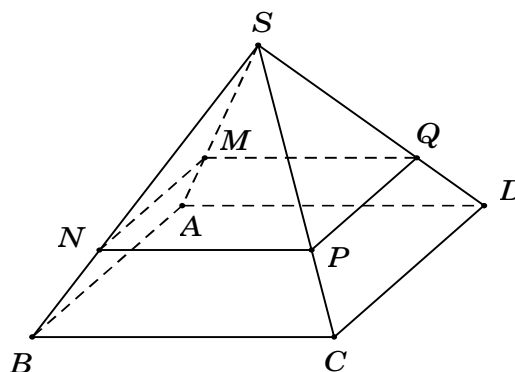
Vậy thiết diện là hình bình hành.

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

- A. $\frac{400}{9}$. B. $\frac{20}{3}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $(\alpha) \parallel AB$ và CD mà A, B, C, D đồng phẳng suy ra $(\alpha) \parallel (ABCD)$.

Giả sử (α) cắt các mặt bên $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$ lần lượt tại các điểm N, P, Q với $N \in SB, P \in SC, Q \in SD$ suy ra $(\alpha) \equiv (MNPQ)$.

Khi đó $MN \parallel AB \Rightarrow MN$ là đường trung bình tam giác $SAB \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{2}{3}$.

Tương tự, ta có được $\frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{2}{3}$ và $MNPQ$ là hình vuông.

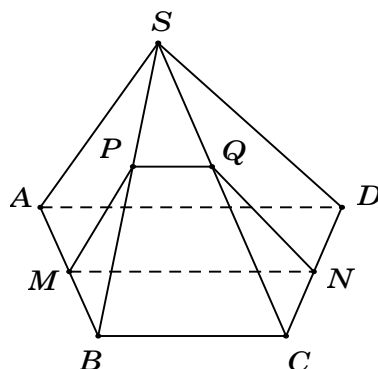
Suy ra $S_{MNPQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABCD} = \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} \cdot 10 \cdot 10 = \frac{400}{9}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD . M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD . (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình vuông

Lời giải

Chọn B



Xét hình thang $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Suy ra MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN \parallel BC$.

Lấy điểm $P \in SB$, qua P kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BC tại Q .

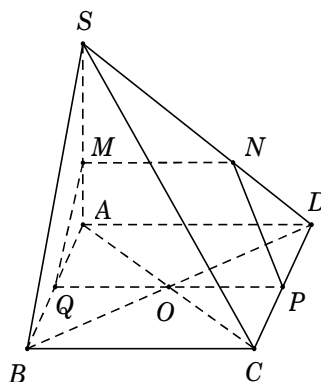
Suy ra $(P) \cap (SBC) = PQ$ nên thiết diện (P) và hình chóp là tứ giác $MNQP$ có $MN \parallel PQ \parallel BC$. Vậy thiết diện là hình thang $MNQP$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD . Thiết diện của (P) và hình chóp là

- A.** Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình tam giác.

Lời giải

Chọn B



Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel AD$ và cắt SD tại $N \Rightarrow MN \parallel AD$.

Qua O kẻ đường thẳng $PQ \parallel AD$ và cắt AB, CD lần lượt tại $Q, P \Rightarrow PQ \parallel AD$.

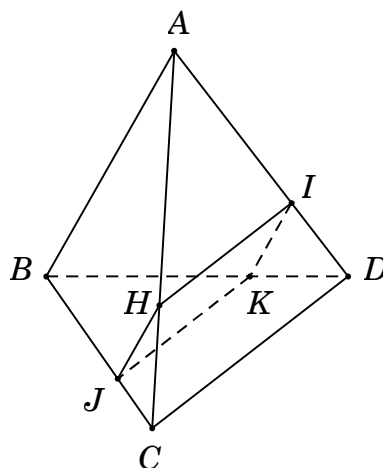
Suy ra $MN \parallel PQ \parallel AD \longrightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Rightarrow (P)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNQP$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB . Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

- A.** Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình tam giác. **D.** Tam giác đều.

Lời giải

Chọn B



Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến JH và IK .

Ta có $(P) \cap (ABC) = JH$, $(P) \cap (ABD) = IK$

$(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(P) \parallel AB \longrightarrow JH \parallel IK \parallel AB$.

Theo định lí Thalet, ta có $\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$ suy ra $\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow IH \parallel CD$.

Mà $IH \in (P)$ suy ra IH song song với mặt phẳng (P) .

Vậy (P) cắt các mặt phẳng (ABC) , (ABD) theo các giao tuyến IH , JK với $IH \parallel JK$.

Do đó, thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành.

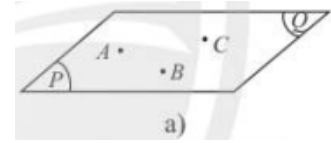
BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

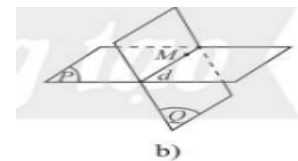
1. Hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) , có thể xảy ra một trong ba trường hợp:

- **Trường hợp 1:** (P) và (Q) có ba điểm chung không thẳng hàng, ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau, kí hiệu $(P) \equiv (Q)$.

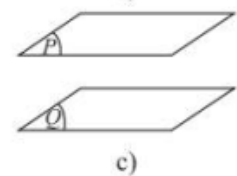


- **Trường hợp 2:** (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d đi qua điểm chung, kí hiệu $(P) \cap (Q) = d$.



Trường hợp 3: (P) và (Q) không có bất kì điểm chung nào, nghĩa là $(P) \cap (Q) = \emptyset$, ta nói (P) và (Q) song song với nhau, kí hiệu $(P) // (Q)$ hoặc $(Q) // (P)$.

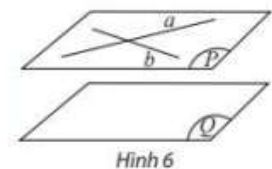
Hai mặt phẳng được gọi là **song song** với nhau nếu chúng không có điểm chung.



2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lý 1

Nếu hai mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

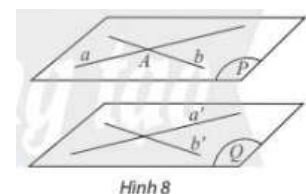


Chú ý: Chẳng hạn A, B, C không thẳng hàng và $AB // MN$ và $AC // MP$ thì $(ABC) // (MNP)$.

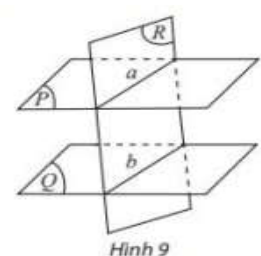
3. Tính chất của hai mặt phẳng song song

Định lý 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

**Định lý 3**

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



4. Định lý Thales trong không gian

Định lý 4 (Định lý Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

5. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại

$A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$ gọi là **hình lăng trụ**, kí hiệu $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

Hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ ta gọi:

- Hai đa giác $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$ là hai **mặt đáy** nằm trên hai mặt phẳng song song;
- Các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, A'_1, A'_2, ..., A'_n$ là các **đỉnh**;
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ là các **mặt bên**;
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$ là các **cạnh bên**. Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Các cạnh của hai đa giác là các **cạnh đáy**. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.

Chú ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...

Hình hộp

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Trong mỗi hộp có:

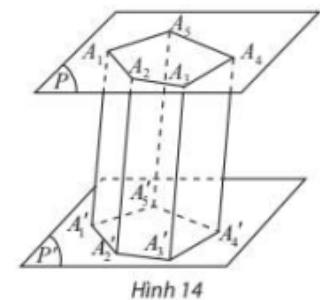
- Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó. Hai mặt như thế gọi là **hai mặt đối diện**;
- Hai đỉnh không cùng nằm trên một mặt gọi là **hai đỉnh đối diện**;
- Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo**;
- Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

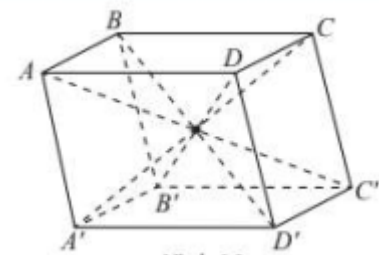
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả sau:



Hình 14



Hình 16

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel c, b \parallel d \\ a, b \subset (P) \\ c, d \subset (Q) \\ a \cap b = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

Áp dụng: Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, SD.

- Chứng minh $(EFB) \parallel (SCD)$. Từ đó chứng minh $CI \parallel (EFB)$.
- Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD). Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến này, chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

Giải

a. Ta có:

$EF \parallel SD$ (EF là đường trung bình của tam giác SAD).

$BF \parallel CD$ ($BC \parallel FD$, $BC = FD$).

Suy ra $(EFB) \parallel (SCD)$.

Mà $CI \subset (SCD)$ nên $CI \parallel (EFB)$.

b. Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{array} \right\}$$

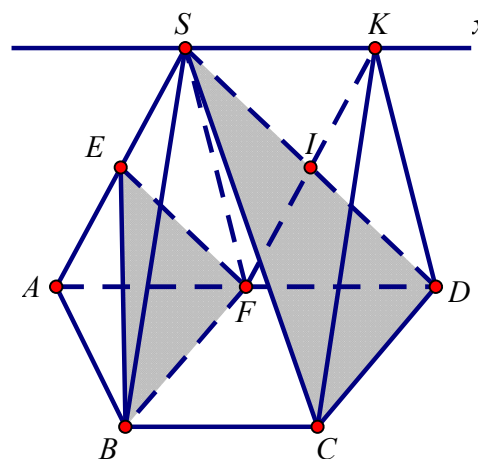
$$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx, Sx \parallel AD \parallel BC$$

Trong mp(SAD): FI cắt Sx tại K.

Ta có: $SK \parallel FD$, $IS = ID$ nên $IK = IF$.

Vậy tứ giác SKDF là hình bình hành, suy ra $SF \parallel KD$.

Mặt khác $BF \parallel CD$ nên $(SBF) \parallel (KCD)$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

- Chứng minh mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau.
- Giả sử hai tam giác SAD và ABC đều là tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với mặt phẳng (SAD).

Giải

a. Ta có:

$ON \parallel BC$ (ON là đường trung bình của tam giác BCD).

$OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của tam giác SAC)

Vì $OM, ON \subset (OMN)$; $BC, SC \subset (SBC)$ nên $(OMN) \parallel (SBC)$.

b. Từ E kẻ đường thẳng $EP \parallel AD$ (P thuộc AB) (1)

Khi đó theo tính chất đường phân giác và tam giác cân ta có:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AS} = \frac{FB}{FA}$$

Do đó: $PF \parallel SA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(PEF) \parallel (SAD)$.

Mặt khác $EF \subset (PEF)$ nên $EF \parallel (SAD)$.

Ngoài ra ta có thể dùng định lý Thales để chứng minh $EF \parallel (SAD)$ như sau:

Theo tính chất đường phân giác và tính chất của tam giác cân ta chứng minh được:

$$\frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AD} = \frac{FB}{FS} = \frac{EC}{ED}.$$

Theo định lý Thales ta suy ra ba đường thẳng BC , EF và SD nằm trong ba mặt phẳng song song, suy ra EF song song với mặt phẳng chứa BC và song song với mặt phẳng chứa SD . Mặt khác $BC \parallel AD$ nên EF song song với mặt phẳng (SAD) .

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' song song với nhau.

a. Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.

b. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

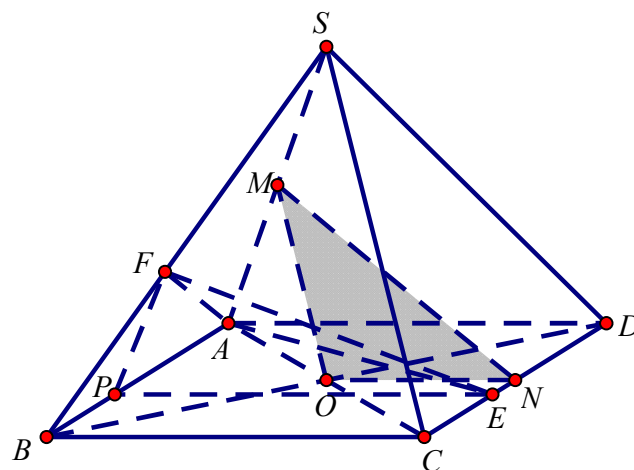
c. Chứng minh G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Giải

a. Ta có:

$A'B \parallel D'C$ (vì tứ giác $A'BCD'$ là hình bình hành).

$BD \parallel B'D'$ (vì tứ giác $BB'D'D$ là hình bình hành), suy ra $\text{mp}(BDA') \parallel \text{mp}(B'D'C)$.



b. Gọi O, O' và Q lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, A'B'C'D và AA'C'C.

Ta có: A'O là đường trung tuyến và G là trọng tâm của tam giác BDA' nên $\frac{A'G}{A'O} = \frac{2}{3}$.

Do đó G cũng là trọng tâm tam giác A'AC (vì A'O là đường trung tuyến của tam giác A'AC).

Mà AQ là đường trung tuyến của tam giác A'AC nên G thuộc AQ, G thuộc AC'

(1)

Tương tự ta có G' là trọng tâm của tam giác B'D'C và cũng là trọng tâm của tam giác A'C'C.

Mà C'Q là đường trung tuyến của tam giác A'C'C nên G' thuộc C'Q. Suy ra G' thuộc AC'.

(2)

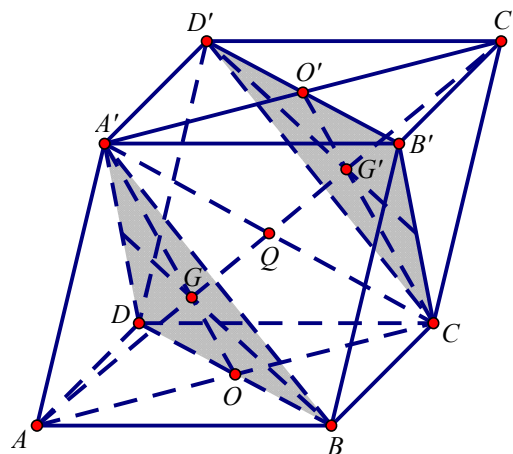
Từ (1) và (2) suy ra đường chéo AC' đi qua hai trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Ta có:

G là trọng tâm tam giác A'AC nên $\frac{AG}{AQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AC'} = \frac{1}{3} (AC' = 2AQ)$. Suy ra $AG = \frac{1}{3}AC'$.

G' là trọng tâm tam giác A'C'C nên $\frac{C'G'}{C'Q} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G'}{C'A} = \frac{1}{3} (AC' = 2C'Q)$. Suy ra $C'G' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy $AG = GG' = C'G' = \frac{1}{3}AC'$. Tức là G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.



Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng

1. Phương pháp

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (\alpha) \cap (P) = a \\ (\alpha) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là trung điểm của AD. Gọi (α) và (β) là mặt phẳng qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (SBD) và (SAC).

a. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(\alpha)$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(\beta)$.

c. Gọi H và K lần lượt là giao điểm của (α) và (β) với AC và BD. Chứng minh tứ giác OHMK là hình bình hành.

Giải

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ M \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = MN \parallel BD \quad (N \in AB)$$

Gọi M là trung điểm của AD nên N là trung điểm của AB.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \\ N \in (SAB) \cap (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = NE \parallel SB \quad (E \in SA)$$

Mà N là trung điểm của AB nên E là trung điểm của SA.

Khi đó: $ME = (\alpha) \cap (SAD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MNE.

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \parallel (SAC) \\ (ABCD) \cap (SAC) = AC \\ M \in (ABCD) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (ABCD) \cap (\beta) = MP \parallel AC \quad (P \in CD)$$

Mà M là trung điểm của AD nên P là trung điểm của CD.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \parallel (SAC) \\ (SCD) \cap (SAC) = SC \\ P \in (SCD) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (SCD) \cap (\beta) = PF \parallel SC \quad (F \in SD)$$

Mà P là trung điểm của CD nên F là trung điểm của SD.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MPF.

c. Trong mp(ABCD): AC cắt MN tại H, BD cắt MP tại K. Do MN chứa trong mp(α) và MP chứa trong mp(β) nên H chính là giao điểm của AC với mp(α) và K chính là giao điểm của BD với mp(β).

Ta có $MN \parallel BD$ nên $MH \parallel OK$, $MP \parallel AC$ nên $MK \parallel HO$. Vậy tứ giác OHMK là hình bình hành.

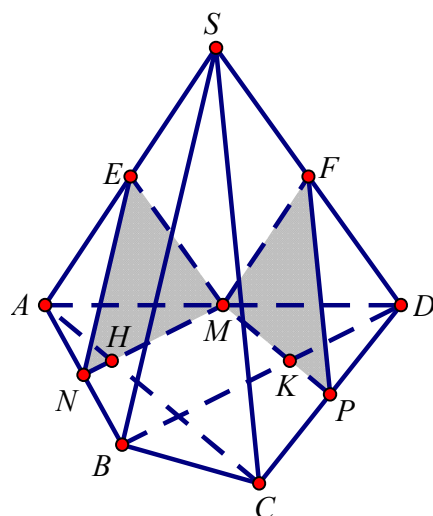
Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

b. $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Giải

a. Ta có $AB \parallel CD$ và $Ax \parallel Dt$ nên mp(Ax, By) $\parallel$ mp(Cz, Dt).



Mà $(P') \cap (Ax, By) = A'B'$; $(P') \cap (Cz, Dt) = C'D'$ nên $A'B' \parallel C'D'$ (1)

Tương tự:

$$\left. \begin{array}{l} mp(Ax, Dt) \parallel mp(By, Cz) \\ (P') \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ (P') \cap (By, Cz) = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'$$

(2)

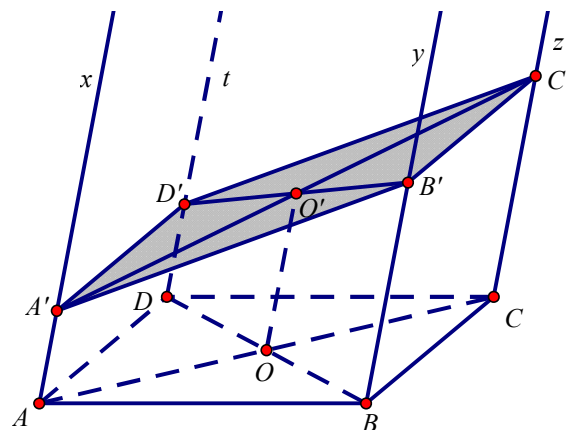
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

b. Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Khi đó ta có OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$ và hình thang $BB'D'D$.

Do đó: $AA' + CC' = 2OO'$ và $BB' + DD' = 2OO'$.

Vậy $AA' + CC' = BB' + DD'$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh AD và BC lần lượt là P và Q .

a. Cho trước điểm P , hãy nói cách dựng điểm Q .

b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh rằng $KP = KQ$.

Giải

a. Ta có (α) là $mp(MNP)$.

Trong $mp(ABD)$: MP cắt BD tại E .

Trong $mp(BCD)$: EN cắt BC tại Q .

Vậy (α) chính là $mp(MPNQ)$. Q là điểm cần tìm.

b. Trên hai đường thẳng chéo nhau AB và CD lần lượt có các điểm A, M, B và C, N, D định ra các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 1.$$

Theo định lý Thales ta suy ra AD, MN, BC nằm trên ba mặt phẳng song song.

Mà PQ là cát tuyến cắt ba mặt phẳng song song lần lượt tại P, K, Q nên: $\frac{KP}{KQ} = \frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 1$.

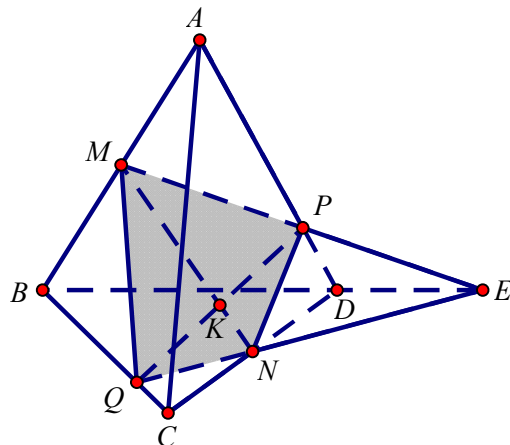
Vậy K là trung điểm của PQ .

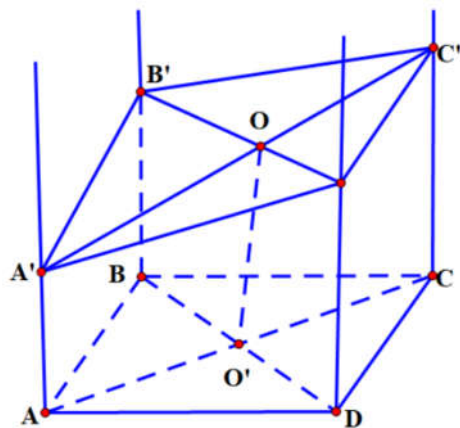
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC , lấy điểm $P \in SA$.

a) Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD) .

b) Tìm giao điểm SD và (MNP) .

c) Tìm thiết diện hình chóp và mặt phẳng (MNP) . Thiết diện là hình gì?





$AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (CDD'C')$, $A' \parallel D'$ nên $D' \parallel (CDD'C')$.

Ta có $(ABB'A')$ đi chứa 2 đường thẳng cắt nhau AB và AA' cùng song song với $(CDD'C')$ nên $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$

$AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (BCC'B')$, $AA' \parallel B'$ nên $AA' \parallel (BCC'B')$.

Ta có $(ADD'A')$ đi chứa 2 đường thẳng cắt nhau AD và AA' cùng song song với $(BCC'B')$ nên $(ADD'A') \parallel (B'B'C')$.

Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại $A'B'$ và CD' nên $AB' \parallel CD'$.

Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ADD'A')$ và $(CBB'C')$ lần lượt tại $A'D'$ và CB' nên $AD' \parallel CB'$.

Suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành, nên $A'C'$ cắt $B'D'$ tại trung điểm O .

Gọi O' là giao của AC và BD .

Mặt phẳng $(AA'C'C)$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại AA' và CC' nên $AA' \parallel CC'$.

Trong hình thang $ACC'A'$ có OO' là đường trung bình nên $AA' + CC' = 2OO'$.

Mặt phẳng $(BDD'B')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ lần lượt tại BB' và DD' nên $BB' \parallel DD'$.

Trong hình thang $BDD'B'$ có OO' là đường trung bình nên $BB' + DD' = 2OO'$.

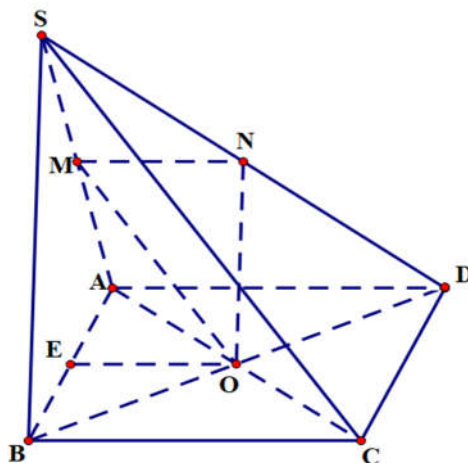
Vậy $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON . Chứng minh EF song song với (SBC) .

Lời giải



a) Trong tam giác SBD có ON là đường trung bình nên $ON \parallel SB$. Suy ra $MN \parallel (SBC)$.

Trong tam giác SAD có MN là đường trung bình nên $MN \parallel AD$. Mà $AD \parallel BC$ nên $MN \parallel BC$.
Suy ra $MN \parallel (SBC)$.

Mặt phẳng (OMN) chứa hai đường thẳng cắt nhau MN và ON cùng song song với (SBC)
Do đó, $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Trong tam giác ABC có OE là đường trung bình nên $OE \parallel BC$. Suy ra $OE \parallel (SBC)$.

Mà $(OMN) \parallel (SBC)$ nên $E \in (OMN)$.

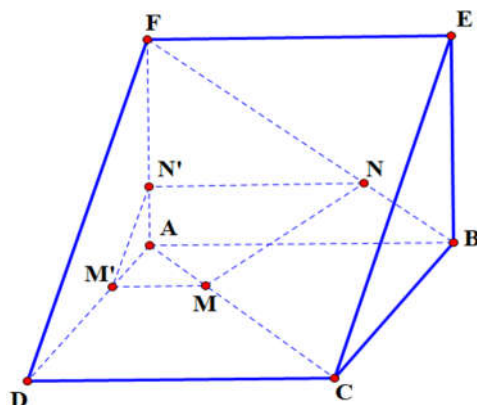
Ta có: $(OMN) \parallel (SBC)$; $EF \subset (OMN)$ nên $EF \parallel (SBC)$.

Bài 3. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

a) Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

Lời giải



a) Ta có $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (BEC)$.

$AF \parallel BE$ nên $AF \parallel (BEC)$.

Mặt phẳng (ADF) đi qua hai đường thẳng cắt nhau AD và AF cùng song song với (CBE) nên $(ADF) \parallel (CBE)$.

b) Vì $ABCD$ và $ABEF$ là hình vuông có cạnh bằng nhau nên $AC = BF$.

Trong tam giác ADC có $MM' \parallel CD$ nên $\frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$.

Trong tam giác ABF có $NN' \parallel AB$ nên $\frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$.

Mà $AM = BN$ nên $\frac{AN'}{AF} = \frac{AM'}{AD}$. Suy ra $M'N' \parallel DF$ nên $M'N' \parallel (DEF)$.

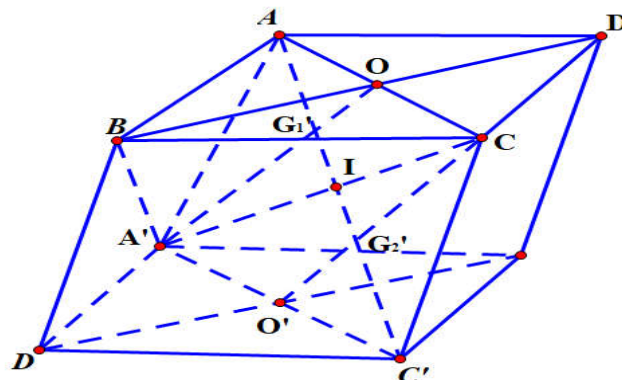
Ta có $MM' \parallel AB \parallel EF$ nên $MM' \parallel (DEF)$.

Mặt phẳng $(MNN'M')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau MM' và $M'N'$ cùng song song với (DEF) .

Do đó, $(MNN'M') \parallel (DEF)$.

Bài 4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$. Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, I là giao điểm của AC' và $A'C$. Do $ACC'A'$ là hình bình hành nên I là trung điểm của $A'C$.

G_1 là trọng tâm tam giác BDA' nên $\frac{A'G_1}{AO} = \frac{2}{3}$.

Tam giác $AA'C$ có $A'O$ là trung tuyến, $\frac{A'G_1}{AO} = \frac{2}{3}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $AA'C$.

Mà I là trung điểm $A'C$ nên $G_1 \in AI$ và $AG_1 = \frac{2}{3} AI$.

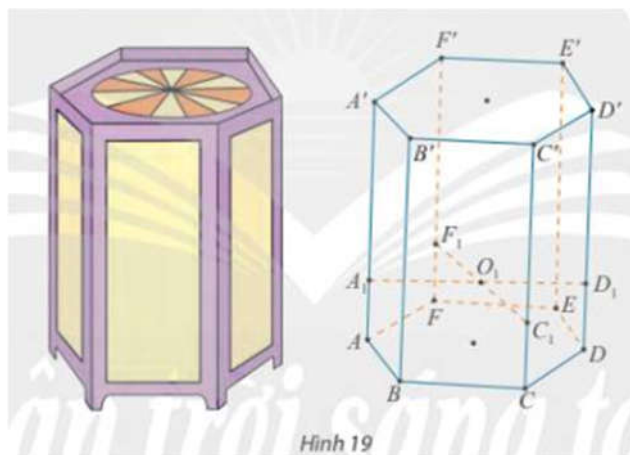
Mà $AI = \frac{1}{2} AC'$ nên $AG_1 = \frac{1}{3} AC'$.

Tương tự ta có $C'G_2 = \frac{1}{3}AC'$.

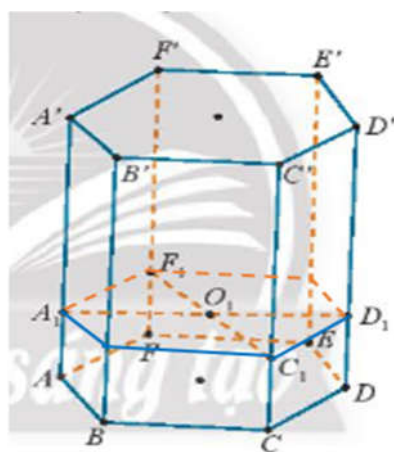
Suy ra G_1, G_2 chia AC thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 5. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (Hình 19).

- Xác định giao tuyến của $\text{mp}(A_1D_1, F_1C_1)$ với các mặt bên của lăng trụ.
- Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70 \text{ cm}$. Tính CC_1 và C_1C' .



Lời giải



- Do mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau A_1D_1 và C_1F_1 và cùng song song với mặt phẳng $(ABCDEF)$.

Nên $(A_1C_1D_1F_1) // (ABCDEF)$.

Gọi B_1, E_1 lần lượt là giao của mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)$ với BB' và EE' .

Ta có giao tuyến của $(A_1C_1D_1F_1)$ với các mặt bên của lăng trụ là $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1A_1$

b) Ta có: $A'A_1 = 6AA_1; AA' = 70$ nên $AA_1 = 10$.

Do $(ACC'A')$ cắt hai mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1) // (ABCDEF)$ lần lượt tại A_1C_1 và AC nên $A_1C_1 // AC$.

Mà $AA_1 // CC_1$ nên tứ giác AA_1C_1C là hình bình hành.

Suy ra $CC_1 = AA_1 = 10$

Mà $C' = AA' = 70$

Nên $C_1C' = 70 - 10 = 60$

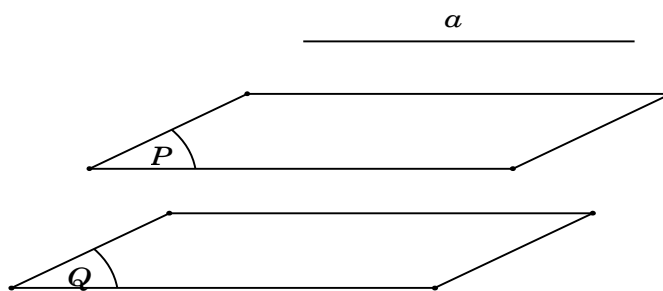
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
- B.** Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
- C.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- D.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Lời giải

Chọn C



Trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow A$ là mệnh đề sai.

Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ) $\Rightarrow B$ là mệnh đề sai.

Ta có: $a // (P), a // (Q)$ nhưng (P) và (Q) vẫn có thể song song với nhau.

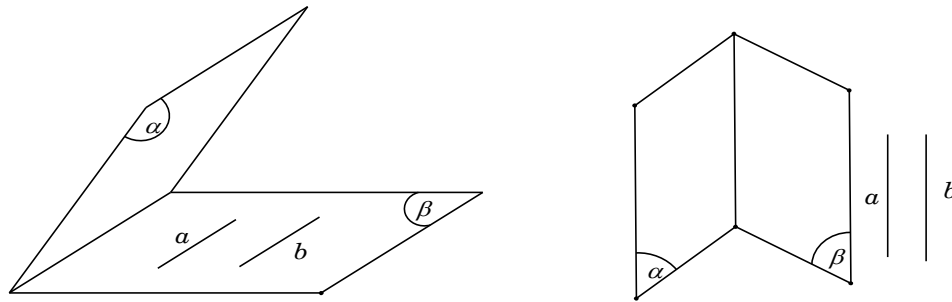
Mệnh đề C là tính chất nên C đúng.

Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

- A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).
- B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
- C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
- D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

Lời giải

Chọn D



Trong trường hợp: $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó) thì (α) và (β) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Loại A

$(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 1) $\Rightarrow$ Loại B

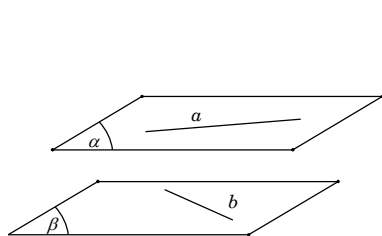
$(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 2) $\Rightarrow$ Loại C

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

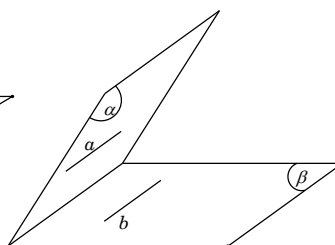
- A. Nếu mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .
- B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .
- C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(a) \parallel (\beta)$.
- D. Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Lời giải

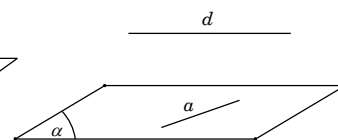
Chọn A



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc (α) và (β) có thể chéo nhau (Hình 1) $\Rightarrow$ Loại B

Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì hai mặt phẳng (α) và (β) có thể cắt nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ Loại C

Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong (α) . (Hình 3).

Câu 4: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β) .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

$a \parallel (\alpha)$ mà $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a$ và (β) không thể cắt nhau.

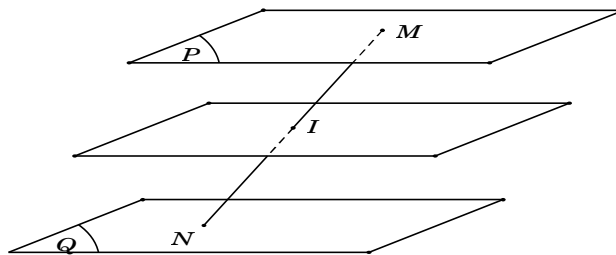
Vậy còn 2 vị trí tương đối.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q) . Gọi I là trung điểm của MN . Chọn khẳng định đúng.

- A. Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q) .
 B. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .
 C. Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P) .
 D. Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P) .

Lời giải

Chọn B



Ta có: I là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến (P) bằng khoảng cách từ I đến (Q)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

Câu 6: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) ?

A. $a \parallel b$ và $b \subset (P)$.

B. $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.

C. $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

D. $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a \parallel b$ và $b \subset (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại A

$a \parallel b$ và $b \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại B

$a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại C

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D. Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$ hoặc a chéo $b \Rightarrow$ A, B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b .

Câu 8: Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.

B. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Với đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$

Khi $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau $\Rightarrow$ A sai.

Khi $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$ hoặc $(P), (Q)$ cắt nhau theo giao tuyến song song với a và $b \Rightarrow$ B sai.

a và b có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau $\Rightarrow$ D sai.

Câu 9: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

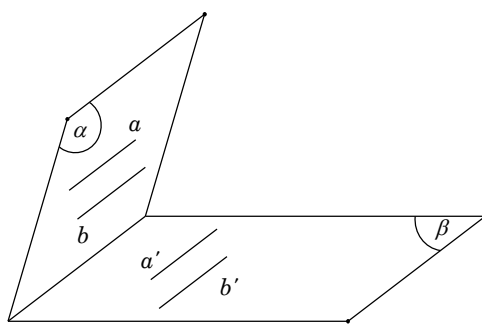
B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

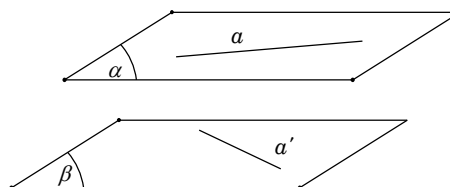
D. Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Lời giải

Chọn D



Hình 1



Hình 2

Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt (β) (Hình 1) $\Rightarrow$ A sai.

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ hoặc a, a' chéo nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt CC' . (Hình 1) $\Rightarrow$ C sai.

Câu 10: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q) . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. p và q cắt nhau.

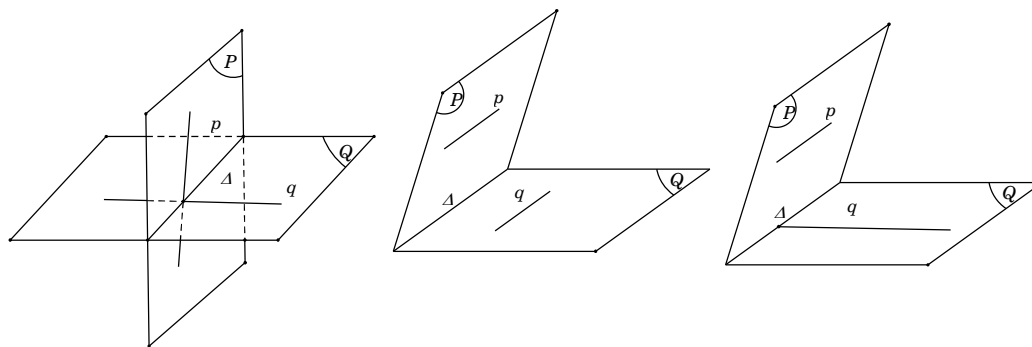
B. p và q chéo nhau.

C. p và q song song.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn D



Ta có p và q có thể cắt nhau, song song, chéo nhau (hình vẽ).

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM) .

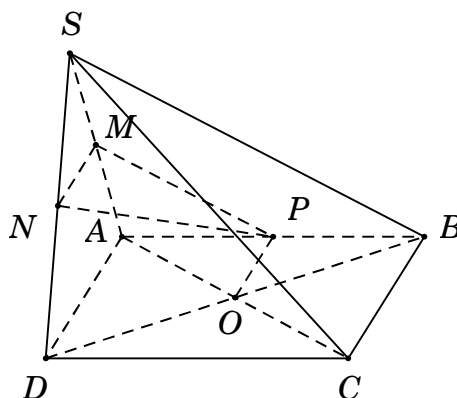
B. $(MON) \parallel (SBC)$.

C. $(PON) \cap (MNP) = NP$.

D. $(NMP) \parallel (SBD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN \parallel AD$. (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP \parallel AD$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $MN \parallel OP \parallel AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

Lại có $MP \parallel SB, OP \parallel BC$ suy ra $(MNOP) \parallel (SBC)$ hay $(MON) \parallel (SBC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

A. Hình hình hành.

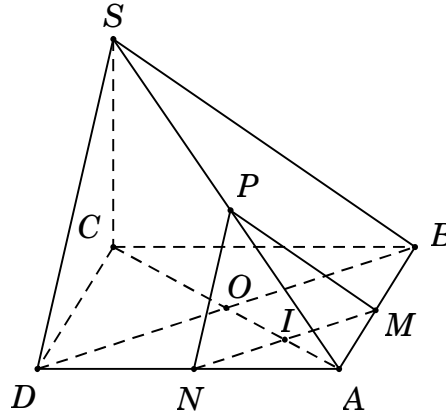
B. Tam giác cân.

C. Tam giác vuông.

D. Tam giác đều.

Lời giải

Chọn D



Gọi MN là đoạn thẳng giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt đáy $(ABCD)$.

Vì $(P) \parallel (SBD)$, $(P) \cap (ABCD) = MN$ và $(SBD) \cap (ABCD) = BD$ suy ra $MN \parallel BD$.

Lập luận tương tự, ta có

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với $NP \parallel SD$.

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với $MP \parallel SB$.

Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều MNP .

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$.

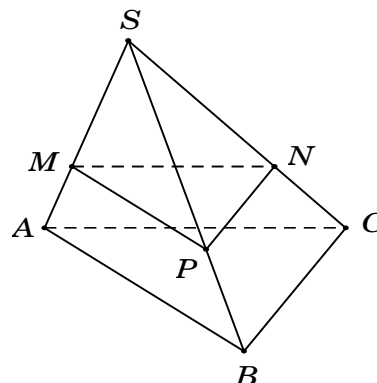
B. $\frac{14}{9}$.

C. $\frac{25}{9}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn A



Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC .

Vì $(P) \parallel (ABC)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$. Vậy $S_{\triangle MNP} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{9}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6, CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

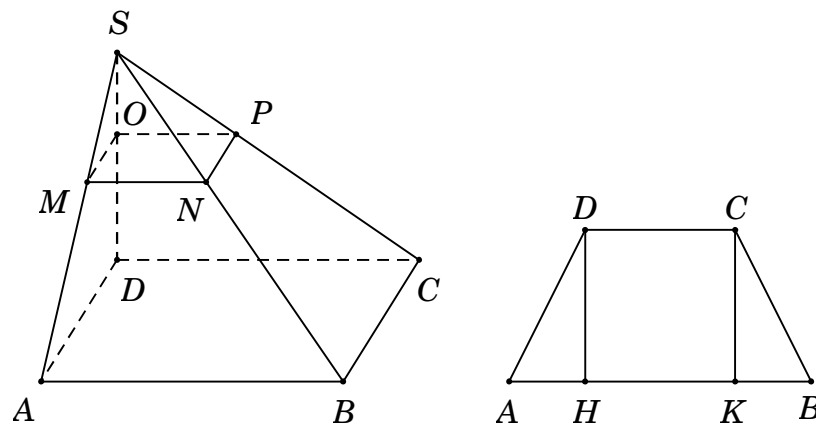
B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. 2.

D. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB .

$$ABCD \text{ là hình thang cân} \Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1.$$

Tam giác BCK vuông tại K , có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK \cdot \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$.

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD .

Vì $(P) \parallel (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O , $AB = 8$, $SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $5\sqrt{5}$.

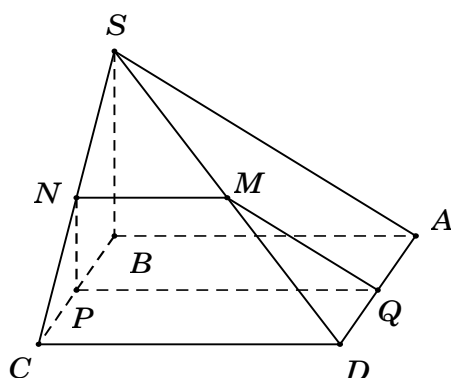
B. $6\sqrt{5}$.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Chọn B



Qua O kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AD lần lượt tại P, Q .

Kẻ PN song song với SB ($N \in SB$), kẻ QM song song với SA ($M \in SA$).

Khi đó $(MNPQ) \parallel (SAB) \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$

Vì P, Q là trung điểm của BC, AD suy ra N, M lần lượt là trung điểm của SC, SD .

Do đó MN là đường trung bình tam giác $SCD \Rightarrow MN = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = 4$.

Và $NP = \frac{SB}{2} = 3$; $QM = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Hạ NH, MK vuông góc với PQ . Ta có $PH = KQ \Rightarrow PH = \frac{1}{2}(PQ - MN) = 2$.

Tam giác PHN vuông, có $NH = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = NH \cdot \frac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.

B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.

D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải

Chọn C

Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác,...), ta thấy rằng

Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác,...)

Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

Câu 17: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.
- D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Lời giải

Chọn C

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

Câu 18: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một song song.
- B. Các cạnh bên của hình chóp cụt là các hình thang.
- C. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
- D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn C

Xét hình chóp cụt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác,...) ta thấy rằng:

Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một cắt nhau.

Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.

Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

Câu 19: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Trong hình chóp cụt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

- B. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.
- C. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.
- D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cắt đồng quy tại một điểm.

Lời giải

Chọn C

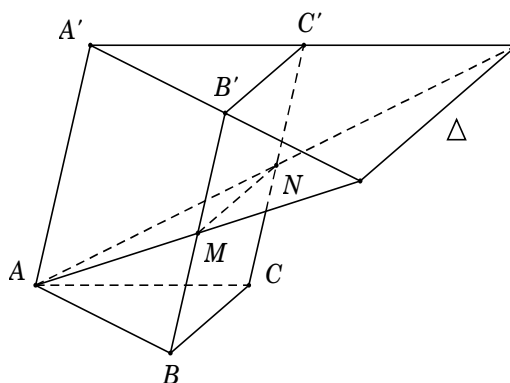
Với hình chóp cắt, các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\Delta \parallel AB$.
- B. $\Delta \parallel AC$.
- C. $\Delta \parallel BC$.
- D. $\Delta \parallel AA'$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} MN \subset (AMN) \\ B'C' \subset (A'B'C') \\ MN \parallel B'C' \end{cases} \longrightarrow \Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$ sẽ song

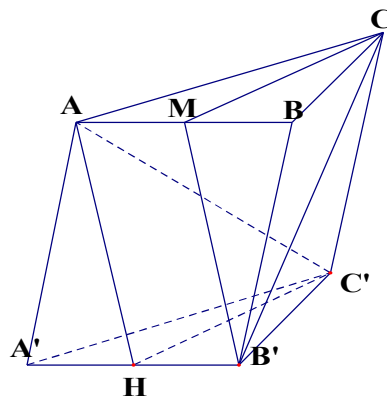
song với MN và $B'C'$. Suy ra $\Delta \parallel BC$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (AHC') .
- B. $(AA'H)$.
- C. (HAB) .
- D. $(HA'C)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

A. CB' .

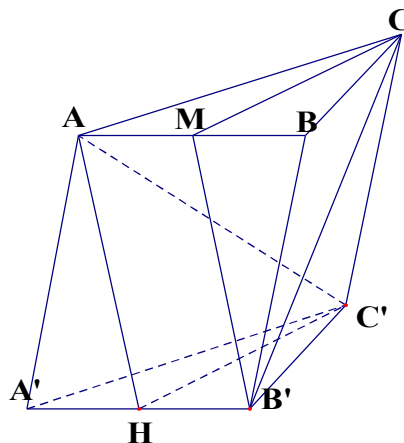
B. BB' .

C. BC .

D. BA' .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $(ABC) // (A_1B_1C_1)$. B. $AA_1 // (BCC_1)$.
C. $AB // (A_1B_1C_1)$. D. AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D

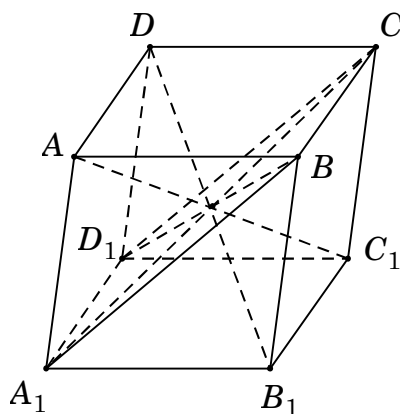
Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Câu 24: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. $ABCD$ là hình bình hành.
B. Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng quy.
C. $(ADD_1A_1) // (BCC_1B_1)$.
D. AD_1CB là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

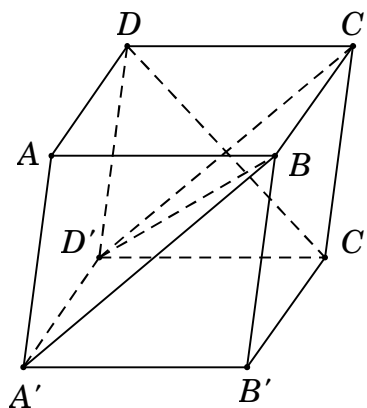
- Hình hộp có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B cắt nhau tại tâm của AA_1C_1C, BDD_1B_1 .
- Hai mặt bên $(ADD_1A_1), (BCC_1B_1)$ đối diện và song song với nhau.
- AD_1 và CB là hai đường thẳng chéo nhau suy ra AD_1CB không phải là hình chữ nhật.

Câu 25: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $(AA'B'B) // (DD'C'C)$. B. $(BA'D') // (ADC')$.
C. $A'B'CD$ là hình bình hành. D. $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào hình vẽ dưới và tính chất của hình hộp, ta thấy rằng:

- Hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(DD'C'C)$ đối diện, song song với nhau.
- Hình hộp có hai đáy $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B' = CD$ và $A'B' \parallel CD$ suy ra $A'B'CD$ là hình bình hành.
- $BD \parallel B'D'$ suy ra B, B', D', D đồng phẳng $\Rightarrow BB'D'D$ là tứ giác.
- Mặt phẳng $(BA'D')$ chứa đường thẳng CD' mà CD' cắt $C'D$ suy ra $(BA'D')$ không song song với (ADC') .

Câu 26: Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

- A. 3 cạnh. B. 4 cạnh. C. 5 cạnh. D. 6 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

Câu 27: Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

- A. 4 cạnh. B. 5 cạnh. C. 6 cạnh. D. 7 cạnh.

Lời giải

Chọn C

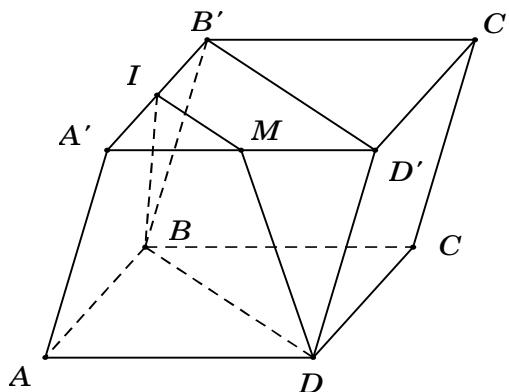
Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

Câu 28: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB . Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Tam giác. B. Hình thang. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \longrightarrow$ Giao tuyến của $(IB'D')$ với $(ABCD)$ là đường thẳng d đi qua I và song song với BD .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = d \cap AD \longrightarrow IM \parallel BD \parallel B'D'$.

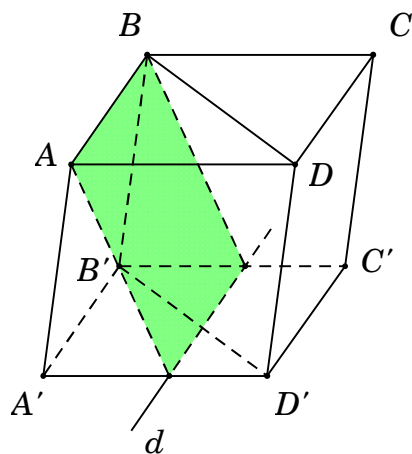
Khi đó thiết diện là tứ giác $IMB'D'$ và tứ giác này là hình thang.

Câu 29: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T) . Khẳng định nào sau đây không sai?

- A. (T) là hình chữ nhật.
B. (T) là hình bình hành.
C. (T) là hình thoi.
D. (T) là hình vuông.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác (T) .

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta chứng minh được $AB // d$ suy ra tứ giác (T) là một hình bình hành.

BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

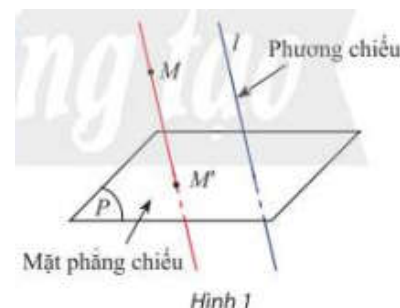
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm phép chiếu song song

Phép chiếu song song thường dùng để biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng.

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P) .

Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là **phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l** .



Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu** của phép chiếu song song nói trên.

Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là **phép chiếu theo phương l** .

Điểm M' gọi là **ảnh** của điểm M qua phép chiếu theo phương l .

Cho hình H trong không gian. Ta gọi tập hợp H' các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc H qua phép chiếu song song theo phương l là **hình chiếu song song** của H lên mặt phẳng (P) .

2. Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Dưới đây ta chỉ xét ảnh của các đường thẳng, tia, đoạn thẳng không song song với phương chiếu.

Tính chất 1

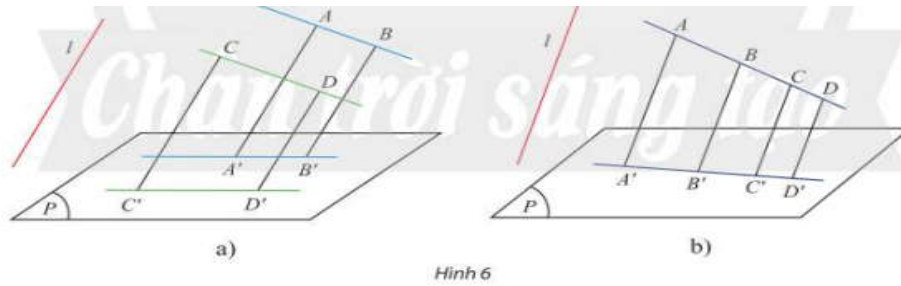
Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.

Tính chất 2

Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 3

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



Hình 6

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Chú ý: Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta phải tuân theo một số quy tắc khi vẽ hình biểu diễn, chẳng hạn như:

a) Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) và tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình H .

b) Nếu hình phẳng nằm trong một mặt phẳng không song song với phương chiếu thì

- Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
- Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
- Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phương pháp

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình H' hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.
- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.
- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.
- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).
- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).
- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật,...)
- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2. Các ví dụ

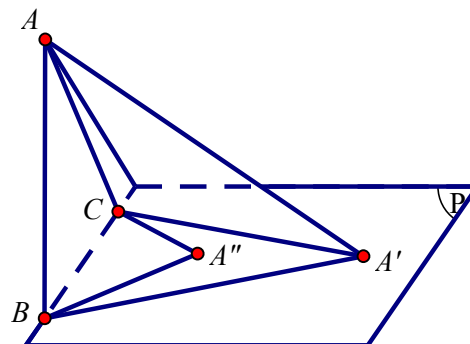
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là:

- Một tam giác cân.
- Một tam giác vuông.

Giải

Qua BC dựng mặt phẳng (P) không qua A.

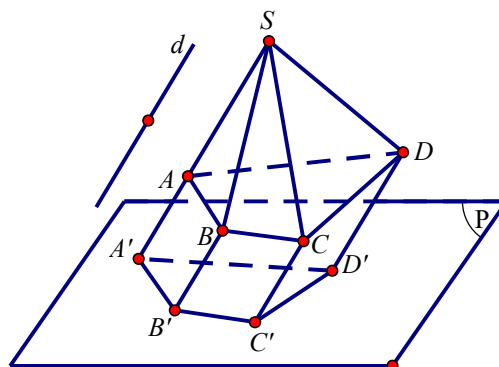
- Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA' cân tại A'. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA' biến tam giác ABC thành tam giác BCA'.
- Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA'' vuông tại A''. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA'' biến tam giác ABC thành tam giác vuông A''BC.



Ví dụ 2. Vẽ hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu SA (SA không song song với (P)).

Giải

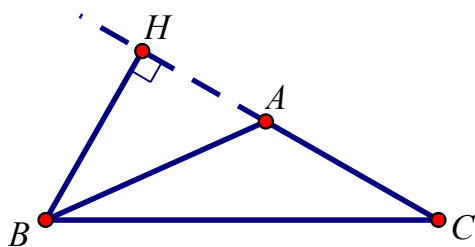
Vì phương chiếu d là SA nên SA cắt (P) tại A'. Các đỉnh B, C, D có hình chiếu trên (P) lần lượt là B', C', D' (BB' || AA', CC' || AA', DD' || AA'). Vậy hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên (P) là tứ giác A'B'C'D'.



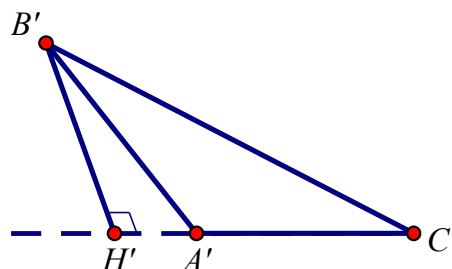
Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của tam giác ABC có góc A tù, đường cao BH.

Giải

Xem hình vẽ sau:



Hình thật



Hình biểu diễn

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

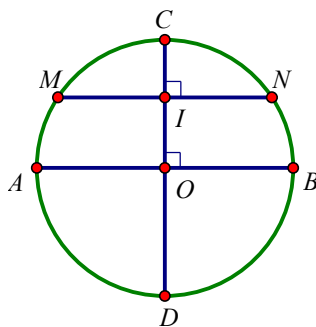
Giải

Giả sử trên hình thật ta có đường tròn tâm (O), tâm O, có hai đường kính AB và CD vuông góc. Nếu ta vẽ dây cung MN song song với AB thì CD sẽ cắt MN tại trung điểm I của MN.

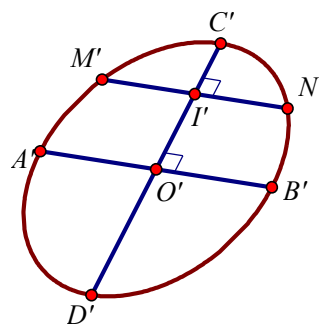
Suy ra cách vẽ hình biểu diễn như sau:

- Vẽ elip (E), tâm O' và đường kính $A'B'$ (qua O') của nó.
- Vẽ dây cung $M'N' \parallel A'B'$.
- Lấy I' là trung điểm của $M'N'$.

Đường thẳng $O'I'$ cắt elip (E) tại C' , D' . Ta có $A'B'$ và $C'D'$ là hình biểu diễn hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn.



Hình thật



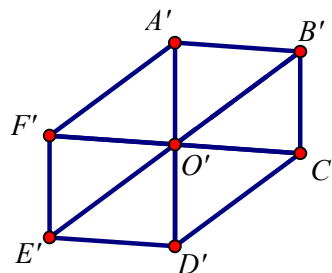
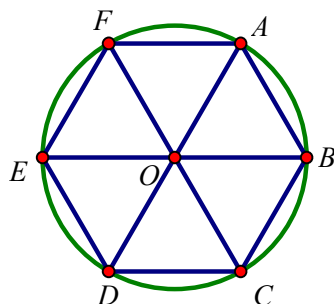
Hình biểu diễn

Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Giải

Xét hình lục giác đều ABCDEF, ta thấy:

- Tứ giác OABC là một hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O. Suy ra cách vẽ như sau:
- + Vẽ hình bình hành $O'A'B'C'$ biểu diễn cho hình thoi OABC.
- + Lấy các điểm D' , E' , F' đối xứng với các điểm A' , B' , C' qua O' .
- + $A'B'C'D'E'F'$ là hình cần vẽ.



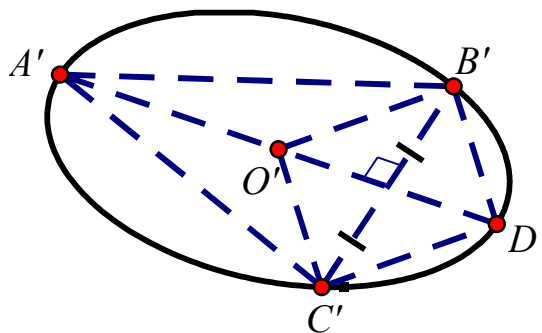
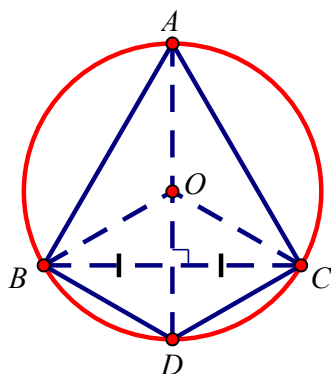
Hình biểu diễn lục giác đều

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

Giải

Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, ta thấy tứ giác OBDC là hình thoi. Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

- + Vẽ hình bình hành $O'B'D'C'$ biểu diễn cho hình thoi OBDC.
- + Lấy điểm A' là điểm đối xứng của D' qua O' .
- + Tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều cần tìm.



Hình biểu diễn tam giác đều

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

- Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

Giải

a. Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác BCD:

- Gọi I là trung điểm của CD. Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên mặt phẳng (BCD).
- Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I.

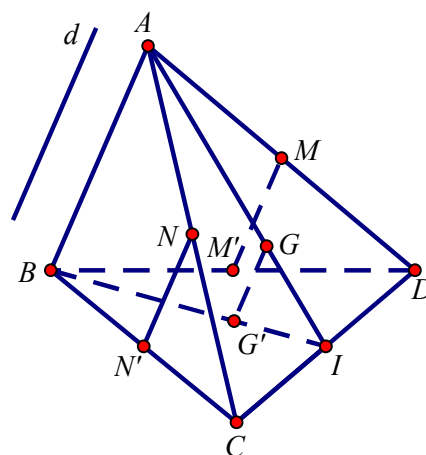
Trong tam giác IAB, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{IG}{IA} = \frac{IG'}{IB} \\ \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{IG'}{IB} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song phương AB trên mặt phẳng (BCD). Ta thấy:

- BD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD); M là trung điểm của AD nên M' là trung điểm của BD.
- BC là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (BCD); N là trung điểm của AC nên N' là trung điểm của BC.



Ví dụ 2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $BCC'B'$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB' , và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN \parallel BC'$.

Giải

- Phân tích:

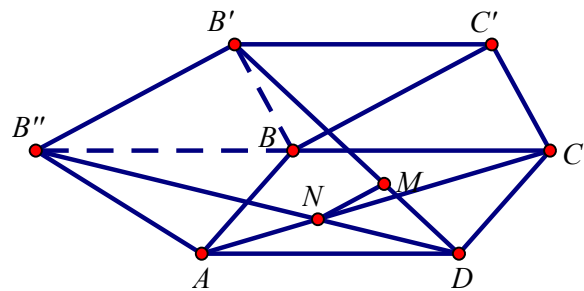
Giả sử đã tìm được $M \in DB'$ và $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC'$.

Xét phép chiếu song song theo phương BC' lên mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B'' . Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B'' cũng thẳng hàng. Do đó, N là giao điểm của DB'' và AC . Từ đó, ta có cách dựng như sau:

- Cách dựng:

- + Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương BC' lên mặt phẳng $(ABCD)$.
- + Dựng N là giao điểm của DB'' và AC .
- + Trong mặt phẳng $(DB'B'')$, ta kẻ $NM \parallel B'B''$ cắt DB' tại M .

Vậy M và N là các điểm cần tìm.



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

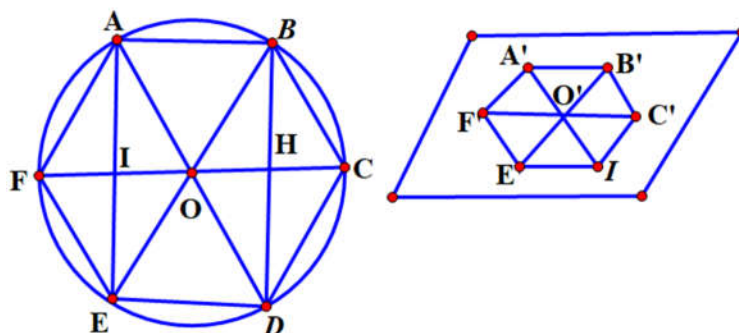
- a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó;
- b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó;
- c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau;
- d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Lời giải

Mệnh đề đúng là: a và b.

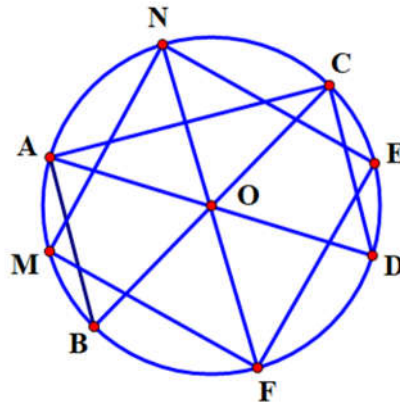
Bài 2. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Lời giải



Bài 3. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Lời giải

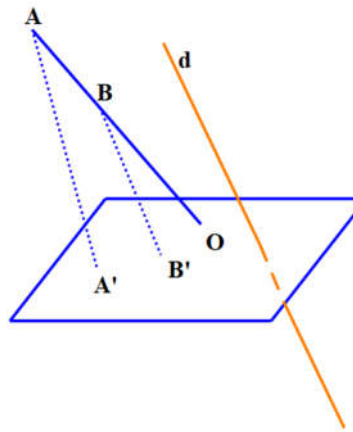


Bài 4. Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α) . Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho:

a) $A'B' = AB$;

b) $A'B' = 2AB$.

Lời giải



Hình chiếu của O theo phương d trên (α) là O

3 điểm O, A, B thẳng hàng nên hình chiếu A', B', O thẳng hàng

Ta có: $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA}$

a) Để $A'B' = AB$ thì $OA = OA'$.

Vậy d là đường thẳng song song với AA'' với $OA' = OA$.

b) Để $A'B' = 2AB$ thì $OA' = 2OA$.

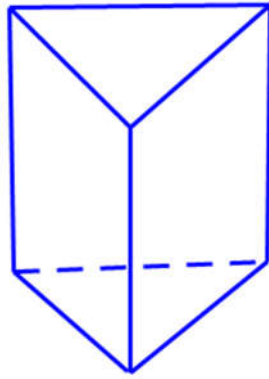
Vậy d là đường thẳng song song với AA" với OA"=2OA.

Bài 5. Vẽ hình biểu diễn của:

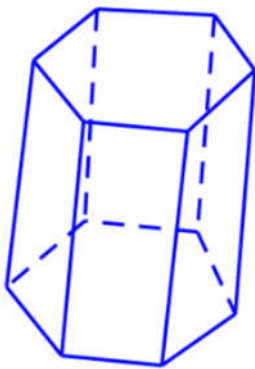
- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều;
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều;
- Hình hộp.

Lời giải

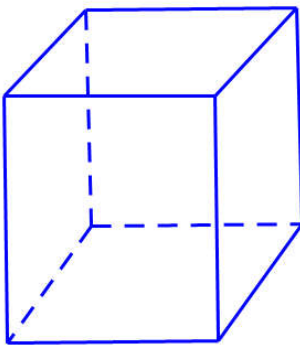
a)



b)



c)



D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

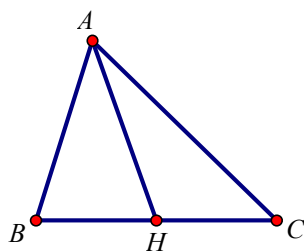
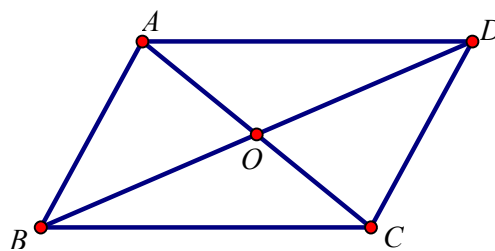
Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.
- B. Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.
- C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.
- D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Trên hình $\mathcal{A}$ có $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$ và hình $\mathcal{B}$ có $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$

Hình $\mathcal{A}$ Hình $\mathcal{B}$

Hãy Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. ABC là tam giác đều.
- B. ABC là tam giác cân tại A
- C. ABCD là hình thoi.
- D. B và C đúng.

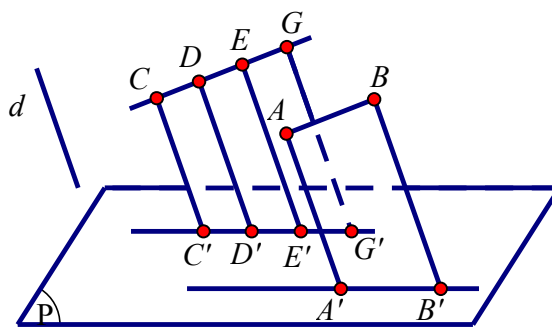
Lời giải

Chọn D

Nhìn hình vẽ, ta thấy:

- Tam giác ABC có AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A $\rightarrow$ B đúng.
- Tứ giác ABCD có $AB \parallel CD, AC \parallel BD$ nên là hình bình hành. Mặt khác hai đường chéo của nó vuông góc nên ABCD là hình thoi $\rightarrow$ C đúng.

Câu 3: Trên hình $\mathcal{C}$, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P); $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.

Hình $\mathcal{C}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$.
- B. $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$.
- C. $D'G' = A'B'$.
- D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Lời giải

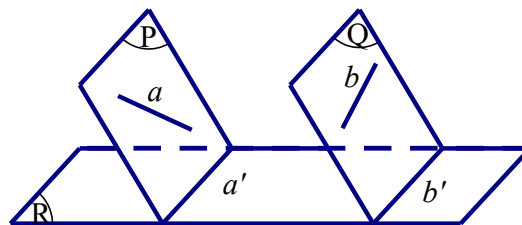
Chọn D

The định lí 2, ta thấy câu A và câu B đúng. Từ câu A đúng suy ra câu C đúng.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.
- C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.
- D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Lời giải



Chọn A

Dựng mặt phẳng (P) qua a và song song với b. Dựng mặt phẳng (Q) qua b và song song với a. Giả sử (P) song song với (Q). Ta Chọn phương chiếu d song song với (P) và mặt phẳng chiếu (R) sao cho (R) cắt (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a' và b'. Khi đó hình chiếu a', b' song song với nhau.

Câu 5: Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là hai đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. a' và b' luôn luôn cắt nhau.
- B. a' và b' có thể trùng nhau.
- C. a và b không thể song song.
- D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải

Chọn D

Gọi l là phương chiếu, (α) và (β) là các mặt phẳng song song với l và lần lượt đi qua a và b. Khi đó nếu (α) và (β) cắt nhau thì a' và b' cắt nhau, nếu (α) và (β) song song thì a' và b' song song.

Câu 6: Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:

- A. a và b phải song song với nhau.
- B. a và b phải cắt nhau.
- C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
- D. a và b không thể song song.

Lời giải

Chọn C

Nếu $a \parallel b'$ thì $mp(a, a') \parallel mp(b, b')$. Bởi vậy a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Câu 7: Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) lần lượt là bốn điểm A', B', C', D' . Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?

- A. $A'B'C'D'$ là bốn đỉnh của một hình bình hành.
- B. D' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.
- C. D' là trung điểm cạnh $A'B'$.
- D. Hai điểm B', C' nằm giữa hai điểm A' và D' .

Lời giải

Chọn D

Bốn điểm không đồng phẳng A', B', C', D' không thể thẳng hàng.

Câu 8: Hình chiếu song song của một hình thang $ABCD$ không thể là hình nào dưới đây?

- A. Hình bình hành.
- B. Hình tam giác cân.
- C. Đoạn thẳng.
- D. Bốn điểm thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC . Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình 1). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. $M \in (ABC)$. B. $C \in (ABM)$. C. $A \in (MBC)$. D. $B \in (ACM)$.

Lời giải

Chọn D

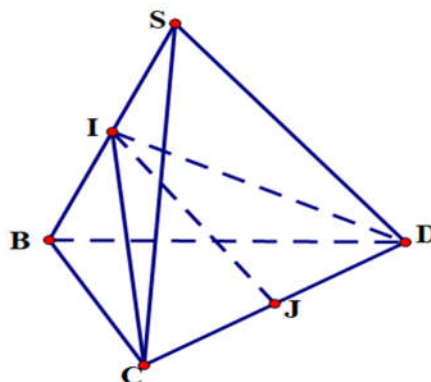
Vì A, C, M thẳng hàng nên (ACM) không phải mặt phẳng.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng. B. Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.
C. Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng. D. Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

Lời giải

Chọn D

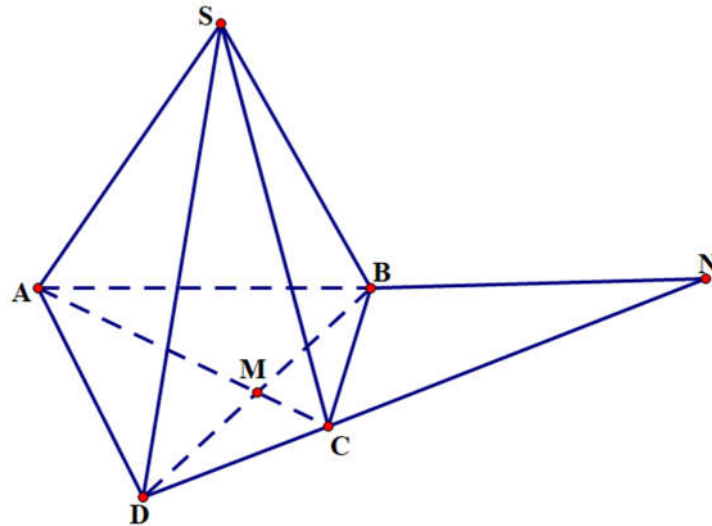


Câu 3: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có AC cắt BD tại M , AB cắt CD tại N . Trong các đường thẳng sau đây, đường nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD) ?

- A. SM . B. SN . C. SB . D. SC

Lời giải

Chọn A

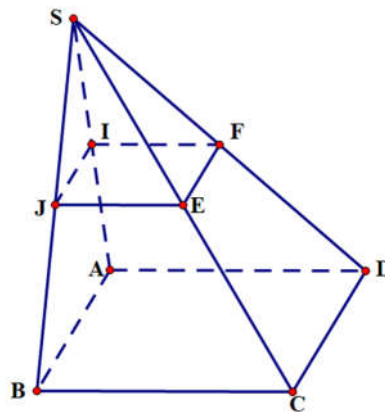


Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường nào không song song với IJ ?

- A. EF . B. DC . C. AD . D. AB .

Lời giải

Chọn C

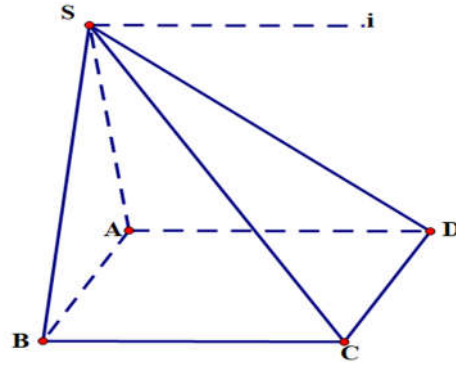


Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. AB . B. AC . C. BC . D. SA .

Lời giải

Chọn A



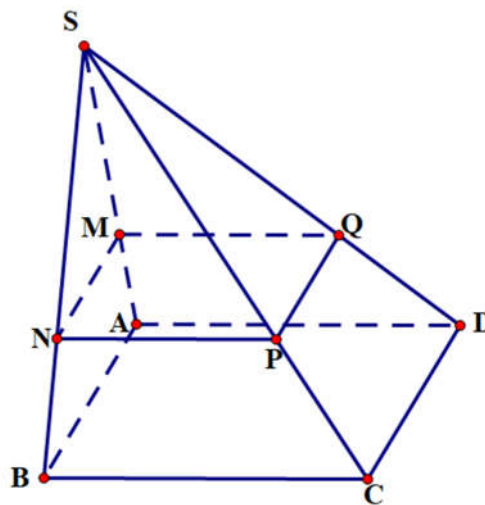
Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt

phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

- A. $\frac{400}{9}$. B. $\frac{200}{3}$. C. $\frac{40}{9}$. D. $\frac{200}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Qua M dựng đường thẳng song song AB cắt SB tại N .

Qua M dựng đường thẳng song song AD cắt SD tại Q .

Qua N dựng đường thẳng song song BC cắt SC tại P .

Ta có $MN \parallel AB$ nên $MN \parallel (ABCD)$; $NP \parallel BC$ nên $NP \parallel (ABCD)$

Suy ra $(MNPQ) \parallel (ABCD)$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{MN}{AB} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Mà } S_{ABCD} = 10 \cdot 10 = 100.$$

$$\text{Do đó, } S_{MNPQ} = 100 \cdot \frac{4}{9} = \frac{400}{9}.$$

Câu 7: Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

- A.** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q) .
- B.** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q) .
- C.** Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
- D.** Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Lời giải

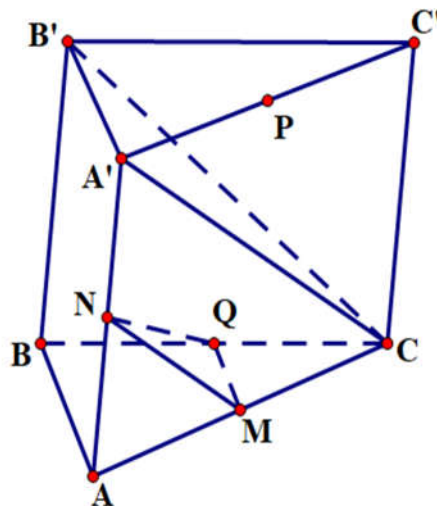
Chọn A

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, AA', A'C', BC$. Ta có:

- A.** $(MNP) // (BCA)$. **B.** $(MNQ) // (A'B'C')$. **C.** $(NQP) // (CAB)$.
- D.** $(MPQ) // (ABA')$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC có QM là đường trung bình nên $QM // AB$. Suy ra $QM // (ABA')$.

Hình bình hành $ACC'A'$ có MP là đường trung bình nên $MP // AA'$. Suy ra $MP // (ABA')$

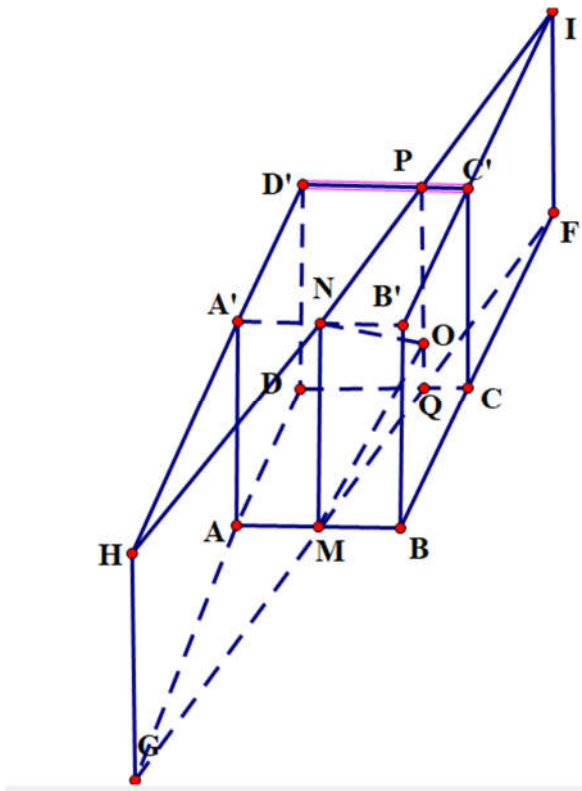
mà MP và QM cắt

nhau nên $(MPQ) // (ABA')$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CCD'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

Lời giải



Qua O kẻ đường thẳng song song với MN cắt $D'C'$ và DC lần lượt tại P và Q .

Gọi $I = NP \cap B'C'$; $F = MQ \cap BC$; $H = A'C' \cap NP$; $G = AD \cap MQ$.

Giao tuyến của (OMN) với $(ABCD)$ là: MQ

Giao tuyến của (OMN) với $(A'B'C'D')$ là: NP

Giao tuyến của (OMN) với $(CDD'C')$ là: PQ

Giao tuyến của (OMN) với $(ABB'A')$ là: MN

Giao tuyến của (OMN) với $(BCC'B')$ là: IF

Giao tuyến của (OMN) với $(ADD'A')$ là: HG

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tam giác SAD đều. M là điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q .

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x .

$$\frac{IQ}{QM} = \frac{SI}{BM} \Leftrightarrow \frac{IQ}{QM + IQ} = \frac{SI}{BM + SI} \Leftrightarrow \frac{IQ}{IM} = \frac{SI}{BM + SI} \Leftrightarrow \frac{IQ}{a} = \frac{x}{a - x + x} \Leftrightarrow IQ = x$$

$$S_{IMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \frac{S_{IQP}}{S_{IMN}} = \left(\frac{IQ}{IM} \right)^2 = \left(\frac{x}{a} \right)^2$$

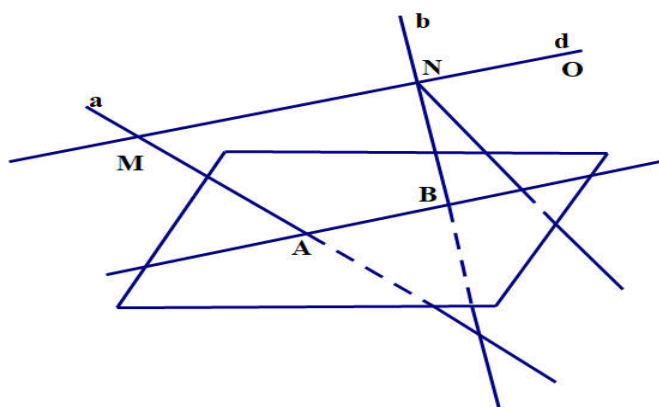
$$\text{Suy ra } S_{IPQ} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = S_{IMN} - S_{IPQ} = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 - x^2)$$

Câu 11: Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B . Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M , cắt b tại N . Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C .

- Tứ giác $MNCA$ là hình gì?
- Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài MN nhỏ nhất.

Lời giải



- Do mặt phẳng $(AMNC)$ chứa $d // (\alpha)$ và cắt (α) tại AC nên $AC // d$ hay $AC // MN$. Mà $MA // NC$ nên tứ giác $MNCA$ là hình bình hành.
- Do mặt phẳng $(AMNB)$ chứa $d // (\alpha)$ và cắt (α) tại AB nên $AB // d$ hay $AB // MN$. Mà nên thẳng hàng. Vậy C luôn luôn chạy trên AB cố định.

Câu 12: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA$; $NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB , cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng:

- $MN // DE$; b) $M_1N_1 // (DEF)$; c) $(MNN_1M_1) // (DEF)$.

Lời giải

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG IV

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

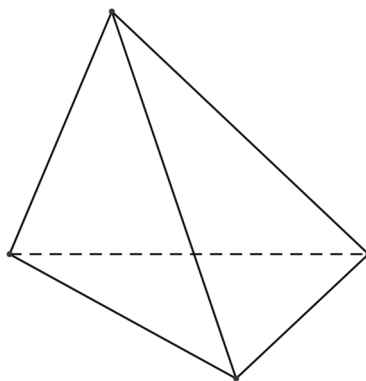
Câu 1: Trong các hình chóp, hình chóp có ít cạnh nhất có số cạnh là bao nhiêu?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Hình tứ diện là hình chóp có số cạnh ít nhất.



Câu 2: Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi. Hình nào sau đây không thể là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$?

- A. Tam giác. B. Tứ giác. C. Ngũ giác. D. Lục giác.

Lời giải

Chọn D

Hình chóp $S.ABCD$ có 5 mặt nên thiết diện của hình chóp có tối đa 5 cạnh. Vậy thiết diện

không thể là lục giác.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Thiết diện của mặt phẳng (α) tùy ý với hình chóp không thể là:

- A. Lục giác. B. Ngũ giác. C. Tứ giác. D. Tam giác.

Lời giải

Chọn A

Thiết diện của mặt phẳng với hình chóp là đa giác được tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng đó với mỗi mặt của hình chóp.

Hai mặt phẳng bất kì có nhiều nhất một giao tuyến.

Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có 5 mặt nên thiết diện của (α) với $S.ABCD$ có không qua 5 cạnh, không thể là hình lục giác 6 cạnh.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C

- A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.
- B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 5: Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Khi đó, với 4 điểm không đồng phẳng ta tạo được tối đa $C_4^3 = 4$ mặt phẳng.

Câu 6: Trong mặt phẳng (α) , cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Với điểm S không thuộc mặt phẳng (α) và 4 điểm A, B, C, D thuộc mặt phẳng (α) , ta có C_4^2 cách chọn 2 trong 4 điểm A, B, C, D cùng với điểm S lập thành 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 6.

Câu 7: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Ba điểm phân biệt. B. Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau.

D. Bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Chọn C

- A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.
- B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

4 điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm A, B, C, D đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 9: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.
- B. Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .
- C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.
- D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng phân biệt không song song với nhau thì chúng có duy nhất một giao tuyến.

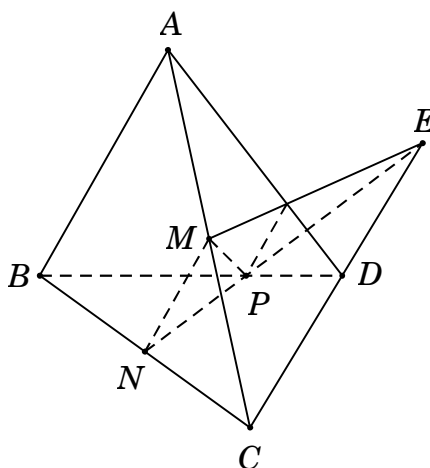
- A sai. Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì 2 mặt phẳng có vô số điểm chung. Khi đó, chưa đủ điều kiện để kết luận A, B, C thẳng hàng.
- B sai. Có vô số đường thẳng đi qua A , khi đó B, C chưa chắc đã thuộc giao tuyến của (P) và (Q) .
- C sai. Hai mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt giao nhau tại 1 giao tuyến duy nhất, nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng thì A, B, C cùng thuộc giao tuyến.

Câu 10: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A. CD và NP . B. CD và MN . C. CD và MP . D. CD và AP .

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét mặt phẳng (BCD) chứa CD .

Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E .

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E .

Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và $mp(MNP)$ là giao điểm E của NP và CD .

Câu 11: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Ba điểm. B. Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau.

D. Bốn điểm.

Lời giải

Chọn C

A Sửa lại cho đúng: Ba điểm không thẳng hàng.

B Sửa lại cho đúng: Một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

Câu 12: Cho tam giác ABC . Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh tam giác ABC ?

A. 4.

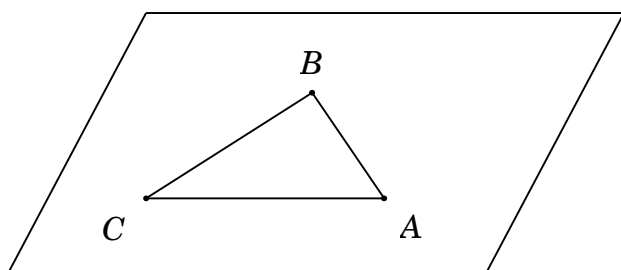
B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D



Ta có ABC là tam giác $\longrightarrow$ ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy có duy nhất một mặt phẳng chứa A, B, C .

Câu 13: Trong $mp(\alpha)$, cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm $S \notin mp(\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Điểm S cùng với hai trong số bốn điểm A, B, C, D tạo thành một mặt phẳng, từ bốn điểm ta có 6 cách chọn ra hai điểm, nên có tất cả 6 mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên.

Câu 14: Cho năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có bốn điểm nào ở trên cùng một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong số năm điểm đã cho?

A. 10.

B. 12.

C. 8.

D. 14.

Lời giải

Chọn A

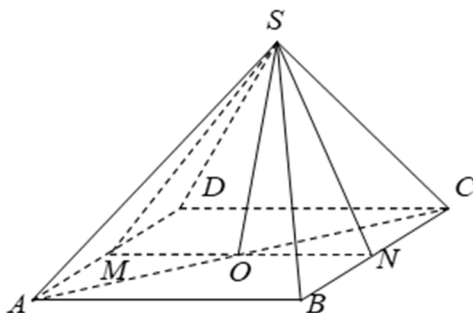
Cứ chọn ra ba điểm trong số năm điểm A, B, C, D, E ta sẽ có một mặt phẳng. Từ năm điểm ta có 10 cách chọn ra ba điểm bất kỳ trong số năm điểm đã cho, nên có 10 phẳng tạo bởi ba trong số năm điểm đã cho.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

- A. SD . B. SO , O là tâm hình bình hành $ABCD$.
C. SG , G là trung điểm AB . D. SF , F là trung điểm CD .

Lời giải

Chọn B



S là điểm chung thứ nhất của (SMN) và (SAC) .

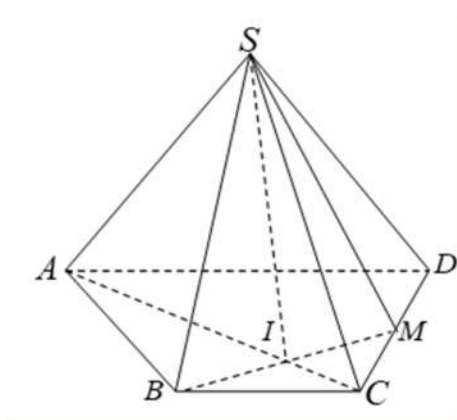
O là giao điểm của AC và MN nên $O \in AC, O \in MN$ do đó O là điểm chung thứ hai của (SMN) và (SAC) . Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là SO .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SI , I là giao điểm AC và BM . B. SJ , J là giao điểm AM và BD .
C. SO , O là giao điểm AC và BD . D. SP , P là giao điểm AB và CD .

Lời giải

Chọn A



S là điểm chung thứ nhất của (MSB) và (SAC) .

I là giao điểm của AC và BM nên $I \in AC, I \in BM$ do đó I là điểm chung thứ hai của (MSB) và (SAC) . Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là SI .

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mp(α) qua AB cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình thang. C. Hình lục giác. D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn A

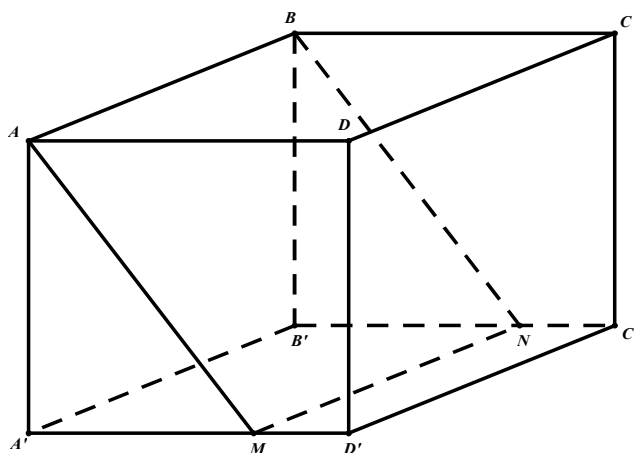
Thiết diện là hình bình hành.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T). Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. (T) là hình chữ nhật. B. (T) là hình bình hành.
C. (T) là hình thoi. D. (T) là hình vuông.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện $ABNM$ là hình chữ nhật.

Câu 19: Cho tam giác ABC ở trong mp(α) và phương l . Biết hình chiếu của tam giác ABC lên mp(P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $(\alpha) // (P)$ B. $(\alpha) \equiv (P)$
C. $(\alpha) // l$ hoặc $(\alpha) \supset l$ D. A; B; C đều sai.

Lời giải

Chọn C

Khi phương chiếu l thỏa mãn $(\alpha) // l$ hoặc $(\alpha) \supset l$ thì các đoạn thẳng AB, BC, CA có hình chiếu lên (P) nằm trên giao tuyến của (α) và (P) .

Câu 20: Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b , mặt phẳng chiếu là (P) , hai đường thẳng a và b biến thành a' và b' . Quan hệ nào giữa a và b không được bảo toàn đối với phép chiếu song song?

- A. Cắt nhau B. Chéo nhau C. Song song D. Trùng nhau

Lời giải

Chọn B

Phép chiếu song song lên mặt phẳng không bảo toàn mối quan hệ giữa hai đường thẳng chéo nhau trong không gian.

Câu 21: Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

- A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật D. Hình thoi

Lời giải

Chọn A

Do phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau, nên không thể có đáp án A

Câu 22: Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm A, B, C, D, E ?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Lời giải

Chọn B

Điểm E và 2 điểm bất kì trong 4 điểm A, B, C, D tạo thành 6 mặt phẳng

Bốn điểm A, B, C, D tạo thành 1 mặt phẳng.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng.

Câu 23: Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Do bốn điểm không đồng phẳng nên không tồn tại bộ ba điểm thẳng hàng trong số bốn điểm đó. Cứ ba điểm không thẳng hàng xác định một mặt phẳng nên số mặt phẳng phân biệt có thể lập được từ bốn điểm đã cho là $C_4^3 = 4$.

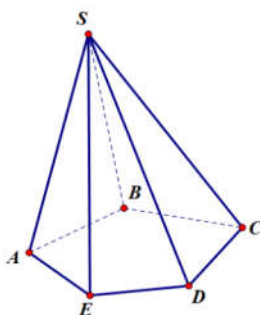
Câu 24: Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là.

- A. 5 mặt, 5 cạnh. B. 6 mặt, 5 cạnh. C. 6 mặt, 10 cạnh. D. 5 mặt, 10 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Hình chóp ngũ giác có 5 mặt bên và 1 mặt đáy; 5 cạnh bên và 5 cạnh đáy.



Câu 625 : Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng xác định bởi các điểm A, B, C, D ?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

Chọn A

Có $C_4^2 + 1 = 7$ mặt phẳng.

Câu 25: Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A . Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

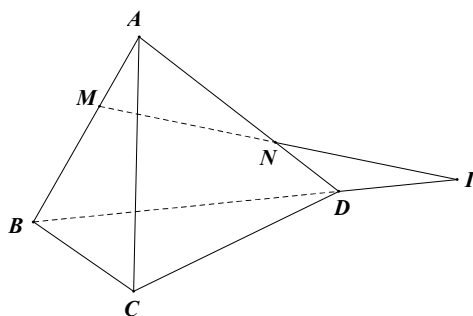
Có 3 mặt phẳng gồm $(a, b), (A, a), (A, b)$.

Câu 26: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây?

- A. (BCD) . B. (ABD) . C. (CMN) . D. (ACD) .

Lời giải

Chọn D



$$I \in BD \Rightarrow I \in (BCD), (ABD).$$

$$I \in MN \Rightarrow I \in (CMN).$$

Câu 27: Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Do bốn điểm không đồng phẳng nên không tồn tại bộ ba điểm thẳng hàng trong số bốn điểm đó. Cứ ba điểm không thẳng hàng xác định một mặt phẳng nên số mặt phẳng phân biệt có thể lập được từ bốn điểm đã cho là $C_4^3 = 4$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng

A. SN .

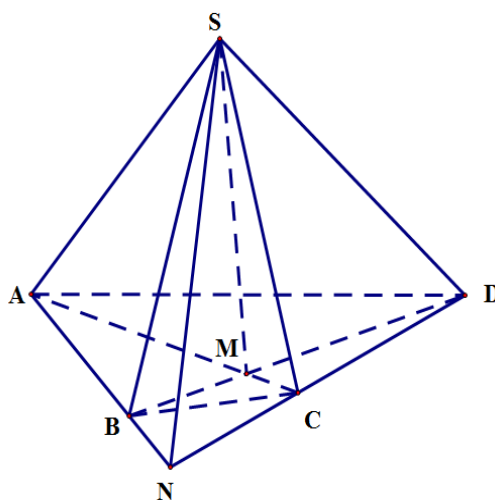
B. SC .

C. SB .

D. SM .

Lời giải

Chọn D



Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng SM .

Câu 29: Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng thuộc $mp(\alpha)$. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Vị trí tương đối của hai đường thẳng cùng nằm trong 1 mặt phẳng là:

☐ Hai đường thẳng trùng nhau.

☐ Hai đường thẳng cắt nhau.

☐ Hai đường thẳng song song.

Câu 30: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B

Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có thể trùng nhau. Khi đó, chúng có vô số đường thẳng chung $\Rightarrow$ B sai.

Câu 31: Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là:

A. 5 mặt, 5 cạnh.

B. 6 mặt, 5 cạnh.

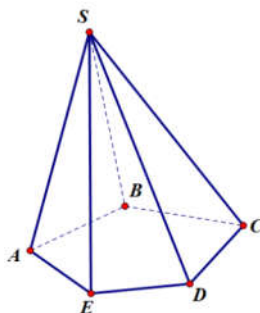
C. 6 mặt, 10 cạnh.

D. 5 mặt, 10 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Hình chóp ngũ giác có 5 mặt bên + 1 mặt đáy. 5 cạnh bên và 5 cạnh đáy.

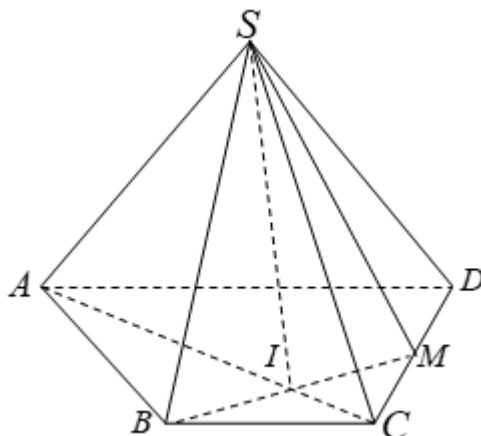


Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SI , I là giao điểm AC và BM . B. SJ , J là giao điểm AM và BD .
C. SO , O là giao điểm AC và BD . D. SP , P là giao điểm AB và CD .

Lời giải

Chọn A



S là điểm chung thứ nhất của (MSB) và (SAC) .

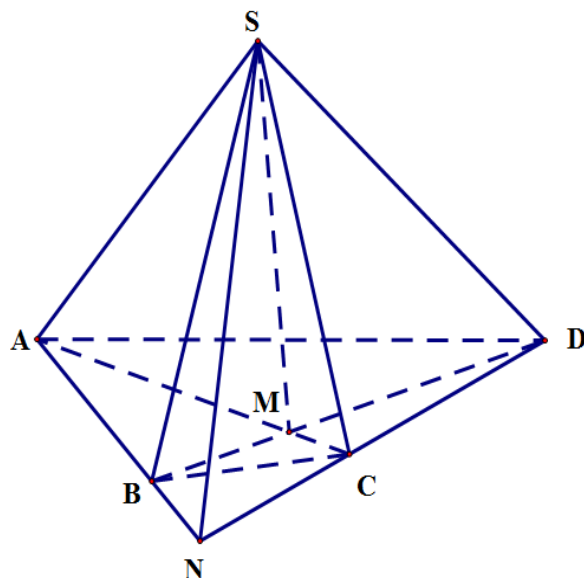
I là giao điểm của AC và BM nên $I \in AC$, $I \in BM$ do đó I là điểm chung thứ hai của (MSB) và (SAC) . Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là SI .

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng

- A. SN . B. SC . C. SB . D. SM .

Lời giải

Chọn D



Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng SM .

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng

A. SN .

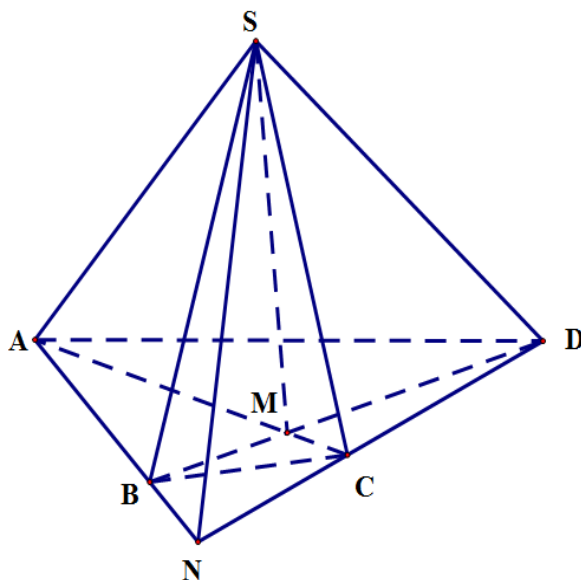
B. SA .

C. MN .

D. SM .

Lời giải

Chọn A



Câu 35: Hình hộp có số mặt chéo là:

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

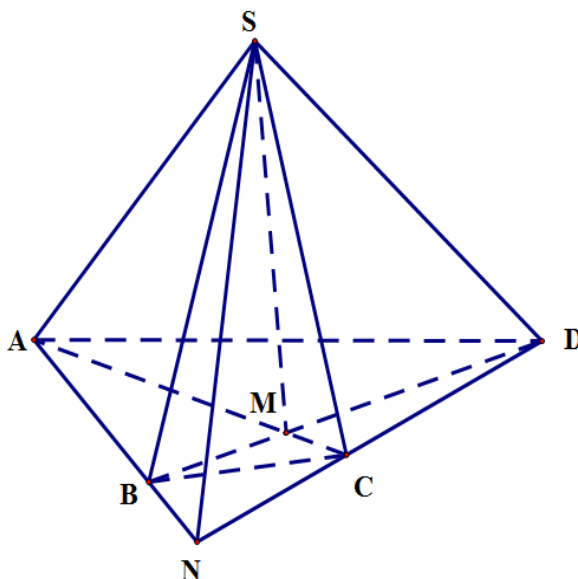
Hình hộp $ABCD A' B' C' D'$ có 2 mặt chéo là $ACC' A'$ và $BDD' B'$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng

A. SN .B. SC .C. SB .D. SM .

Lời giải

Chọn D



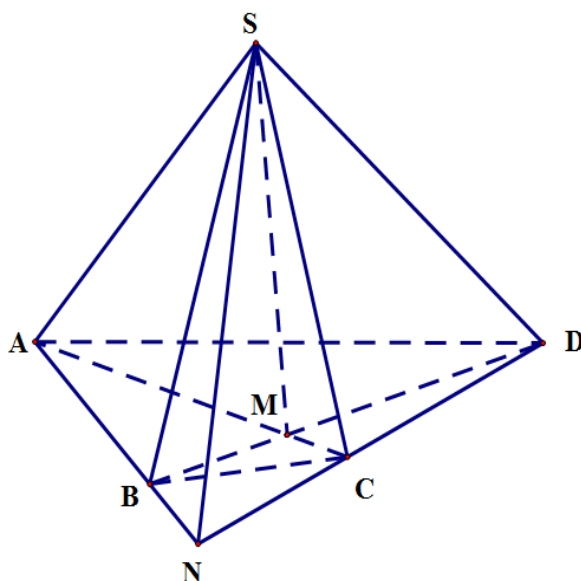
Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng SM .

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng

A. SN .B. SA .C. MN .D. SM .

Lời giải

Chọn A



Câu 38: Trong không gian cho hai đường thẳng song song a và b . Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Nếu c cắt a thì c cắt b .
- B. Nếu c chéo a thì c chéo b .
- C. Nếu c cắt a thì c chéo b .
- D. Nếu đường thẳng c song song với a thì c song song hoặc trùng b .

Lời giải

Chọn D

- * Nếu c cắt a thì c có thể chéo b nên A sai.
- * Nếu c chéo a thì c có thể cắt b nên B sai.
- * Nếu c cắt a thì c có thể cắt b nên C sai.
- * Vậy chọn D

Câu 39: Xét các mệnh đề sau trong không gian, hỏi mệnh đề nào sai?

- A. Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không nằm trên (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn C

Ta có ngay A, B, D đúng.

Đáp án C sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau.

Câu 40: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- A. Trong không gian hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung
- B. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau
- C. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau
- D. Trong không gian hình biểu diễn của một góc thì phải là một góc bằng nó

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề đúng là: “Trong không gian hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.”

Câu 41: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì cắt nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

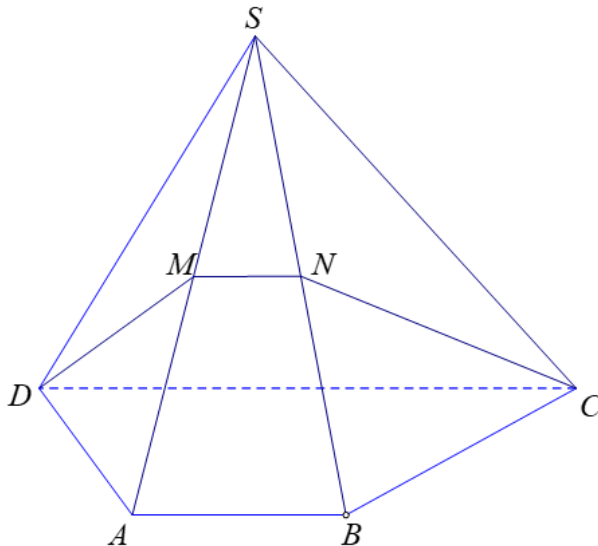
Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì có ba vị trí tương đối là: song với nhau, trùng nhau và cắt nhau. Do đó hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn là CD . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD) . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. MN và SD cắt nhau.
- B. $MN \parallel CD$.
- C. MN và SC cắt nhau.
- D. MN và CD chéo nhau.

Lời giải

Chọn B



Vì (MCD) chứa $CD \parallel AB$ nên mặt phẳng (MCD) cắt các mặt phẳng chứa AB theo các giao tuyến song song với AB . Mà M là một điểm chung của (MCD) và (SAB) nên theo nhận xét trên giao tuyến MN phải song song với AB . Vậy $MN \parallel CD$.

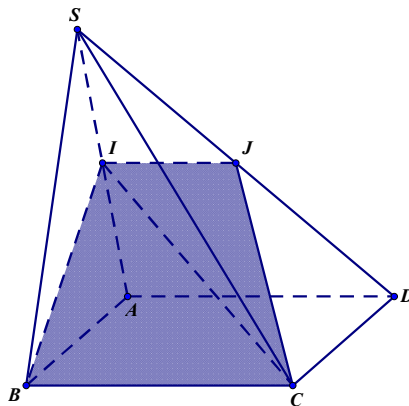
Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I là trung điểm của SA , thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

- A. $\triangle IBC$.

- B. Hình thang $IJBC$ (J là trung điểm của SD).
- C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm của SB).
- D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(IBC) \cap (ABCD) = BC$; $(IBC) \cap (SAB) = IB$

Tìm $(IBC) \cap (SAD)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} I \in (IBC) \cap (SAD) \\ BC \in (IBC) \\ AD \in (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow (IBC) \cap (SAD) = Ix \parallel AD \parallel BC$$

Xét (SAD) : Gọi $J = Ix \cap SD$, mà $IA = IS$, $Ix \parallel AD \Rightarrow JS = JD$

$$\Rightarrow (IBC) \cap (SAD) = IJ \Rightarrow (IBC) \cap (SDC) = JC$$

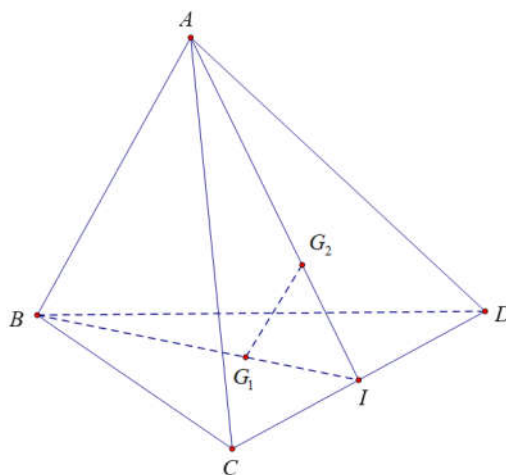
Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $IJBC$.

Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD . Chọn câu **sai**.

- A. $G_1G_2 = \frac{2}{3} AB$.
- B. BG_1 , AG_2 và CD đồng qui.
- C. $G_1G_2 \parallel (ABD)$.
- D. $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\frac{IG_1}{IB} = \frac{IG_2}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \frac{1}{3}AB$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC .

Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. GE và CD chéo nhau.

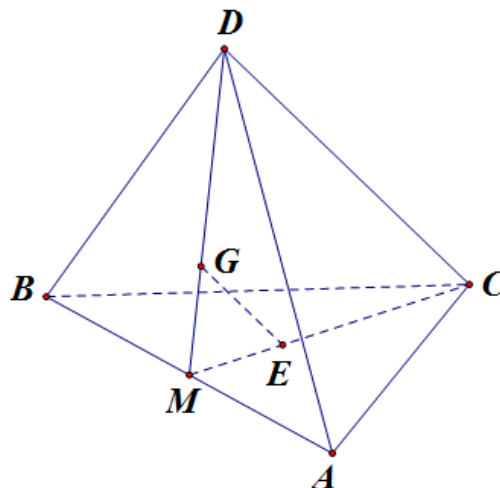
B. $GE \parallel CD$.

C. GE cắt AD .

D. GE cắt CD .

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB . Trong tam giác MCD có $\frac{MG}{MD} = \frac{ME}{MC} = \frac{1}{3}$ suy ra $GE \parallel CD$

Câu 46: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC' .

Khi đó CB' song song với

A. AM .

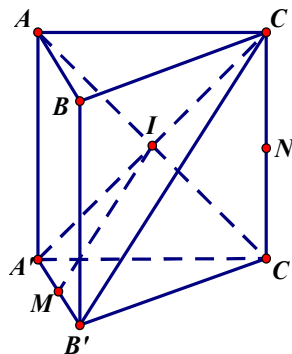
B. $A'N$.

C. $(BC'M)$.

D. $(AC'M)$.

Lời giải

Chọn D



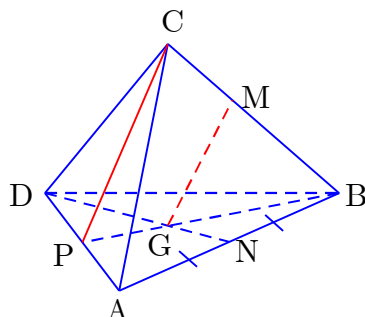
Gọi I là trung điểm của $A'C$. Ta có $MI \parallel B'C$ và $MI \subset (AC'M)$. Do đó $CB' \parallel (AC'M)$.

Câu 47: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm $\triangle ABD$ và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng

- A. (ACD) .. B. (ABC) .. C. (ABD) .. D. (BCD) .

Lời giải

Chọn A



Gọi P là trung điểm AD

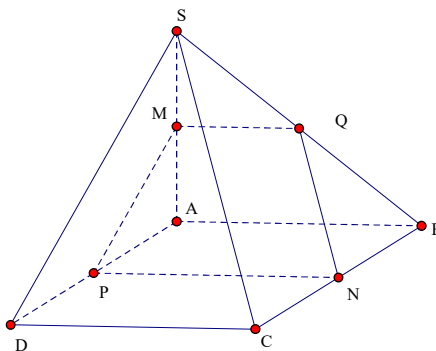
Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{BP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MG \parallel CP \Rightarrow MG \parallel (ACD)$..

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Mặt phẳng (P) đi qua M, N và song song với SD cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình vuông. B. Hình thang vuông. C. Hình thang cân. D. Hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



$$\begin{cases} M \in (P) \cap (SDC) \\ (P) \parallel SD \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SDC) = MP, MP \parallel SD \text{ và } P \text{ là trung điểm } SD.$$

$$\begin{cases} NP = (P) \cap (ABDC) \\ PN \parallel AB \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel AB.$$

$$\begin{cases} M \in (P) \cap (SAB) \\ (P) \parallel AB \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAB) = MQ, MQ \parallel AB \text{ và } Q \text{ là trung điểm } SB.$$

$$\text{Do } AB \perp (SDA) \Rightarrow MQ \perp (SDA) \Rightarrow MQ \perp MP.$$

$$\text{Tứ giác } MPNQ \text{ có } \begin{cases} MQ \parallel PN \\ MQ \perp MP \end{cases}.$$

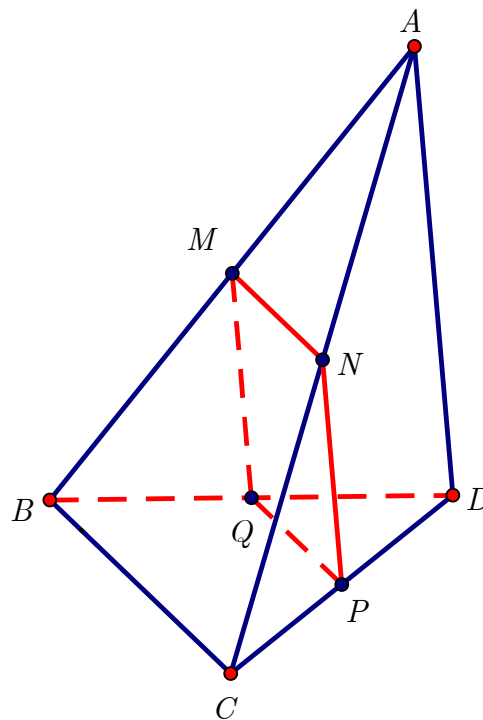
Vật thiết diện của hình chóp bởi mặt phẳng (P) là hình thang vuông $MPNQ$.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD , thiết diện thu được là hình gì?

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Ngũ giác.

Lời giải

Chọn C



Gọi α là mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD .

Xét (α) và (ABD) có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel AD \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ABD) = MQ$ với Q là trung điểm BD .

Xét (α) và (BCD) có $\begin{cases} Q \in (\alpha) \cap (BCD) \\ (\alpha) \parallel BC \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (BCD) = QP$ với P là trung điểm CD .

Xét (α) và (ACD) có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ACD) \\ (\alpha) \parallel AD \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ACD) = NP$ với N là trung điểm AC .

Mà MN, PQ là hai đường trung bình của tam giác ABC và DBC .

Nên ta có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$

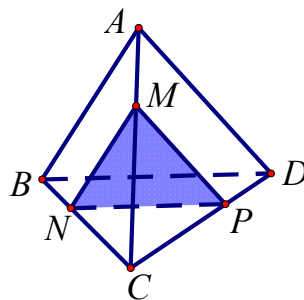
Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A , M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

- A.** Hình tam giác **B.** Hình bình hành **C.** Hình vuông **D.** Hình chữ nhật

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left. \begin{array}{l} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN \text{ với } MN // AB \text{ và } N \in BC.$

Ta có $\left. \begin{array}{l} (\alpha) // AD \\ AD \subset (ADC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = MP \text{ với } MP // AD \text{ và } P \in CD.$

$(\alpha) \cap (BCD) = NP.$

Do đó thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP .

Câu 51: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khẳng định nào **đúng** về hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$.

A. $(A'BD) \perp (CB'D').$

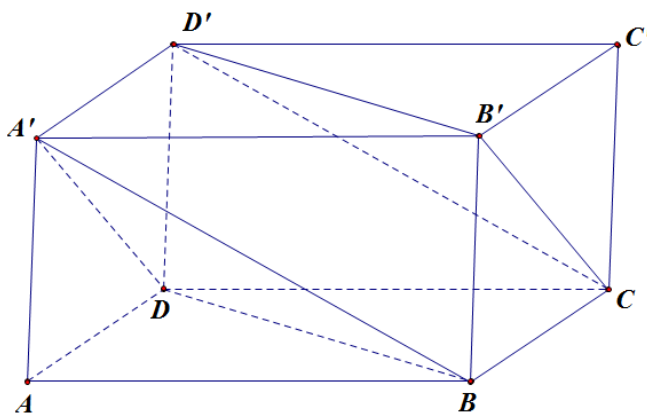
B. $(A'BD) // (CB'D').$

C. $(A'BD) \equiv (CB'D').$

D. $(A'BD) \cap (CB'D') = BD'.$

Lời giải

Chọn B



Ta có $CD' // A'B$ mà $A'B \subset (A'BD)$ nên $CD' // (A'BD).$

$CB' // A'D$ mà $A'D \subset (A'BD)$ nên $CB' // (A'BD).$

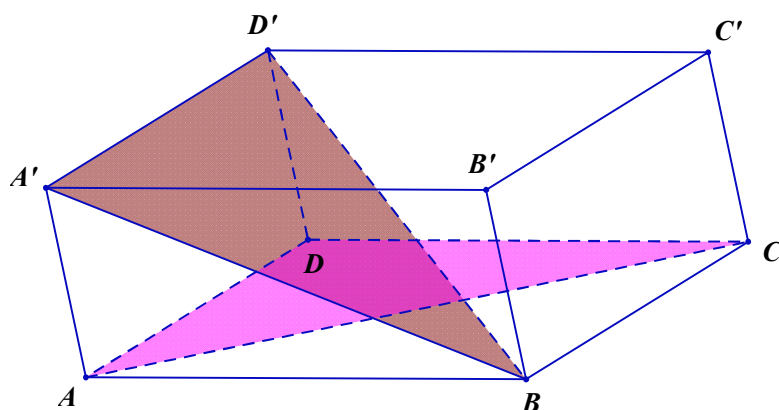
Vậy $(CB'D')$ chứa hai đường thẳng CD' , CB' cắt nhau và cùng song song với $(A'BD)$ từ đó ta có $(A'BD) // (CB'D')$.

Câu 52: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
 B. $(BDA') \parallel (D'B'C)$.
 C. $(BA'D') \parallel (ADC)$.
 D. $(ACD') \parallel (A'C'B)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $(BA'D') \equiv (BCA'D')$ và $(ADC) \equiv (ABCD)$.

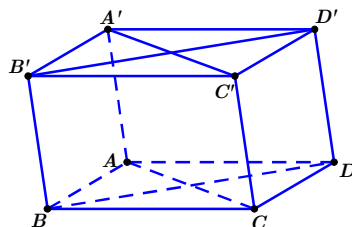
Mà $(BCA'D') \cap (ABCD) = BC$, suy ra $(BA'D') \parallel (ADC)$ **sai.**

Câu 53: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$. B. $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.
C. $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$. D. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

Lời giải

Chon C



A đúng vì hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là hai mặt đối của hình hộp nên song song.

B đúng vì hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BCC'B')$ là hai mặt đối của hình hộp nên song song.

D đúng vì hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ là hai mặt đối của hình hộp nên song song.

C sai vì hai mặt phẳng này cắt nhau.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (NOM) cắt (OPM) .

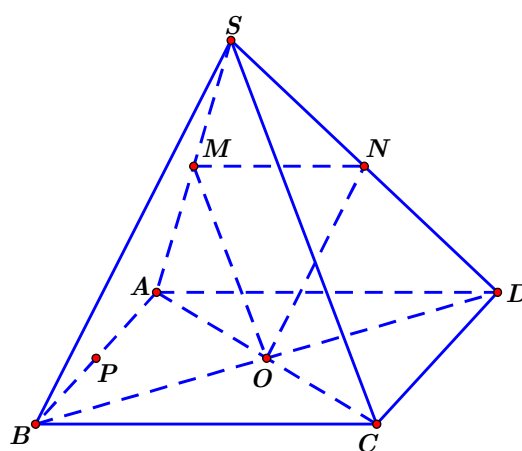
B. $(MON) // (SBC)$.

C. $(PON) \cap (MNP) = NP$.

D. $(NMP) // (SBD)$.

Lời giải

Chọn B



Xét hai mặt phẳng (MON) và (SBC) .

Ta có: $OM // SC$ và $ON // SB$.

Mà $BS \cap SC = C$ và $OM \cap ON = O$.

Do đó $(MON) // (SBC)$.

Câu 55: Cho đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow a // b$.

B. $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow a // (\beta)$ và $b // (\alpha)$.

C. $a // b \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn B

- Do $(\alpha) // (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$ nên $a // (\beta)$.

- Tương tự, do $(\alpha) // (\beta)$ và $b \subset (\beta)$ nên $b // (\alpha)$.

Câu 56: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm

trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax , By , Cz , Dt tương ứng tại A' , B' , C' , D' sao cho $AA' = 3$, $BB' = 5$, $CC' = 4$. Tính DD' .

A. 4.

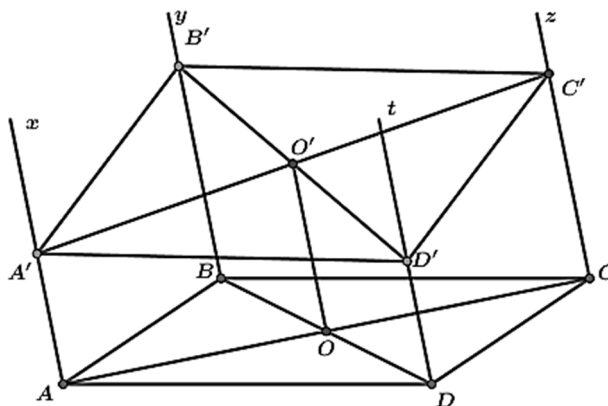
B. 6.

C. 2.

D. 12.

Lời giải

Chọn C



Do (P) cắt mặt phẳng (Ax, By) theo giao tuyến $A'B'$; cắt mặt phẳng (Cz, Dt) theo giao tuyến $C'D'$, mà hai mặt phẳng (Ax, By) và (Cz, Dt) song song nên $A'B' \parallel C'D'$.

Tương tự có $A'D' \parallel B'C'$ nên $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Gọi O , O' lần lượt là tâm $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Dễ dàng có OO' là đường trung bình của hai hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ nên $OO' = \frac{AA' + CC'}{2} = \frac{BB' + DD'}{2}$.

Từ đó ta có $DD' = 2$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy AD và BC . Gọi M là trọng tâm tam giác SAD , N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD = \frac{PC}{2}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) là một đường thẳng song song với BC .

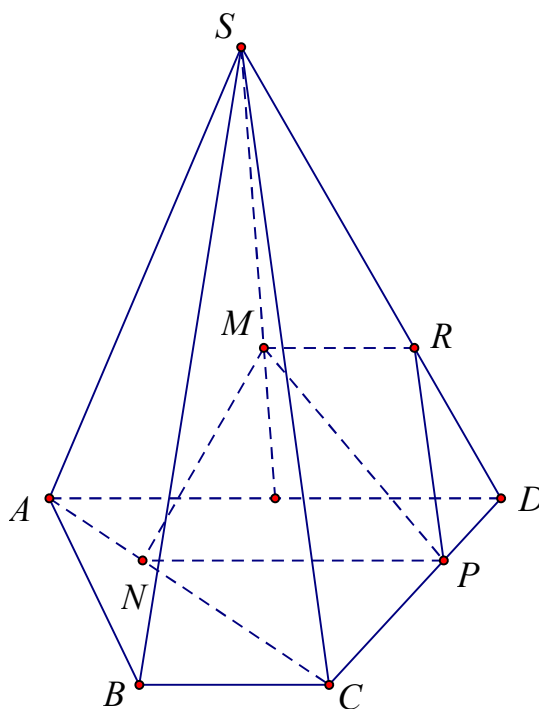
B. MN cắt (SBC) .

C. $(MNP) \parallel (SAD)$.

D. $MN \parallel (SBC)$ và $(MNP) \parallel (SBC)$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } \begin{cases} NA = \frac{NC}{2} \\ PD = \frac{PC}{2} \end{cases} \Rightarrow NP \parallel AD \parallel BC \quad (1).$$

$M \in (SAD) \cap (MNP)$. Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) là đường thẳng d qua M song song với BC và MN .

Gọi R là giao điểm của d với SD .

$$\text{Dễ thấy: } \frac{DR}{DS} = \frac{DP}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow PR \parallel SC \quad (2).$$

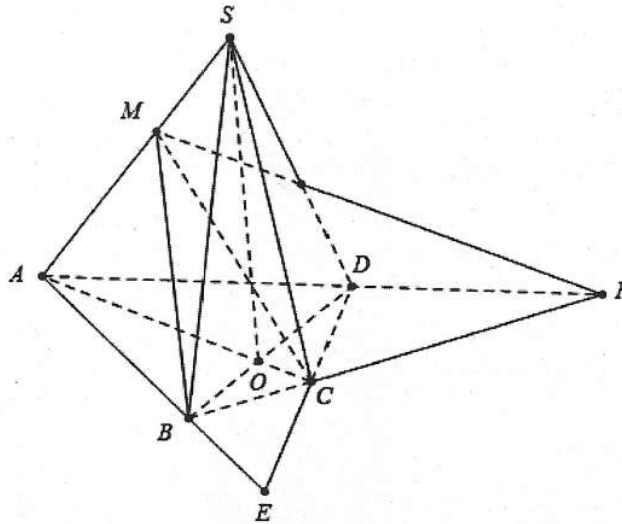
Từ (1) và (2) suy ra: $(MNP) \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SBC)$.

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là tứ giác có cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

- a) (SAC) và (SBD) .
- b) (SAC) và (MBD) .
- c) (MBC) và (SAD) .
- d) (SAB) và (SCD) .

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$.

khi đó hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung là S và $O \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) Điểm $M \in SA \Rightarrow M \in (SAC)$.

Hai mặt phẳng (SAC) và (MBD) có hai điểm chung là O và M nên $OM = (SAC) \cap (MBD)$.

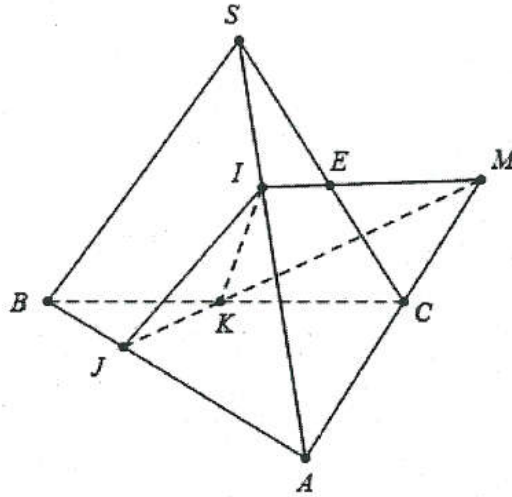
c) Gọi $F = AD \cap BC$ suy ra $\begin{cases} F \in (MBC) \\ F \in (SAD) \end{cases}$. Khi đó hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) có hai điểm chung là M và $F \Rightarrow MF = (MBC) \cap (SAD)$.

d) Gọi $E = AB \cap CD$ suy ra $\begin{cases} E \in (SAB) \\ E \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow$ hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có hai điểm chung là S và $E \Rightarrow SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm I thuộc đoạn SA . Một đường thẳng không song song với AC cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại J và K . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

- a) Mặt phẳng (IJK) và (SAC) .
b) Mặt phẳng (IJK) và (SAB) .
c) Mặt phẳng (IJK) và (SBC) .

Lời giải



a) Trong mặt phẳng (ABC) gọi $M = JK \cap AC$.

Khi đó 2 mặt phẳng (IJK) và (SAC) có hai điểm chung là I và M .

Suy ra $IM = (IJK) \cap (SAC)$.

b) Hai mặt phẳng (IJK) và (SAB) có hai điểm chung là I và $J \Rightarrow IJ = (IJK) \cap (SAB)$.

c) Trong mặt phẳng (SAC) gọi $E = SC \cap IM$

Khi đó $\begin{cases} E \in (IJK) \\ E \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow$ hai mặt phẳng (IJK) và (SBC) có hai điểm chung là E và K .

Do đó $KE = (IJK) \cap (SBC)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB .

a) Chứng minh: $MN \parallel CD$

b) Tìm giao điểm P của SC với (AND) . Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I .

Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác $SIBA$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải

a) Vì MQ là đường trung bình của tam giác ABD nên ta có $\begin{cases} MQ // BD \\ MQ = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

Tương tự ta cũng có: $\begin{cases} NP // BD \\ NP = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

Do vậy $MQNP$ là hình bình hành từ đó suy ra MN và PQ cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

b) Tương tự chứng minh trên ta cũng có tứ giác $RNSM$ cũng là hình bình hành do có

$\begin{cases} RN // MS \\ RN = MS = \frac{1}{2}AD \end{cases}$ suy ra RS và MN cũng cắt nhau tại trung điểm I của MN .

Vậy ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đoạn.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD .

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng $(SBC), (SAD)$.

b) Gọi P là trung điểm của SA . Chứng minh SB, SC đều song song với (MNP) .

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC . Chứng minh rằng: $G_1G_2 // (SAC)$

Lời giải

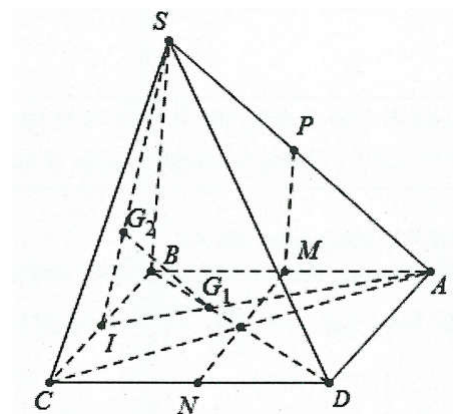
a) Vì M, N là trung điểm của AB, CD nên $MN // AD // BC$

Ta có: $\begin{cases} AD \in (SAD) \\ MN // AD \\ MN \notin (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAD)$

Tương tự, ta có: $\begin{cases} BC \in (SBC) \\ MN // BC \\ MN \notin (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SBC)$

b) Vì P là trung điểm SA nên $\begin{cases} MP // SB \\ NP // SC \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} MP \in (MNP) \\ SB // MP \\ SB \notin (MNP) \end{cases} \Rightarrow SB // (MNP)$



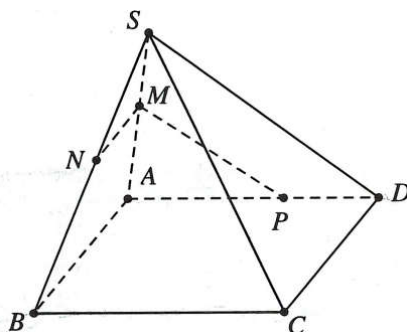
Tương tự chứng minh trên ta có:
$$\begin{cases} NP \in (MNP) \\ SC // NP \Rightarrow SC // (MNP) \\ SC \notin (MNP) \end{cases}$$

c) Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} G_1 \in AI \\ G_2 \in BC \end{cases}$ và $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 // SA \Rightarrow G_1G_2 // (SAC)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, AD lần lượt lấy M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$. Chứng minh:

- MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.
- SD song song với mặt phẳng (MNP) .
- NP song song với mặt phẳng (SCD) .

Lời giải



a) Ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow MN // AB$ (định lý Talet đảo)

Suy ra $MN // (ABCD)$.

b) Tương tự $\frac{SM}{SA} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow MP // SD$ (định lý Talet đảo)

Suy ra $SD // (MNP)$.

c) Ta có: $MP // SD$

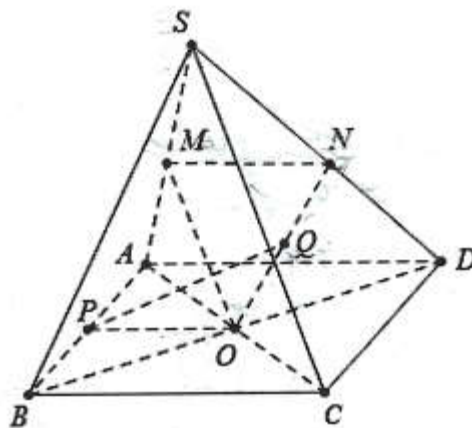
Mặt khác $MN // AB \Rightarrow MN // CD$

Do đó $(MNP) // (SCD) \Rightarrow NP // (SCD)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Chứng minh rằng $(OMN) // (SBC)$.
- Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, ON . Chứng minh $PQ // (SBC)$.

Lời giải



a) Ta có MO là đường trung bình trong tam giác $SAC \Rightarrow MO \parallel AC$.

Mặt khác N và O lần lượt là trung điểm của SD và BD nên NO là đường trung bình trong $\triangle SBD \Rightarrow NO \parallel SB$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MO \parallel SC \\ NO \parallel SB \\ MO \cap NO = O \\ SC \cap SB = S \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC).$$

b) Do P và O lần lượt là trung điểm của AB và AC nên $OP \parallel AD \parallel BC \Rightarrow OP \parallel (SBC)$.

Lại có $ON \parallel SB \Rightarrow OQ \parallel (SBC)$.

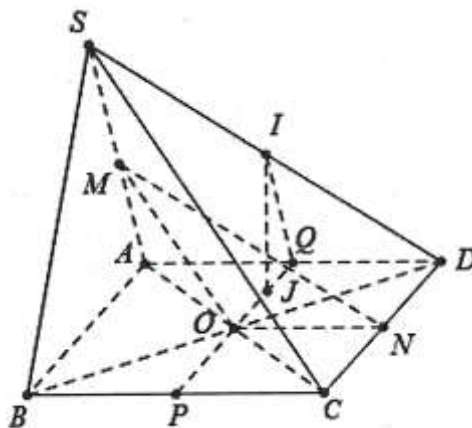
Do vậy $(OPQ) \parallel (SBC) \Rightarrow PQ \parallel (SBC)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh rằng $IJ \parallel (SAB)$.

Lời giải



a) Ta có N và O lần lượt là trung điểm của CD và AC nên NO là đường trung bình trong $\triangle BCD \Rightarrow NO \parallel BC$.

Tương tự MO là đường trung bình trong tam giác SAC nên $MO \parallel SC$.

$$\text{Lại có: } \begin{cases} NO \parallel BC \\ MO \parallel SC \\ OM \cap ON = O \\ BC \cap SC = S \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC).$$

b) Ta có P và Q lần lượt là trung điểm của BC và AD thì PQ là đường thẳng cách đều AB và CD do vậy điểm $J \in PQ$. Do IQ là đường trung bình của $\triangle SAD$ nên $IQ \parallel SA$.

Ta có: $PQ \parallel (SAB); IQ \parallel (SAB) \Rightarrow (IPQ) \parallel (SAB)$

Mặt khác $IJ \subset (IPQ) \Rightarrow IJ \parallel (SAB)$.