

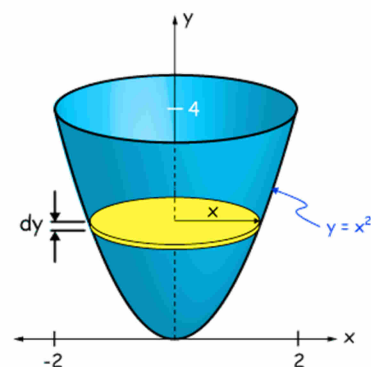
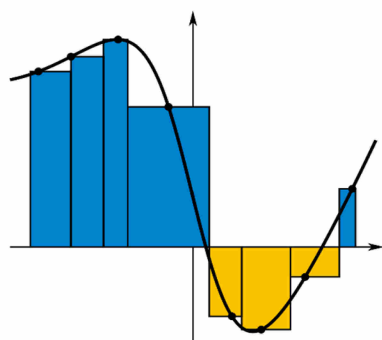
TÀI LIỆU HỌC ONLINE

Giải tích 12

Chuyên đề

Tích phân và ứng dụng

2022



LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

Chương 3.	NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	1
§1 –	TÍNH NGUYÊN HÀM - SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, BẢNG CÔNG THỨC	1
(A)	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	1
(B)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	2
	<i>Dạng 1. Áp dụng bảng công thức nguyên hàm.....</i>	2
	<i>Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng.....</i>	7
	<i>Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng.....</i>	9
(C)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	14
§2 –	TÍNH NGUYÊN HÀM – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ	17
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	17
	<i>Dạng 1. Đổi biến dạng hàm lũy thừa.....</i>	17
	<i>Dạng 2. Đổi biến dạng hàm phân thức.....</i>	19
	<i>Dạng 3. Đổi biến dạng hàm vô tỉ.....</i>	20
	<i>Dạng 4. Đổi biến dạng hàm lượng giác.....</i>	22
	<i>Dạng 5. Đổi biến dạng hàm mũ, hàm lô-ga-rit.....</i>	24
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	27
§3 –	TÍNH NGUYÊN HÀM – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN	30
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	30
	<i>Dạng 1. Nguyên hàm từng phần với "u = đa thức".....</i>	30
	<i>Dạng 2. Nguyên hàm từng phần với "u = lôgarit".....</i>	31
	<i>Dạng 3. Nguyên hàm kết hợp đổi biến số và từng phần.....</i>	33
	<i>Dạng 4. Nguyên hàm từng phần dạng "lặp".....</i>	35
	<i>Dạng 5. Nguyên hàm từng phần dạng "hàm ẩn".....</i>	36
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	38
§4 –	TÍNH TÍCH PHÂN - SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT	41
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	41
	<i>Dạng 1. Sử dụng định nghĩa, tính chất tích phân.....</i>	41
	<i>Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng các hàm cơ bản.....</i>	45
	<i>Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng các hàm cơ bản.....</i>	47
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	51

§5 –	TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ	54
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	54
📁	Dạng 1. Đổi biến loại $t = u(x)$	54
📁	Dạng 2. Lượng Giác Hóa.....	59
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	61
§6 –	TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN	65
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	65
📁	Dạng 1. Tích phân từng phần với " $u = \text{đa thức}$ ".....	65
📁	Dạng 2. Tích phân từng phần với " $u = \text{logarit}$ ".....	67
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	70
§7 –	TÍCH PHÂN HÀM ẨN	74
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	74
📁	Dạng 1. Sử dụng tính chất tính phân không phụ thuộc biến.....	74
📁	Dạng 2. Tìm hàm $f(x)$ bằng phương pháp đổi biến số.....	76
📁	Dạng 3. Tìm hàm $f(x)$ bằng phương pháp đưa về "đạo hàm đúng".....	77
📁	Dạng 4. Phương pháp tích phân từng phần.....	79
📁	Dạng 5. Phương pháp ghép bình phương.....	81
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	84
§8 –	ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG	89
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	89
📁	Dạng 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$	89
📁	Dạng 2. Hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị hàm số.....	97
📁	Dạng 3. Tọa độ hoá một số "mô hình" hình phẳng thực tế.....	99
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	103
§9 –	ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ, KHỐI TRÒN XOAY	107
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	107
📁	Dạng 1. Tính thể tích vật thể khi biết diện tích mặt cắt vuông góc với Ox	107
📁	Dạng 2. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng quay quanh trục Ox	108
📁	Dạng 3. Tọa độ hóa một số bài toán thực tế.....	113
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	117
§10 –	ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG	120
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	120
📁	Dạng 1. Cho hàm vận tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật.....	120
📁	Dạng 2. Cho đồ thị hàm vận tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật.....	121
📁	Dạng 3. Cho hàm gia tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật.....	122
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	124

§11 – ĐỀ TỔNG ÔN**126**

Ⓐ ĐỀ SỐ 1	126
Ⓑ ĐỀ SỐ 2	129



BÀI 1. TÍNH NGUYÊN HÀM - SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, BẢNG CÔNG THỨC

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nguyên Hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu: $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

- ☑ Khi đó $F(x) + C$ được gọi là họ nguyên hàm của $f(x)$.
- ☑ Kí hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.
- ☑ Lưu ý: $\int f(x) dx$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ theo biến x .
- ☑ Công thức biến đổi vi phân: $d[u(x)] = u'(x) dx$.

2. Tính chất của nguyên hàm

- ☑ Tính chất 1: $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- ☑ Tính chất 2: $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với k là hằng số khác 0.
- ☑ Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Bảng Nguyên Hàm

Hàm số sơ cấp	Hàm số hợp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

Hàm số mở rộng

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$	$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$	$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \left \frac{x}{a} \right + C$	
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right + C$
$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x + C$	$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

B - CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Áp dụng bảng công thức nguyên hàm

Biểu diễn lũy thừa dạng chính tắc:

1) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

2) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

3) $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

4) $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$

5) $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$

Công thức lượng giác cơ bản:

1) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

2) $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

4) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

5) $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

6) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

❖ **Ví dụ 1.** Tính nguyên hàm $\int x^2 dx$.

(A) $3x^2 + C$.

(B) $2x + C$.

(C) $x^3 + C$.

(D) $\frac{1}{3}x^3 + C$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 2.** Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

(A) $20x^3 - 12x + C$.

(B) $x^5 - 2x^3 + x + C$.

(C) $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

(D) $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Tính nguyên hàm $I = \int \left(x^2 + \frac{2}{x} - 3\sqrt{x} \right) dx$ với $x > 0$.

(A) $I = \frac{x^3}{3} - 2\ln|x| + 2\sqrt{x^3} + C$.

(B) $I = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + 2\sqrt{x^3} + C$.

(C) $I = \frac{x^3}{3} - 2\ln x - 2\sqrt{x^3} + C$.

(D) $I = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| - 2\sqrt{x^3} + C$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$. Tính $I = \int [3f(x) + 2x] dx$

(A) $I = 3F(x) + 2 + C$.

(B) $I = 3F(x) + x^2 + C$.

(C) $I = 3F(x) + 2x + C$.

(D) $I = 3F(x) + x + C$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho $\int f(x) dx = x^2 + C_1$ và $\int g(x) dx = \frac{x^2}{3} + C_2$. Tìm nguyên hàm của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$.

(A) $\int h(x) dx = \frac{x^2}{3} + C$.

(B) $\int h(x) dx = \frac{2x^2}{3} + C$.

(C) $\int h(x) dx = -\frac{x^2}{3} + C$.

(D) $\int h(x) dx = -\frac{2x^2}{3} + C$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{\cos^2 x}$ là

(A) $x^3 + \cot x + C.$

(B) $x^3 + \tan x + C.$

(C) $6x - \cot x + C.$

(D) $6x + \tan x + C.$

 **Lời giải.**

 **Phương pháp vi phân:**

Sử dụng công thức vi phân $d[f(x)] = f'(x) dx$ để hiểu nếu công thức $\int dx = x + C$ thì sẽ có công thức $\int d[f(x)] = f(x) + C.$

Một số biến đổi vi phân cần nhớ:

1) $(\cos x) dx = d(\sin x)$

2) $(\sin x) dx = d(-\cos x)$

3) $\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\tan x)$

4) $\frac{1}{\sin^2 x} dx = d(-\cot x)$

5) $e^x dx = d(e^x)$

6) $a^x dx = d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)$

7) $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$

8) $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = d(2\sqrt{x})$

9) $\frac{1}{x+1} dx = d[\ln(x+1)]$

10) $(1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\tan x)$

11) $(1 + \cot^2 x) dx = \frac{1}{\sin^2 x} dx = d(-\cot x)$

❖ **Ví dụ 7.** Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x+1}$ bằng

(A) $-\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$

(B) $-\ln|2x+1| + C.$

(C) $\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$

(D) $\ln|2x+1| + C.$

 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 8.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A $F(3) = \ln 2 - 1$.

B $F(3) = \ln 2 + 1$.

C $F(3) = \frac{1}{2}$.

D $F(3) = \frac{7}{4}$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 9.** Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x+1)^{2019}$ là

A $\frac{(2x+1)^{2018}}{2018} + C$.

B $\frac{(2x+1)^{2020}}{4040} + C$.

C $\frac{(2x+1)^{2020}}{2020} + C$.

D $\frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + C$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 10.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{4x-2}$

A $F(x) = \frac{3}{4}(4x-2)\sqrt[3]{4x-2} + C$.

B $F(x) = \frac{2}{3}(4x-2)\sqrt[3]{4x-2} + C$.

C $F(x) = \frac{3}{16}(4x-2)\sqrt[3]{4x-2} + C$.

D $F(x) = \frac{1}{3}(4x-2)^{-\frac{2}{3}} + C$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 11.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

A $\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

B $\cos 3x + C$.

C $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

D $-\cos 3x + C$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 12.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

A $F(x) = e^{2x} + x^3 + C$.

B $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C$.

C $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C$.

D $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$.

💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 13.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x+1}$.

- ☐ A $(2x+1)3^{2x} + C$.
 ☐ B $\frac{3^{2x+1}}{\ln 3} + C$.
 ☐ C $3^{2x+1} \ln 3 + C$.
 ☐ D $\frac{3^{2x+1}}{\ln 9} + C$.

💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 14.** Biết $\int f(x) dx = -x^2 + 2x + C$. Tính $\int f(-x) dx$.

- ☐ A $x^2 + 2x + C'$.
 ☐ B $-x^2 + 2x + C'$.
 ☐ C $-x^2 - 2x + C'$.
 ☐ D $x^2 - 2x + C'$.

💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 15.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - e^x + 1 - m$. Biết $f(0) = 2, f(2) = 1 - e^2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(4; 6)$.
 ☐ B $(5; +\infty)$.
 ☐ C $(-2; 4)$.
 ☐ D $(3; 5)$.

💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 16.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ và $f(0) = 1, f(1) = 3$. Tính $f(-1)$.

- ☐ A $f(-1) = -5$.
 ☐ B $f(-1) = 3$.
 ☐ C $f(-1) = -3$.
 ☐ D $f(-1) = -1$.

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 17.** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

(A) 1458 m^3 .

(B) 1488 m^3 .

(C) 1450 m^3 .

(D) 1468 m^3 .

💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng

⇒ **Ví dụ 18.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + 3x^3)$ là

(A) $2x\left(x + \frac{3}{4}x^4\right) + C$. (B) $x^2\left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$. (C) $x^2\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + C$. (D) $x^2\left(x + \frac{3}{4}x^3\right) + C$.

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 19.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x + 1)(x + 2)$ là

(A) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

(B) $F(x) = 2x + 3 + C$.

(C) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

(D) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 20.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

(A) $\int f(x) dx = e^x + 1 + C.$

(B) $\int f(x) dx = e^x + x + C.$

(C) $\int f(x) dx = -e^x + x + C.$

(D) $\int f(x) dx = e^x + C.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 21.** Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 5x \cdot \cos x$ là

(A) $F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x \right).$

(B) $F(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} \right).$

(C) $F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 4x \right).$

(D) $F(x) = \frac{1}{5} \sin 5x \sin x.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 22.** Biết $\int (2 \sin x + \cos x)^2 dx = a \sin 2x - \cos 2x + bx + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

(A) $\frac{17}{2}.$

(B) $\frac{109}{4}.$

(C) $\frac{17}{16}.$

(D) $\frac{109}{16}.$

💬 **Lời giải.**

Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng

 **Phương pháp giải:** (*deg* là bậc của đa thức).

☉ Nếu $\deg P(x) \geq \deg Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

☉ Nếu $\deg P(x) \geq \deg Q(x) \xrightarrow{PP}$ Xem xét mẫu số và khi đó: Với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

☑ Nếu mẫu số được phân tích thành tích số, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức để đưa về dạng tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

☉ $\frac{1}{(ax+m) \cdot (bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right).$

☉ $\frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$

☉ $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)} + \frac{D}{(x-b)^2}.$

☑ Nếu mẫu số không phân tích được thành tích số (biến đổi và đưa về dạng lượng giác)

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C$$



☉ Nếu $\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} \Rightarrow \begin{cases} A = \left(\frac{ax+b}{x-x_2} \right)_{x=x_1} = \frac{ax_1+b}{x_1-x_2} \\ B = \left(\frac{ax+b}{x-x_1} \right)_{x=x_2} = \frac{ax_2+b}{x_2-x_1} \end{cases}$

☉ $\ln A + \ln B = \ln(AB); \ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}.$

 **Ví dụ 23.** Tìm nguyên hàm:

a. $\int \frac{x+5}{x+1} dx.$

b. $\int \frac{x+5}{2x-1} dx.$

c. $\int \frac{3x^2-2x+1}{3x-2} dx.$

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 24. Tìm nguyên hàm:

a. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$.

b. $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$.

c. $\int \frac{x^2 + x}{x^2 + 4x + 4} dx$.

💬 Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

❖ Ví dụ 25. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $F(x) = \ln|x| + x + 2$.

(B) $F(x) = \ln|x| + x^2 - 2$.

(C) $F(x) = \ln|x| + 2x^2 + 1$.

(D) $F(x) = \ln|x| + x^2 + 2$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 26. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^3}, (x \neq 0)$.

(A) $F(x) = x - 3\ln|x| - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$.

(B) $F(x) = x - 3\ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$.

(C) $F(x) = x + 3\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$.

(D) $F(x) = x - 3\ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$ là

A $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C.$

B $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

C $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x-0,5} \right| + C.$

D $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C.$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$ có $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4}$ thỏa mãn $f(3) = 1 - \ln 2$.
Giá trị $f(2)$ bằng

A $1 - \ln 2.$

B $2.$

C $1 + 3 \ln 2.$

D $-1 + 3 \ln 2.$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 29. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ là

A $\frac{2019}{2020}.$

B $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}.$

C $2018 \frac{1}{2020}.$

D $-\frac{2019}{2020}.$

 Lời giải.

◀ Ví dụ 30. Biết $\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{mx+n} + p \ln|2x+1| + C$ với m, n, p là các số hữu tỉ. Tổng $m+n+p$ bằng

(A) $-\frac{11}{2}$.

(B) $\frac{11}{2}$.

(C) $\frac{13}{2}$.

(D) $-\frac{13}{2}$.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 31. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Có bao nhiêu số thực $x \in (0; 2018\pi)$ để $F(x) = 1$.

(A) 2018.

(B) 1009.

(C) 2017.

(D) 2016.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 32. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Phương trình $F(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0; 2020)$?

(A) 2086.

(B) 643.

(C) 2019.

(D) 2020.

💬 Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- (A) Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.
- (B) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).
- (C) Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.
- (D) $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ là

- (A) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$. (B) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$. (C) $x^4 + \frac{x^2}{2} + C$. (D) $3x^2 + C$.

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- (A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. (B) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.
- (C) $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. (D) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- (A) $\int 2^x dx = 2^x + C$. (B) $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$.
- (C) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. (D) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$.

- (A) $F(x) = -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$. (B) $F(x) = -\frac{1}{6(2x+1)^2} + C$.
- (C) $F(x) = -\frac{1}{4(2x+1)^3} + C$. (D) $F(x) = -\frac{1}{6(2x+1)^3} + C$.

Câu 6. Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

- (A) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \cos x$. (B) $f(x) = 2x + \cos x$. (C) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos x$. (D) $f(x) = 2x - \cos x$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Tìm nguyên hàm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$.

- (A) $I = 2F(x) + f(x) + x + C$. (B) $I = 2F(x) + xf(x) + C$.
- (C) $I = 2xF(x) + f(x) + x + 1$. (D) $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$.

Câu 8. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)\ln x$. Tính $F''(x)$.

- (A) $F''(x) = 1 + \frac{1}{x}$. (B) $F''(x) = \frac{1}{x}$.
- (C) $F''(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$. (D) $F''(x) = x + \ln x$.

Câu 9. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(3x+2)$ là

- (A) $x^3 + x^2 + 1$. (B) $3x^3 + 2x^2 + 1$. (C) $x^3 + 2x^2 + 1$. (D) $x^3 - x^2 + 1$.

Câu 10. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2} dx$ bằng

- (A) $\frac{x^3 + x^2 - 3x}{x^3} + C$. (B) $3x + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$.
- (C) $\frac{3(x^3 + x^2 - 3x)}{x^3} + C$. (D) $3x + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$.

Câu 11. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2018x$.

- (A) $\frac{\cos 2018x}{2018} + C$. (B) $-\frac{\cos 2018x}{2019} + C$.
 (C) $-\frac{\cos 2018x}{2018} + C$. (D) $2018 \cdot \cos 2018x + C$.

Câu 12. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- (A) $F(3) = \ln 2 - 1$. (B) $F(3) = \ln 2 + 1$. (C) $F(3) = \frac{1}{2}$. (D) $F(3) = \frac{7}{4}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ thì $F(x)$ là

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{3} + \cot x$. (B) $-\sqrt{3} + \cot x$. (C) $\sqrt{3} - \cot x$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \cot x$.

Câu 14. Cho $\int f(x) dx = 3x^2 - 4x + C$. Tìm $\int f(e^x) dx$

- (A) $\int f(e^x) dx = \frac{3}{2}e^{2x} - 4e^x + C$. (B) $\int f(e^x) dx = 3e^x 2x - 4e^x + C$.
 (C) $\int f(e^x) dx = 6e^x + 4x + C$. (D) $\int f(e^x) dx = 6e^x - 4x + C$.

Câu 15. $\int \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2 dx$ bằng

- (A) $\frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \cdot 9^x \ln 3} - 2x + C$. (B) $\frac{1}{3} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{3^x \ln 3} \right)^3 + C$.
 (C) $\frac{9^x}{\ln 9} - 2x + \frac{\ln 9}{9^x} + C$. (D) $\left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\ln 3}{3^x} \right)^2 + C$.

Câu 16. Giá trị m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

- (A) $m = 0$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 3$.

Câu 17. Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2 e^x$. Tính $S = a + 2b + c$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = -2$. (C) $S = 0$. (D) $S = 4$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$. Tính $a + 2b$.

- (A) $-\frac{3}{2}$. (B) 0 . (C) 5 . (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 19. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$.

Khi đó, giá trị của tham số m bằng

- (A) -2 . (B) 3 . (C) -3 . (D) 2 .

Câu 20. Cho $\int \frac{1}{x^2-1} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x+1| + C$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó $a - b$ bằng

- (A) 1 . (B) 0 . (C) 2 . (D) -1 .

Câu 21. Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a + 2b = 8$. (B) $a + b = 8$. (C) $2a - b = 8$. (D) $a - b = 8$.

Câu 22. Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- (A) 5 . (B) 4 . (C) 2 . (D) 3 .

Câu 23. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = (x^2 - 6x + 9)^{100}$ thỏa $F(3) = 0$. Tập nghiệm của phương trình $F(x) = 1$ có bao nhiêu phần tử?

- (A) 100. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Câu 24. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \tan^2 x$ thỏa $F(0) = 1$. Phương trình $F(x) + x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0; 2020\pi)$?

- (A) 2021. (B) 2020. (C) 2019. (D) 1010.

Câu 25. Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ ($4a-b \neq 0$) là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2f^2(x) = (F(x) - 1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

- (A) $a = 1, b = 4$. (B) $a = 1, b = -1$. (C) $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. (D) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

—HẾT—

BÀI 2. TÍNH NGUYÊN HÀM – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

GHI NHỚ

✓ Nhận dạng: $\int f(u) \cdot u' dx$ (1) (có xuất hiện $u(x)$ và đạo hàm của nó).

✓ Các bước thực hiện:

- ① Đặt $t = u(x)$
- ② Vi phân $dt = u'(x)dx$
- ③ Thay vào (1), đổi thành $\int f(t) \cdot dt$ (2). Áp dụng công thức, tính (2).
- ④ Thay $t = u(x)$ vào kết quả vừa tính, ta tìm được kết quả.

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ta luyện tập các ví dụ sau:

Dạng 1. Đổi biến dạng hàm lũy thừa

✎ Ví dụ 1. Tính $\int (2x - 3)^{10} dx$, ta được kết quả là

- Ⓐ $\frac{1}{11}(2x - 3)^{11} + C$. Ⓑ $\frac{1}{22}(2x - 3)^{11} + C$. Ⓒ $\frac{1}{20}(2x - 3)^{11} + C$. Ⓓ $\frac{1}{10}(2x - 3)^{11} + C$.

 Lời giải.

✎ Ví dụ 2. Tính $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$, ta được kết quả là

- Ⓐ $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$. Ⓑ $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$.
 Ⓒ $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$. Ⓓ $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Cho $I = \int x^2 (1 - x^3)^{10} dx$. Đặt $u = 1 - x^3$, khi đó viết I theo u và du ta được

- (A) $I = -\frac{1}{3} \int u^{10} du$. (B) $I = -3 \int u^{10} du$. (C) $I = \int 3u^{10} du$. (D) $I = \frac{1}{3} \int u^{10} du$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)^{2016}$.

- (A) $2018(x+1)^{2018} - 2017(x+1)^{2017} + C$. (B) $\frac{(x+1)^{2018}}{2018} - \frac{(x+1)^{2017}}{2017} + C$.
 (C) $2018(x+1)^{2018} + 2017(x+1)^{2017} + C$. (D) $\frac{(x+1)^{2018}}{2018} + \frac{(x+1)^{2017}}{2017} + C$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = 2x \cdot (x^4 + 2x^2 + 1)^3$. Biết $\int f(x) dx = \frac{a}{b}(x^2 + c)^d + C$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

- (A) 0. (B) 15. (C) 16. (D) 22.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 6. Cho $I = \int 2x^3 (x^2 + 1)^4 dx$. Đặt $u = x^2 + 1$, khi đó viết I theo u và du ta được

- (A) $I = \int (t^5 + t^4) dt$. (B) $I = \int (t^4 - t) dt$. (C) $I = \int (t^5 - t^4) dt$. (D) $I = \int (t^5 - t) dt$.

💬 Lời giải.

Dạng 2. Đổi biến dạng hàm phân thức

❖ **Ví dụ 7.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$.

(A) $\ln|x^2-2x-3| + C$.

(B) $(x-1)\ln|x^2-2x-3| + C$.

(C) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3| + C$.

(D) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} + C$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 8.** Đổi biến $t = x - 1$ thì $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$ trở thành

(A) $\int \frac{t-1}{t^4} dt$.

(B) $\int \frac{(t+1)^4}{t} dt$.

(C) $\int \frac{t+1}{t^4} dt$.

(D) $\int \frac{t+1}{t} dt$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 9.** Biết nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^5}{x^2+1}$ có dạng $F(x) = mx^4 + nx^2 + p\ln(x^2+1) + C$, trong đó C là hằng số thực; m, n, p là các hệ số hữu tỷ. Hãy tính $T = m + n + p$.

(A) $T = \frac{1}{3}$.

(B) $T = 3$.

(C) $T = \frac{1}{4}$.

(D) $T = 4$.

💬 **Lời giải.**



❖ **Ví dụ 10.** Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số). Tính tổng của các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

(A) -1 .

(B) 1 .

(C) 3 .

(D) -3 .

💬 Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

📁 Dạng 3. Đổi biến dạng hàm vô tỉ

❖ **Ví dụ 11.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là

(A) $\frac{1}{3\sqrt{x^3+1}} + C$.

(B) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

(C) $\frac{2}{3\sqrt{x^3+1}} + C$.

(D) $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 12.** Xét nguyên hàm $I = \int x\sqrt{x+2} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{x+2}$ thì ta được

(A) $I = \int (t^4 - 2t^2) dt.$

(B) $I = \int (4t^4 - 2t^2) dt.$

(C) $I = \int (2t^4 - 4t^2) dt.$

(D) $I = \int (2t^4 - t^2) dt.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 13.** Biết $\int \left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2x-1}} \right) dx = \frac{3}{2} \left(a\sqrt[3]{(2x-1)^2} + b\sqrt[3]{2x-1} + c\ln(1 + \sqrt[3]{2x-1}) \right) + C$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a + b + c$.

(A) 2.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) 0.

(D) 4.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 14.** Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x + x\sqrt{x} + \sqrt{x}} dx$.

(A) $I = -\frac{2}{\sqrt{x} + x} + C.$

(B) $I = -\frac{2}{\sqrt{x} + 1} + C.$

(C) $I = -\frac{2}{\sqrt{x} + x + 1} + C.$

(D) $I = -\frac{1}{2\sqrt{x} + x} + C.$

💬 **Lời giải.**

Dạng 4. Đổi biến dạng hàm lượng giác

❖ **Ví dụ 15.** Đặt $t = \sqrt{1 + \tan x}$ thì $\int \frac{\sqrt{1 + \tan x}}{\cos^2 x} dx$ trở thành nguyên hàm nào?

(A) $\int 2t dt.$

(B) $\int t^2 dt.$

(C) $\int dt.$

(D) $\int 2t^2 dt.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 16.** Tìm nguyên hàm $I = \int \sin^4 x \cos x dx$.

(A) $\frac{\sin^5 x}{5} + C.$

(B) $\frac{\cos^5 x}{5} + C.$

(C) $-\frac{\sin^5 x}{5} + C.$

(D) $-\frac{\cos^5 x}{5} + C.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 17.** Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

(A) $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C.$

(B) $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x} + C.$

(C) $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

(D) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 18.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$. Biết $F(0) = 0$. Khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

(A) 17.

(B) 2.

(C) 16.

(D) 3.

 Lời giải.

⇔ **Ví dụ 19.** Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

A $\frac{1}{3\cos^3 x} + C.$

B $\tan x + \tan^3 x + C.$

C $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.$

D $\frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

 Lời giải.

⇔ **Ví dụ 20.** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4.$

B $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

C $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$

D $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}.$

 Lời giải.

Dạng 5. Đổi biến dạng hàm mũ, hàm lô-ga-rit

✧ Ví dụ 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

☐ A $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

☐ B $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

☐ C $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 2).$

☐ D $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

 Lời giải.

✧ Ví dụ 22. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ là

☐ A $I = x - \ln|x| + C.$

☐ B $I = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C.$

☐ C $I = x + \ln|x| + C.$

☐ D $I = e^x + \ln(e^x + 1) + C.$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 23. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx$.

- (A) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3}+C$. (B) $\sqrt{\ln x+1}+C$. (C) $\frac{1}{2}\sqrt{(\ln x+1)^2}+C$. (D) $2\sqrt{\ln x+1}+C$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 24. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$ là

- (A) $S = \{3\}$. (B) $S = \{2; 3\}$. (C) $S = \{-2; 3\}$. (D) $S = \{-3; 3\}$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 25. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x(1+\sqrt{\ln^2 x+1})}$ thỏa $F(1) = -\frac{1}{6}$. Tính tích các nghiệm của phương trình $F(x) = 0$.

- (A) 1. (B) e. (C) e^2 . (D) $2e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

💬 Lời giải.



.....

.....

.....

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tính nguyên hàm $I = \int (3 + 2x)^2 dx$ bằng cách đặt $t = 3 + 2x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $I = \int t^2 dt.$ (B) $I = \frac{1}{2} \int t^3 dt.$ (C) $I = \frac{1}{6} \int t^3 dt.$ (D) $I = \frac{1}{2} \int t^2 dt.$

Câu 2. Tính nguyên hàm $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $A = \int dt.$ (B) $A = \int \frac{1}{t^2} dt.$ (C) $A = \int t dt.$ (D) $A = \int \frac{1}{t} dt.$

Câu 3. Nguyên hàm $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$ ($x > 0$) bằng

- (A) $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C.$ (B) $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$ (C) $\ln^2 x + \ln x + C.$ (D) $x + \ln^2 x + C.$

Câu 4. Tính nguyên hàm $T = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ bằng cách đặt $t = \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $T = \int \frac{1}{1+t} dt.$ (B) $T = - \int \frac{1}{1+t} dt.$ (C) $T = \int \frac{1}{t} dt.$ (D) $T = - \int \frac{1}{t} dt.$

Câu 5. Tính $I = \int \sin x \cos x dx.$

- (A) $I = \frac{\cos 2x}{4} + C.$ (B) $I = -\frac{\sin^2 x}{2} + C.$ (C) $I = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$ (D) $I = \frac{\cos^2 x}{2} + C.$

Câu 6. Tính nguyên hàm $I = \int e^{\sqrt{x}} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $I = \int t \cdot e^t dt.$ (B) $I = 2 \int t \cdot e^t dt.$ (C) $I = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt.$ (D) $I = 2 \int t \cdot e^t dt.$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}(2x - \ln x)$ là

- (A) $2x - \frac{\ln^2 x}{2} + C.$ (B) $2x - \frac{1}{x^2} + C.$ (C) $\frac{2 \ln |x|}{x} - \frac{1}{x} + C.$ (D) $2x - \frac{\ln x}{x} + C.$

Câu 8. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

- (A) $F(1) = \ln 2 + 1.$ (B) $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1.$ (C) $F(1) = 0.$ (D) $F(1) = \ln 2 + 2.$

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$ (B) $\int f(x) dx = -\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$
(C) $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2} + C.$ (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} + C.$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là

- (A) $\frac{1}{3\sqrt{x^3+1}} + C.$ (B) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C.$ (C) $\frac{2}{3\sqrt{x^3+1}} + C.$ (D) $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1} + C.$

Câu 11. Tính $I = \int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} dx$, khi thực hiện phép đổi biến $u = \sqrt{x+1}$, thì được

- (A) $I = \int \frac{2u^2-3}{u} du.$ (B) $I = \int (4u^2-6) du.$ (C) $I = \int \frac{4u^2-6}{u} du.$ (D) $I = \int (2u^2-3) du.$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x \sqrt{\sin x + 1}$.

- (A) $F(x) = \frac{1}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$ (B) $F(x) = \frac{1 - 2 \sin x - 3 \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x + 1}}.$
(C) $F(x) = \frac{2}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$ (D) $F(x) = \frac{1}{3} \sin x \sqrt{\sin x + 1} + C.$

Câu 13. Biết $\int f(x) dx = 2x \ln(3x - 1) + C$ với $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\int f(3x) dx = 6x \ln(9x - 1) + C.$

(B) $\int f(3x) dx = 3x \ln(9x - 1) + C.$

(C) $\int f(3x) dx = 2x \ln(9x - 1) + C.$

(D) $\int f(3x) dx = 6x \ln(3x - 1) + C.$

Câu 14. Biết $\int f(x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x - 5) + C.$

(B) $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x - 5) + C.$

(C) $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x - 5) + C.$

(D) $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C.$

Câu 15. Biết $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C$, tìm nguyên hàm $\int f(x) dx$.

(A) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$

(B) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$

(C) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$

(D) $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$

Câu 16. Cho $\int f(x) dx = x\sqrt{x^2 + 1} + C$. Tìm $I = \int x \cdot f(x^2) dx$.

(A) $I = x^2 \sqrt{x^4 + 1} + C.$

(B) $I = \frac{x^4}{2} \sqrt{x^4 + 1} + C.$

(C) $I = \frac{x^2}{2} \sqrt{x^4 + 1} + C.$

(D) $I = x^3 \sqrt{x^4 + 1} + C.$

Câu 17. Cho biết $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Tính $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

(A) $I = \sqrt{x^2 + 1} + C.$

(B) $I = \ln(\sqrt{x^2 + 1}) + C.$

(C) $I = x\sqrt{x^2 + 1} + C.$

(D) $I = e^{\sqrt{x^2 + 1}} + C.$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$ có dạng là $F(x) = -\frac{a}{b} \sin^5 x + \frac{c}{d} \sin^3 x$, với $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản và a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính $T = a + b + c + d$.

(A) Đáp án khác.

(B) $T = 11.$

(C) $T = 10.$

(D) $T = 9.$

Câu 19. Cho $\int 2x(3x - 2)^6 dx = A(3x - 2)^8 + B(3x - 2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A + 7B$ bằng

(A) $\frac{23}{252}.$

(B) $\frac{241}{252}.$

(C) $\frac{52}{9}.$

(D) $\frac{7}{9}.$

Câu 20. Biết $\int \frac{x}{(2x + 1)^3} dx = \frac{1}{a(2x + 1)^2} - \frac{1}{b(2x + 1)} + C$, với a, b là số nguyên. Tính $b - a$.

(A) 4.

(B) -4.

(C) 0.

(D) 2.

Câu 21. Tính nguyên hàm $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} dx$.

(A) $\ln|\sin x| - \sin x + C.$

(B) $\ln|\sin x| + \sin x + C.$

(C) $\ln|\sin x| - \cos x + C.$

(D) $\ln|\sin x| + \cos x + C.$

Câu 22. Biết $\int \frac{(x + 1)^3}{x^2 + 2x - 3} dx = \frac{1}{a} (x^2 + 2x - 3 + b \ln|x^2 + 2x - 3|) + C$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a^2 + b^2$.

(A) $a^2 + b^2 = 25.$

(B) $a^2 + b^2 = \frac{65}{4}.$

(C) $a^2 + b^2 = 20.$

(D) $a^2 + b^2 = 13.$

Câu 23. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sin^2 x} \sin 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x) = 1$ trên khoảng $(-10\pi; 10\pi)$.

(A) $20\pi.$

(B) $2\pi.$

(C) $10\pi.$

(D) 0.

Câu 24. Biết $\int x^5(1-x^3)^6 dx = \frac{(1-x^3)^7}{a} + \frac{(1-x^3)^8}{b} + C$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

(A) 45.

(B) 3.

(C) 0.

(D) -3.

Câu 25. Cho $F(x) = \int \frac{(1+\cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0; 4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

(A) $(12\pi; 18\pi)$.

(B) $(2\pi; 4\pi)$.

(C) $(4\pi; 6\pi)$.

(D) $(0; 2\pi)$.

—HẾT—

BÀI 3. TÍNH NGUYÊN HÀM – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

A Xét $I = \int u(x) \cdot v'(x) dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot d(u) \quad (1)$

① Chọn biểu thức u và tính $du = u' \cdot dx$

② Chọn $dv = v'(x) dx$. Tính $v = \int v'(x) \cdot dx$ và chọn v (thường chọn $C = 0$.)

③ Ráp công thức $\boxed{u \cdot v - \int v \cdot d(u)}$

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Nguyên hàm từng phần với "u = đa thức"

❖ Ví dụ 1. Kết quả của $I = \int xe^x dx$ là

A $I = xe^x - e^x + C.$

B $I = xe^x + e^x + C.$

C $I = \frac{x^2}{2}e^x + C.$

D $I = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C.$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Tìm họ nguyên hàm $f(x) = x \cos 2x dx$.

A $\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$

B $x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C.$

C $x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Cho $I = \int x^2 \cdot \cos x dx$ và đặt $u = x^2$, $dv = \cos x dx$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $I = x^2 \sin x - \int x \sin x dx.$

(B) $I = x^2 \sin x + \int x \sin x dx.$

(C) $I = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx.$

(D) $I = x^2 \sin x + 2 \int x \sin x dx.$

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(e^x - \sin x)$ là

(A) $(x-1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$

(B) $(x+1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$

(C) $(x-1)e^x + x \cos x + \sin x + C.$

(D) $(x-1)e^x - x \cos x - \sin x + C.$

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho $\int \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = A \tan x + B \ln |\cos x| + C.$ Khi đó, giá trị của biểu thức $T = A^3 + B$ có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{1}{8}.$

(B) $\frac{3}{8}.$

(C) $\frac{5}{8}.$

(D) $\frac{7}{8}.$

 **Lời giải.**

Dạng 2. Nguyên hàm từng phần với "u = lôgarit"

❖ **Ví dụ 6.** Tìm nguyên hàm $I = \int \ln x dx$

(A) $\frac{1}{x} + C.$

(B) $x \ln x - x + C.$

(C) $x \ln x + x + C.$

(D) $\frac{1}{x^2} + C.$

 **Lời giải.**



⇨ **Ví dụ 7.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ là

A $-\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C.$

B $-\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$

C $\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C.$

D $\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 8.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x + 1) \ln x$ là

A $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

B $(x^2 + x) \ln x - x^2 - x + C.$

C $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

D $(x^2 + x) \ln x - x^2 + x + C.$

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 9.** Nguyên hàm $I = \int 2x \ln(1 + x) dx$ có kết quả là

A $(x^2 - 1) \ln(x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + C.$

B $(x^2 + 1) \ln(x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + C.$

C $(x^2 - 1) \ln(x + 1) - (x^2 - x) + C.$

D $(x^2 - 1) \ln(x + 1) - 2(x^2 - 2x) + C.$

💬 **Lời giải.**

◀ Ví dụ 10. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x^2}$.

(A) $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x - 1)$.

(B) $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x + 1)$.

(C) $F(x) = -\frac{1}{x}(1 - \ln 2x)$.

(D) $F(x) = \frac{1}{x}(\ln 2x + 1)$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 3. Nguyên hàm kết hợp đổi biến số và từng phần

◀ Ví dụ 11. Biết rằng $\int x^3 e^{x^2} dx = P(x)e^{x^2} + C$ ($C \in \mathbb{R}$), trong đó $P(x)$ là một hàm số đa thức. Hãy tính giá trị của biểu thức $T = P(5)$.

(A) $T = \frac{125}{2}$.

(B) $T = 8$.

(C) $T = 12$.

(D) $T = \frac{124}{3}$.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 12. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\cos x} \sin 2x$.

(A) $\int f(x) dx = -2e^{\cos x} \cos x + 2e^{\cos x} + C$.

(B) $\int f(x) dx = 2e^{\cos x} \cos x - 2e^{\cos x} + C$.

(C) $\int f(x) dx = -2e^{\cos x} + C$.

(D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{2}e^{\sin x} \cos 2x + C$.

💬 Lời giải.



❖ Ví dụ 13. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}$. Tìm $f(x)$, biết $f(0) = \sqrt{2}$.

(A) $f(x) = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{2}$.

(B) $f(x) = \sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{2}$.

(C) $f(x) = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| - \sqrt{2}$.

(D) $f(x) = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{2}$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 14. Tìm một nguyên hàm $y = F(x)$ của hàm số $f(x) = (x^3 + 3x)e^{x^2}$ biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = F(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0 đi qua điểm $M(-1; 2)$.

(A) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + 1$.

(B) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + e^{x^2} - 1$.

(C) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}$.

(D) $F(x) = x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + 1$.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 15. (TNPT – 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

(A) $\frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$. (B) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. (C) $\frac{2x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. (D) $\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 4. Nguyên hàm từng phần dạng "lặp"

◀ Ví dụ 16. Cho $F(x) = \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = A + B$.

(A) $P = -2$. (B) $P = -1$. (C) $P = 2$. (D) $P = 1$.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 17. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$ có kết quả là

(A) $I = \frac{1}{x \ln x} + C$. (B) $I = \frac{x^2}{\ln x} + C$. (C) $I = -\frac{x}{\ln x} + C$. (D) $I = \frac{x}{\ln x} + C$.

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 18.** Biết $\int \left(x + \frac{1}{x} + 1\right) e^{x - \frac{1}{x}} dx = x \cdot e^{\frac{ax^2 - b}{mx}} + C$, với $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + m$.

- ☐ A $a + b + m = 0$.
 ☐ B $a + b + m = 3$.
 ☐ C $a + b + m = 1$.
 ☐ D $a + b + m = -2$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 5. Nguyên hàm từng phần dạng "hàm ẩn"

⇨ **Ví dụ 19.** Cho biết $\int f(x) dx = \ln x + 2x + C$. Tính $I = \int (2x + 1) f'(x) dx$.

- ☐ A $I = \frac{1}{x} - 2 \ln x + 4x + C$.
 ☐ B $I = \frac{1}{x} - 2 \ln x + C$.
☐ C $I = \frac{1}{x} - \ln x + C$.
 ☐ D $I = \frac{1}{x} + \ln x + 4x + C$.

💬 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 20. Biết $F(x) = -\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{f(x)}{x}$. Tính $\int f'(x) \ln x \, dx$.

Ⓐ $\int f'(x) \ln x \, dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$

Ⓑ $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$

Ⓒ $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + C.$

Ⓓ $\int f'(x) \ln x \, dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + C.$

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 21. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

Ⓐ $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (4-2x)e^x + C.$

Ⓑ $\int f'(x)e^{2x} \, dx = \frac{2-x}{2}e^x + C.$

Ⓒ $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (2-x)e^x + C.$

Ⓓ $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (x-2)e^x + C.$

💬 Lời giải.

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Câu 1.** Nguyên hàm của $f(x) = x \cos x$ là

(A) $F(x) = -x \sin x - \cos x + C.$

(C) $F(x) = x \sin x - \cos x + C.$

(B) $F(x) = x \sin x + \cos x + C.$

(D) $F(x) = -x \sin x + \cos x + C.$

Câu 2. Xét $\int x \cdot \sin x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\int x \cdot \sin x dx = x \cdot \cos x - \int \cos x dx.$

(C) $\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x - \int \cos x dx.$

(B) $\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx.$

(D) $\int x \cdot \sin x dx = x \cdot \cos x + \int \cos x dx.$

Câu 3. Xét $\int x^2 \cdot e^x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\int x^2 \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - 2 \int x e^x dx.$

(C) $\int x^2 \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - \int x^2 e^x dx.$

(B) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x + 2 \int x e^x dx.$

(D) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x dx.$

Câu 4. Xét $\int \ln x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\int \ln x dx = x \cdot \ln x + \int dx.$

(C) $\int \ln x dx = \frac{1}{x} \cdot \ln x - \int dx.$

(B) $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x^2 dx.$

(D) $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int dx.$

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + 2 \sin x)$ là

(A) $x^2 - (2x - 2) \sin x + C.$

(C) $\frac{1}{2}x^2 + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

(B) $x^2 - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$

(D) $\frac{1}{2}x^2 - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x+1}$ là

(A) $\frac{1}{2}(x-1)e^{x+1} + C.$

(B) $(x-1)e^{x+1} + C.$

(C) $2(x-1)e^{x+1} + C.$

(D) $(2x-1)e^{x+1} + C.$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \ln x$ là

(A) $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$

(C) $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x + \frac{1}{16}x^4 + C.$

(B) $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^3.$

(D) $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4.$

Câu 8. Tính $\int xe^{\frac{x}{3}} dx$.

(A) $\int xe^{\frac{x}{3}} dx = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C.$

(C) $\int xe^{\frac{x}{3}} dx = \frac{x-3}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

(B) $\int xe^{\frac{x}{3}} dx = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C.$

(D) $\int xe^{\frac{x}{3}} dx = \frac{x+3}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

Câu 9. Kết quả tính $\int 2x \ln(x-1) dx$ bằng

(A) $(x^2+1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

(C) $x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

(B) $(x^2-1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + x + C.$

(D) $(x^2-1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C.$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

(A) $\int f(x) dx = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 1) + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C.$

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

(A) $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

(B) $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

(C) $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

(D) $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(e^x - \sin x)$ là

(A) $(x-1)e^x + x \cos x - \sin x + C$.

(B) $(x+1)e^x + x \cos x - \sin x + C$.

(C) $(x-1)e^x + x \cos x + \sin x + C$.

(D) $(x-1)e^x - x \cos x - \sin x + C$.

Câu 13. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x \ln x$ và $F(1) = 0$. Tính $F(e)$.

(A) $F(e) = \frac{e^2 + 1}{2}$.

(B) $F(e) = \frac{3e^2 - 1}{2}$.

(C) $F(e) = 1$.

(D) $F(e) = 3e^2 - 1$.

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin 2x)$ là

(A) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

(B) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

(C) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

(D) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Câu 15. Tính $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

(A) $I = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$.

(B) $I = -x \cot x - \ln |\sin x| + C$.

(C) $I = x \cot x - \ln |\sin x| + C$.

(D) $I = x \cot x + \ln |\sin x| + C$.

Câu 16. Tính $I = \int \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$.

(A) $I = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - x + \frac{1}{x} + C$.

(B) $I = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - x + \frac{1}{x} + C$.

(C) $I = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - x - \frac{1}{x} + C$.

(D) $I = \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln x - x + \frac{1}{x} + C$.

Câu 17. (TN2020 - Mã đề 102). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1) \cdot f'(x)$ là

(A) $\frac{x^2 + 2x - 3}{2\sqrt{x^2 + 3}}$.

(B) $\frac{x+3}{2\sqrt{x^2 + 3}}$.

(C) $\frac{2x^2 + x + 3}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

(D) $\frac{x-3}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

Câu 18. Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $(x^3 + 1)f'(x)$.

(A) $8x + \frac{2}{x^2} + C$.

(B) $4x - \frac{2}{x^2} + C$.

(C) $4x + \frac{2}{x^2} + C$.

(D) $8x - \frac{2}{x^2} + C$.

Câu 19. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)e^{2x}$

(A) $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x + 2x^2 + C$.

(B) $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x - 2x^2 + C$.

(C) $\int f'(x)e^{2x} dx = x - x^2 + C$.

(D) $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x + 2x^2 + C$.

Câu 20. Cho $F(x) = \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $x^2 f(x)$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)x^3 \ln x$

(A) $\int f'(x)x^3 \ln x dx = \frac{4}{x} \ln x - \frac{4}{x} + C$.

(B) $\int f'(x)x^3 \ln x dx = -\frac{4}{x} \ln x + \frac{4}{x} + C$.

(C) $\int f'(x)x^3 \ln x dx = -\frac{4}{x} \ln x - \frac{4}{x} + C$.

(D) $\int f'(x)x^3 \ln x dx = \frac{4}{x} \ln x + \frac{4}{x} + C$.

Câu 21. Cho $F(x) = 2(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ thỏa $f(0) = 0$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$

(A) $\int f(x)e^x dx = (x^2 + 2x + 2)e^x + C'$.

(B) $\int f(x)e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C'$.

(C) $\int f(x)e^x dx = (x-1)^2 e^x + C'$.

(D) $\int f(x)e^x dx = (x+1)^2 e^x + C'$.

Câu 22. Cho $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \sin x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cos x$.

(A) $\int f'(x) \cos x \, dx = x \sin x - \cos x + C.$

(B) $\int f'(x) \cos x \, dx = x \cos x + \sin x + C.$

(C) $\int f'(x) \cos x \, dx = x \cos x - \sin x + C.$

(D) $\int f'(x) \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$

Câu 23. Cho $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \tan x$

(A) $\int f'(x) \tan x \, dx = \ln |\cos x| + C.$

(B) $\int f'(x) \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$

(C) $\int f'(x) \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + \sin x + C.$

(D) $\int f'(x) \tan x \, dx = \ln |\sin x| + C.$

Câu 24. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \cdot \sin x$ thỏa $F(0) = -\frac{1}{2}$. Số nghiệm của phương trình $F(x) = 0$ trên khoảng $(-20\pi; 20\pi)$ là

(A) 34.

(B) 41.

(C) 39.

(D) 40.

Câu 25. Biết $F(x) = \frac{1}{\ln x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $\int \left(f(x) + \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \right) dx = \frac{a(bx + m)}{\ln x} + C$, với $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $T = 2a + b + 3m$.

(A) $T = 4.$

(B) $T = 2.$

(C) $T = 5.$

(D) $T = 6.$

—HẾT—

BÀI 4. TÍNH TÍCH PHÂN - SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa, tính chất tích phân

◀ Ví dụ 1. Tích phân $\int_0^2 (x^2 - 3x) dx$ bằng

A $\frac{10}{3}$.

B $-\frac{10}{3}$.

C $\frac{7}{3}$.

D 12.

 Lời giải.

◀ Ví dụ 2. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$ bằng

A $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$.

B $\frac{-2+\sqrt{2}}{6}$.

C $\frac{-2-\sqrt{2}}{6}$.

D $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

 Lời giải.

◀ Ví dụ 3. Tích phân $\int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A $2^{2018} - 1$.

B $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.

C $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$.

D 2^{2018} .

 Lời giải.

❖ Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

(A) -6 . (B) 6 . (C) 12 . (D) -12 .

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 5. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

(A) -2 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 4 .

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính giá trị của $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

(A) $P = 3$. (B) $P = 1$. (C) $P = 4$. (D) $P = 2$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 7. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

A $I = 6.$

B $I = 7.$

C $I = 9.$

D $I = 8.$

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 8.** Cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là hàm số lẻ thỏa $\int_{-3}^0 f(x) dx = 4$ và

$\int_3^5 f(x) dx = 7$. Tính $\int_{-3}^5 f(x) dx$

A 15.

B 7.

C 4.

D -1.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tích phân

$I = \int_0^1 [f'(x) - e^x] dx$ bằng

A $1 - e.$

B $1 + e.$

C $3 - e.$

D $3 + e.$

 Lời giải.

◀ Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{nếu } x > 0 \\ \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$.

(A) $I = -2$. (B) $I = \frac{1}{2}$. (C) $I = 1$. (D) $I = 0$.

 Lời giải.

◀ Ví dụ 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Biết $F(1) = 2$, giá trị của $F(0)$ bằng

(A) $2 + \ln 2$. (B) $\ln 2$. (C) $2 + \ln(-2)$. (D) $\ln(-2)$.

 Lời giải.

◀ Ví dụ 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2018$, $f(2) = 2019$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

(A) $S = \ln 4035$. (B) $S = 4$. (C) $S = \ln 2$. (D) $S = 1$.

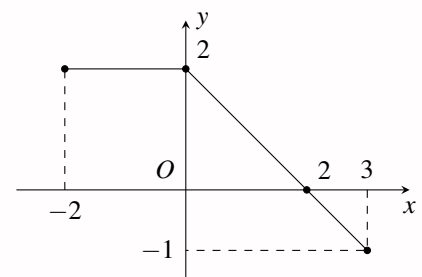
 Lời giải.

Ví dụ 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ.

Tính $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

- ☒ A 2.
 ☐ B 4.
 ☐ C $\frac{11}{2}$.
 ☐ D $\frac{5}{2}$.



Lời giải.

Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng các hàm cơ bản

⇨ **Ví dụ 14.** Tính tích phân $\int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$

(A) $\frac{96}{35}$.

(B) $\frac{28}{15}$.

(C) $\frac{7}{3}$.

(D) $\frac{23}{14}$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 15.** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{a} - \frac{b}{c\sqrt{2}}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a + b + c$.

(A) 40.

(B) 21.

(C) 12.

(D) 8.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 16.** Biết $\int_0^{\ln \sqrt{2}} (e^x + 1)^3 dx = a\sqrt{2} + b\ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a + b + c$.

(A) 6.

(B) 32.

(C) $\frac{7}{3}$.

(D) $\frac{17}{6}$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 17.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là một parabol như hình bên. Tính

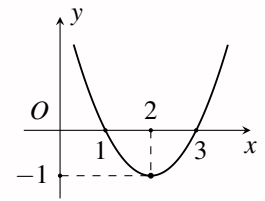
$$\int_0^3 (x-1)f(x) dx$$

(A) $\frac{9}{4}$.

(B) $-\frac{9}{4}$.

(C) $\frac{135}{4}$.

(D) $-\frac{135}{4}$.



Lời giải.

Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng các hàm cơ bản

❖ Ví dụ 18. Biết $\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1} \right) dx = \frac{1}{6} \ln \frac{a}{b}$ trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b} = 7$.

(B) $\frac{a}{9} + \frac{b}{4} = 7$.

(C) $a - b = 11$.

(D) $a + b < 22$.

Lời giải.

❖ Ví dụ 19. Biết $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$, $(a, b \in \mathbb{Q})$. Khi đó $a + 2b$ bằng

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 7.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 20.** Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Gọi $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

(A) (4; 6). (B) (8; 10). (C) (2; 4). (D) (6; 8).

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 21.** Cho tích phân $\int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) $b < 0$. (B) $c > 0$. (C) $a < 0$. (D) $a + b + c > 0$.

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 22.** Cho $I = \int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = 1$.

(B) $S = 0$.

(C) $S = -1$.

(D) $S = 2$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 23.** Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a + b + c = 4$.

(B) $a + b + c = -3$.

(C) $a + b + c = 2$.

(D) $a + b + c = 6$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 24.** Biết $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 6x + 9} dx = \frac{a}{b} - \ln \frac{c}{d}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $T = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ bằng

A $\frac{79}{12}$.

B 41.

© 20.

(D) $\frac{1249}{324}$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 25.** Biết $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

A $P = \frac{16}{3}$.

(B) $P = \frac{13}{2}$.

Ⓒ $P = 5$.

Ⓓ $P = \frac{2}{3}$.

 Lời giải.

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. (TN2020 -Mã đề 101). Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)dx$ bằng

- (A) 5. (B) 9. (C) 6. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 2. (TN2020 -Mã đề 101). Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{7}{3}$.

Câu 3. Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

- (A) $1 + \ln \sqrt{3}$. (B) $2 + \ln 3$. (C) $2 + \ln \sqrt{3}$. (D) $4 + \ln 3$.

Câu 4. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

- (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = \frac{1}{e}$. (C) $I = 1$. (D) $I = e$.

Câu 5. Giá trị của $\int_0^1 (2019x^{2018} - 1) dx$ bằng

- (A) 0. (B) $2^{2017} + 1$. (C) $2^{2017} - 1$. (D) 1.

Câu 6. Với a, b là các tham số thực. Giá trị của tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$ bằng

- (A) $b^3 - b^2a - b$. (B) $b^3 + b^2a + b$. (C) $b^3 - ba^2 - b$. (D) $3b^2 - 2ab - 1$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$

- (A) -18. (B) -2. (C) 18. (D) 2.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính $f(4)$.

- (A) 29. (B) 9. (C) 26. (D) 5.

Câu 9. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = -5$, khi đó $\int_0^2 [3f(x) + 4g(x)] dx$ bằng

- (A) 29. (B) -3. (C) -11. (D) 4.

Câu 10. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 [2f(x) - 5g(x)] dx$.

- (A) $I = -7$. (B) $I = 7$. (C) $I = -14$. (D) $I = 14$.

Câu 11. Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_{-2}^5 g(x) dx = -3$. Tính $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$.

(A) $I = -11$. (B) $I = 13$. (C) $I = 27$. (D) $I = 3$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

(A) $\frac{7}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 13. Có hai giá trị của số thực a là a_1 và a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x-3) dx = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$.

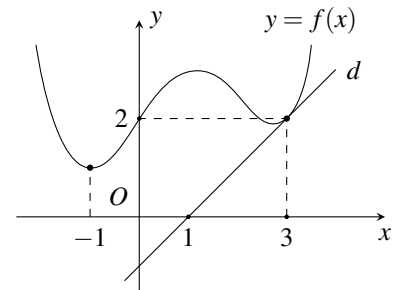
(A) $T = 26$. (B) $T = 12$. (C) $T = 13$. (D) $T = 28$.

Câu 14. Cho $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+m}} dx$, m là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của m để $I \geq 1$.

(A) $0 < m \leq \frac{1}{4}$. (B) $m \geq \frac{1}{4}$. (C) $m > 0$. (D) $\frac{1}{8} \leq m \leq \frac{1}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$ và có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f(x)$ như hình bên. Biết rằng đường thẳng d là một tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 3$. Tính $\int_{-1}^3 f''(x) dx$.

(A) 0. (B) 3. (C) -2. (D) 1.



Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$ và $f(x) - 1$ chia hết cho $(x+1)^2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

(A) 5. (B) 7. (C) $-\frac{5}{8}$. (D) $\frac{13}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0; 3]$ và thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x) dx = 4$. Khi đó giá trị của tích phân $K = \int_0^3 (e^{1+\ln f(x)} + 4) dx$ là

(A) $14 + 3e$. (B) $4e + 14$. (C) $12 + 4e$. (D) $3e + 12$.

Câu 18. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\int_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1+ax)(1+bx)} dx = 0$. Giá trị của $S = ab + a + b$ bằng

(A) $S = 0, S = 1$. (B) $S = -2, S = 0$. (C) $S = 1, S = -2$. (D) $S = -2, S = 1$.

Câu 19. Cho biết $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = a + b \ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ, thì

(A) $a + b = \frac{1}{2}$. (B) $a + b = \frac{3}{2}$. (C) $a + b = -\frac{1}{2}$. (D) $a + b = \frac{5}{2}$.

Câu 20. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a + 2b = 0$. (B) $a - 2b = 0$. (C) $a + b = -2$. (D) $a + b = 2$.

Câu 21. Cho $\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = 2a - b$.

(A) $P = 1$. (B) $P = 7$. (C) $P = -\frac{15}{2}$. (D) $P = \frac{15}{2}$.

Câu 22. Cho tích phân $\int_2^3 \frac{1}{x^3 + x^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = -\frac{2}{3}$. (B) $S = -\frac{7}{6}$. (C) $S = \frac{2}{3}$. (D) $S = \frac{7}{6}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} (4t^3 - 8t) dt$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 6]$. Tính $M - m$.

(A) 16. (B) 12. (C) 18. (D) 9.

Câu 24. Biết $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x}{x+1} dx = \frac{5}{a} + \ln b - \ln c$. Tính giá trị biểu thức $S = a - b + c$.

(A) $S = 7$. (B) $S = 3$. (C) $S = -3$. (D) $S = 1$.

Câu 25. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a + b + c$.

(A) $P = 2$. (B) $P = 8$. (C) $P = 46$. (D) $P = 22$.

—HẾT—

BÀI 5. TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Đổi biến loại $t = u(x)$

✓ Nhận dạng $I = \int_m^n f[u(x)] \cdot u'(x) dx$ (có $u(x)$ và đạo hàm của nó kèm theo là $u'(x)$).

✓ Các bước giải:

① Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$

② Đổi cận

• $x = m \Rightarrow t = u(m)$

• $x = n \Rightarrow t = u(n)$

③ Chuyển $I = \int_{u(m)}^{u(n)} f(t) \cdot dt$. Sau đó tính kết quả.

✧ Ví dụ 1. Tích phân $\int_0^2 \frac{x dx}{x^2 + 3}$ bằng

(A) $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}$.

(B) $\ln \frac{7}{3}$.

(C) $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$.

(D) $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}$.

💬 Lời giải.

✧ Ví dụ 2. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$ và $u = \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $I = - \int_{-1}^0 u^2 du$.

(B) $I = \int_0^1 u^2 du$.

(C) $I = - \int_0^1 u^2 du$.

(D) $I = 2 \int_0^1 u du$.

💬 Lời giải.

- ❖ Ví dụ 3. Cho tích phân $I = \int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx$. Khi đặt $t = \sqrt{x^2+9}$ thì tích phân đã cho trở thành
- (A) $I = \int_3^5 t dt$. (B) $I = \int_0^4 t dt$. (C) $I = \int_0^4 t^2 dt$. (D) $I = \int_3^5 t^2 dt$.

💬 Lời giải.

- ❖ Ví dụ 4. Tính $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$.

- (A) $\ln 2$. (B) $-\ln 2$. (C) $\ln \sqrt{2}$. (D) $-\ln \sqrt{2}$.

💬 Lời giải.

- ❖ Ví dụ 5. Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(2x+1)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng
- (A) $\frac{1}{12}$. (B) $\frac{5}{12}$. (C) $-\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{4}$.

💬 Lời giải.

- ❖ Ví dụ 6. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)} dx = a \ln \frac{3}{2} + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a-b=1$. (B) $2a+b=1$. (C) $a^2+b^2=4$. (D) $a+2b=0$.

💬 Lời giải.



◀ Ví dụ 7. Cho tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{(x^2 + 1) \ln x + 1}{x \ln x} dx = \frac{ae^4 + be^2}{2} + c + d \ln 2$. Chọn phát biểu đúng.

(A) $a = b = c = d$.

(B) $a = b^2 = \sqrt{c} = \frac{1}{d}$.

(C) $a = b^2 = \sqrt{d} = -\frac{1}{c}$.

(D) $b = a^2 = \sqrt{d} = \frac{1}{c}$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 8. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

(A) $I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1$.

(B) $I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1]$.

(C) $I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1]$.

(D) $I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 9. Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng

(A) 9.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 7.

💬 Lời giải.

⇔ **Ví dụ 10.** Biết $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 4$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

(A) $S = 2$.

(B) $S = 3$.

(C) $S = 4$.

(D) $S = 5$.

💬 **Lời giải.**

⇔ **Ví dụ 11.** Cho $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

(A) $S = -2$.

(B) $S = 0$.

(C) $S = 1$.

(D) $S = 2$.

💬 **Lời giải.**

⇔ **Ví dụ 12.** Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = ae + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P = a + 2b - c$.

(A) $P = -1$.

(B) $P = 1$.

(C) $P = -2$.

(D) $P = 0$.

💬 **Lời giải.**

Dạng 2. Lượng Giác Hóa

① $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$: Đặt $x = |a| \sin t$.

② $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$: Đặt $x = |a| \sin t$.

③ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$: Đặt $x = |a| \tan t$.

④ Trường hợp $\sqrt{x^2 + nx + p}$, ta phân tích thành $\sqrt{a \pm (x - x_0)^2}$. Sau đó chọn một trong hai cách đặt $x - x_0 = \sqrt{a} \sin t$ hoặc $x - x_0 = \sqrt{a} \tan t$

❖ Ví dụ 13. Đổi biến $x = 2 \sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ trở thành

Ⓐ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$.

Ⓑ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt$.

Ⓒ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Ⓓ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 14. Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx$ và $x = 4 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$.

Ⓑ $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$.

$$\textcircled{\text{C}} \quad I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$$

$$\textcircled{\text{D}} \quad I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 15.** Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2+x^2} dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \pi$, với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

$$\textcircled{\text{A}} \quad a+b=30.$$

$$\textcircled{\text{B}} \quad a+b=37.$$

$$\textcircled{\text{C}} \quad a+b=35.$$

$$\textcircled{\text{D}} \quad a+b=33.$$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tính $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

(A) $-\frac{\pi^4}{4}$.

(B) $-\pi^4$.

(C) 0.

(D) $\frac{1}{4}$.

Câu 2. Tích phân $\int_0^2 2x(x^2 + 1)^{2018} dx$ bằng

(A) $\frac{5^{2019} - 1}{2019}$.

(B) $\frac{5^{2019} - 1}{4038}$.

(C) $\frac{5^{2018} - 1}{4036}$.

(D) 1.

Câu 3. Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $2a + b = 0$.

(B) $a - 2b = 0$.

(C) $2a - b = 0$.

(D) $a + 2b = 0$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$. Tính $I = \int_a^b f'(x)e^{f(x)} dx$.

(A) $I = 0$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = -1$.

(D) $I = 2$.

Câu 5. Tích phân $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$ có giá trị bằng

(A) $\frac{8-2\sqrt{2}}{3}$.

(B) $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$.

(C) $\frac{4+\sqrt{2}}{3}$.

(D) $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$.

(A) $I = e - 1$.

(B) $I = -e - 1$.

(C) $I = -e + 1$.

(D) $I = e + 1$.

Câu 7. Cho $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$. Đặt $t = e^x$. Khi đó

(A) $I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$.

(B) $I = \int_1^e \frac{t^2}{t+1} dt$.

(C) $I = \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$.

(D) $I = \int_1^e \frac{t}{t+1} dt$.

Câu 8. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

(A) $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$.

(B) $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$.

(C) $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$.

(D) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$.

Câu 9. Cho $I = \int_1^2 x(x-1)^5 dx$ và $u = x-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

(A) $I = \int_0^1 (u+1)u^5 du$.

(B) $I = \int_1^2 x(1-x)^5 dx$.

(C) $I = \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1$.

(D) $I = \frac{13}{42}$.

Câu 10. Biết $I = \int_2^4 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = 2a + 3b + 4c$.

- (A) $P = -3$. (B) $P = 3$. (C) $P = 9$. (D) $P = 1$.

Câu 11. Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ và $t = \sqrt{4-x^2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $I = \sqrt{3}$. (B) $I = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}}$. (C) $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt$. (D) $I = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}}$.

Câu 12. Cho $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$. Xét phép đổi biến $t = \sqrt{1+3\ln x}$. Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- (A) $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. (B) $I = \frac{14}{9}$. (C) $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$. (D) $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$.

Câu 13. Cho $I = \int_1^4 f(t) dt = 9$. Tính tích phân $J = \int_0^1 f(3x+1) dx$.

- (A) 9. (B) 27. (C) 3. (D) 1.

Câu 14. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^1 f(2x) dx$ bằng bao nhiêu?

- (A) 9. (B) 6. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 3.

Câu 15. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2018$. Tính $I = \int_0^1 xf(x^2+1) dx$.

- (A) $I = 2018^2 + 1$. (B) $I = 4036$. (C) $I = 1009$. (D) $I = 2018$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$ thỏa mãn $\int_2^3 f(x) dx = 2018$. Tính $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} xf(x^2) dx$.

- (A) $I = 2018^2$. (B) $I = 1009$. (C) $I = 4036$. (D) $I = \sqrt{2018}$.

Câu 17. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 1$. (B) $S = \frac{1}{2}$. (C) $S = \frac{3}{4}$. (D) $S = \frac{2}{3}$.

Câu 18. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\cos x} + \sin x) \sin x dx = a + be + c\pi$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a + b + c$.

- (A) $\frac{3}{5}$. (B) $\frac{6}{5}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Câu 19. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tổng $S = a + b + c$ bằng giá trị nào sau đây?

- (A) $S = 1$. (B) $S = 4$. (C) $S = 3$. (D) $S = 0$.

Câu 20. Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$, tính $P = a + 2b + c - 7$.

(A) $-\frac{1}{9}$. (B) $\frac{86}{27}$. (C) -2 . (D) $\frac{67}{27}$.

Câu 21. Biết rằng $I = \int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}} dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $a + b + c$.

(A) 39. (B) 27. (C) 33. (D) 41.

Câu 22. Tính tích phân $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 2)^{2017} dx$.

(A) 0. (B) $2,1 \cdot 10^{-15}$. (C) 690952,8. (D) $\frac{272}{35}$.

Câu 23. Cho $\int_0^3 \frac{2x-3}{1+\sqrt{x+1}} dx = -\frac{a}{b} + c \ln \frac{3}{2}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

(A) $P = 17$. (B) $P = 12$. (C) $P = 15$. (D) $P = 1$.

Câu 24. (THPT QUỐC GIA 2018 - 101). Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a - b = -c$. (B) $a + b = c$. (C) $a + b = 3c$. (D) $a - b = -3c$.

Câu 25. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x + \cos x + 2x}{\sin x + 2} dx = \frac{\pi^2}{a} + \ln \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a \cdot b \cdot c$.

(A) $P = 24$. (B) $P = 13$. (C) $P = 48$. (D) $P = 96$.

Câu 26. Biết $I = \int_1^2 \frac{x(1+e^x) + \ln x + 1}{(x \ln x + e^x)^2} dx = \frac{a}{b \ln 2 + e^c} + \frac{2}{e}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = a + b + c$.

(A) $P = 3$. (B) $P = 6$. (C) $P = 1$. (D) $P = 7$.

Câu 27. Nếu $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \frac{a}{b} \ln c$, (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a + 2b + 3c$ là

(A) 13. (B) 14. (C) 9. (D) 11.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.

(A) $\frac{2}{3}$. (B) 2. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) -2.

Câu 29. Biết $\int_0^1 \frac{(x^2 + 5x + 6)e^x}{x + 2 + e^{-x}} dx = a \cdot e - b - \ln \frac{a \cdot e + c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S = 2a + b + c$.

(A) $S = 10$. (B) $S = 0$. (C) $S = 0$. (D) $S = 9$.

Câu 30. Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

(A) $M = 35$.

(B) $M = 41$.

(C) $M = -37$.

(D) $M = -35$.

—HẾT—

BÀI 6. TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tích phân từng phần với "u = đa thức"

❖ Ví dụ 1. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx$ bằng

☐ A $\frac{4 + \pi}{4\sqrt{2}}$.

☐ B $\frac{2 - \pi}{2\sqrt{2}}$.

☐ C $\frac{4 - \pi}{4\sqrt{2}}$.

☐ D $\frac{2 + \pi}{2\sqrt{2}}$.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} \, dx = a \cdot e^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $a + b$.

☐ A $\frac{1}{2}$.

☐ B $\frac{1}{4}$.

☐ C 0.

☐ D 1.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x \, dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ A $a + b + c = 1$.

☐ B $a - b + c = 0$.

☐ C $2a + b + c = -1$.

☐ D $a + 2b + c = 1$.

 Lời giải.

6. TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Kết nối tri thức với cuộc sống

VD 4. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$.

A $T = 9$. **B** $T = 13$. **C** $T = 7$. **D** $T = 11$.

 **Lời giải.**

Ví dụ 5. Biết $\int_0^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{c}} + d$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + c + d$.

(A) 0. (B) $\frac{67}{2}$. (C) $\frac{65}{2}$. (D) 35.

 **Lời giải.**

📁 Dạng 2. Tích phân từng phần với "u = logarit"

- 🔹 **Ví dụ 6.** Biết rằng $\int_2^3 x \ln x \, dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$, trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là
- ☐ A $\frac{9}{2}$.
 ☐ B 18.
 ☐ C 9.
 ☐ D $\frac{27}{4}$.

💬 Lời giải.

- 🔹 **Ví dụ 7.** Bằng cách đặt $u = \ln x$, $dv = x^2 \, dx$ thì tích phân $\int_1^3 x^2 \ln x \, dx$ biến đổi thành kết quả nào sau đây?

- ☐ A $\frac{x^3 \ln x}{3} \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 \, dx$.
 ☐ B $\frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 \, dx$.
- ☐ C $\frac{x^3 \ln x}{3} \Big|_1^3 + \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 \, dx$.
 ☐ D $-\frac{x^3 \ln x}{3} \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 \, dx$.

💬 Lời giải.

- 🔹 **Ví dụ 8.** Biết $I = \int_0^4 x \ln(2x+1) \, dx = \frac{a}{b} \ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A $S = 60.$

B $S = 70.$

C $S = 72.$

D $S = 68.$

 **Lời giải.**

✧ **Ví dụ 9.** Cho tích phân $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A $P = 6.$

B $P = -6.$

C $P = 5.$

D $P = 4.$

 **Lời giải.**

✧ **Ví dụ 10.** Biết tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln(x^3 + 3x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^4} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $S = 27a + 81b + 72c$ bằng

A $-7.$

B $41.$

C $3.$

D $31.$

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tính tích phân $\int_0^1 (4x+3)e^x dx$

- (A) $I = 3e + 1.$ (B) $I = 3e - 1.$ (C) $I = -3e - 1.$ (D) $I = 1 - 3e.$

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^\pi (2x+1) \sin x dx.$

- (A) $I = 2\pi + 1.$ (B) $I = 2\pi + 2.$ (C) $I = 2\pi.$ (D) $I = -2\pi.$

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = 2x+1$ và $dv = e^x dx$. Kết quả nào sau đây **đúng**?

- (A) $I = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx.$ (B) $I = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx.$
 (C) $I = (2x+1)e^x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx.$ (D) $I = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx.$

Câu 4. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

- (A) $\int_a^b xe^x dx = xe^x \Big|_a^b - \int_a^b x dx.$ (B) $\int_a^b xe^x dx = xe^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x dx.$
 (C) $\int_a^b xe^x dx = xe^x \Big|_a^b + \int_a^b x dx.$ (D) $\int_a^b xe^x dx = xe^x \Big|_a^b + \int_a^b e^x dx.$

Câu 5. Biết rằng $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$, trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

- (A) $\frac{27}{4}.$ (B) $\frac{9}{2}.$ (C) 18. (D) 9.

Câu 6. Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx.$ (B) $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx.$
 (C) $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e x \ln x dx.$ (D) $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx.$

Câu 7. Tính tích phân $\int_0^\pi x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx.$ (B) $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin 2x dx.$
 (C) $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \sin 2x dx.$ (D) $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi x \sin 2x dx.$

Câu 8. Cho $I = \int_0^m (2x - 1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$.

Tính $P = a - 3b$.

- (A) $P = -3$. (B) $P = -2$. (C) $P = -4$. (D) $P = -1$.

Câu 9. Biết $\int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = a \cdot e^4 + b \cdot e^2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = -4$. (B) $S = -2$. (C) $S = 2$. (D) $S = 4$.

Câu 10. Cho $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{a}{b} e^3 + \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $T = ad - bc$.

- (A) 3. (B) 0. (C) -9. (D) 9.

Câu 11. Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4} (a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $a + b + c = 1$. (B) $a - b + c = 0$. (C) $2a + b + c = -1$. (D) $a + 2b + c = 1$.

Câu 12. Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \cos mx dx = \frac{\pi - 2}{2}$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- (A) $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$. (B) $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. (C) $\left(1; \frac{6}{5}\right)$. (D) $\left(\frac{5}{6}; \frac{8}{7}\right)$.

Câu 13. Giả sử tích phân $\int_0^1 x \cdot \ln(2x + 1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

- (A) $b + c = 6057$. (B) $b + c = 6059$. (C) $b + c = 6058$. (D) $b + c = 6056$.

Câu 14. Cho biết $I = \int_1^2 \ln(9 - x^2) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = |a| + |b| + |c|$.

- (A) $S = 34$. (B) $S = 13$. (C) $S = 18$. (D) $S = 26$.

Câu 15. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x + 1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a + b}{c}$.

- (A) $S = \frac{2}{3}$. (B) $S = \frac{5}{6}$. (C) $S = \frac{1}{2}$. (D) $S = \frac{1}{3}$.

Câu 16. Biết $I = \int_0^4 x \ln(2x + 1) dx = \frac{a}{b} \ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = 60$. (B) $S = 70$. (C) $S = 72$. (D) $S = 68$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(2) = 4$ và $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx.$$

- (A) $I = 1$. (B) $I = 3$. (C) $I = -1$. (D) $I = 9$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^3 xf'(x) dx = 1, f(3) = 1$. Tính $I =$

$$\int_0^3 f(x) dx.$$

- (A) $I = -4$. (B) $I = 2$. (C) $I = 4$. (D) $I = -2$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}}, \forall x > 0$ và $f(1) = 2\sqrt{2}$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- (A) $4\sqrt{3} - \frac{14}{3}$. (B) $4\sqrt{3} + \frac{10}{3}$. (C) $4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$. (D) $4\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}$.

Câu 20. Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c (a, b, c \in \mathbb{R})$. Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

- (A) $T = 6$. (B) $T = 9$. (C) $T = 10$. (D) $T = 5$.

Câu 21. Biết $\int_0^3 x \ln(x^2 + 16) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + \frac{c}{2}$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

- (A) $T = 2$. (B) $T = -16$. (C) $T = -2$. (D) $T = 16$.

Câu 22. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 - b \ln 2 + \frac{\pi}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a + b + c$.

- (A) -5 . (B) -3 . (C) 5 . (D) 3 .

Câu 23. Biết rằng tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \cdot \ln(\sin x + \cos x) dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{c}{d}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

- (A) 7 . (B) 6 . (C) 8 . (D) 5 .

Câu 24. Biết tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln(2x^2 + 4x + 1)}{(x+1)^3} dx = \frac{a}{b} \ln 7 + c \ln 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $S = a + b + c$ bằng

- (A) 13 . (B) -13 . (C) 11 . (D) -11 .

Câu 25. Biết tích phân $\int_0^1 (2x-1) \ln(x^3+1) dx = \frac{a}{b} - c \ln 2$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c$.

A 7.

B 12.

C -17 .

D 12.

—HẾT—

BÀI 7. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Sử dụng tính chất tích phân không phụ thuộc biến

Tính chất $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$

❖ Ví dụ 1. Cho $\int_0^4 f(x) dx = -1$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 f(4x) dx.$

(A) $I = \frac{1}{4}.$

(B) $I = -2.$

(C) $I = -\frac{1}{4}.$

(D) $I = -\frac{1}{2}.$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$, khi đó $\int_2^5 f(x) dx$ bằng

(A) 2.

(B) 1.

(C) -1.

(D) 4.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2018$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 2x dx$ bằng

(A) 2018.

(B) 1009.

(C) -1009.

(D) -2018.

 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 4.** Biết $\int_{-1}^{11} f(x) dx = 18$. Tính $I = \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx$.

(A) $I = 5$.

(B) $I = 7$.

(C) $I = 8$.

(D) $I = 10$.

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 5.** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x^3 + 3x + 1) = x + 2$. Tính $\int_1^5 f(x) dx$.

(A) $\frac{37}{6}$.

(B) $\frac{527}{3}$.

(C) $\frac{41}{4}$.

(D) $\frac{464}{3}$.

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính

$\int_0^1 f(x) dx$.

(A) 2.

(B) 4.

(C) -1.

(D) 6.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa $f(4 - x) = f(x) \quad \forall x \in [1; 3]$ và $\int_1^3 x \cdot f(x) dx = -2$. Giá trị $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) 2. (B) -1. (C) -2. (D) 1.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Tìm hàm $f(x)$ bằng phương pháp đổi biến số

Ta xét một trong hai dạng sau:

① $u(f(x)) \cdot f'(x) = v(x).$

② $u(f(x)) = v(x) \cdot f'(x).$

❖ **Ví dụ 8. (THPT QUỐC GIA 2018).** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\frac{35}{36}$. (B) $-\frac{2}{3}$. (C) $-\frac{19}{36}$. (D) $-\frac{2}{15}$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(2) = \frac{1}{15}$ và $f'(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0, \quad \forall x \in (0; +\infty)$. Tính $f(1) + f(2) + f(3)$.

(A) $\frac{11}{30}$. (B) $\frac{7}{15}$. (C) $\frac{11}{15}$. (D) $\frac{7}{30}$.

💬 Lời giải.

Dạng 3. Tìm hàm $f(x)$ bằng phương pháp đưa về "đạo hàm đúng"

Ta biến đổi biểu thức chứa $f(x)$ và $f'(x)$ về một trong hai dạng sau:

$$\textcircled{1} \quad f'(x) \cdot u(x) + u'(x) \cdot f(x) = v(x) \Leftrightarrow [u(x) \cdot f(x)]' = v(x).$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $u(x) \cdot f(x) = \int v(x) dx$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{f'(x) \cdot u(x) - u'(x) \cdot f(x)}{[u(x)]^2} = v(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{u(x)} \right]' = v(x).$$

Lấy nguyên hàm (tích phân) hai vế, ta được $\frac{f(x)}{u(x)} = \int v(x) dx$.

⇨ **Ví dụ 10.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(x) = x^3 + 1 - xf'(x)$. Tính $f(4)$.

A $\frac{71}{4}$.

B $\frac{275}{16}$.

C $\frac{83}{4}$.

D $\frac{290}{16}$.

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 11.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$.

A 5.

B 20.

C 10.

D 15.

 **Lời giải.**

✧ Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

☐ A $f(1) = e^2$.

☐ B $f(1) = -\frac{1}{e}$.

☐ C $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

☐ D $f(1) = \frac{1}{e}$.

💬 Lời giải.

✧ Ví dụ 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

☐ A 28.

☐ B 22.

☐ C $\frac{19}{2}$.

☐ D 10.

💬 Lời giải.

Dạng 4. Phương pháp tích phân từng phần

- ↔ **Ví dụ 14.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.
- ☐ **A** $I = -12$.
 ☐ **B** $I = 8$.
 ☐ **C** $I = 1$.
 ☐ **D** $I = -8$.

 Lời giải.

- ↔ **Ví dụ 15.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$.
- ☐ **A** 12.
 ☐ **B** 13.
 ☐ **C** 20.
 ☐ **D** 7.

 Lời giải.

- ↔ **Ví dụ 16.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Tính $I = \int_0^1 x^3 f'(x) dx$.

(A) -1 .

(B) 1 .

(C) 3 .

(D) -3 .

 Lời giải.

◀ Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x) dx$ bằng

(A) 7 .

(B) $\frac{197}{6}$.

(C) $\frac{29}{2}$.

(D) $\frac{181}{6}$.

 Lời giải.

- ↔ **Ví dụ 18.** Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$. Biết $F(1) = 1, F(4) = 2$ và $\int_1^4 \frac{F(x)}{2x+1} dx = 5$. Tính $I = \int_1^4 \ln(2x+1)f(x) dx$.
- (A) 10. (B) $3 \ln 3 - 10$. (C) $3 \ln 3 - 5$. (D) $\ln 3 - 5$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 5. Phương pháp ghép bình phương

Ghép các giả thiết, đưa về dạng $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.

- ↔ **Ví dụ 19.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = \frac{3}{5}$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{9}$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180}$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x) - 1] dx$.
- (A) $\frac{1}{15}$. (B) $-\frac{1}{15}$. (C) $-\frac{1}{10}$. (D) $\frac{1}{10}$.

💬 Lời giải.

⇔ **Ví dụ 20.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{5}$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$.

Ⓐ $I = \frac{3}{4}$. Ⓑ $I = \frac{1}{5}$. Ⓒ $I = \frac{1}{4}$. Ⓓ $I = \frac{4}{5}$.

💬 Lời giải.

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$. Tính tích phân $J = \int_0^2 f(2x) dx$.

- (A) $J = 64$. (B) $J = 8$. (C) $J = 32$. (D) $J = 16$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^5 f(x) dx = 2018$. Tính $I = \int_0^1 f(3x+2) dx$.

- (A) $I = 6054$. (B) $I = 6056$. (C) $I = \frac{2018}{5}$. (D) $I = \frac{2018}{3}$.

Câu 3. Cho tích phân $\int_0^3 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{f(\ln x^3)}{2x} dx$.

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) 9. (C) $\frac{1}{6}$. (D) 6.

Câu 4. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 1$, tính $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx$.

- (A) $I = 4$. (B) $I = 2$. (C) $I = 1$. (D) $I = \frac{1}{2}$.

Câu 5. Nếu $\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \cdot f(\ln x) dx = \frac{1}{2}$ thì tích phân $I = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\ln 2} f(e^x) dx = 4$. Khi đó $\int_1^2 \frac{2x + f(x)}{x} dx$ bằng

- (A) 4. (B) 6. (C) 8. (D) 2.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x) dx = 2$, $\int_0^2 f(4x) dx = 6$.

Tính $I = \int_{-2}^2 f(3|x| + 2) dx$.

- (A) $I = \frac{20}{3}$. (B) $I = 20$. (C) $I = \frac{40}{3}$. (D) 40.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1$, $\int_0^4 f(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|3x - 1|) dx$.

- (A) $I = 4$. (B) $I = 2$. (C) $I = \frac{4}{3}$. (D) $I = 1$.

Câu 9. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và $\int_1^3 f(-2x) dx =$

3. Tính $I = \int_{-1}^6 f(x) dx$.

(A) $I = 2$.

(B) $I = 11$.

(C) $I = 5$.

(D) $I = 14$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$. Biết $\int_0^1 xf'(x) dx = -\frac{1}{3}$ và $f(1) = 2$. Tính

$$\int_0^1 [f(x) + 2] dx.$$

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $-\frac{13}{3}$.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{13}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính

$$I = \int_0^2 xf'(x) dx.$$

(A) $I = 3$.

(B) $I = -3$.

(C) $I = 6$.

(D) $I = 0$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính $I = \int_0^1 xf'(3x) dx$.

(A) $I = 6$.

(B) $I = 12$.

(C) $I = 9$.

(D) $I = 15$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

(A) $I = 12$.

(B) $I = 112$.

(C) $I = 28$.

(D) $I = 144$.

Câu 14. Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x-1) dx = 3$ và $f(1) = 4$. Khi đó $\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 1 .

(C) -1 .

(D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $f(2018) = 2$ và $\int_2^{1011} f(2x -$

$$4) dx = 1. \text{ Tính } I = \int_0^{2018} x \cdot f'(x) dx.$$

(A) $I = 4037$.

(B) $I = 4036$.

(C) $I = 4034$.

(D) $I = 4035$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn $\int_0^2 x(f'(x) - 1) dx = 2f(2)$. Tính giá

$$\text{trị của } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

(A) 1 .

(B) 2 .

(C) -1 .

(D) -2 .

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 6$,

$$\int_0^1 (2x - 2)f'(x) dx = 6. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ có giá trị bằng}$$

(A) -3 .

(B) -9 .

(C) 3 .

(D) 6 .

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có $f(7) = 15$ và $f'(x) = \frac{x+1}{x+2-\sqrt{x+2}}$, $\forall x > 0$. Khi đó $\int_2^7 f(x) dx$ bằng

(A) $\frac{271}{6}$.

(B) $\frac{347}{6}$.

(C) $\frac{287}{6}$.

(D) 7 .

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10$ và $f(0) =$

3. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx$ bằng

(A) $I = -7$.

(B) $I = 13$.

(C) $I = 7$.

(D) $I = -13$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính tích

phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

(A) 2 .

(B) 6 .

(C) 3 .

(D) 1 .

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 2x - 2) = 3x - 1$. Tính $I = \int_1^{10} f(x) dx$.

(A) $\frac{135}{4}$.

(B) $\frac{125}{4}$.

(C) $\frac{105}{4}$.

(D) $\frac{75}{4}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x - 1|) dx$.

(A) $I = 6$.

(B) $I = \frac{2}{3}$.

(C) $I = 4$.

(D) $I = \frac{3}{2}$.

Câu 23. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn $\int_a^b f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_a^b f(a + b - x) dx$

(A) $I = a + b + 7$.

(B) $I = a + b - 7$.

(C) $I = 7 - a - b$.

(D) $I = 7$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$, có $f(2) = 14$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = 6$. Tính $I =$

$\int_1^2 f'(x) \ln x dx$.

(A) $I = 14 \ln 2 - 6$.

(B) $I = 7 \ln 2 - 6$.

(C) $I = 7 \ln 2 - 6$.

(D) $I = 14 \ln 2 + 6$.

Câu 25. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x) \cdot f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$.

(A) $I = -4$.

(B) $I = e - 2$.

(C) $I = 4$.

(D) $I = 2 - e$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x) dx = 4$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$.

(A) $\int_0^1 f(x) dx = 1$. (B) $\int_0^1 f(x) dx = 4$. (C) $\int_0^1 f(x) dx = 2$. (D) $\int_0^1 f(x) dx = 8$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $3xf(x^2) - f(x) = 9x^3 - 1$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

(A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{5}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{8}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) > 0, \forall x \in [1; 2]$ và có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$. Biết $f(2) = 20$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2$. Tính giá trị của $f(1)$.

(A) $f(1) = 10$. (B) $f(1) = 20$. (C) $f(1) = -10$. (D) $f(1) = 0$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $3f'(x) + 2f^2(x) = 0$. Tính $f(1)$ biết rằng $f(0) = 1$.

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{2}{5}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^4$. Khi đó $f(1)$ bằng

(A) $e^{\frac{3}{4}}$. (B) e . (C) $e^{\frac{3}{2}}$. (D) e^2 .

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^3 f^2(x)$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

(A) $16x - y - 12 = 0$. (B) $x + y - 3 = 0$. (C) $12x - y - 12 = 0$. (D) $12x - 9y - 1 = 0$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f(1) = 1$ và $f(x) = xf'(x) + \ln x, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $f(e)$ bằng

(A) e . (B) 1 . (C) 2 . (D) $\frac{1}{e}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 4]$ và thỏa mãn $2xf'(x) - f(x) = 2x\sqrt{x}, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = 0$, tính $I = \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx$.

(A) $I = \frac{22}{3}$. (B) $I = \frac{20}{3}$. (C) $I = \frac{8}{3}$. (D) $I = \frac{14}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(3) < 2$. (B) $2 < f(3) < 4$. (C) $f(3) > 6$. (D) $4 < f(3) < 6$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = e^x f(x)$ với $f(x) \neq 0, \forall x$ và $f(0) = 1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

(A) $e + 1$. (B) e^{e-2} . (C) $e - 1$. (D) e^{e+1} .

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.

(A) $I = \frac{1186}{45}$. (B) $I = \frac{1174}{45}$. (C) $I = \frac{1222}{45}$. (D) $I = \frac{1201}{45}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, với mọi $x \in [0; 1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- (A) $I = \frac{1}{2018 \cdot 2021}$. (B) $I = \frac{1}{2019 \cdot 2020}$. (C) $I = \frac{1}{2019 \cdot 2021}$. (D) $I = \frac{1}{2018 \cdot 2019}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$, $f(1) = 0$ và

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{5}{12}$. (B) $-\frac{1}{5}$. (C) $\frac{4}{5}$. (D) $-\frac{7}{10}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 80$, $\int_0^1 xf(x) dx =$

-2 . Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- (A) -5 . (B) $\frac{5}{2}$. (C) $-\frac{5}{2}$. (D) 5 .

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}$,

$\int_0^1 (2x - 1)f(x) dx = -\frac{1}{30}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- (A) $\frac{1}{30}$. (B) $\frac{11}{30}$. (C) $\frac{11}{12}$. (D) $\frac{11}{4}$.

—HẾT—

BÀI 8. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$

① Xác định 2 cận $x = a$ và $x = b$, với $a < b$;

② Diện tích được tính theo công thức $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Ví dụ 1.

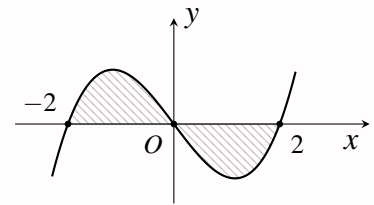
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) được tính bởi công thức nào sau đây?

A $\int_{-2}^2 f(x) dx.$

B $\int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx.$

C $\int_2^0 f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx.$

D $\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$



 Lời giải.

 Ví dụ 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A $S = \frac{7}{3}.$

B $S = \frac{8}{3}.$

C $S = 7.$

D $8.$

 Lời giải.

 Ví dụ 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 4$, $x = -1$, $x = 2$ là

A $4.$

B $\frac{32}{3}.$

C $9.$

D $\frac{17}{4}.$

 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 4.** Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 3x^2$, $y = 2x + 5$, $x = -1$ và $x = 2$.

(A) $S = \frac{256}{27}$.

(B) $S = \frac{269}{27}$.

(C) $S = 9$.

(D) $S = 27$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 5.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

(A) $S = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$.

(B) $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$.

(C) $S = \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

(D) $S = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 6.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2 + 1}$; $x = 1$ và trục Ox .

(A) $\frac{3\sqrt{2} - 1}{5}$.

(B) $\frac{5 - \sqrt{2}}{6}$.

(C) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$.

(D) $\frac{5 - 2\sqrt{2} - 1}{3}$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 7.** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + x$.

(A) $\frac{9\pi}{8}$.

(B) $\frac{27}{8}$.

(C) $\frac{9}{8}$.

(D) $\frac{27\pi}{8}$.

💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 8.** Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1) : y = x^2 + 2x$ và $(C_2) : y = x^3$.

A $S = \frac{83}{12}$.

B $S = \frac{15}{4}$.

C $S = \frac{37}{12}$.

D $S = \frac{9}{12}$.

💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 9.**

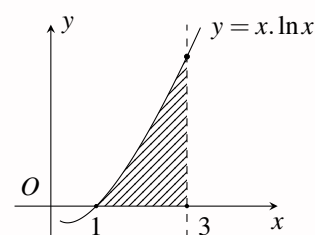
Cho hình phẳng (H) như hình vẽ (phần gạch sọc). Diện tích hình phẳng (H) là

A $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$.

B 1.

C $\frac{9}{2} \ln 3 - 4$.

D $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$.



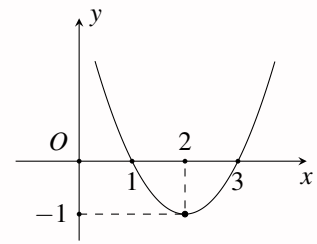
💬 Lời giải.

💡 **Ví dụ 10.**

Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành.

- A** 1.
C $\frac{5}{3}$.

- B** 2.
D $\frac{4}{3}$.



Lời giải.

❖ **Ví dụ 11.** Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = a$, với $a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3})$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

- A** $\left(\frac{7}{10}; 1\right)$.

- B** $\left(\frac{51}{50}; \frac{11}{10}\right)$.

- C** $\left(\frac{11}{10}; \frac{3}{2}\right)$.

- D** $\left(1; \frac{51}{50}\right)$.

Lời giải.

❖ **Ví dụ 12.** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

(A) $k = \ln \frac{9}{2}$.

(B) $k = \ln 4$.

(C) $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

(D) $k = \ln 5$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 13.**

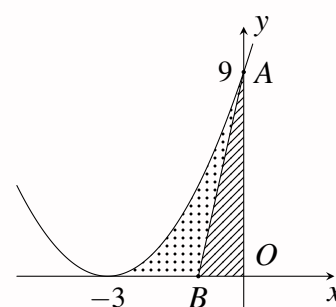
Xét hình phẳng $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ ($-3 < b < 0$). Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia $(\mathcal{H})$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.

(A) $b = -\frac{1}{2}$.

(B) $b = -2$.

(C) $b = -\frac{3}{2}$.

(D) $b = -1$.



💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 14.** Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là

(A) $m = 5$.

(B) $m = 4$.

(C) $m = 2$.

(D) $m = 3$.

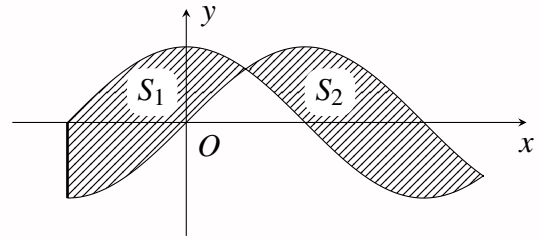
💬 **Lời giải.**



❖ Ví dụ 15.

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = \cos x$ và S_1, S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ bên. Tính $S_1^2 + S_2^2$.

- ☐ A $S_1^2 + S_2^2 = 10 - 2\sqrt{2}$.
☐ B $S_1^2 + S_2^2 = 10 + 2\sqrt{2}$.
☐ C $S_1^2 + S_2^2 = 11 - 2\sqrt{2}$.
☐ D $S_1^2 + S_2^2 = 11 + 2\sqrt{2}$.

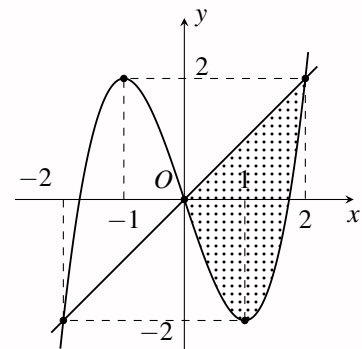


💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 16.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phần hình phẳng được tô đậm như hình bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số đa thức bậc ba và một đường thẳng. Diện tích S của phần tô đậm đó bằng bao nhiêu?

- ☐ A $S = 8$ (đvdt).
☐ B $S = 6$ (đvdt).
☐ C $S = 2$ (đvdt).
☐ D $S = 4$ (đvdt).



💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Biết rằng diện tích miền tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và $\int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{14}{3}$. Tính

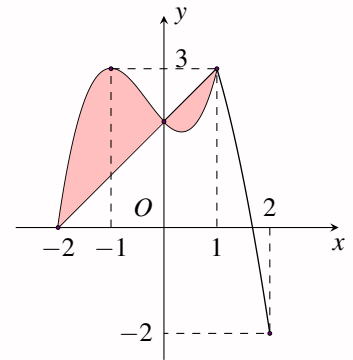
$$I = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx.$$

(A) $\frac{12}{25}$.

(B) $\frac{25}{12}$.

(C) $\frac{8}{3}$.

(D) $\frac{3}{8}$.

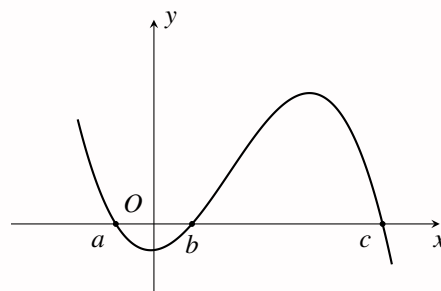


💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- ☐ A $f(c) > f(b) > f(a)$. ☐ B $f(b) > f(a) > f(c)$.
☐ C $f(a) > f(c) > f(b)$. ☐ D $f(c) > f(a) > f(b)$.

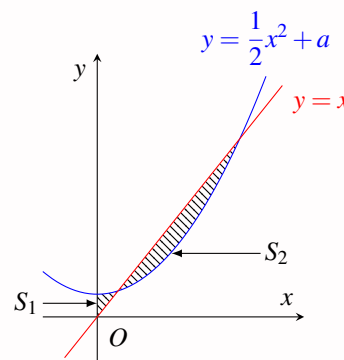


💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 19.

(THPT Quốc gia năm 2019). Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right)$. ☐ B $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. ☐ C $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$. ☐ D $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{7}\right)$.

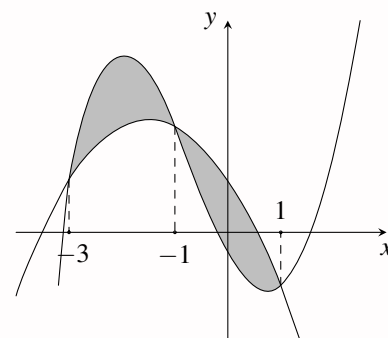


💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 20.

(THPT Quốc gia năm 2018). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho bằng

- ☐ A 4.
 ☐ B 5.
 ☐ C 8.
 ☐ D $\frac{9}{2}$.



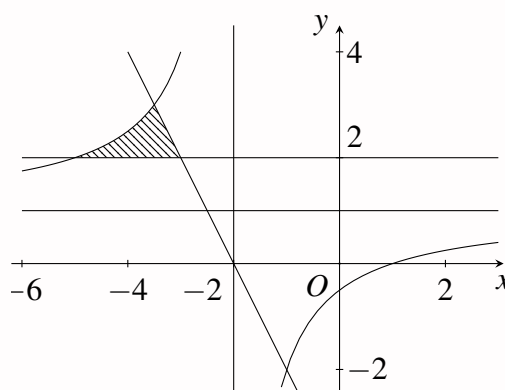
💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị hàm số

◀ Ví dụ 21.

Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ và các đường thẳng $y = 2$, $y = -2x - 4$ (như hình vẽ bên).

- ☐ A $\frac{1}{4}$.
 ☐ B $3\ln 3 - 2$.
☐ C $-\frac{5}{4} + 3\ln 2$.
 ☐ D $\frac{1}{4} + 3\ln 2$.



 Lời giải.

◀ Ví dụ 22. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức nào dưới đây?

- (A) $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx.$
 (B) $S = \int_0^1 (e^x - x) dx.$
 (C) $S = \int_0^1 (x - e^x) dx.$
 (D) $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx.$

 Lời giải.

◀ Ví dụ 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng

- (A) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$
 (B) $\frac{\pi - 1}{2}.$
 (C) $\frac{\pi}{2} - 1.$
 (D) $\frac{\pi}{4} - 1.$

 Lời giải.

Dạng 3. Tọa độ hoá một số "mô hình" hình phẳng thực tế

⇒ **Ví dụ 24.** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 31904000.

(B) 23991000.

(C) 10566000.

(D) 17635000.

 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 25.**

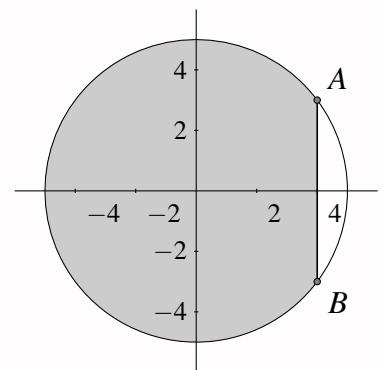
Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên, cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6 m vào hai đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền? (Tính theo đơn vị nghìn đồng và bỏ số thập phân).

(A) 3722.

(B) 7445.

(C) 7446.

(D) 3723.



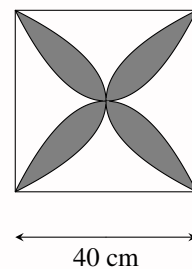
 **Lời giải.**



❖ Ví dụ 26.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người ta đã dùng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (phần tô đậm như hình vẽ). Diện tích của mỗi cánh hoa đó bằng

- ☐ A 200 cm^2 .
 ☐ B $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.
 ☐ C $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.
 ☐ D $\frac{200}{3} \text{ cm}^2$.

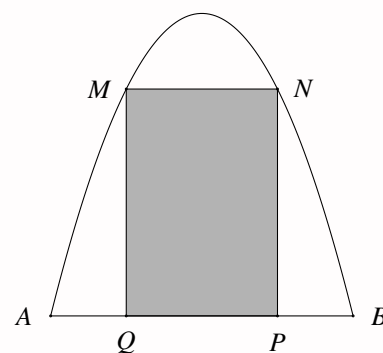


💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 27.

Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8 \text{ m}$. Người ta treo một tấm phông hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần phía ngoài phông (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí 1 m^2 cần số tiền mua hoa là 200.000 đồng, biết $MN = 4 \text{ m}$, $MQ = 6 \text{ m}$. Hỏi số tiền mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?

- ☐ A 3.373.400 đồng.
 ☐ B 3.434.300 đồng.
- ☐ C 3.437.300 đồng.
 ☐ D 3.733.300 đồng.

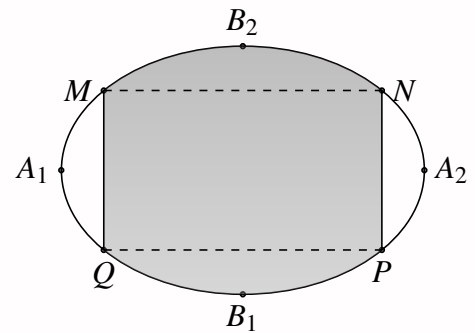


💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 28.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m² và phần còn lại là 100.000 đồng/m². Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_2 = 6$ m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m.

- ☐ A 7.322.000 đồng. ☐ B 7.213.000 đồng.
☐ C 5.526.000 đồng. ☐ D 5.782.000 đồng.



💬 Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ có diện tích bằng

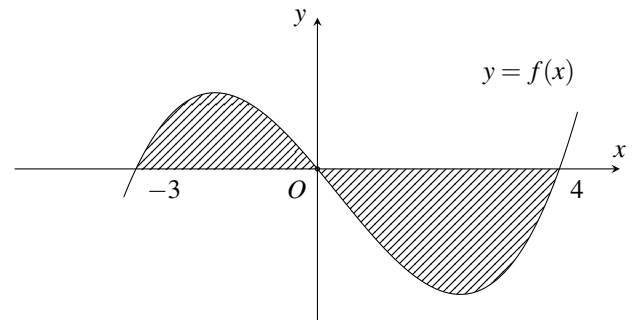
- (A) $\frac{5}{4}$. (B) $\frac{7}{4}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần gạch trong hình) là

- (A) $S = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.
 (B) $S = \int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$.
 (C) $S = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_4^0 f(x) dx$.
 (D) $S = \int_{-3}^4 f(x) dx$.



Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{5}{6}$. (C) $-\frac{1}{6}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

Câu 5. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và trục hoành.

- (A) $S = \frac{27}{4}$. (B) $S = \frac{27\pi}{4}$. (C) $S = 4$. (D) $S = 1$.

Câu 6. (TN-2020). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

- (A) 36. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{4\pi}{3}$. (D) 36π .

Câu 7. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

- (A) $\frac{937}{12}$. (B) $\frac{343}{12}$. (C) $\frac{793}{4}$. (D) $\frac{397}{4}$.

Câu 8. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^5$ bằng

- (A) $S = 1$. (B) $S = 2$. (C) $S = \frac{1}{6}$. (D) $S = \frac{1}{3}$.

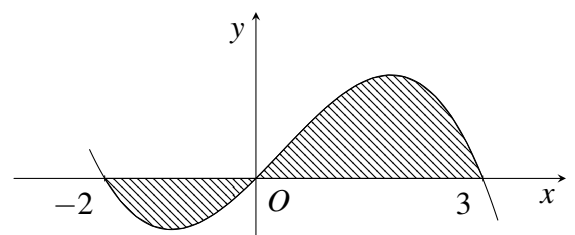
Câu 9. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- (A) $m \in (-4; -1)$. (B) $m \in (3; 5)$. (C) $m \in (0; 3)$. (D) $m \in (-2; 1)$.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox nằm phía trên và phía dưới trục Ox lần lượt là 3 và 1.

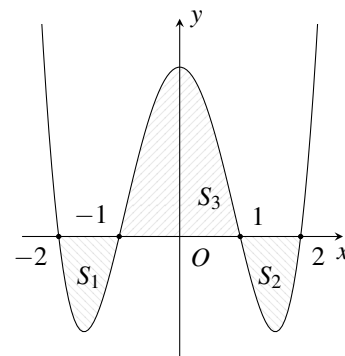
Khi đó $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 2. (B) -2. (C) 3. (D) 4.



Câu 11. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích $S_1 = S_2 = 2$ và $S_3 = 6$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$ là

- (A) $I = 4$. (B) $I = 2$. (C) $I = 10$. (D) $I = 8$.



Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là

- (A) $\ln 2 - 1$. (B) $\ln 2 + 1$. (C) $2\ln 2 - 1$. (D) $2\ln 2 + 1$.

Câu 13. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

- (A) $3 + \ln 2$. (B) $3 - \ln 2$. (C) $3 + 2\ln 2$. (D) $3 - 2\ln 2$.

Câu 14. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H) .

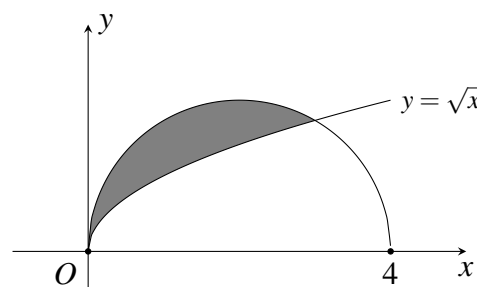
- (A) $\frac{5}{3}$. (B) $\frac{16}{3}$. (C) $\frac{10}{3}$. (D) $\frac{8}{3}$.

Câu 15. Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ và $y = x^2 + x - 4$.

- (A) $S = \frac{253}{12}$. (B) $S = \frac{125}{12}$. (C) $S = \frac{16}{3}$. (D) $S = \frac{63}{4}$.

Câu 16. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4x - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

- (A) $\frac{4\pi + 15\sqrt{3}}{24}$. (B) $\frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{6}$.
(C) $\frac{10\pi - 9\sqrt{3}}{6}$. (D) $\frac{10\pi - 15\sqrt{3}}{6}$.

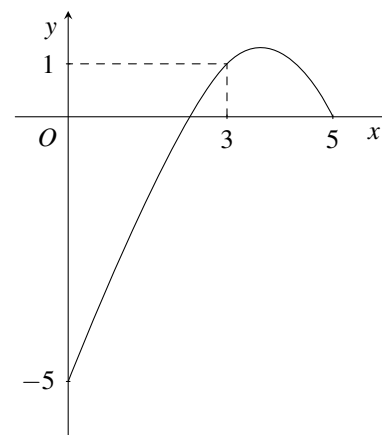


Câu 17. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$ là

- (A) $S = \frac{16}{3}$. (B) $S = \frac{10}{3}$. (C) $S = 2$. (D) $S = \frac{17}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ được cho như hình bên. Tìm mệnh đề đúng

- (A) $f(0) = f(5) < f(3)$. (B) $f(3) < f(0) = f(5)$.
(C) $f(3) < f(0) < f(5)$. (D) $f(3) < f(5) < f(0)$.



Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và các tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$

(A) $\frac{9}{4}$.

(B) $\frac{4}{9}$.

(C) $\frac{9}{8}$.

(D) $\frac{5}{2}$.

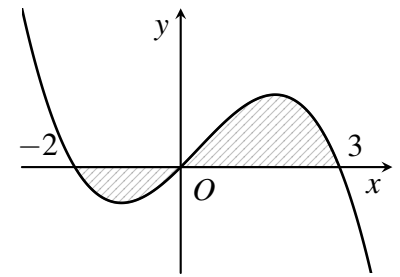
Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm của hình vẽ dưới) là

(A) $S = \int_{-2}^3 f(x) dx$.

(B) $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

(C) $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

(D) $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.



Câu 21. Diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = -x + 3$, $y = 1$ bằng

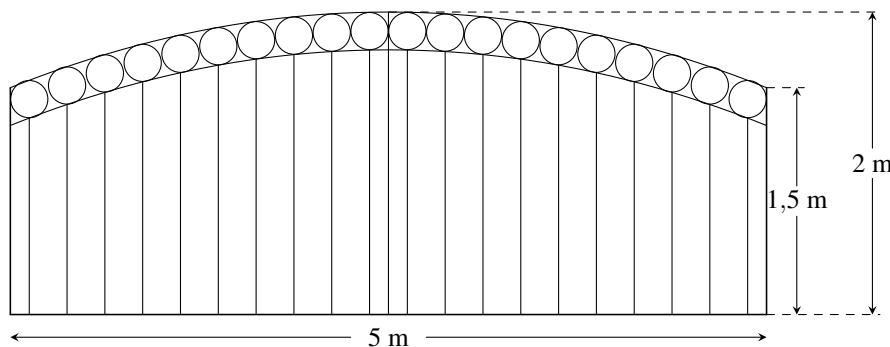
(A) $\frac{1}{\ln 2} + 3$.

(B) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{\ln 2} + 1$.

(D) $\frac{1}{\ln 2} + 2$.

Câu 22. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một đường parabol. Giá 1 mét vuông cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn)?



(A) 6.620.000 đồng.

(B) 6.320.000 đồng.

(C) 6.520.000 đồng.

(D) 6.417.000 đồng.

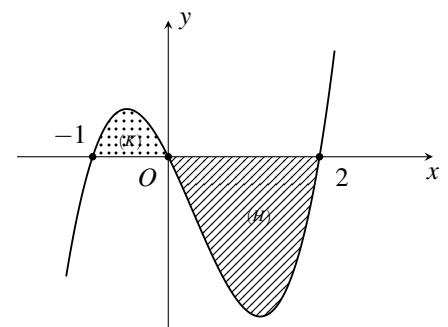
Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng (K) , (H) lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \frac{19}{12}$, tính $f(2)$.

(A) $f(2) = \frac{11}{6}$.

(B) $f(2) = -\frac{2}{3}$.

(C) $f(2) = 3$.

(D) $f(2) = 0$.



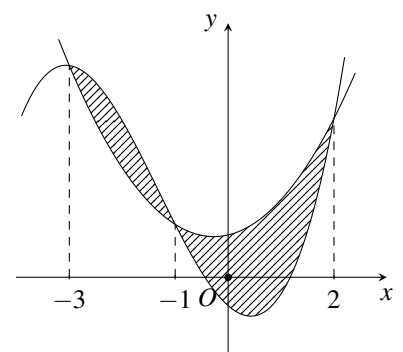
Câu 24. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

(A) $\frac{253}{12}$.

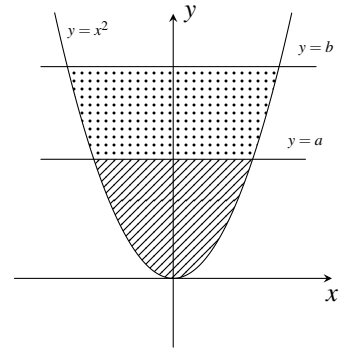
(B) $\frac{125}{12}$.

(C) $\frac{253}{48}$.

(D) $\frac{125}{48}$.



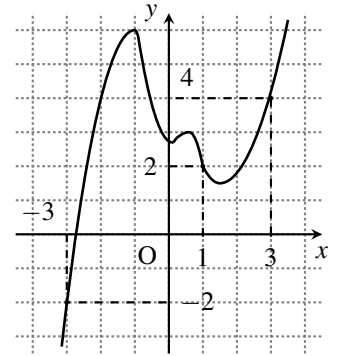
Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a, y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ bên). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần gạch sọc); S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần chấm bi). Với điều kiện nào của a và b thì $S_1 = S_2$?



- ☐ A $b = \sqrt[3]{4a}$. ☐ B $b = \sqrt[3]{2a}$.
☐ C $b = \sqrt[3]{3a}$. ☐ D $b = \sqrt[3]{6a}$.

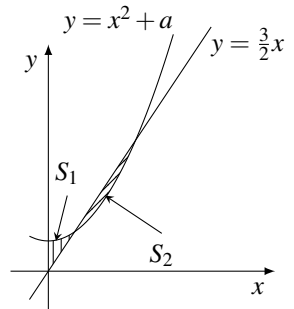
Câu 26.

[thm] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



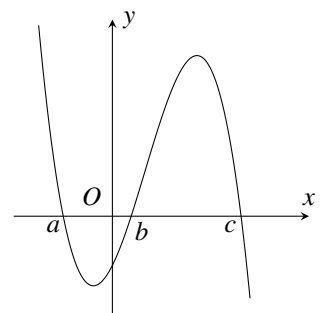
- ☐ A $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. ☐ B $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
☐ C $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. ☐ D Không tồn tại $\min_{[-3;3]} g(x)$.

Câu 27. Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



- ☐ A $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$. ☐ B $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right)$.
☐ C $\left(\frac{9}{20}; \frac{1}{2}\right)$. ☐ D $\left(0; \frac{2}{5}\right)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- ☐ A $f(a) > f(b) > f(c)$. ☐ B $f(c) > f(b) > f(a)$.
☐ C $f(c) > f(a) > f(b)$. ☐ D $f(b) > f(a) > f(c)$.

Câu 29. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ $x_A = a$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d) và (C) bằng $\frac{27}{4}$, các giá trị của a thỏa mãn đẳng thức nào?

- ☐ A $2a^2 - 2a - 1 = 0$. ☐ B $a^2 - 2a = 0$. ☐ C $a^2 - a - 2 = 0$. ☐ D $a^2 + 2a - 3 = 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) , trên (P) có hai điểm A, B với hoành độ lần lượt là a, b . Biết rằng $AB = 3\sqrt{2}$ và diện tích hình phẳng tạo bởi (P) với đường thẳng AB bằng $\sqrt{6}$. Giá trị của $a^2 + b^2$ là

- ☐ A 4. ☐ B 10. ☐ C 5. ☐ D 8.

—HẾT—

BÀI 9. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ, KHỐI TRÒN XOAY

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính thể tích vật thể khi biết diện tích mặt cắt vuông góc với Ox

⇒ **Ví dụ 1.** Vật thể B giới hạn bởi mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt vật thể B với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , ($0 \leq x \leq 2$) ta được thiết diện có diện tích bằng $x^2(2-x)$. Thể tích của vật thể B là

A $V = \frac{2}{3}\pi$.

B $V = \frac{2}{3}$.

C $V = \frac{4}{3}$.

D $V = \frac{4}{3}\pi$.

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 2.** Tính thể tích V của vật thể nằm giữa 2 mặt phẳng $x = 0, x = 3$, biết thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A $V = 16$.

B $V = 17$.

C $V = 18$.

D $V = 19$.

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 3.** Xét vật thể ($\mathcal{T}$) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1-x^2}$. Thể tích vật thể ($\mathcal{T}$) bằng

A $\frac{16\pi}{3}$.

B $\frac{16}{3}$.

C π .

D $\frac{8}{3}$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 4.** Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{36 - 3x^2}$.

(A) $V = \frac{81\pi}{4}$.

(B) $V = \frac{81}{4}$.

(C) $V = 81\pi$.

(D) $V = 81$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng quay quanh trục Ox

❖ **Ví dụ 5.** Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{16\pi}{5}$.

(B) $\frac{17\pi}{5}$.

(C) $\frac{18\pi}{5}$.

(D) $\frac{5\pi}{18}$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 6.** Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2$, $x = 5$ quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int_2^5 \sqrt{x-1} dx$.

(B) $\pi \int_2^5 (x-1) dx$.

(C) $\pi \int_2^5 (y^2 + 1)^2 dx$.

(D) $\int_2^5 (x-1) dx$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 7.** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

(A) $V = \frac{4}{3}$.

(B) $V = \frac{4}{3}\pi$.

(C) $V = \frac{16}{15}\pi$.

(D) $V = \frac{16}{15}$.

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 8.** Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} \cdot e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ khi quay quanh Ox là

A $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1).$

B $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1).$

C $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$

D $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1).$

💬 **Lời giải.**

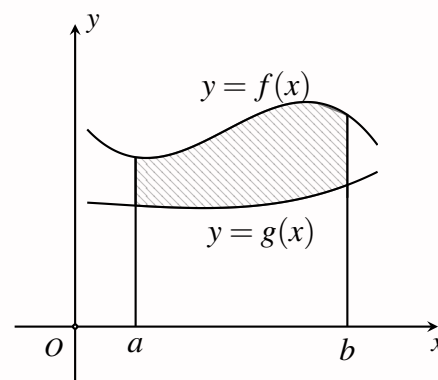
⇒ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ (có đồ thị như hình vẽ). Gọi H là hình phẳng được tô đậm trong hình, khi quay H quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích V . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

B $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

C $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

D $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$



💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 10.** Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$, $y = -x^2 - 2x + 6$.

A 3π .

B $\pi - 1$.

© π .

D 2π .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 11.** Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $y = -x + 2$, $x = 0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A $V = \frac{1}{3}\pi.$

(B) $V = \frac{3}{2}\pi.$

$$\textcircled{\text{C}} V = \frac{32}{15}\pi.$$

(D) $V = \frac{11}{6}\pi.$

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 12.** Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x$ xoay quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx.$

(B) $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_0^1 x^4 dx.$

(C) $\pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx.$

(D) $\pi \int_0^1 |x^2 - x| dx.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 13.** Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ và $x = 4$. Quay hình phẳng (S) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

(A) $\frac{43\pi}{2}.$

(B) $\frac{38\pi}{3}.$

(C) $\frac{40\pi}{3}.$

(D) $\frac{41\pi}{3}.$

💬 **Lời giải.**



✧ **Ví dụ 14.** Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - ax$ với trục hoành ($a \neq 0$). Quay hình (H) xung quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích $V = \frac{16\pi}{15}$. Tìm a .

- ☐ **A** $a = -3$.
 ☐ **B** $a = -2$.
 ☐ **C** $a = 2$.
 ☐ **D** $a = \pm 2$.

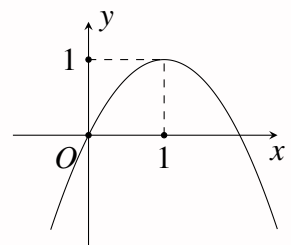
💬 **Lời giải.**

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

✧ **Ví dụ 15.**

Cho hàm bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Ox quanh trục Ox .

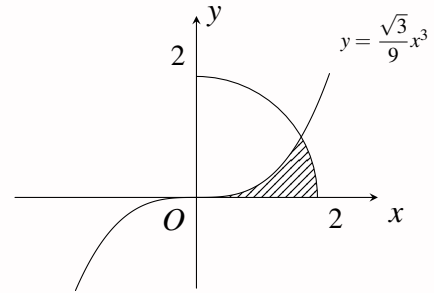
- ☐ **A** $\frac{4\pi}{3}$.
 ☐ **B** $\frac{4\pi}{5}$.
 ☐ **C** $\frac{16\pi}{15}$.
 ☐ **D** $\frac{16\pi}{5}$.



💬 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 16.

Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.



- ☐ A $P = 52$.
 ☐ B $P = 40$.
 ☐ C $P = 46$.
 ☐ D $P = 34$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 3. Tọa độ hóa một số bài toán thực tế

❖ Ví dụ 17. Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay, biết đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay có đường sinh là đồ thị hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Tính thể tích bình cắm hoa đó.

- ☐ A $8\pi \text{ dm}^2$.
 ☐ B $\frac{15\pi}{2} \text{ dm}^2$.
 ☐ C $\frac{14\pi}{3} \text{ dm}^3$.
 ☐ D $\frac{15\pi}{2} \text{ dm}^3$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 18.

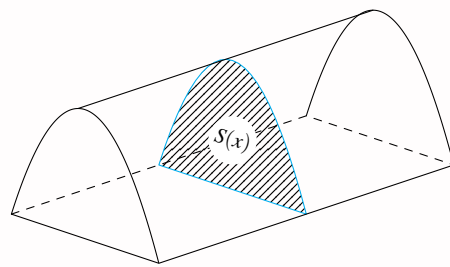
Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.

(A) 72.

(B) 36.

(C) 72π .

(D) 36π .

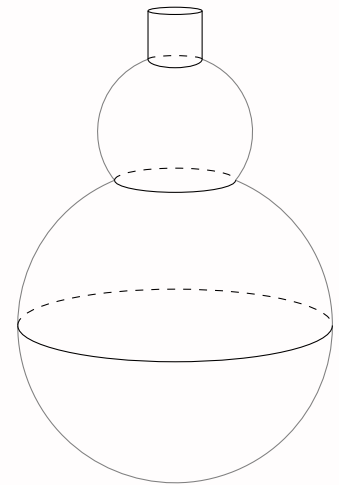


💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 19.

Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13$ cm và $r = \sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hình cầu có bán kính $r' = 5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm trong đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

- ☐ A 9,5 lít.
 ☐ B 8,2 lít.
 ☐ C 10,2 lít.
 ☐ D 11,4 lít.

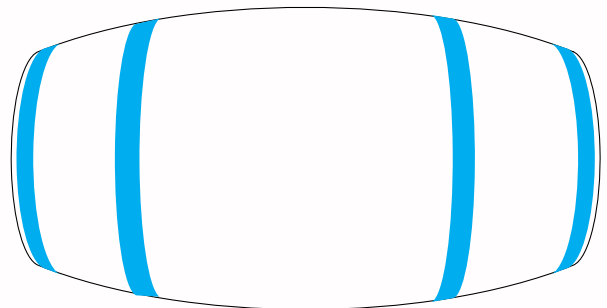


Lời giải.

Ví dụ 20.

Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa hai đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng gần với số nào sau đây?

- ☐ A 425,2 (lít).
 ☐ B 284 (lít).
 ☐ C 212,6 (lít).
 ☐ D 142,2 (lít).



Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$ xoay quanh trục Ox là

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{\pi}{4}$.

(C) $\frac{2\pi}{5}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

Câu 2. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

(A) $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

(B) $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.

(C) $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$.

(D) $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{\pi^2}{4}$.

(B) 2π .

(C) $\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{\pi^2}{2}$.

Câu 4. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 0$; $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

(A) $V = \int_0^1 e^{2x} dx$.

(B) $V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx$.

(C) $V = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

(D) $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$.

Câu 5. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

(A) $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).

(B) $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt).

(C) $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

(D) $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt).

Câu 6. Thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ khi quay quanh trục Ox là

(A) $V = \frac{9}{15}$.

(B) $V = \frac{8\pi}{15}$.

(C) $V = \frac{8}{15}$.

(D) $V = \frac{9\pi}{15}$.

Câu 7. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ ($a > 0$). Giá trị của a sao cho thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng 57π là

(A) $a = 3$.

(B) $a = 5$.

(C) $a = 4$.

(D) $a = 2$.

Câu 8. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

(A) $\frac{31\pi}{3}$.

(B) $\frac{32\pi}{3}$.

(C) $\frac{34\pi}{3}$.

(D) $\frac{35\pi}{3}$.

Câu 9. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox .

(A) $\frac{32\pi}{7}$.

(B) $\frac{32\pi}{5}$.

(C) $\frac{32\pi}{15}$.

(D) $\frac{22\pi}{5}$.

Câu 10. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \frac{4}{x}$ và đường thẳng (d): $y = 5 - x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

(A) $V = 51\pi$.

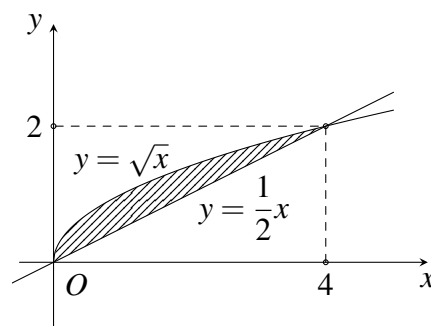
(B) $V = 33\pi$.

(C) $V = 9\pi$.

(D) $V = 18\pi$.

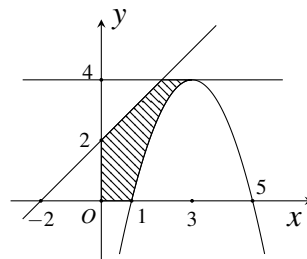
Câu 11. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \frac{1}{2}x$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính thể tích V khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A xung quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{8}{3}\pi$. (B) $V = \frac{8}{5}\pi$. (C) $V = 0,533$. (D) $V = 0,53\pi$.



Câu 12. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô màu đen trong hình bên) quanh trục Ox .

- (A) $\frac{61\pi}{15}$. (B) $\frac{88\pi}{5}$.
(C) $\frac{8\pi}{5}$. (D) $\frac{424\pi}{15}$.



Câu 13. Cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1, x = 3$. Cắt vật thể đã cho bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x, 1 \leq x \leq 3$ ta được thiết diện có diện tích bằng $3x^2 + 2x$. Thể tích của vật thể đã cho là

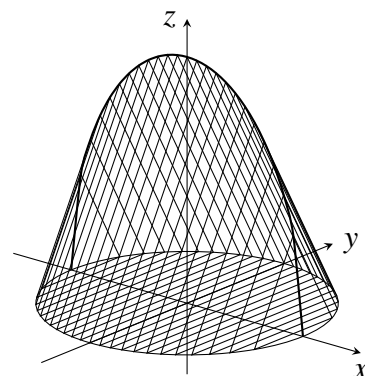
- (A) $V = 42\pi$. (B) $V = 42$. (C) $V = 34$. (D) $V = 34\pi$.

Câu 14. Thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1, x = 2$ và có thiết diện tại $x (1 < x < 2)$ là hình chữ nhật có cạnh là 2 và $\sqrt{2x+1}$ và được cho bởi công thức nào sau đây?

- (A) $V = \pi \int_1^2 (8x+4) dx$. (B) $V = \pi \int_1^2 2\sqrt{2x+1} dx$.
(C) $V = \int_1^2 (8x+4) dx$. (D) $V = \int_1^2 2\sqrt{2x+1} dx$.

Câu 15. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (-1 \leq x \leq 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.

- (A) $V = \sqrt{3}$. (B) $V = 3\sqrt{3}$.
(C) $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \pi$.

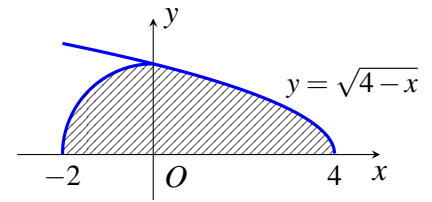


Câu 16. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- (A) $V = \frac{28\pi}{5}$. (B) $V = \frac{12\pi}{5}$. (C) $V = \frac{4\pi}{3}$. (D) $V = \frac{36\pi}{35}$.

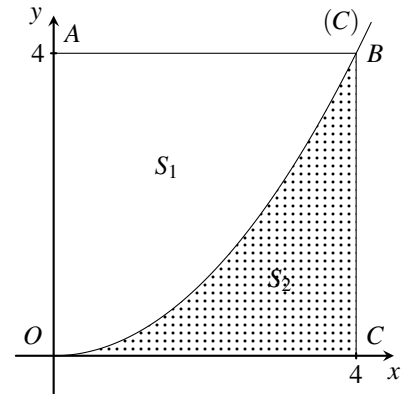
Câu 17. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm O bán kính bằng 2, đường cong $y = \sqrt{4-x}$ và trục hoành (miền gạch sọc như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{77\pi}{6}$. (B) $V = \frac{53\pi}{6}$. (C) $V = \frac{67\pi}{6}$. (D) $V = \frac{40\pi}{3}$.

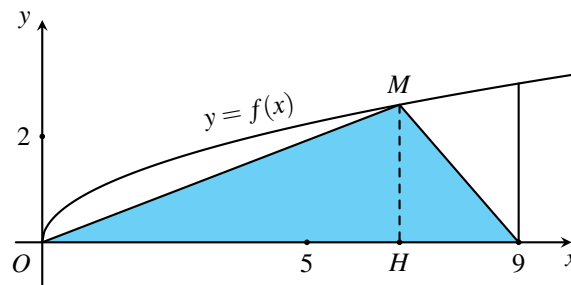


Câu 18. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1 là phần hình phẳng không bị gạch chéo (hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng S_1 xung quanh trục Ox .

- (A) $V = \frac{128\pi}{3}$. (B) $V = \frac{128\pi}{5}$. (C) $V = \frac{64\pi}{3}$. (D) $V = \frac{256\pi}{5}$.



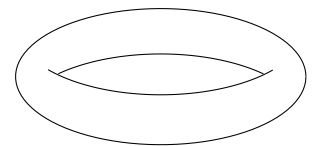
Câu 19. Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$, tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .



- (A) $S = 3$. (B) $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. (C) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (D) $S = \frac{4}{3}$.

Câu 20. Người ta làm một chiếc phao bơi như hình vẽ (với bề mặt có được bằng cách quay đường tròn $(\mathcal{C})$ quanh trục d). Biết rằng $OI = 30\text{ cm}$, $R = 5\text{ cm}$. Tính thể tích V của chiếc phao.

- (A) $V = 1500\pi^2\text{ cm}^3$. (B) $V = 9000\pi^2\text{ cm}^3$.
(C) $V = 1500\pi\text{ cm}^3$. (D) $V = 9000\pi\text{ cm}^3$.



—HẾT—

BÀI 10. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Cho hàm vận tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật

⇨ **Ví dụ 1.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

(A) 20 m.

(B) 2 m.

(C) 0,2 m.

(D) 10 m.

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 2.** Một chuyến máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ m/s với t là thời gian được tính bằng giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 m/s thì nó rời đường băng. Tính quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng.

(A) $\frac{2500}{3}$ m.

(B) 2000 m.

(C) 500 m.

(D) $\frac{4000}{3}$ m.

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 3.** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

(A) $s = 168$ (m).

(B) $s = 144$ (m).

(C) $s = 166$ (m).

(D) $s = 152$ (m).

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Một ô tô đang chạy đều với vận tốc a m/s thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a$ trong đó thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi vận tốc ban đầu a của ô tô bằng bao nhiêu, biết từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn ô tô đi được 40 m.

- Ⓐ $a = 40$. Ⓑ $a = 20$. Ⓒ $a = 25$. Ⓓ $a = 10$.

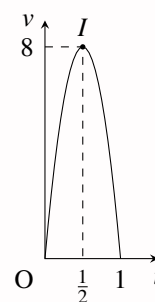
 Lời giải.

Dạng 2. Cho đồ thị hàm vận tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật

❖ Ví dụ 5.

Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

- Ⓐ $S = 5,3$ km. Ⓑ $S = 4,5$ km. Ⓒ $S = 4$ km. Ⓓ $S = 2,3$ km.

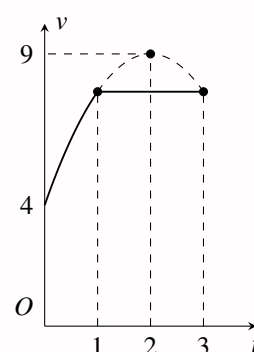


Lời giải.

❖ Ví dụ 6.

(THPT Quốc gia 2017). Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- Ⓐ $s = 23,25$ (km). Ⓑ $s = 21,58$ (km).
Ⓒ $s = 15,50$ (km). Ⓓ $s = 13,83$ (km).



Lời giải.

Dạng 3. Cho hàm gia tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật

❖ **Ví dụ 7.** Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A $\frac{45}{2}$ m.

B $\frac{201}{4}$ m.

C $\frac{81}{4}$ m.

D $\frac{65}{2}$ m.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 8.** (THPT Quốc gia năm 2018). Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s² (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A 22 m/s.

B 15 m/s.

C 10 m/s.

D 7 m/s.

💬 Lời giải.

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Một ô-tô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô-tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô-tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- (A) 20 m. (B) 25 m. (C) 60 m. (D) 15 m.

Câu 2. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 m/s rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

- (A) 100 m. (B) 75 m. (C) 200 m. (D) 125 m.

Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- (A) 25 m. (B) $\frac{44}{5}$ m. (C) $\frac{25}{2}$ m. (D) $\frac{45}{4}$ m.

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều và sau đúng 4 giây thì ô tô bắt đầu dừng hẳn. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- (A) 20. (B) 50. (C) 40. (D) 30.

Câu 5. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường $\mathcal{S}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- (A) $\mathcal{S} = 96,25$ (m). (B) $\mathcal{S} = 87,5$ (m). (C) $\mathcal{S} = 94$ (m). (D) $\mathcal{S} = 95,7$ (m).

Câu 6. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72 km/h, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72 km/h, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72 km/h, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

- (A) 100 m. (B) 150 m. (C) 175 m. (D) 125 m.

Câu 7. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8$ (m/s²) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10s kể từ lúc tăng tốc là

- (A) 150 m. (B) 250 m. (C) 246 m. (D) 540 m.

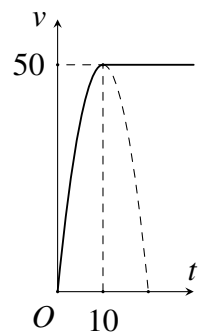
Câu 8. Một xe chuyển động với vận tốc thay đổi là $v(t) = 3at^2 + bt$. Gọi $S(t)$ là quãng đường đi được sau t giây. Biết rằng sau 5 giây thì quãng đường đi được là 150 m, sau 10 giây thì quãng đường đi được là 1100 m. Tính quãng đường xe đi được sau 20 giây.

- (A) 8400 m. (B) 600 m. (C) 4200 m. (D) 2200 m.

Câu 9. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở điểm dừng xe, một chiếc xe đang chuyển động đều với vận tốc là 60 km/h. Chiếc xe di chuyển trong trạng thái đó 5 phút rồi bắt đầu đạp phanh và chuyển động chậm dần đều thêm 8 phút nữa rồi mới dừng hẳn ở điểm đỗ xe. Tính quãng đường mà xe đi được từ thời điểm t nói trên đến khi dừng hẳn.

- (A) 4 km. (B) 5 km. (C) 9 km. (D) 6 km.

Câu 10. Một chất điểm bắt đầu chuyển động với vận tốc $v(t) = at^2 + bt$ với t tính bằng giây và v tính bằng mét/giây (m/s). Sau 10 giây thì chất điểm đạt vận tốc cao nhất $v = 50 \text{ m/s}$ và giữ nguyên vận tốc đó, có đồ thị vận tốc như hình bên. Tính quãng đường s chất điểm đi được trong 20 giây đầu.



- (A) $s = \frac{2500}{3} \text{ m}$.
 (B) $s = \frac{2600}{3} \text{ m}$.
 (C) $s = 800 \text{ m}$.
 (D) $s = \frac{2000}{3} \text{ m}$.

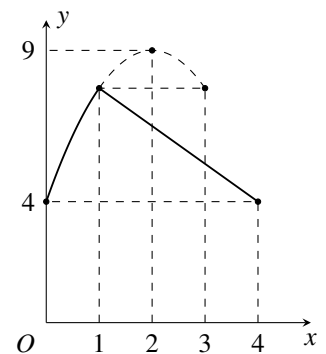
Câu 11. Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45 m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

- (A) 5 m. (B) 6 m. (C) 4 m. (D) 3 m.

Câu 12. Một ô tô đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và a (m/s²) là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500 m thì xe dừng hẳn, hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

- (A) $a = -\frac{200}{13} \text{ m/s}^2$. (B) $a = -\frac{100}{13} \text{ m/s}^2$. (C) $a = \frac{40}{3} \text{ m/s}^2$. (D) $a = -\frac{40}{3} \text{ m/s}^2$.

Câu 13. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- (A) $S = 23,71 \text{ km}$. (B) $S = 23,58 \text{ km}$.
 (C) $S = 23,56 \text{ km}$. (D) $S = 23,72 \text{ km}$.

Câu 14. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- (A) 33 m. (B) 12 m. (C) 31 m. (D) 32 m.

Câu 15. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- (A) 20 (m/s). (B) 16 (m/s). (C) 13 (m/s). (D) 15 (m/s).

—HẾT—

BÀI 11. ĐỀ TỔNG ÔN

A – ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và các hằng số $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
 (B) $\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(t) dt$.
 (C) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
 (D) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x + 2$ là

- (A) $-\frac{1}{5} \cos 5x + 2x + C$.
 (B) $\frac{1}{5} \cos 5x + 2x + C$.
 (C) $\cos 5x + 2x + C$.
 (D) $5 \cos 5x + C$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0; 2]$ và $f(0) = -1$, biết $\int_0^2 f'(x) dx = 5$. Tính $f(2)$.

- (A) $f(2) = 6$.
 (B) $f(2) = 2$.
 (C) $f(2) = 5$.
 (D) $f(2) = 4$.

Câu 4. Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox , biết (H) được giới hạn bởi các đường $y = 4x^2 - 1$, $y = 0$.

- (A) $\frac{8\pi}{15}$.
 (B) $\frac{4\pi}{15}$.
 (C) $\frac{16\pi}{15}$.
 (D) $\frac{2\pi}{15}$.

Câu 5. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 3x^2$, $y = 2x + 5$, $x = -1$ và $x = 2$.

- (A) $S = \frac{256}{27}$.
 (B) $S = 9$.
 (C) $S = 27$.
 (D) $S = \frac{269}{27}$.

Câu 6. Khi tính nguyên hàm của hàm số $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$. Bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- (A) $\int (u^2 - 3) du$.
 (B) $\int (u^2 - 4) du$.
 (C) $\int 2(u^2 - 4) du$.
 (D) $\int 2(u^2 - 4)u du$.

Câu 7. Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2 e^x$. Tính $S = a + 2b + c$.

- (A) $S = 3$.
 (B) $S = -2$.
 (C) $S = 0$.
 (D) $S = 4$.

Câu 8. Cho $\int_0^1 (x+3)e^x dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a + b = -5$.
 (B) $a + b = -1$.
 (C) $a \cdot b = -6$.
 (D) $a \cdot b = 6$.

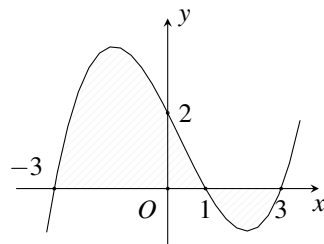
Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

- (A) 4.
 (B) 9.
 (C) 5.
 (D) $\frac{9}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 12$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

- (A) 19.
 (B) 5.
 (C) 29.
 (D) 9.

Câu 11. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



(A) $S = \int_{-3}^3 f(x) dx.$

(B) $S = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

(C) $S = \left| \int_{-3}^3 f(x) dx \right|.$

(D) $S = \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

Câu 12. Đặt $t = x + 1$. Khi đó $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 f(t) dt$. Hàm số $f(t)$ là hàm số nào dưới đây

(A) $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}.$

(B) $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}.$

(C) $f(t) = \frac{t-2}{t^2}.$

(D) $f(t) = \ln|t| + \frac{1}{t}.$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(1) = 2017$ và $\int_1^2 f'(x) dx = 1$, giá trị của $f(2)$ bằng

(A) 2016.

(B) 2017.

(C) 2019.

(D) 2018.

Câu 14. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x \sqrt{\sin x + 1}$.

(A) $F(x) = \frac{1}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$

(B) $F(x) = \frac{2}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$

(C) $F(x) = \frac{1 - 2\sin x - 3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x + 1}}.$

(D) $F(x) = \frac{1}{3}\sin x \sqrt{\sin x + 1} + C.$

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $x(2 - e^{3x})$ là

(A) $x^2 - \frac{1}{9}e^{3x}(3x - 1) + C.$

(B) $2x^2 - \frac{1}{3}e^{2x}(x - 1) + C.$

(C) $x^2 + \frac{1}{9}e^{2x}(x + 1) + C.$

(D) $x^2 - \frac{1}{3}e^{3x}(3x - 1) + C.$

Câu 16. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Tính $\int_1^4 f(3x - 3) dx$.

(A) 27.

(B) 24.

(C) 3.

(D) 0.

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 - x + x^2$ là

(A) $F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

(B) $F(x) = x - x^2 + x^3 + C.$

(C) $F(x) = -1 + 2x + C.$

(D) $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 18. Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = m \ln 2 + n \ln 3 + p \ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.

(A) $S = 5.$

(B) $S = 3.$

(C) $S = 4.$

(D) $S = 6.$

Câu 19. Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx.$

(B) $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_2^4 x^4 dx.$

(A) $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx.$

(D) $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$

Câu 20. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s²). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{2200}{3}$ m.

(B) $\frac{4000}{4}$ m.

(C) $\frac{4300}{3}$ m.

(D) $\frac{1900}{3}$ m.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 xf'(x) dx = 30$. Tính giá trị của

tích phân $I = \int_0^5 f(x) dx.$

(A) $I = -20.$

(B) $I = 70.$

(C) $I = 20.$

(D) $I = -30.$

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3$ và $y = 4x$ được tính theo công thức

(A) $S = \int_{-2}^2 (x^3 - 4x) dx.$

(B) $S = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx.$

(C) $S = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (x^3 - 4x) dx.$

(D) $S = \int_{-2}^2 (4x - x^3) dx.$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ và $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính tích

phân $\int_0^1 xf'(2x) dx.$

(A) $\frac{3}{4}.$

(B) 2.

(C) $\frac{3}{2}.$

(D) 0.

Câu 24.

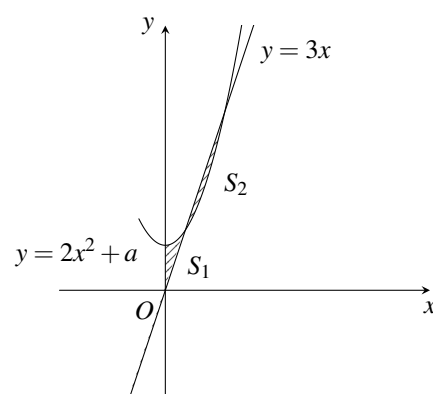
Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right).$

(B) $\left(0; \frac{4}{5}\right).$

(C) $\left(1; \frac{9}{8}\right).$

(D) $\left(\frac{9}{10}; 1\right).$



Câu 25. Cho hàm $F(x) = 4^x$ là một nguyên hàm của hàm số $2^x \cdot f(x)$. Tính $\int_0^1 \frac{f'(x)}{\ln^2 2} dx$

(A) $\frac{2}{\ln 2}.$

(B) $-\frac{4}{\ln 2}.$

(C) $-\frac{2}{\ln 2}.$

(D) $\frac{4}{\ln 2}.$

—HẾT—

B – ĐỀ SỐ 2

Câu 1. Tính tích phân $\int_0^1 (e^x + 1) dx$.

- (A) 2,718. (B) $e + C$, với $C \in \mathbb{R}$. (C) e . (D) $2e - 3$.

Câu 2. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

- (A) -2 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 4 .

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(2) = 2$, $f(3) = 5$; hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $[2; 3]$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- (A) 10 . (B) 3 . (C) 7 . (D) -3 .

Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, Ox , $x = c$, $x = b$, ($b > c$) có công thức tính

- (A) $S = \pi \int_c^b |f(x)| dx$. (B) $S = \int_c^b |f(x)| dx$. (C) $S = \int_b^c |f(x)| dx$. (D) $S = \pi \int_b^c [f(x)]^2 dx$.

Câu 5. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^a f(x) dx$ bằng

- (A) a^2 . (B) $2a$. (C) a . (D) $2a^2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) là

- (A) $V = \int_a^b f(x) dx$. (B) $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. (C) $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. (D) $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- (A) $S = \frac{\pi}{3}$. (B) $S = \frac{\pi}{6}$. (C) $S = \frac{\pi}{2}$. (D) $S = \pi$.

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 3$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình D xung quanh Ox .

- (A) $V = \frac{98}{3}$. (B) $V = \frac{98\pi^2}{3}$. (C) $V = \frac{98\pi}{3}$. (D) $V = 8\pi$.

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là

- (A) $\ln^2 x + C$. (B) $\ln(\ln x) + C$. (C) $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. (D) $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, biết đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $(1; -2)$.

- (A) $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + 1$. (B) $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 3$.
(C) $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} - 1$. (D) $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + 3$.

Câu 11. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ bằng

- (A) $\ln 2$. (B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. (C) $\sqrt{2}-1$. (D) $2(\sqrt{2}-1)$.

Câu 12. Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 f(t) dt$ với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

- (A) $f(t) = t^2 - t$. (B) $f(t) = 2t^2 + 2t$. (C) $f(t) = 2t^2 - 2t$. (D) $f(t) = t^2 + t$.

Câu 13. Gọi $\int 2018^x dx = F(x) + C$, với C là hằng số. Khi đó hàm số $F(x)$ bằng

- (A) $\frac{2018^{x+1}}{x+1}$. (B) $2018^x \ln 2018$. (C) $\frac{2018^x}{\ln 2018}$. (D) $\frac{x \cdot 2018^{x-1}}{\ln 2018}$.

Câu 14. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- (A) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - 1$. (B) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - 1$. (C) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$. (D) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{4}$.

Câu 15. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ được kết quả

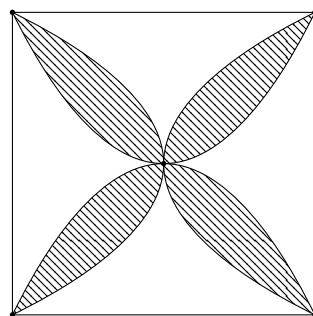
- (A) $\frac{1}{6} - \ln 2$. (B) $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$. (C) $\ln 2 - \frac{1}{6}$. (D) $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$.

Câu 16. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(2)$.

- (A) $F(2) = 6e^2 + 7$. (B) $F(2) = 11e^2 + 3$. (C) $F(2) = 5e^2 + 7$. (D) $F(2) = e^2 + 7$.

Câu 17. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 80 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (phần gạch sọc như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- (A) $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$. (B) 250 cm^2 .
(C) $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$. (D) $\frac{1600}{3} \text{ cm}^2$.



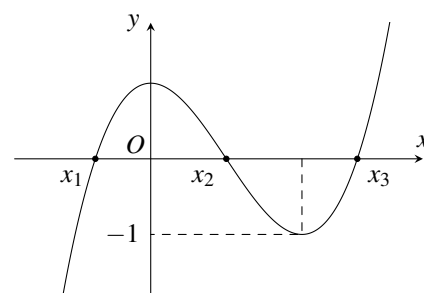
Câu 18. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 < x < 4$) thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R = x\sqrt{4-x}$.

- (A) $V = \frac{64}{3}$. (B) $V = \frac{32\pi}{3}$. (C) $V = \frac{64\pi}{3}$. (D) $V = \frac{32}{3}$.

Câu 19. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8 \text{ (m/s}^2\text{)}$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10s kể từ lúc tăng tốc là

- (A) 150 m. (B) 540 m. (C) 250 m. (D) 246 m.

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$. Giá trị S_1 bằng



- (A) $4\sqrt{3}$. (B) $8\sqrt{3}$. (C) $S + 4\sqrt{3}$. (D) $S + 2\sqrt{3}$.

Câu 21. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 2018$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$.

- (A) $I = 2018$. (B) $I = 1009$. (C) $I = 0$. (D) $I = 4036$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(-x) + 2018f(x) = e^x$, $\forall x \in [-1; 1]$. Tính $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

- (A) $\frac{e^2 - 1}{e}$. (B) $\frac{e^2 - 1}{2019e}$. (C) 0. (D) $\frac{e^2 - 1}{2018e}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\int_0^1 xf(3x) dx = 1$, khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x) dx$ bằng

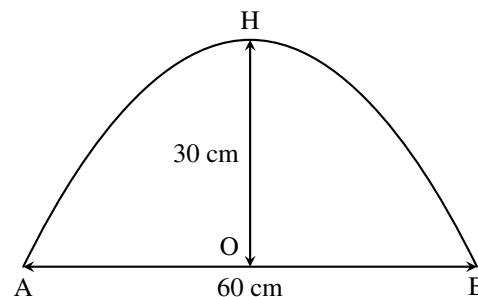
- (A) 3. (B) 7. (C) -9. (D) $\frac{25}{3}$.

Câu 24. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $P = ac^3 + b$.

- (A) $P = \frac{5}{4}$. (B) $P = \frac{3}{2}$. (C) $P = 2$. (D) $P = 3$.

Câu 25. Bạn An cần mua một chiếc gương có viền là đường parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng đoạn $AB = 60$ cm, $OH = 30$ cm. Diện tích của chiếc gương bạn An mua là

- (A) 900 cm^2 . (B) 1200 cm^2 . (C) 1400 cm^2 . (D) 1000 cm^2 .



—HẾT—

ĐÁP ÁN THAM KHẢO CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 1

1. C	2. B	3. B	4. C	5. A	6. B	7. A	8. C	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. D	15. A	16. C	17. B	18. A	19. B	20. A
21. D	22. A	23. B	24. B	25. C					

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 2

1. D	2. D	3. A	4. B	5. C	6. D	7. A	8. B	9. A	10. B
11. B	12. C	13. C	14. A	15. A	16. C	17. B	18. C	19. D	20. B
21. A	22. C	23. D	24. B	25. A					

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 3

1. B	2. B	3. D	4. D	5. D	6. C	7. A	8. A	9. D	10. D
11. A	12. A	13. A	14. C	15. B	16. B	17. D	18. B	19. B	20. C
21. B	22. D	23. B	24. D	25. D					

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 4

1. C	2. A	3. C	4. A	5. A	6. A	7. D	8. A	9. C	10. B
11. B	12. A	13. C	14. A	15. D	16. C	17. C	18. B	19. B	20. A
21. C	22. D	23. A	24. B	25. B					

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 5

1. C	2. A	3. A	4. A	5. A	6. A	7. D	8. B	9. C	10. B
11. B	12. A	13. C	14. C	15. C	16. B	17. D	18. C	19. B	20. A
21. A	22. A	23. A	24. A	25. C	26. C	27. D	28. C	29. D	30. A

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 6

1. A	2. B	3. B	4. B	5. B	6. D	7. A	8. A	9. D	10. D
11. B	12. D	13. B	14. B	15. B	16. B	17. B	18. B	19. C	20. C
21. B	22. B	23. C	24. A	25. A					

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 7

1. D	2. D	3. C	4. B	5. C	6. B	7. C	8. C	9. D	10. D
11. A	12. A	13. B	14. A	15. C	16. D	17. C	18. B	19. B	20. B
21. A	22. C	23. D	24. A	25. C	26. B	27. A	28. A	29. C	30. C
31. A	32. C	33. C	34. C	35. B	36. A	37. C	38. B	39. A	40. C

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 8

1. A	2. A	3. C	4. A	5. A	6. B	7. B	8. C	9. D	10. A
11. B	12. C	13. D	14. A	15. A	16. B	17. B	18. D	19. A	20. C
21. B	22. D	23. B	24. C	25. A	26. B	27. B	28. C	29. B	30. A

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 9

1. B	2. C	3. A	4. D	5. A	6. B	7. A	8. B	9. B	10. C
11. A	12. B	13. C	14. D	15. C	16. B	17. D	18. D	19. B	20. A

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 10

1. A	2. C	3. A	4. C	5. A	6. D	7. B	8. A	9. C	10. A
11. A	12. D	13. A	14. A	15. B					

ĐÁP ÁN ĐỀ ÔN SỐ 1

1. B	2. A	3. D	4. A	5. D	6. C	7. B	8. C	9. D	10. C
11. D	12. A	13. D	14. B	15. A	16. C	17. A	18. D	19. D	20. C
21. C	22. B	23. A	24. A	25. A					

ĐÁP ÁN ĐỀ ÔN SỐ 2

1. C	2. B	3. B	4. B	5. A	6. D	7. A	8. C	9. C	10. B
11. D	12. C	13. C	14. D	15. B	16. A	17. D	18. B	19. C	20. A
21. A	22. B	23. C	24. C	25. B					