

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình: $x - 2016 = 0$.

Câu 2 (1,0 điểm)

- Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 4 \sin x - 1$.
- Giải bất phương trình: $(9^{x+1} + 1)(3^x + 1) \leq 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x$

Câu 3 (1,0 điểm)

- Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$. Tính môđun của z .
- Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7, x > 0$.

Câu 4 (1,0 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ.

Câu 5 (1,0 điểm) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 3 = 0$ và điểm $M(1; -3; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là M và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tìm tọa độ tiếp điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

Câu 6 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AD và $AD = 2BC$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tam giác ACD vuông tại C và $SA = AC = a\sqrt{3}$, $CD = a$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Câu 7 (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I(3; -1)$, điểm M trên cạnh CD sao cho $MC = 2MD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đường thẳng AM có phương trình $2x - y - 4 = 0$ và đỉnh A có tung độ dương.

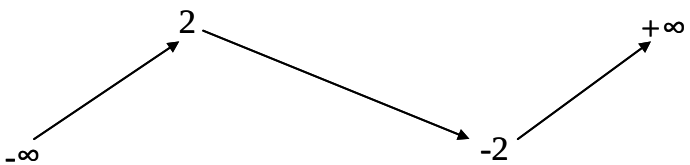
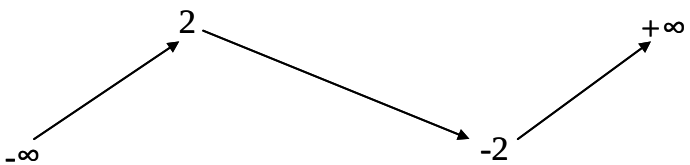
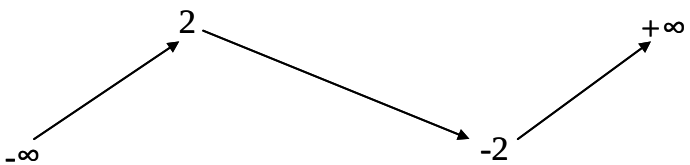
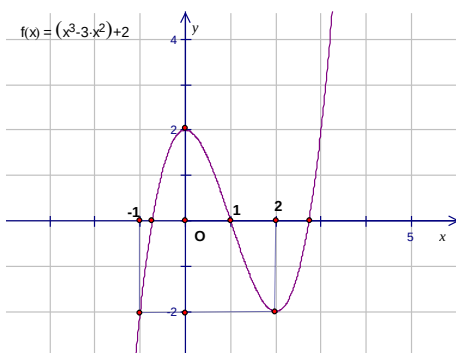
Câu 8 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(y-1)(x+1) = x^3 + y^2 + x - 3y + 2 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = y - 2 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$S = \frac{x^2}{\sqrt{y^3 + 8}} + \frac{y^2}{\sqrt{z^3 + 8}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^3 + 8}} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

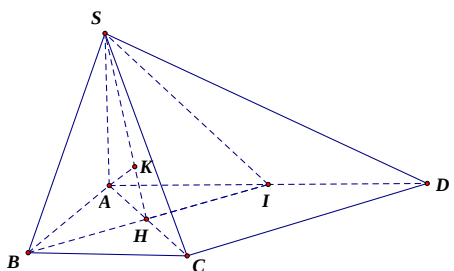
-----Hết-----

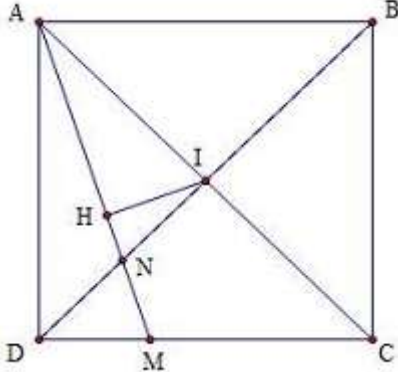
Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Trường THPT Đoàn Thượng thi thử THPT Quốc gia lần 2 vào 16 và 17 tháng 4

Câu	Nội dung	Điểm																
1a	Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số	1,00																
	*) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. *) Sự biến thiên: - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ - Ta có $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$	0,25																
	- Ta có $y' > 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty), y' < 0 \quad \forall x \in (0; 2)$ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0) \& (2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. - Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, f(0) = 2$; đạt cực tiểu tại $x = 2, f(2) = -2$	0,25																
	-Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$				0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
y'	+	0	-	0	+													
y	$-\infty$																	
*) Đồ thị 	0,25																	
1b	Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình: $x - 2016 = 0$	1,00																
	Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta) \quad x - 2016 = 0$ nên tt có hsg $k = 0$	0,25																
	Do đó hoành độ tiếp điểm là nghiệm của PT: $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$	0,25																
	$x = 0 \Rightarrow y = 2$. Khi đó tiếp tuyến có PT là : $y = 2$	0,25																
	$x = 2 \Rightarrow y = -2$. Khi đó tiếp tuyến có PT là : $y = -2$	0,25																
2a	Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 4 \sin x - 1$.	0,50																

2b.	$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 4\sin x - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 - \cos 2x - 4\sin x = 0$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\sin^2 x - 4\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$	0,25
	b) Giải bất phương trình: $(9^{x+1} + 1)(3^x + 1) \leq 10.9^x + 10.3^x$	0,50
	Vì $3^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ Nên BPT $\Leftrightarrow 9.3^{2x} - 10.3^x + 1 \leq 0$	0,25
	$\frac{1}{9} \leq 3^x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$	0,25
3	a) Tính môđun của số phức z thỏa $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$	0,50
	Ta có $z = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(2+i)^2} = \frac{2+4i}{3+4i} = \frac{(2+4i)(3-4i)}{25}$	0,25
	$\Leftrightarrow z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	0,25
	b) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton $\left(2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7, x > 0.$	0,50
	$\left(2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \left(2x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (2x^{\frac{1}{3}})^{7-k} \cdot (x^{-\frac{1}{4}})^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot 2^{7-k} \cdot x^{\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4}}$	0,25
	Ta có: $\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow k = 4 \Rightarrow$ số hạng không chứa x là: $C_7^4 \cdot 2^{7-4} = 280$	0,25
4	Tính DTHP giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ	1,00
	Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $(-1; 0)$. Do đó $S = \int_{-1}^0 \left \frac{x+1}{x-2} \right dx$	0,25
	Ta có $S = \left \int_{-1}^0 \frac{x+1}{x-2} dx \right = \left \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) dx \right $	0,25
	$= \left \left(x + 3\ln x-2 \right) \Big _{-1}^0 \right $	0,25
	$= \left 1 + 3\ln \frac{2}{3} \right = 3\ln \frac{3}{2} - 1$	0,25
5	Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là M và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tìm tọa độ tiếp điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).	1,00
	Bán kính của mặt cầu (S): $r = d(M, (P)) = \frac{ 1+6+2-3 }{3} = 2.$	0,25

	Phương trình của mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4$.	0,25
	Gọi N là tiếp điểm. Do MN vuông góc với mp(P) nên phương trình của MN là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3-2t \\ z=1+2t \end{cases}$ Tọa độ của N ứng với giá trị của t là nghiệm của phương trình: $(1+t) - 2(-3-2t) + 2(1+2t) - 3 = 0$.	0,25
	$\Leftrightarrow 9t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$. Suy ra $N\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.	0,25
	Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, CD	1,00
	Tam giác ACD vuông tại C suy ra $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 4a^2 \Rightarrow AD = 2a, BC = a$ Kẻ $CE \perp AD \Rightarrow \frac{1}{CE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CD^2}$ $\Rightarrow CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ 	0,25
	Do đó $S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).CE}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.	0,25
6	Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^3$.	
	Gọi I là trung điểm của AD thì BCDI là hình bình hành $\Rightarrow CD \parallel BI \Rightarrow CD \parallel (SBI)$ $\Rightarrow d(SB, CD) = d(CD, (SBI)) = d(D, (SBI)) = d(A, (SBI))$ (Do I là trung điểm AD) Gọi $H = AC \cap BI$. $CD \parallel BI, AC \perp CD \Rightarrow AC \perp BI \Rightarrow BI \perp (SAC)$. Kẻ $AK \perp SH$ tại K. Kết hợp với $AK \perp BI \Rightarrow AK \perp (SBI) \Rightarrow d(A, (SBI)) = AK$.	0,25
	I là trung điểm của AD suy ra H là trung điểm của AC $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Tam giác SAH vuông tại A $\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. $\Rightarrow d(CD; SB) = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.	0,25
7	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I(3;-1)$, điểm M trên cạnh CD sao cho $MC = 2MD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đường thẳng AM có phương trình $2x - y - 4 = 0$ và đỉnh A có tung độ dương.	1,00

	Gọi H là hình chiếu của I trên AM $\Rightarrow IH = d(I; AM) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ Giả sử $AM \cap BD = N$ và P là trung điểm của MC $\Rightarrow IP \parallel AM \Rightarrow NM \parallel IP$. Từ M là trung điểm của DP suy ra N là trung điểm của DI. 	0,25
	Gọi cạnh của hình vuông là a thì $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}, IN = \frac{1}{2}ID = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ Từ $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IN^2} \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{2}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$	0,25
	A thuộc AM nên $A(t; 2t-4) \Rightarrow IA = \sqrt{(t-3)^2 + (2t-3)^2} = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 18t + 9 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow A(3; 2) \\ t = \frac{3}{5} \Rightarrow A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right) \end{cases}$ Do A có tung độ dương nên $A(3; 2)$	0,25
	Suy ra $C(3; -4)$. Đường thẳng BD đi qua điểm I và có vtpt $\vec{AI} = (0; -3)$ có pt $y+1=0$. $N = AM \cap BD \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}; -1\right)$. N là trung điểm của DI $\Rightarrow D(0; -1) \Rightarrow B(6; -1)$	0,25
8	Giải hệ PT $\begin{cases} x(y-1)(x+1) = x^3 + y^2 + x - 3y + 2 & (1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = y - 2 & (2) \end{cases}$	1,00
	ĐKXĐ $x \geq -2, y \geq -4$. (1) $\Leftrightarrow y^2 - (x^2 + x + 3)y + x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$ Giải pt bậc 2 ta được $y = x+1$ hoặc $y = x^2 + 2$	0,25
	Với $y = x+1$ thay vào PT (2) ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 + 3} = x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 3}$	0,25
	Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 3}$ có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $f(\sqrt{x+2}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$	0,25
	Với $y = x^2 + 2$ thay vào PT (2) ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 6} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - 1) + (\sqrt{x^2 + 6} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) = x^2 - 1$ $\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x+2} + 1} + \frac{2x+2}{\sqrt{x^2 + 6} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = (x+1)(x-1)$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} + \frac{2}{\sqrt{x^2+6}+\sqrt{x^2-2x+4}} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=3 \\ x=\frac{7}{4} \Rightarrow y=\frac{81}{16} \end{cases}$ Vậy hệ có 3 nghiệm là $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right), (-1; 3), \left(\frac{7}{4}; \frac{81}{16}\right)$																	
	Tìm min của biểu thức $S = \frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{z^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^3+8}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$	1,00																
	Ta có $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 9 \Rightarrow x+y+z \geq 3$ Mặt khác $(x+y+z+1)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+1) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2+1} \geq \frac{1}{2}(x+y+z+1) \geq 2$ Đẳng thức xảy ra $x=y=z=1$	0,25																
	$0 < \sqrt{y^3+8} = \sqrt{(y+2)(y^2-2y+4)} \leq \frac{(y+2)+(y^2-2y+4)}{2} = \frac{y^2-y+6}{2}$ $\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} \geq \frac{2x^2}{y^2-y+6}$. Tương tự cộng lại ta được $\frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{z^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^3+8}} \geq 2\left(\frac{x^2}{y^2-y+6} + \frac{y^2}{z^2-z+6} + \frac{z^2}{x^2-x+6}\right)$ Đẳng thức xảy ra $x=y=z=1$	0,25																
9	Ta lại có $\frac{x^2}{y^2-y+6} + \frac{y^2}{z^2-z+6} + \frac{z^2}{x^2-x+6} \geq \frac{(x+y+z)^2}{y^2-y+6+z^2-z+6+x^2-x+6}$ $= \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 - (x+y+z) + 12}$	0,25																
	Đặt $t = x+y+z, t \geq 3$ và xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t^2-t+12}, t \geq 3$ Ta có $f'(t) = \frac{-t^2+24t}{(t^2-t+12)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t=0, t=24$ <table><tr><td>t</td><td>3</td><td>24</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>+</td><td>0 -</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{48}{47}$</td><td>1</td></tr></table> $\Rightarrow \min_{[3;+\infty)} f(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow S \geq 3, S = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$. Vậy $\min S = 3$	t	3	24	$+\infty$	$f'(t)$		+	0 -	$f(t)$					$\frac{1}{2}$	$\frac{48}{47}$	1	0,25
t	3	24	$+\infty$															
$f'(t)$		+	0 -															
$f(t)$																		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{48}{47}$	1															