

Bài 1. (3,0 điểm) Cho dãy số (x_n) , $(n=0,1,2,...)$ được xác định bởi

$$x_0 = -2, x_n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x_{n-1}}}{2}$$

Đặt $u_n = nx_n$ và $v_n = (1 + x_0^2)(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)$. Chứng minh các dãy số (u_n) và (v_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2.(3,0 điểm) Hãy tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức

$$f(x.f(y) + x^2) = xy + (f(x))^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 3.(4,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, không cân; (ω) là đường tròn Euler của tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB . Kẻ tiếp tuyến t_A của (ω) tại D . Tiếp tuyến t_A cắt đường tròn đường kính AB tại K_A ($K_A \neq D$). Đường thẳng DF cắt AK_A, BK_A lần lượt tại L_A, M_A . Đường thẳng t_A cắt CM_A tại N_A . Các điểm K_B, L_B, M_B, N_B và K_C, L_C, M_C, N_C được định nghĩa tương tự.

a/ Chứng minh đường thẳng AK_A song song với đường thẳng CM_A .

b/ Chứng minh các đường thẳng $L_A N_A, L_B N_B$ và $L_C N_C$ đồng quy.

Bài 4.(3,5 điểm) Tìm tất cả các bộ hai số nguyên dương (x, y) thỏa mãn hệ thức

$$2^{x+2} \cdot (2^x - 1) - 8 \cdot 3^x = y^2 - 1.$$

Bài 5.(3,0 điểm) Lớp 1A có 35 học sinh, trong đó có bốn bạn Công, Minh, Đoàn, Dũng. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp 35 học sinh đó thành một hàng ngang, mà trong mỗi cách sắp xếp không có ba bạn nào trong bốn bạn Công, Minh, Đoàn, Dũng đứng ở ba vị trí liên tiếp.

Bài 6.(3,5 điểm) Một khu rừng hình tròn diện tích $36\pi(km^2)$, có tất cả 18 người kiểm lâm nhiệm vụ tuần tra ở đó. Họ sử dụng thiết bị không dây để liên lạc với nhau. Biết rằng thiết bị không dây này chỉ có hiệu quả trong vòng $9(km)$. Chứng minh rằng ở bất cứ thời điểm nào, luôn tồn tại hai người có thể liên lạc được với năm người khác.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.