

BÀI 3**PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU****1. Định nghĩa mặt cầu**

Cho điểm I và số dương R . Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng R .



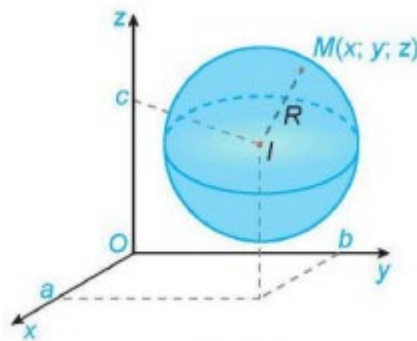
Nhận xét: Cho mặt cầu tâm $S(I; R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

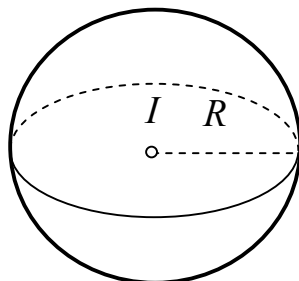
2. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$



Nhận xét: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

CHỦ ĐỀ 1**XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU
LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN****DẠNG 1****XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU**

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R .

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R ta thực hiện như sau:

$$+ \text{Xác định tọa độ tâm } I : \begin{cases} -2a = \dots \\ -2b = \dots \\ -2c = \dots \end{cases}$$

$$+ \text{Xác định bán kính: } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Chú ý:

• Có thể xác định tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R của phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng 1 và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $OM < R$. B. $OM = R$. C. $OM > R$. D. $OM \leq R$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. 12. C. $2\sqrt{6}$. D. 3.

Câu 3. Mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng:

- A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-4; 2; -6)$. C. $(4; -2; 6)$. D. $(2; -1; 3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A. 3. B. 81. C. 9. D. 6.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

- A. 32 B. 8 C. 4 D. 16

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

- A. $(-2; -4; 6)$. B. $(2; 4; -6)$. C. $(-1; -2; 3)$. D. $(1; 2; -3)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R = 1$. B. $R = 7$. C. $R = \sqrt{151}$. D. $R = \sqrt{99}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $I(-1; 2; -3); R = 2$. B. $I(-1; 2; -3); R = 4$. C. $I(1; -2; 3); R = 2$. D. $I(1; -2; 3); R = 4$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$.

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$.

Câu 12. Cho các phương trình sau:

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$$

$$(2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16.$$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Độ dài $|\overline{OI}|$ bằng:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$$
 là phương trình mặt cầu?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$$
 là phương trình một mặt cầu?

A. 4

B. 6

C. 5

D. 7

Câu 16. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;0;2)$.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R=9$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;0;-2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R=3$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(-1;0;3)$ nằm trong mặt cầu (S) , với $M(-1;0;3)$.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 4$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-3;0;2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 16$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(2;0;2)$ thuộc mặt cầu (S) .

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 2\sqrt{2}$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;-2;2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R = 8$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Bán kính mặt cầu (S) là 20.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $2\sqrt{5}$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-1;2;-4)$.

D. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(1;-2;4)$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0, (S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$$

$$(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0, (S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0, (S_2): x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0, (S_3): 2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1,$$

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0, (S_2): 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1, (S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0,$$

$$(S_4): (x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) là phương trình của một mặt cầu.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): (x-1)^2 + (2y-1)^2 + (z-1)^2 = 6, (S_2): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6,$$

$$(S_3): (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6,$$

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) không phải là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) không phải là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Câu 25. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0. \text{ Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?}$$

A. Với $-5 < m < 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

B. Với $m < -5$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

C. Với $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

D. Với $m < -5$ hoặc $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm của mặt cầu (S) .

Trả lời:

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2(m+1)z + 2m^2 + 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(3-m)x - 2(m+1)y - 2mz + 2m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2(m-3)z + 19 - 2m = 0$. Tìm tập hợp tâm của mặt cầu (S) khi giá m trị thay đổi.

Trả lời:

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 30$.

Trả lời:

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $\frac{MA}{MB} = 2$.

Trả lời:

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(-1;2;0), B(0;1;-2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $MA = MB$.

Trả lời:

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(-1;0;1), B(1;-1;2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Trả lời:

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

- Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$.
 C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$. D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

- A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.
 C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$. B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$.
 C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$. D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

Câu 39. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.
 C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64$. D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

- A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3$. B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$.
 C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45$. D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3; 3; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(0; 3; 3)$, $D(3; 3; 3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0; 1; 2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4; -3; -2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3; -2; -1)$.

B. $I(2; -1; 0)$.

C. $I(3; -2; 1)$.

D. $I(-3; -2; 1)$.

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6; -12; 18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9; 18; -27)$.

B. $(-3; -6; 9)$.

C. $(3; 6; -9)$.

D. $(-9; -18; 27)$.

Câu 47. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π .

B. 4π .

C. 20π .

D. 36π .

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

B. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại

hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16.$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25.$

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}.$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17.$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56.$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14.$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0.$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4.$

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13.$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9.$

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10.$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9; 1; 6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64.$

B. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144.$

C. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36.$

D. $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25.$

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 81.$

B. $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

D. $x^2 + y^2 + z^2 = 25.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính bằng 2. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

B. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

D. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$; $B(0; 3; -1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$

B. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$

C. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$

D. Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm AB và đi qua hai điểm A, B là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$

Câu 58. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2; 0; 0), B(1; 3; 0), C(-1; 0; 3), D(1; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(1; -1; 1)$.

B. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(0; 1; 1)$.

C. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 6$.

D. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{6}$.

Câu 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(2; -1; 0)$.

B. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(-2; 1; 0)$.

C. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{26}$.

D. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 26$.

Câu 60. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $I(4;0;0)$..

B. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 14$.

C. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$..

D. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$.

B. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$.

D. Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Lập phương trình của (S) .

Trả lời:

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

Trả lời:

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Lập phương trình mặt cầu có đường kính AB .

Trả lời:

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Trả lời:

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

Trả lời:

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$.

Trả lời:

Câu 68. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

Trả lời:

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Tính bán kính của (S) .

Trả lời:

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π .

Trả lời:

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) .

Trả lời:

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

Trả lời:

BÀI 3**PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU****1. Định nghĩa mặt cầu**

Cho điểm I và số dương R . Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng R .



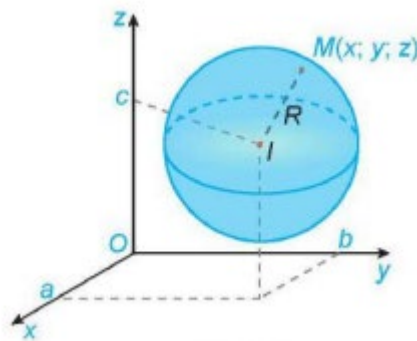
Nhận xét: Cho mặt cầu tâm $S(I; R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

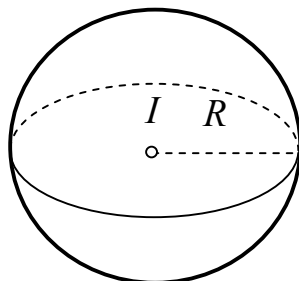
2. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$



Nhận xét: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

CHỦ ĐỀ 1**XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU
LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN****DẠNG 1****XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU**

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R .

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R ta thực hiện như sau:

$$+ \text{Xác định tọa độ tâm } I : \begin{cases} -2a = \dots \\ -2b = \dots \\ -2c = \dots \end{cases}$$

$$+ \text{Xác định bán kính: } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Chú ý:

• Có thể xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R của phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng 1 và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $OM < R$. B. $OM = R$. C. $OM > R$. D. $OM \leq R$.

Lời giải

Chọn C.

M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R) \Leftrightarrow OM > R$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. 12. C. $2\sqrt{6}$. D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có bán kính của (S) là $\sqrt{6}$ nên đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 3. Mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng:

- A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Lời giải

Chọn D.

Biến đổi $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + \frac{2}{3} = 0$ có tâm $I(1; -2; 0)$, bán kính

$$R = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-4; 2; -6)$. C. $(4; -2; 6)$. D. $(2; -1; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; 3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A. 3. B. 81. C. 9. D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Do đó $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính $R = 3$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$.

D. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ có bán kính 3 có phương trình là $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

A. 32

B. 8

C. 4

D. 16

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16 \Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2; -4; 6)$.

B. $(2; 4; -6)$.

C. $(-1; -2; 3)$.

D. $(1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1; -2; 3)$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R = 1$.

B. $R = 7$.

C. $R = \sqrt{151}$.

D. $R = \sqrt{99}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ta có $a = 4$, $b = -5$, $c = 3$, $d = 49$. Do đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 1$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1; 2; -3); R = 2$.

B. $I(-1; 2; -3); R = 4$.

C. $I(1; -2; 3); R = 2$.

D. $I(1; -2; 3); R = 4$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$.

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Trong đáp án C ta có:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2.$$

Câu 12. Cho các phương trình sau:

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1;$

$x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4;$

$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$

$(2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16.$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 4$

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ là phương trình của một mặt cầu.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Độ dài $|\overline{OI}|$ bằng:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;2) \Rightarrow \overline{OI} = (0;0;2) \Rightarrow |\overline{OI}| = 2$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 2m)^2 + (y + m)^2 + (z - m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1).$$

$$(1) \text{ là phương trình mặt cầu } \Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m + 2)x - 2(m - 1)z + 3m^2 - 5 = 0 \text{ là phương trình một mặt cầu?}$$

A. 4

B. 6

C. 5

D. 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m + 2)^2 + (m - 1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 16. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$ với điều

$$\text{kiện } -2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2).$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;0;2)$.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R=9$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;0;-2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R=3$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(0;0;2)$ và bán kính $R=3$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(-1;0;3)$ nằm trong mặt cầu (S) , với $M(-1;0;3)$.

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R=4$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-3;0;2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R=16$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(-3;0;2)$ và bán kính $R=4$

$IM = 5 > R = 4$ suy ra điểm $M(-1;0;3)$ nằm ngoài mặt cầu (S) ,

Bán kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ là $R = \sqrt{16} = 4$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(2;0;2)$ thuộc mặt cầu (S) .

B. Bán kính mặt cầu (S) là $R=2\sqrt{2}$.

C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;-2;2)$.

D. Bán kính mặt cầu (S) là $R=8$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Thay điểm $M(2;0;2)$ vào mặt cầu: $2^2 + 2^2 + (2-2)^2 = 8 \Rightarrow M(2;0;2) \in (S)$

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow I(0;-2;2), R = 2\sqrt{2}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Bán kính mặt cầu (S) là 20.
- B. Bán kính mặt cầu (S) là $2\sqrt{5}$.
- C. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-1;2;-4)$.
- D. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(1;-2;4)$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Nên mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$ có tâm và bán kính là $I(1;-2;4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0, (S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$$

$$(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0, (S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.
- B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.
- C. (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.
- D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

$$(S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

$$(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 3z + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

$$(S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \\ d = 10 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0, (S_2): x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0, (S_3): 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1,$$

$$(S_4): (x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A.** (S_1) là phương trình của một mặt cầu.
- B.** (S_2) là phương trình của một mặt cầu.
- C.** (S_3) là phương trình của một mặt cầu.
- D.** (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

$$(1) (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2;$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0, (S_2): 2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1, (S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0,$$

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là :

$$(1) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2;$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau:

$$(S_1): (x-1)^2 + (2y-1)^2 + (z-1)^2 = 6, (S_2): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6,$$

$$(S_3): (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6,$$

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x.$$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. (S_1) không phải là phương trình của một mặt cầu.

B. (S_2) không phải là phương trình của một mặt cầu.

C. (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.

D. (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

$$(1) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2;$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

$$(S_3): (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 3 = 0.$$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0. \text{ Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?}$$

A. Với $-5 < m < 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

B. Với $m < -5$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

C. Với $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

D. Với $m < -5$ hoặc $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	SAI	ĐÚNG

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2 + b^2 > c^2$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - 5m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \end{cases}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm của mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(1; -2; 3)$

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm là $I(a; b; c)$.

Suy ra, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ có tâm là $I(1; -2; 3)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m < 1$ hoặc $m > 2$.

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu là:

$$(m+2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 2.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2(m+1)z + 2m^2 + 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(3-m)x - 2(m+1)y - 2mz + 2m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2(m-3)z + 19 - 2m = 0$. Tìm tập hợp tâm của mặt cầu (S) khi giá m trị thay đổi.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 30$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Tìm tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn: $\frac{MA}{MB} = 2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(-1;2;0), B(0;1;-2)$. Tìm tập hợp điểm

$M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $MA = MB$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm mặt cầu $A(-1;0;1), B(1;-1;2)$. Tìm tập hợp điểm

$M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn: $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2.$

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4.$

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4.$

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2.$

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng $R=2$ có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4.$$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$.

Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25.$

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5.$

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25.$

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5.$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = R^2$.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0+3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}.$

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45.$

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}.$

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45.$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1;3;3)$ là tâm mặt cầu.

Bán kính $R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{45}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

Câu 39. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8.$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8.$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64.$

D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64.$

Lời giải

Chọn B

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;0;2)$. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Suy ra: $R = 2\sqrt{2}$.

Vậy: $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8.$

Câu 40. Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3.$

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9.$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45.$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3.$

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R = IA = \sqrt{3}$ là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6.$

C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9.$

D. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36.$

Lời giải

Chọn A

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.

$\overrightarrow{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB = \sqrt{16+4+16} = 6$

+ Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$ có phương trình là:

$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$

Câu 42. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(3;-2;5), N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6.$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6.$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$

Lời giải

Chọn D

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (6+2)^2 + (-3-5)^2}}{2} = 6.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. $\frac{9}{2}$. C. 1. **D. $\frac{3}{2}$.**

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$$MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 9(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB}) = 8MI^2 \quad (1)$$

$$\text{Gọi } I \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} \text{ nên } IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Từ (1) suy ra } \Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2} \text{ suy ra } M \in S\left(I; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.
C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$. **D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi phương trình mặt cầu } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18-6a-6b+d=0 \\ 18-6a-6c+d=0 \\ 18-6b-6c+d=0 \\ 27-6a-6b-6c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a-6b+d=-18 \\ -6a-6c+d=-18 \\ -6b-6c+d=-18 \\ -6a-6b-6c+d=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=\frac{3}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A.** $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \overrightarrow{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH} \Rightarrow \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;-1).$$

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

- A.** $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \frac{a}{3} = -6 \\ \frac{b}{3} = -12 \\ \frac{c}{3} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -18 \\ b = -36 \\ c = 54 \end{cases}$$

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + q = 0$. Vì (S) qua các điểm O, A, B, C nên ta có hệ:

$$\begin{cases} q = 0 \\ 36m + q = -18^2 \\ 72n + q = -36^2 \\ -108p + q = -54^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ n = -18 \\ p = 27 \\ q = 0 \end{cases}.$$

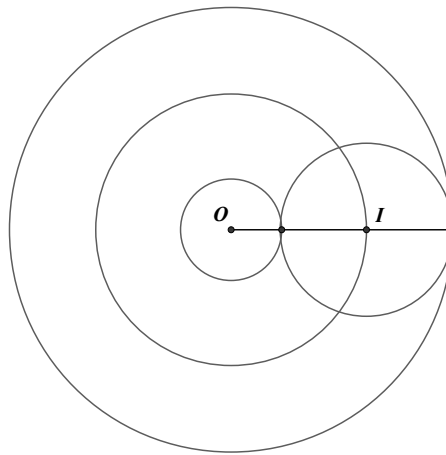
Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9; -18; 27)$.

Câu 47. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

- A. 40π . B. 4π . C. 20π . D. 36π .

Lời giải

Chọn A



Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Suy ra tâm I thuộc mặt cầu (S') có tâm $O(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$

Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm là O , bán kính $R_1 = |OI - R| = |1 - 2| = 1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm là O , bán kính $R_2 = OI + R = 1 + 2 = 3$.

Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi(R_1^2 + R_2^2) = 4\pi(1^2 + 3^2) = 40\pi$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ B. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$
C. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ D. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt cầu tâm

I bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

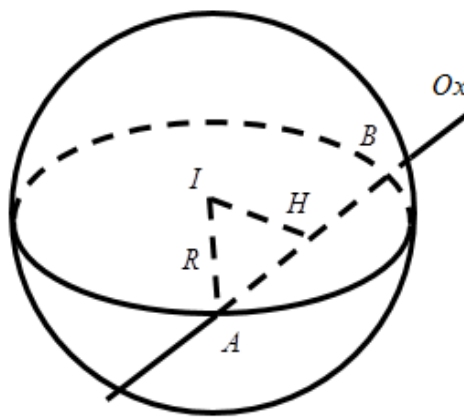
B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Lời giải

Chọn B

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)$

Có $IM = \sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 0^2 - 2.a.2 - 2.b.0 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 4^2 + 0^2 - 2.a.0 - 2.b.4 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 6^2 - 2.a.0 - 2.b.0 - 2.c.6 + d = 0 \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 - 2.a.2 - 2.b.4 - 2.c.6 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3) \text{ và } R = \sqrt{14} \Rightarrow R' = 2\sqrt{14}.$$

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1; 2; 3)$ và $R' = 2\sqrt{14} : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM = \sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.

B. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144$.

C. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36$.

D. $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0), R = 2. II' = 10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S') .

Theo giả thiết, ta có $R' + R = II' \Leftrightarrow R' = II' - R = 8$.

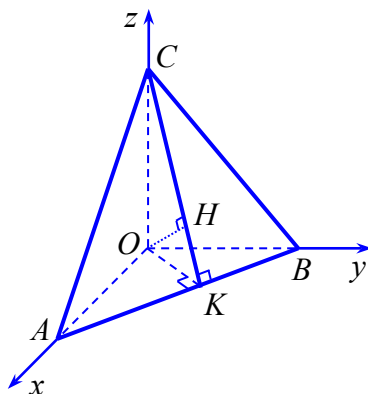
Khi đó phương trình mặt cầu $(S') : (x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 81$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.** D. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Lời giải

Chọn C



Ta có H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB \quad (1)$$

Mà $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp OH$ (*)

Tương tự $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R = OH = 3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. Phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	SAI	ĐÚNG

Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 là: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$
- B. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$
- C. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$
- D. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

Ta có $R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$
- B. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$
- C. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là: $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$
- D. Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm AB và đi qua hai điểm A, B là:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$$I(1;1;-2) \text{ bán kính } R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+4} = \frac{1}{2}\sqrt{24}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$$

Câu 58. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(1;-1;1)$.

B. Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(0;1;1)$.

C. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 6$.

D. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{6}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$

$$\text{Bán kính: } R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(2;-1;0)$.

B. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(-2;1;0)$.

C. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{26}$.

D. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 26$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Gọi tâm $I(a;b;c)$ và phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Do $I \in (Oxy) \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + d = 0$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b - d = 21 \\ 2a - 6b - d = 11 \\ 4a + 4b - d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{26}$$

$$\text{Vậy } I(-2;1;0). R = \sqrt{26}$$

Câu 60. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $I(4;0;0)$..**
- B. Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 14$.**
- C. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$..**
- D. Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.**

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

$$\text{Gọi } I(a;0;0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-a;1;2); \overrightarrow{IB}(3-a;2;-3).$$

$$\text{Do } (S) \text{ đi qua hai điểm } A, B \text{ nên } IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 5} = \sqrt{(3-a)^2 + 13} \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow (S) \text{ có tâm } I(4;0;0), \text{ bán kính } R = IA = \sqrt{14}.$$

$$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0.$$

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$.**
- B. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.**
- C. Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$.**
- D. Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.**

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz)) = d(I, (Oxz)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (\text{do (1)}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 3 \\ b = -3 \\ R = 3 \end{cases} \Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9. \end{aligned}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Lập phương trình của (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$

Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Ta có mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ bán kính bằng 3 có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$

Mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$ nên có bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Lập phương trình mặt cầu có đường kính AB .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB .

Khi đó $I(1;0;2)$.

Bán kính của mặt cầu là: $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{\sqrt{14}}{2}$

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + 2a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 9$

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $d(I, (Oyz)) = d(I, (Ozx)) = d(I, (Oxy))$

$$\Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases}$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a = -b = c$ thì phương trình $AI = d(I, (Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a = -b = c$ thì $I(a; -a; a)$

$$AI = d(I, (Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó $P = a - b + c = 9$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = \sqrt{3}$

Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow d(I, (Oxy)) = R$

$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{3}$ (do m dương).

Câu 68. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$.

Tính đường kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2\sqrt{26}$

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Tính bán kính của (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $5\sqrt{2}$

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA \perp Ox$, $IB \perp Oy$, $IC \perp Oz$ hay A, B, C tương ứng là hình chiếu của I trên Ox , Oy , $Oz \Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

$$\text{Vì } (S) \text{ đi qua } A, B, C, D \text{ nên ta có: } \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = d & (1) \\ 5 - 2b - 4c + d = 0 & (2) \end{cases}$$

Vì $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ nên $0 < d \neq 1$. Mặt khác, từ (1) $\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{2d}$.

• TH1: Từ (1) $\Rightarrow b = c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 6\sqrt{d} + d = 0 \Leftrightarrow d = 25$ (nhận).

$$\Rightarrow R = \sqrt{2.25} = 5\sqrt{2}.$$

• TH2: Từ (1) $\Rightarrow b = c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 6\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

• TH3: Từ (1) $\Rightarrow b = \sqrt{d}, c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 2\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

• TH4: Từ (1) $\Rightarrow b = -\sqrt{d}, c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 2\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $R = \sqrt{2}$

Giả sử $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2; MB^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2; MC^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2.$$

$$MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = (y-2)^2 + x^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2.$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{2}$.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a = \{-1; 1\}$

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

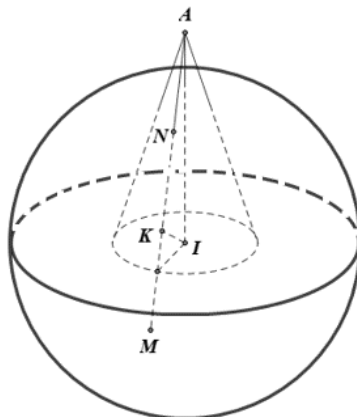
$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}.$$

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H).

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K .

Dễ thấy $AN = NK = \frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$

Có $AM \cdot AN = AI^2 - R^2 = 4 \Rightarrow AN^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow KN = AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IK = \sqrt{IN^2 - KN^2} = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) chính là

mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$.

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$.

Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

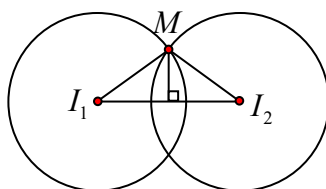
$\overrightarrow{AM} = (x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-2;y+3;z)$, $\overrightarrow{CM} = (x+2;y-1;z-1)$, $\overrightarrow{DM} = (x;y+1;z-3)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm

$I_2(-1;0;2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}$.

$$\text{Để thấy: } r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN**

Câu 1. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.

b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;0)$ và $N(-3;1;0)$. Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Câu 2. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.

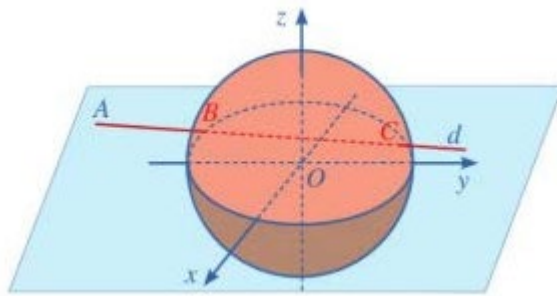


a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200; 100; -250)$ và $N(350; -100; 300)$. Hỏi radar của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

Câu 3. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí , chuyển động theo đường thẳng d có

phương trình
$$\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

b) Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar.

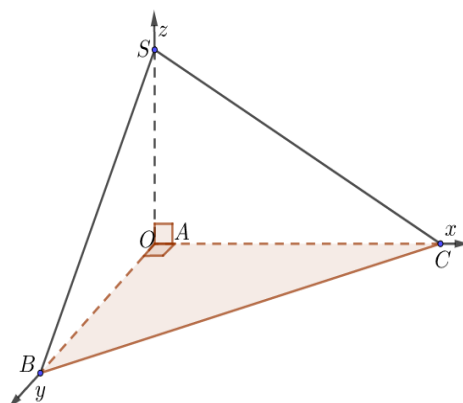
c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0; 0; 0), D(2; 0; 0), B(0; 4; 0), S(0; 0; 4)$.

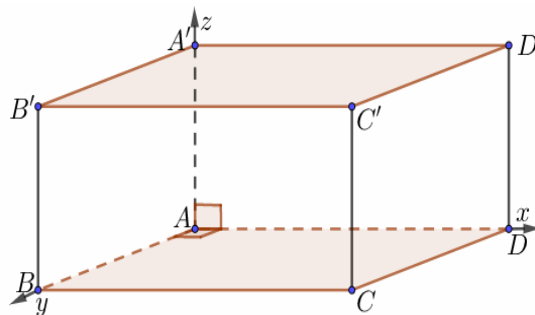
a) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $B'D$.

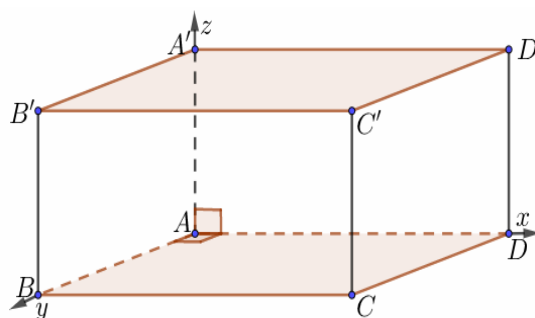
Câu 5. Cho tứ diện $SABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 5, SB = 2, SC = 4$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$.



Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng $2a$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



- Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
- Tính khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(CB'D')$.
- Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $B'D$.

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN**

Câu 1. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.

b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;0)$ và $N(-3;1;0)$. Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$$

b)

- Ta có: $IM = \sqrt{(1-1)^2 + (2+2)^2 + (0+3)^2} = 5$

Vì $IM = R = 5$ nên điểm $M(1;2;0)$ nằm trên mặt cầu. Vậy bạn Minh Hiền có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

- Ta có: $IN = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{34} > 5$

Vì $IN > R$ nên điểm $N(-3;1;0)$ nằm ngoài mặt cầu. Vậy bạn Trúc Linh không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Câu 2. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi radar của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian là:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 250000$$

b)

- Ta có: $IM = \sqrt{(-200+2)^2 + (100-1)^2 + (-250+1)^2} \approx 335,6 < 500$

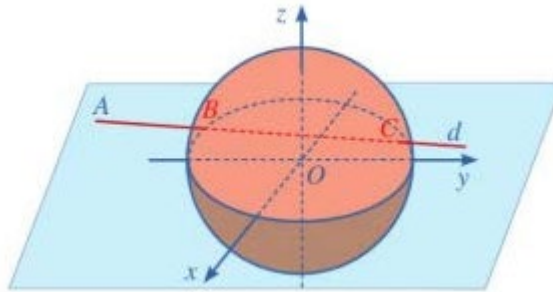
Vì $IM < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm radar này.

- Ta có: $IN = \sqrt{(350+2)^2 + (-100-1)^2 + (300+1)^2} \approx 474 < 500$

Vì $IN < R$ nên điểm N nằm trong mặt cầu. Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm radar này.

Câu 3. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí , chuyển động theo đường thẳng d có

phương trình
$$\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



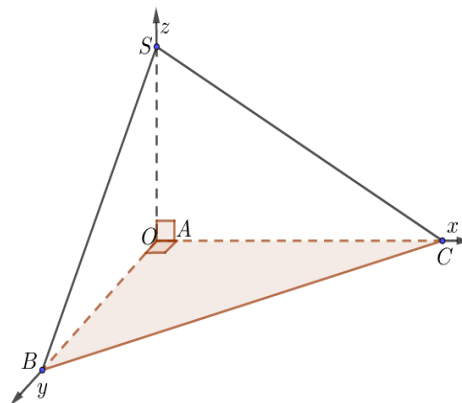
- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.
- Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar.
- Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

Lời giải

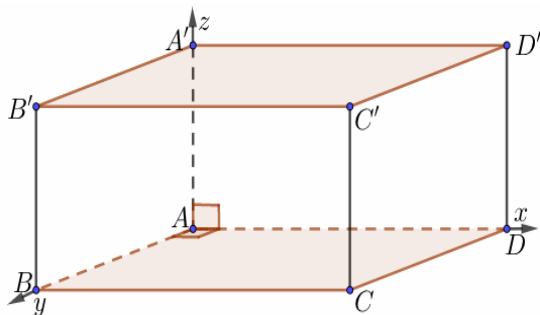
Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$.

- Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
- Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $B'D$.

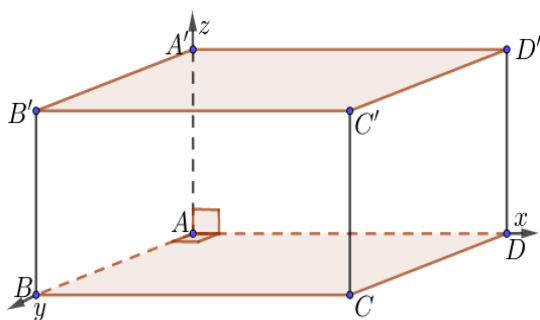
Câu 5. Cho tứ diện $SABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 5, SB = 2, SC = 4$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$.



Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng $2a$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



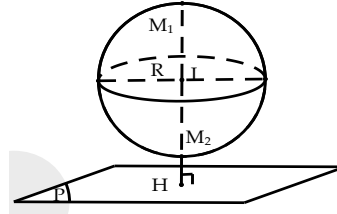
- Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
- Tính khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(CB'D')$.
- Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $B'D$.

CHỦ ĐỀ 3

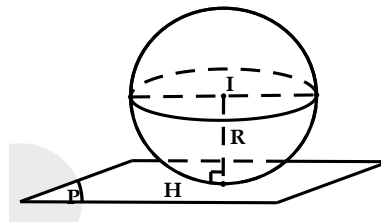
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẶNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

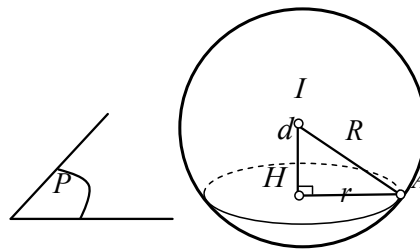
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



- Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VỚI MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

- A. 2. B. 4. **C. 3.** D. 1.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P) .

- A. $r = \frac{1}{3}$. **B. $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.** C. $r = \frac{1}{2}$. D. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

- A. $r = 3$. **B. $r = \sqrt{5}$.** C. $r = \sqrt{6}$. D. $r = \sqrt{14}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) . Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $|a| = 1$. B. $a + b + c = 1$. **C. $|b| = 1$.** D. $|c| = 1$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$ hoặc $m = -21$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 21$. D. $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

- A. $(Q): y + 3z = 0$. B. $(Q): x + y - 2z = 0$. C. $(Q): y - z = 0$. **D. $(Q): y - 2z = 0$.**

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 45$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 13 = 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c)$ thì giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. -11. **B. 5.** C. 2. D. 1.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$, mặt phẳng $(P): 4x + 3y + m = 0$. Giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) .

A. $\begin{cases} m > 11 \\ m < -19 \end{cases}$. B. $-19 < m < 11$. C. $-12 < m < 4$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -12 \end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z = 1$. Giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C)

A. $-\frac{17}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. B. $-\frac{17}{2} < a < \frac{1}{2}$. C. $-8 < a < 1$. D. $-8 \leq a \leq 1$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (P) tiếp xúc với (S) .
 B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
 C. (P) và (S) không có điểm chung.
 D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx + 2y - z + 1 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 2 + \sqrt{5}$. C. $m = \pm 4$. D. $m = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H , khi đó H có tọa độ là:

A. $H(-3; -1; -2)$. B. $H(-1; -5; 0)$. C. $H(1; 5; 0)$. D. $H(3; 1; 2)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

A. $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$. B. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$. D. $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

Trả lời:

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 0)$. Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S) .

Trả lời:

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

Trả lời:

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

Trả lời:

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$ và $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Số mặt cầu đi qua $A(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2; 3; 1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

Trả lời:

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$, $D(1; 1; 1)$ với $m > 0$; $n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

Trả lời:

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

A. $x + y + 3z - 9 = 0$

B. $x + y - 3z + 3 = 0$

C. $x + y - 3z - 8 = 0$

D. $x - y - 3z + 3 = 0$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$.

B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.

C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$. B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$. D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Lập phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Trả lời:

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Lập phương trình mặt cầu (S) .

Trả lời:

Câu 34. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20.

B. 8.

C. 12.

D. 16.

Trả lời:

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC . Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Trả lời:

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P): x = 1, (Q): y = -1$ và $(R): z = 1$ có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0; 1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta): \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; -5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T) .

Trả lời:

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$

Trả lời:

DẠNG 3

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$.

B. $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.

C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$.

D. $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 7 = 0$.

Biết mp (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ theo một đường tròn có bán kính $r = 3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x - y + 2z - 7 = 0$.

B. $2x - 2y + z + 17 = 0$.

C. $2x - 2y + z + 7 = 0$.

D. $2x - 2y + z - 17 = 0$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$ có phương trình là:

A. $2x - y + 2z - 7 = 0$. B. $2x - y + 2z + 9 = 0$. C. $2x - y + 2z + 7 = 0$. D. $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là:

A. $y - 2z = 0$.

B. $y + 2z = 0$.

C. $y + 3z = 0$.

D. $y - 3z = 0$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S) .

A. $2x + 2y + z - 4 = 0$.

B. $6x + 6y + 3z - 8 = 0$.

C. $2x + 2y + z + 2 = 0$

D. $6x + 6y + 3z - 3 = 0$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vector $\vec{v} = (1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

A. $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

A. $x - 2y - 2z + 1 = 0$.

B. $-x + 2y + 2z + 5 = 0$.

C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$.

D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

A. $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.

B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.

C. $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.

D. $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Câu 52. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$,

$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$

C. $x + y + 2z + 9 = 0$

D. $x - y + 2z + 9 = 0$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x - y + 2z = 0$.

B. $-2x + 2y - z + 4 = 0$.

C. $x + y + z = 0$

D. Đáp án khác.

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

A. $y + z + 3 = 0$

B. $x + z + 1 = 0$

C. $x + y + 1 = 0$

D. $x + z - 1 = 0$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4; 3; 1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M , song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. $2x - 2y + 5z - 22 = 0$.

B. $2x + y + 2z - 13 = 0$.

C. $2x + y - 2z - 1 = 0$.

D. $2x - y + 2z - 7 = 0$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0), B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng.

B. 2 mặt phẳng.

C. 0 mặt phẳng.

D. Vô số mặt phẳng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π . Lập phương mặt phẳng (Q) .

Trả lời:

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

Trả lời:

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π ? Lập phương mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và điểm $A(2;3;4)$. Tìm tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) .

Trả lời:

Câu 63. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2; -2; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overline{OM} \cdot \overline{AM} = 6$. Tìm tập hợp điểm M .

Trả lời:

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S) . Tìm tập hợp điểm M .

Trả lời:

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Trả lời:

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M , N , P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$.

Trả lời:

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB , AC , AD với B , C , D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD) .

Trả lời:

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ và $(S'): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Tính khoảng cách từ O đến (P) bằng

Trả lời:

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(a + 4b)x + 2(a - b + c)y + 2(b - c)z + d = 0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định. Biết rằng $4a + b - 2c = 4$. Tìm khoảng cách từ điểm $D(1; 2; -2)$ đến mặt phẳng (α) .

Trả lời:

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

Trả lời:

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{7-\sqrt{3}}{2}; 3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{7+\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$. Xét mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}: d < -5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B . Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $T = |a + b + c + d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

Trả lời:

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$ và $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

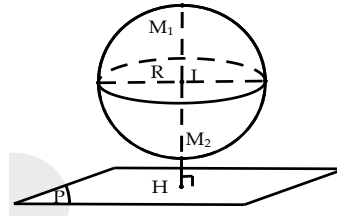
Trả lời:

CHỦ ĐỀ 3

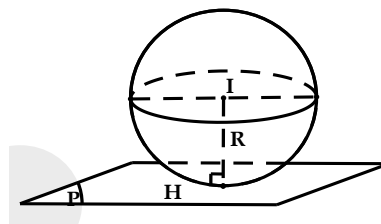
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẶNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

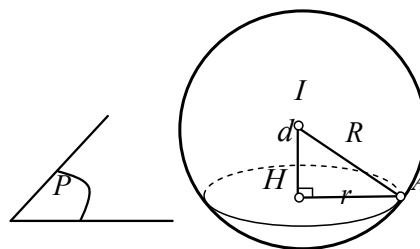
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



- Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VỚI MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$. Vậy $d(I, (P)) = \frac{|3 - 2 + 6 + 14|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 3..$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P) .

A. $r = \frac{1}{3}$.

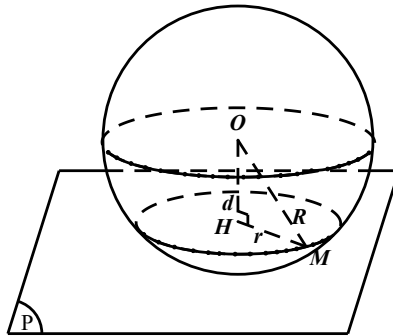
B. $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

C. $r = \frac{1}{2}$.

D. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$.

Khoảng cách $d(O, (P)) = \frac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r = 3$.

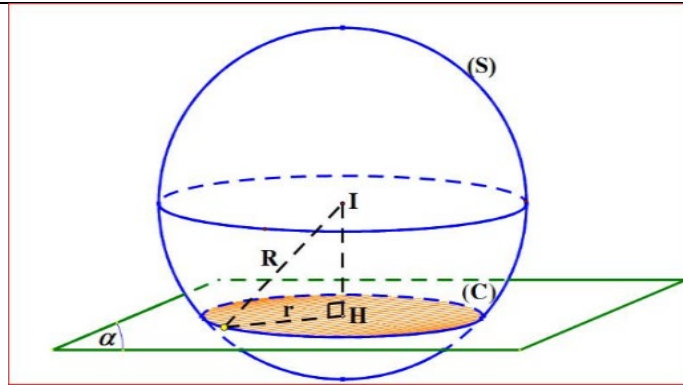
B. $r = \sqrt{5}$.

C. $r = \sqrt{6}$.

D. $r = \sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $d = 3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) . Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a| = 1$.

B. $a + b + c = 1$.

C. $|b| = 1$.

D. $|c| = 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (Oxz) : $y = 0$.

Vì mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1 tiếp xúc với (Oxz) nên ta có:

$$d(I; (Oxz)) = 1 \Leftrightarrow |b| = 1.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$ hoặc $m = -21$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 21$.

D. $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R = 2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt

$$\text{cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |11 - m| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 21 \end{cases}.$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q): y + 3z = 0$.

B. $(Q): x + y - 2z = 0$.

C. $(Q): y - z = 0$.

D. $(Q): y - 2z = 0$.

Lời giải

Chọn D

(Q) chứa trục Ox nên có dạng $By + Cz = 0$ ($B^2 + C^2 \neq 0$).

(S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r = 3$.

Vì $R = r$ nên $I \in (Q)$.

$\Leftrightarrow -2B - C = 0$ vì B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn $B = 1 \Rightarrow C = -2$.

Vậy $(Q): y - 2z = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 45$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 13 = 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c)$ thì giá trị của $a + b + c$ bằng

A. -11.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $A(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c) \Rightarrow I$ là hình chiếu của

$$A \text{ lên mp}(P) \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{n_P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c - 13 = 0 \\ 1 - a = k \\ 2 - b = k \\ -1 - c = -k \end{cases} \Rightarrow (1 - k) + (2 - k) - (-1 + k) - 13 = 0 \Leftrightarrow k = -3$$

$\Rightarrow I(4; 5; -4)$.

Vậy $a + b + c = 5$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$, mặt phẳng $(P): 4x + 3y + m = 0$. Giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) .

A. $\begin{cases} m > 11 \\ m < -19 \end{cases}$.

B. $-19 < m < 11$.

C. $-12 < m < 4$.

D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -12 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ có tâm $I(1; 0; 1)$ và bán kính $R = 3$

$$(P) \text{ cắt mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d[I; (P)] < R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} < 3$$

$$\Leftrightarrow |m + 4| < 15 \Leftrightarrow -19 < m < 11$$

Chọn đáp án A.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z = 1$. Giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C)

- A. $-\frac{17}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. B. $-\frac{17}{2} < a < \frac{1}{2}$. C. $-8 < a < 1$. D. $-8 \leq a \leq 1$.

Lời giải

Chọn C

$(S): (x-a)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ có tâm $I(a; 2; 3)$ và có bán kính $R = 3$

(P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn $(C) \Leftrightarrow d[I; (P)] < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a + 2 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} < 3 \Leftrightarrow |2a + 7| < 9 \Leftrightarrow -8 < a < 1$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (P) tiếp xúc với (S) .
B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
C. (P) và (S) không có điểm chung.
D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{4 + 1 + 1 - (-10)} = \sqrt{16} = 4$

$$\text{Khoảng cách từ tâm } I \text{ đến mặt phẳng } (P) \text{ là: } d(I, (P)) = \frac{|2 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{3} = 4$$

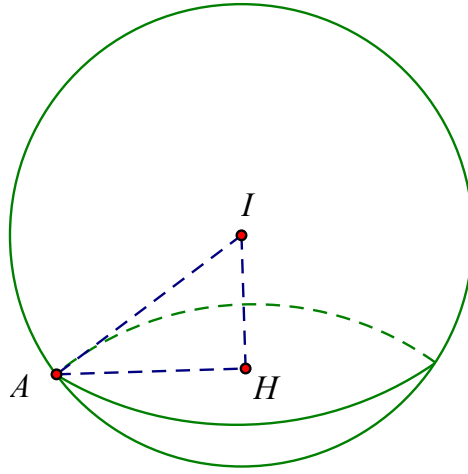
Ta thấy: $d(I, (P)) = R$, vậy (P) tiếp xúc với (S) .

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx + 2y - z + 1 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 2 + \sqrt{5}$. C. $m = \pm 4$. D. $m = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Từ $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ ta có tâm $I = (2; 1; 0)$ bán kính $R = 3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P) \cap (S) = C(H; r)$ với $r = 2$

$$\text{Ta có } IH = d(I; (P)) \Leftrightarrow IH = \frac{|2m + 2 - 0 + 1|}{\sqrt{m^2 + 4 + 1}} = \frac{|2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 5}}$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } R^2 = IH^2 + r^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{(2m + 3)^2}{m^2 + 5} + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12m + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 - 2\sqrt{5} \\ m = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H , khi đó H có tọa độ là:

- A. $H(-3; -1; -2)$. B. $H(-1; -5; 0)$. C. $H(1; 5; 0)$. **D. $H(3; 1; 2)$.**

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm $H \Rightarrow H$ là hình chiếu của I lên (P)

$$\text{Đường thẳng đi qua } I(1; -2; 1) \text{ và vuông góc với } (P) \text{ là } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$H(1 + 2t; 3t - 2; 1 + t) \in d$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + 3(3t - 2) + (1 + t) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow H(3; 1; 2)$$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

A. $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$.

B. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

D. $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) .

Ta có $d = d(I, (\alpha)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó ta có: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

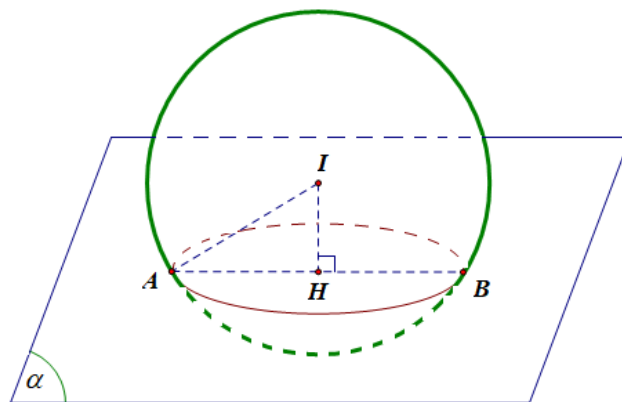
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: bán kính đường tròn (C) bằng 8.



Gọi I là tâm mặt cầu (S) , H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) và AB là một đường kính của đường tròn (C) .

Dễ thấy $I(3;-2;1)$, $IA=10$, $IH = d(I, (\alpha)) = 6$ suy ra $HA = \sqrt{IA^2 - IH^2} = 8$.

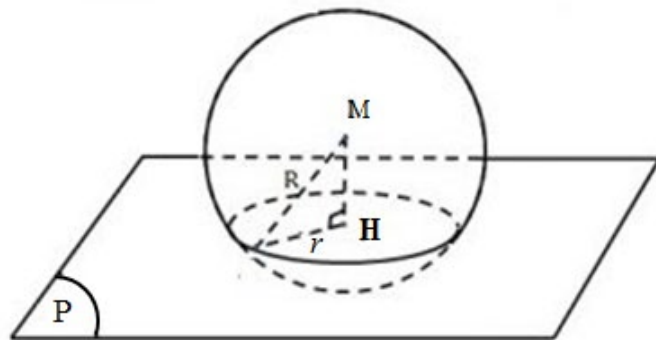
Vậy bán kính đường tròn (C) bằng 8.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\sqrt{2}$



Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $R = \sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H , bán kính r suy ra $r = \sqrt{R^2 - MH^2}$.

Với $MH = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-2) - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1$. Suy ra $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases}$

Ta có $(S): \begin{cases} I(1; -1; 1) \\ R = 3 \end{cases}$.

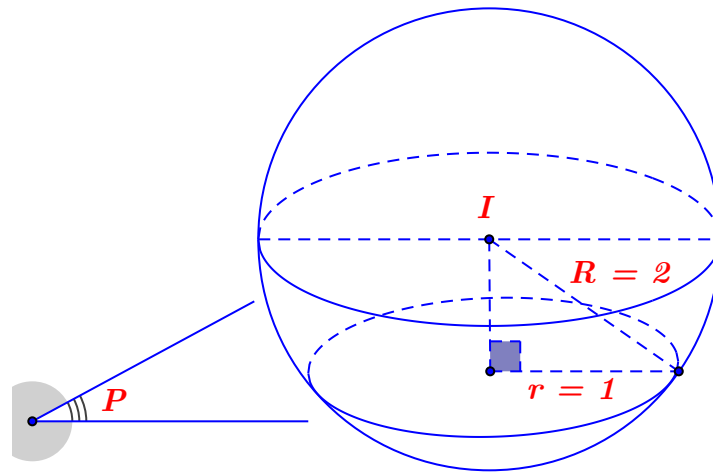
Để (P) tiếp xúc với (S) thì $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - m^2 - 3m|}{3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 10 = 0 \\ m^2 + 3m + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 1$



Mặt cầu (S) : $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ có tâm $I(2;4;1)$, bán kính $R = 2$.

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = \frac{|2 + 4m + 1 - 3m - 1|}{\sqrt{1 + m^2 + 1}} = \frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + 2}}$$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến $r = 1$.

$$\text{Ta có } R^2 = d^2(I, (P)) + r^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{(m+2)^2}{m^2+2} + 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 3(m^2 + 2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = -1$

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m.$$

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I(-1;2;3)$; $R = \sqrt{17-m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S) .

Để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

$$\text{Ta có } R^2 = d^2(I, (\beta)) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 2 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (TMĐK)}.$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$ và $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$.

Số mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $M(0;0;2) \in (P) \Rightarrow d((P);(Q)) = d(M;(Q)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$d(A;(P)) = \frac{\sqrt{6}}{2}; d(A;(Q)) = \sqrt{6} \Rightarrow d(A;(Q)) = d(A;(P)) + d((Q);(P))$$

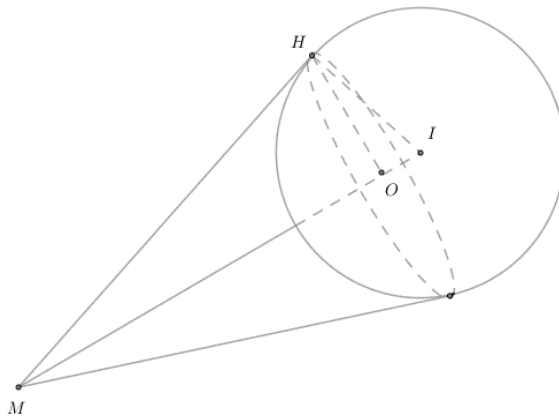
Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (1;2;1)$ và $IM = \sqrt{6}$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ $Oxyz$ đến mặt cầu, khi đó $MH = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của đường tròn (C) khi đó $IM \perp HO$ và $HO = r$.

$$\text{Ta có } HI \cdot HM = HO \cdot IM \Rightarrow r = \frac{HI \cdot HM}{IM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m > 0$; $n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m , n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $R = 1$

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

$$\text{Mặt khác } d(I; (ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2 n^2}} = 1 \text{ (vì } m + n = 1) \text{ và } ID = 1 = d(I; (ABC)).$$

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D . Khi đó $R = 1$.

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu cần tìm có bán kính $R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

A. $x + y + 3z - 9 = 0$

B. $x + y - 3z + 3 = 0$

C. $x + y - 3z - 8 = 0$

D. $x - y - 3z + 3 = 0$

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vector $\overrightarrow{IA} = (-1; -1; 3)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

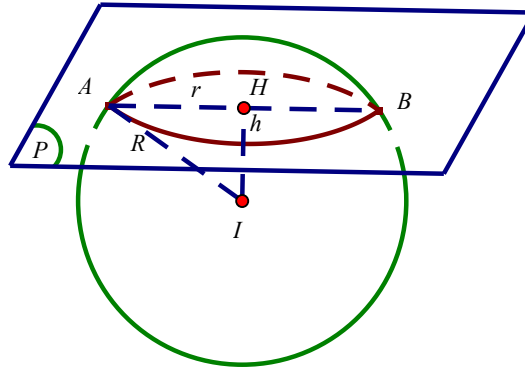
B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

$$h = d(I; (P)) = \frac{|-1 - 4 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3.$$

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34.$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3.$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9.$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3.$

Lời giải

Chọn C

Vì mặt cầu tâm $I(-1; 2; 1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$ nên bán kính

$$R = d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3 \Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81.$

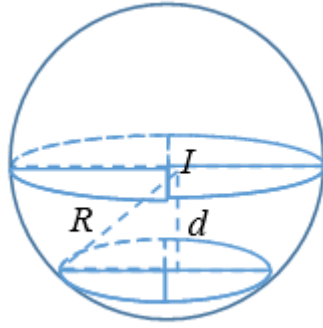
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5.$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25.$

Lời giải

Chọn D



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3.$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r = 4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$.

B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có:

$$d(I, (P)) = R \Rightarrow R = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow R = 3.$$

Vậy phương trình của (S) là $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$

B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$

D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

$$\text{Ta có } R^2 = r^2 + \left(d(I, (P)) \right)^2 = 1 + \left(\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} \right)^2 = 10$$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn D.

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0(*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$ nên ta

$$\text{có hệ phương trình } \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \\ 2a + 3b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} : T / m(*)$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π .

Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.

B. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.

C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.

D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S, r lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có: $S = \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1$

$$d(I; (P)) = \frac{|-3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

(S) có tâm $I(-3;0;1)$ và bán kính $R = \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

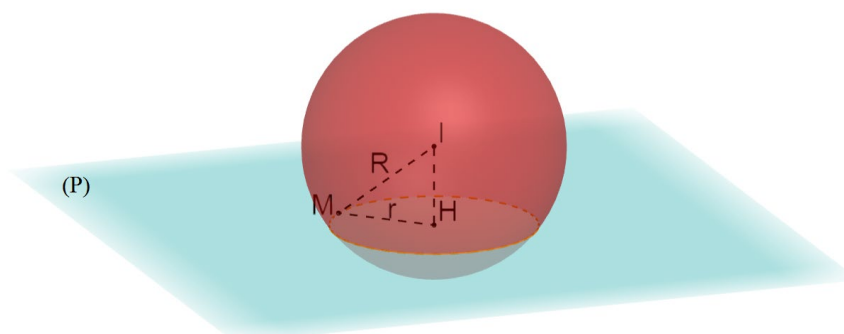
B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P) . Ta có $IM = R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2 = R^2 = d_{(I;(P))}^2 + r^2 \quad (*)$$

Ta có: $d_{(I;(P))} = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 = IH$.

Từ $(*) \Rightarrow R^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Lập phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng đã cho có bán kính $R = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Lập phương trình mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giả thiết ta có:

$$\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2$$

Mặt khác $d(I, (P)) = 1$ nên $R^2 = r^2 + [d(I, (P))]^2 = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

Câu 34. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2, 3, 3, 2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{6}{11}$

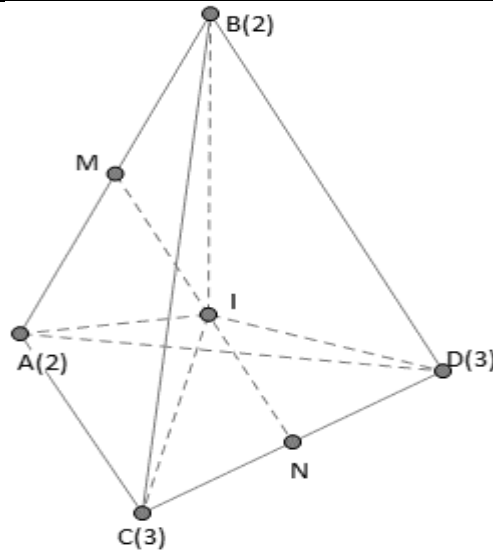
Cách 1:

Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB = 4$, $AC = BD = AD = BC = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA = IB, IC = ID$ nên I nằm trên đoạn MN .

Đặt $IN = x$, ta có $IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r$, $IA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 2 + r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra $r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$

Cách 2



Gọi A, B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C, D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x .

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2$, $IC = ID = x + 3$.

Gọi (P) , (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD .

$$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1).$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD , suy ra $MN = (P) \cap (Q)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

$$\text{Tam giác } IAM \text{ có } IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}.$$

$$\text{Tam giác } CIN \text{ có } IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}.$$

$$\text{Tam giác } ABN \text{ có } NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}.$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm

$A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 12

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$.

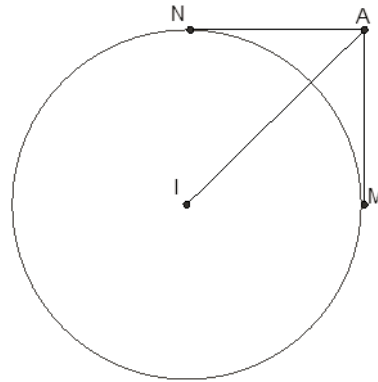
* Xét trường hợp $A \in (S)$, ta có $a^2 + b^2 = 1$. Lúc này các tiếp tuyến của (S) thuộc tiếp diện của (S) tại A nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.

Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a;b)$ là $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}; \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}; \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}; \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

* Xét trường hợp A ở ngoài (S) . Khi đó, các tiếp tuyến của (S) đi qua A thuộc mặt nón đỉnh A . Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại A .

Điều kiện để có ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng 90° .

Giả sử $A'N; A'M$ là các tiếp tuyến của (S) thỏa mãn $AN \perp AM$ ($N; M$ là các tiếp điểm)



Dễ thấy $A'NIM$ là hình vuông có cạnh $IN = R = \sqrt{3}$ và $IA' = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Điều kiện phải tìm là $\begin{cases} IA > R \\ IA \leq IA' = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ a^2 + b^2 \leq 4 \end{cases}$

Vì a, b là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a;b)$ là

$(0;2), (0;-2), (2;0), (-2;0), (1;1), (-1;-1), (-1;1), (1;-1)$.

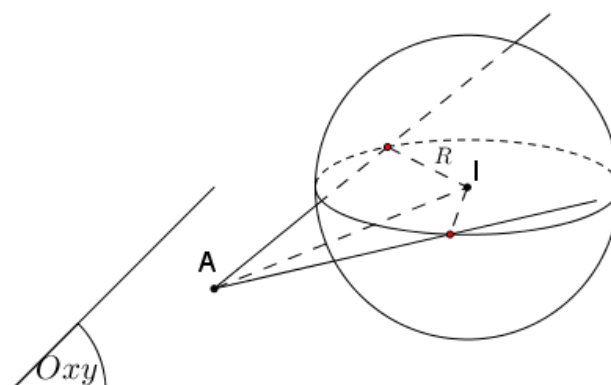
Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 20



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A , để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0;\pm 2);(0;\pm 3);(\pm 1;\pm 2);(\pm 2;\pm 2);(\pm 2;\pm 1);(\pm 2;0);(\pm 3;0)$, 20 bộ số.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20.

B. 8.

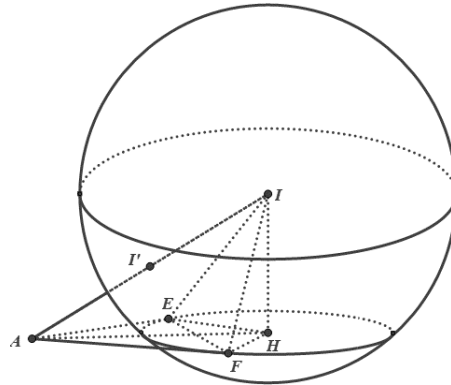
C. 12.

D. 16.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 20.



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$

$A(a;b;0) \in (Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI \Rightarrow I'\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Gọi E, F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE \perp AF$.

Ta có: E, F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính

$$R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

Đề tồn tại E, F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R - R'| \leq II' \leq R + R'$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4(1)$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh

$$AE = HF = \sqrt{AI^2 - 5}.$$

Ta có $IH^2 = R^2 - HF^2 = 5 - (AI^2 - 5) = 10 - AI^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

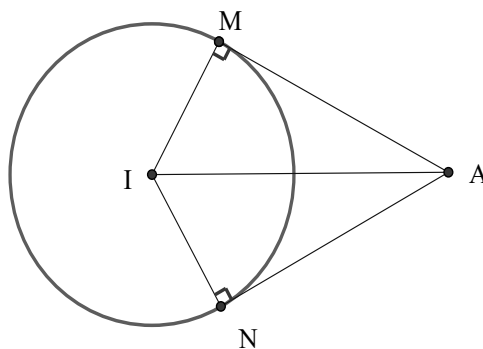
Cách khác:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0,0,-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))} = 1 < R \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) . Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A \Leftrightarrow AI \geq R$ (1).

Có $A(a,b,c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a,b,0), IA = a^2 + b^2 + 1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.



Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2} \quad (2).$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases}.$$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}z = 0$

Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $a, b, c \neq 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $H(1; 2; -2) \in (\alpha)$ nên: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c} = 1$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (1-a; 2; -2)$, $\overrightarrow{BH} = (1; 2-b; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -b; c)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

Lại có H là trực tâm tam giác ABC , suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{-2c} + \frac{2}{-c} - \frac{2}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{9}{2}$, khi đó $a = 9, b = \frac{9}{2}$.

Vậy $A(9; 0; 0)$, $B\left(0; \frac{9}{2}; 0\right)$, $C\left(0; 0; -\frac{9}{2}\right)$.

Khi đó, giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d = 0. \text{ Với } (a')^2 + (b')^2 + (c')^2 - d > 0$$

Vì 4 điểm O, A, B, C thuộc mặt cầu nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -18a' + d = -81 \\ -9b' + d = -\frac{81}{4} \\ 9c' + d = -\frac{81}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a' = \frac{9}{2} \\ b' = \frac{9}{4} \\ c' = -\frac{9}{4} \end{cases}.$$

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là: $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}z = 0$, có tâm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{9}{4}\right)$

và bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng

$(P): x = 1, (Q): y = -1$ và $(R): z = 1$ có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Gọi $I(a; b; c)$ và R là tâm và bán kính của (S) . Khi đó ta có

$$R = IA = d(I; (P)) = d(I; (Q)) = d(I; (R)) \Leftrightarrow IA = |a-1| = |b+1| = |c-1| \Leftrightarrow \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = \pm(b+1) \\ a-1 = \pm(c-1) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ (2-a)^2 + a^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ 2a^2 - 12a + 28 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

TH2:

$$\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 - 16a + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow R = 1 \text{ TH3}$$

$$: \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + a^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 4a + 12 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy mặt cầu có bán kính $R = 1$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và

$(\beta): \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R = d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta))$.

$$\text{Mà } d(I, (\beta)) = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{1-m} + c - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1}}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m} \right)^2 - 2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)} \right]^2 - 2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} = \frac{1}{m(1-m)} - 1 \quad (\text{do } m \in (0;1)) \end{aligned}$$

Nên

$$R = \frac{\left| \frac{a(1-m) + bm + cm(1-m) - m(1-m)}{m(1-m)} \right|}{\frac{1}{m(1-m)} - 1}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2|}{m^2 - m + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R - Rm + Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \\ -R + Rm - Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2(R + c - 1) + m(a - b - c - R + 1) + R - a = 0(1) \\ m^2(R + c - 1) + m(b + c - a - R - 1) + R + a = 0(2) \end{cases}$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ với mọi $m \in (0;1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m \in (0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + c - 1 = 0 \\ a - b - c - R + 1 = 0 \\ R - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = R \\ b = R \\ c = 1 - R \end{cases} \Rightarrow I(R; R; 1 - R).$$

$$\text{Mà } R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|2R - R + 2(1 - R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 - R| \Leftrightarrow \begin{cases} R = 3 \\ R = -6(l) \end{cases}$$

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + c - 1 = 0 \\ b + c - a - R - 1 = 0 \\ R + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -R \\ b = -R \\ c = R + 1 \end{cases} \Rightarrow I(-R; -R; R + 1)$$

$$\text{Mà } R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|-2R + R + 2(1 + R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 + R| \Leftrightarrow \begin{cases} R = 6 \\ R = -3(l) \end{cases}.$$

Vậy $R_1 + R_2 = 9$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $12\sqrt{2}$

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của mặt cầu (S) cố định và R là bán kính của mặt cầu (S) .

Ta có:

$$R = d(I, (P)) = \frac{|2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10|}{\sqrt{4m^2 + (m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)^2}} = \frac{|2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10|}{\sqrt{2}(m^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10 = R\sqrt{2}(m^2 + 1) \\ 2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10 = -R\sqrt{2}(m^2 + 1) \end{cases} \text{ đúng với mọi } \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_0 + z_0)m^2 + 2mx_0 + y_0 - z_0 - 10 = R\sqrt{2}m^2 + R\sqrt{2} \\ (y_0 + z_0)m^2 + 2mx_0 + y_0 - z_0 - 10 = -R\sqrt{2}m^2 - R\sqrt{2} \end{cases} \text{ đúng với mọi } \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_0 + z_0 = R\sqrt{2} \\ x_0 = 0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} y_0 - z_0 - 10 = R\sqrt{2} \\ x_0 = 0 \end{cases} & (II) \end{cases}$$

Từ hệ (I) suy ra $x_0 = 0; y_0 = 5 + R\sqrt{2}; z_0 = -5$

Do đó tâm mặt cầu là $I(0; 5 + R\sqrt{2}; -5)$

Ta có: $R^2 = IA^2 \Leftrightarrow R^2 = 4 + (R\sqrt{2} - 6)^2$ suy ra $R = 2\sqrt{2}$ và $R = 10\sqrt{2}$

Hệ (II) suy ra $x_0 = 0; y_0 = 5 - R\sqrt{2}; z_0 = -5$

Như vậy, ta có: $R^2 = IA^2 \Leftrightarrow 4^2 + (R\sqrt{2} + 6)^2 = R^2$, phương trình không có giá trị R thỏa mãn nên loại.

Vậy tổng hai bán kính của hai mặt cầu là: $12\sqrt{2}$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $A(-3; 1; 1), B(1; -1; 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = 4$

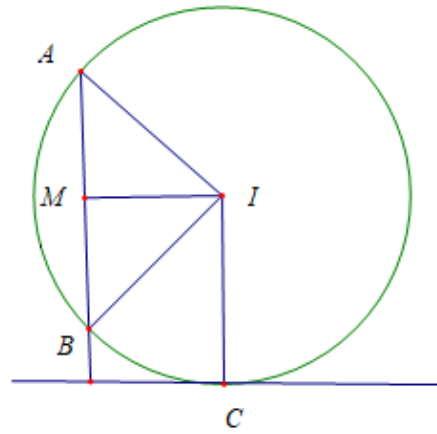
Ta có $\overline{AB} = (4; -2; 4)$ và mp (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 2)$. Do đó AB vuông góc với (P) .

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên ta có

$$\begin{cases} 9 + 1 + 1 + 6a - 2b - 2c + d = 0 \\ 1 + 1 + 25 - 2a + 2b - 10c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 2c + d = -11 \\ 2a - 2b + 10c - d = 27 \end{cases}.$$

Suy ra $8a - 4b + 8c = 16 \Leftrightarrow 2a - b + 2c = 4$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $d(I, (P)) = \frac{|2a - b + 2c + 11|}{3} = 5$.



Ta có $\overline{AB} = (4; -2; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$. Gọi M là trung điểm AB ta có

$d(C, AB) = IM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Vậy C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định có bán kính $r = 4$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $c = 2$

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ là $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Đk: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$$(S) \text{ đi qua các điểm } M, N, P \text{ và tiếp xúc với mặt phẳng } (Oyz) \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - 8c + d = -21 \\ -10a + d = -25 \\ -2a + 6b - 2c + d = -11 \\ R = |a| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - 8c + 10a - 25 = -21 \\ d = 10a - 25 \\ -2a + 6b - 2c + 10a - 25 = -11 \\ a^2 + b^2 + c^2 - d = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 8a + 6b - 2c = 14 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 32a + 24b - 8c = 56 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 26a + 26b = 52 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 1 \\ d = 10a - 25 \\ b = -a + 2 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-a + 2)^2 + (a - 1)^2 - 10a + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 16a + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=4 \\ d=25 \end{cases}$$

Vì $a+b+c < 5$ nên chọn $c = 2$.

DẠNG 3

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$.

B. $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.

C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$.

D. $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm là điểm I .

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (5;1;-6)$ là vector pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng $(P): 5(x-6)+1(y-2)-6(z+5)=0 \Leftrightarrow 5x+y-6z-62=0$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+7=0$.

Biết mp (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x-y+2z-7=0$.

B. $2x-2y+z+17=0$.

C. $2x-2y+z+7=0$.

D. $2x-2y+z-17=0$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=5$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên (Q)

(Q) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$(Q) \parallel (P): 2x-2y+z+7=0 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z+m=0 (m \neq 7)$$

$$d[I;(Q)] = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + m|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = IM = 4$$

$$\Leftrightarrow |m+5|=12 \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=-17 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (Q): 2x-2y+z-17=0$$

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là:

A. $2x-y+2z-7=0$. B. $2x-y+2z+9=0$. C. $2x-y+2z+7=0$. D. $2x-y+2z-9=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có dạng:

$$(Q): 2x-y+2z+D=0, (D \neq -11).$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = 3$

Vì mặt phẳng tiếp xúc với (S) nên ta có :

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-1) - 2 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|2 + D|}{3} = 3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + D = 9 \\ 2 + D = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -11 \end{cases}. \text{ Do } D \neq -11 \Rightarrow D = 7.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 2z + 7 = 0$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là:

- A.** $y - 2z = 0$. **B.** $y + 2z = 0$. **C.** $y + 3z = 0$. **D.** $y - 3z = 0$.

Lời giải

Chọn A

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$

(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 3 = R$

$$\Rightarrow I \in (P)$$

Chọn điểm $M(1; 0; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (0; 2; 1)$

$$\vec{n} = [\vec{a}; \overrightarrow{IM}] = (0; -1; 2)$$

(P) qua $O(0; 0; 0)$ và có VTPT $\vec{n} = (0; -1; 2) \Rightarrow (P): y - 2z = 0$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0$ và điểm $K(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S) .

- A.** $2x + 2y + z - 4 = 0$. **B.** $6x + 6y + 3z - 8 = 0$.
C. $2x + 2y + z + 2 = 0$ **D.** $6x + 6y + 3z - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn A.

$(S): x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 3 \Rightarrow$ mặt cầu tâm $I(0; 0; -1)$, $R = \sqrt{3}$.

Do $\overrightarrow{IK} = (2; 2; 1)$, $IK = 3 > R \Rightarrow K$ nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ K vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ K đến các tiếp điểm bằng nhau.

Gọi E là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE \perp EK \Rightarrow \triangle IKE$ vuông tại $E \Rightarrow KE = \sqrt{IK^2 - IE^2} = \sqrt{6} \Rightarrow E$ thuộc mặt cầu tâm K bán kính $R' = \sqrt{6}$.

Tọa độ điểm E thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z + 2 = 0.$$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vector $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

A. $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vector $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{v}] = (2; -1; 2).$$

Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + D = 0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Leftrightarrow |D + 9| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -21 \\ D = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

A. $x - 2y - 2z + 1 = 0$.

B. $-x + 2y + 2z + 5 = 0$.

C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$.

D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -3)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương trình (Q) có dạng: $x - 2y - 2z + D = 0$ ($D \neq -5$).

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ khi và chỉ khi } d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D + 11 = 6 \\ D + 11 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5 \\ D = -17 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện suy ra $D = -17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x - 2y - 2z - 17 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

- A. $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$. B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
 C. $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$. D. $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = (1; 4; 1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, \vec{v}] = (2; -1; 2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x - y + 2z + d = 0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = 4$

$$\text{Hay } \frac{|2 + 3 + 4 + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Rightarrow \begin{cases} d = -21 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6 \text{ đồng thời song song với hai đường thẳng } d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1},$$

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

- A. $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$ C. $x + y + 2z + 9 = 0$ D. $x - y + 2z + 9 = 0$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có vtcp $\vec{u}_1(3; -1; -1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\vec{u}_2(1; 1; -1)$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng

(α) cần tìm. Do (α) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên $\vec{n} \perp \vec{u}_1$ và $\vec{n} \perp \vec{u}_2$, từ đó ta chọn

$$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; 4). \text{ Suy ra } (\alpha): x + y + 2z + c = 0.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

$$(\alpha) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I;(\alpha)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|c-3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} c-3=6 \\ c-3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=9 \\ c=-3 \end{cases}.$$

Câu 53. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x - y + 2z = 0$.

B. $-2x + 2y - z + 4 = 0$.

C. $x + y + z = 0$

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (3; 1; -4)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Vì (P) chứa d nên $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ và (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = 3$.

Ta chỉ xét phương trình $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng d là $M(4; 0; -4)$ và $N(1; -1; 0)$.

Ta nhận thấy: $M(4; 0; -4)$ và $N(1; -1; 0)$ không thỏa mãn đáp án A; B; C.

Vậy, đáp án là D.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ ?

A. $y + z + 3 = 0$

B. $x + z + 1 = 0$

C. $x + y + 1 = 0$

D. $x + z - 1 = 0$

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$; $R = \sqrt{2}$.

Véc tơ chỉ phương của $d: \vec{u}_d = (1; 2; -1)$. Véc tơ chỉ phương của $\Delta: \vec{u}_\Delta = (1; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (-1; 0; -1)$ nên chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x + z + D = 0$.

$$\text{Do } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1 - 2 + D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |D - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Chọn (P): $x + z + 1 = 0$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M , song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. $2x - 2y + 5z - 22 = 0$.

B. $2x + y + 2z - 13 = 0$.

C. $2x + y - 2z - 1 = 0$.

D. $2x - y + 2z - 7 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $\vec{n} = (2a; b; c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3; 2; 2)$.

Mặt phẳng (P) song song với Δ nên ta có $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow c = 3a - b$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên phương trình có dạng:

$$2a(x-4) + b(y-3) + (3a-b)(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2ax + by + (3a-b)z - 11a - 2b = 0 \quad (*)$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 1$.

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{4a^2 + b^2 + (3a-b)^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{13a^2 + 2b^2 - 6ab}} = 1 \Leftrightarrow 3|b| = \sqrt{13a^2 + 2b^2 - 6ab}.$$

$$\Leftrightarrow 9b^2 = 13a^2 + 2b^2 - 6ab \Leftrightarrow 13a^2 - 6ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(13a+7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 13a=-7b \end{cases}.$$

Với $a = b$, chọn $a = 1, b = 1$, thay vào $(*)$ ta được pt $(P_1): 2x + y + 2z - 13 = 0$.

Ta có $N(6;2;2) \in \Delta$. Dễ thấy $N \notin (P_1)$, suy ra $(P_1): 2x + y + 2z - 13 = 0$ song song với Δ .

Với $13a = -7b$, chọn $a = 7, b = -13$, thay vào $(*)$ ta được pt $(P_2): 14x - 13y + 34z - 51 = 0$.

Ta có $N(6;2;2) \in \Delta$, dễ thấy $N \notin (P_2)$, suy ra $(P_2): 14x - 13y + 34z - 51 = 0$ song song với Δ .

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Vì (P) đi qua $M(4;3;1)$ nên phương án **A, C** bị loại.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3; 2; 2)$. (P) song song với đường thẳng Δ nên $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Do đó phương án **D** bị loại.

Vậy phương án **B** là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 4$.

Mặt phẳng (β) song song với (α) nên có phương trình dạng $4x + 3y - 12z + c = 0$ ($c \neq 10$).

$$(\beta) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I; (\beta)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|-26 + c|}{13} = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -26 + c = 52 \\ -26 + c = -52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 78 \\ c = -26 \end{cases}$$

Nếu $c = 78$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0; 0; \frac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

Nếu $c = -26$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z - 26 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0; 0; -\frac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

Vậy $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P) , (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T , T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

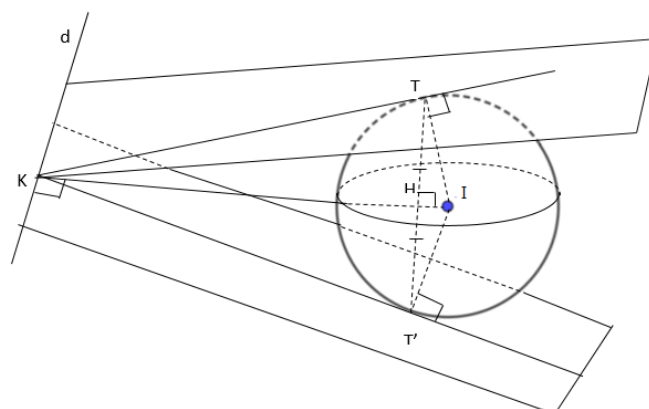
A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d .

$K \in d$ nên ta có thể giả sử $K(t; 2+t; -t)$

$\overrightarrow{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$, $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

$$IK \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t-t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow K(0; 2; 0)$$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2 = IH \cdot IK$.

$$\Leftrightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(IK = \sqrt{6} \right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK}. \text{ Giả sử } H(x; y; z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{6} \cdot (-1) \\ y-0 = \frac{1}{6} \cdot 2 \\ z+1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{-5}{6} \end{cases} \text{ Vậy } H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{-5}{6}\right)$$

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng.

B. 2 mặt phẳng.

C. 0 mặt phẳng.

D. Vô số mặt phẳng.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt phẳng là: $(P): Ax + By + Cz + D = 0 \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \right)$.

Theo đề bài, mặt phẳng qua A, B nên ta có:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2C \\ D = -2C \end{cases}. \text{ Vậy mặt phẳng } (P) \text{ có dạng: } 2Cx + By + Cz - 2C = 0.$$

(S) có tâm $I(1,1,0)$ và $R = 1$.

$$\text{Vì } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } d_{(I,(P))} = R \Leftrightarrow \frac{2C + B - 2C}{\sqrt{5C^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow B^2 = 5C^2 + B^2 \Leftrightarrow C = 0.$$

Suy ra $A = D = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): y = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π . Lập phương mặt phẳng (Q) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{15}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r = 6\pi \Leftrightarrow r = 3$.

Do $(Q) \parallel (P) \Rightarrow (Q): x - 2y + z + d = 0 \quad (d \neq 7)$.

Ta có: $d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|d - 1|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 7 & (\text{loại}) \\ d = -5 & (\text{nhận}) \end{cases}$

Vậy $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $4x + 3y - 12z + 78 = 0$

Mặt cầu (S) có: tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x + 3y - 12z + d = 0, (d \neq 10)$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên: $d_{(I, (\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -26 \\ d = 78 \end{cases}$.

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

Vậy mp $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π ? Lập phương mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P): x - 2y + z + 7 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$x - 2y + z + D = 0, \quad D \neq -5.$$

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$$\begin{aligned} d(I; (P)) &= \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow d(I; (P)) = \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} &= \sqrt{6} \Leftrightarrow |D - 1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D - 1 = 6 \\ D - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $D = 7$. Do đó phương trình mặt phẳng (P) : $x - 2y + z + 7 = 0$.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Tìm tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: tập hợp điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình $x + y + z - 7 = 0$

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S) . Tâm mặt cầu là $I(1; 2; 3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow AM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x-2)(x-1) + (y-3)(y-2) + (z-4)(z-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1-1)(x-1) + (y-2-1)(y-2) + (z-3-1)(z-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - (x+y+z-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow x+y+z-7 = 0 \text{ (Do } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0 \text{)}. \end{aligned}$$

Câu 63. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2; -2; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 6$. Tìm tập hợp điểm M .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: tập hợp điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình $2x - 2y + 6z + 9 = 0$

Gọi điểm $M(x; y; z) \in (S)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Khi đó: } x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -4z - 3 \quad (1)$$

Ta có: $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ và $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; z-2)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 6 \Leftrightarrow x(x-2) + y(y+2) + z(z-2) = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 6 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được

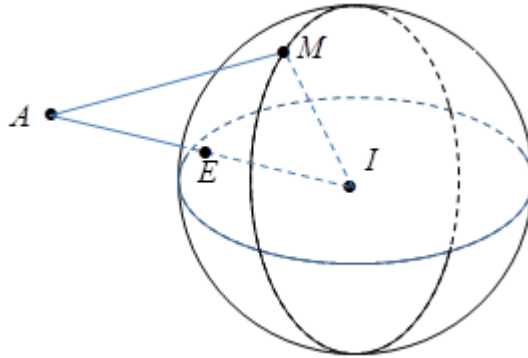
$$-4z - 3 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 6z + 9 = 0.$$

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S) . Tìm tập hợp điểm M .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x + y + z - 4 = 0$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. $A(2;2;2)$

Ta luôn có $\widehat{AMI} = 90^\circ$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI .

Với $E\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1 = IE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu $(S_1): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$$

Trừ theo về hai phương trình cho nhau ta được: $x + y + z - 4 = 0$.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{7}{2}$

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì điểm $M\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b} + \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{7a} + \frac{2}{7b} + \frac{3}{7c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$$

Mặt khác mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm $I(1,2,3)$ của cầu tới mặt phẳng (ABC) là $\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{\left|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \text{ mà } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$$

$$\Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}.$$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M , N , P . Tìm c biết rằng $a+b+c < 5$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $c = 2$

Giả sử mặt cầu (S) đã cho có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Từ đề bài ta có:

$$M(2;1;4) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 2b - 8c + d = -21 \quad (1)$$

$$N(5;0;0) \in (S) \Leftrightarrow -10a + d = -25 \quad (2).$$

$$P(1;-3;1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (3).$$

Hình chiếu của điểm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c) \Rightarrow \overline{HI} = (a;0;0) \Rightarrow HI = |a|$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow IH = |a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \Leftrightarrow b^2 + c^2 - d = 0 \quad (4).$

Từ (1); (2); (3) ta có:

$$\begin{cases} b = 2 - a \\ c = a - 1 \\ d = 10a - 25 \end{cases}.$$

Thế vào phương trình (4) ta được: $a^2 - 8a + 15 = 0 \Leftrightarrow a = 5 \vee a = 3$.

Trường hợp 1: $a = 5 \Rightarrow b = -3, c = 4 \Rightarrow a + b + c = 6 > 5 \Rightarrow$ loại.

Trường hợp 1: $a = 3 \Rightarrow b = -1, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 4 < 5 \Rightarrow$ nhận.

Vậy $c = 2$ thỏa yêu cầu đề.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2x + 2y + z - 5 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = 2$.

Có $\overrightarrow{IA} = (2;2;1) \Rightarrow IA = 3$.

Tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB = \sqrt{IA^2 - IB^2} = \sqrt{5}$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI .

Ta có: $IB^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow IH = \frac{4}{9} \cdot IA$.

Từ suy ra được $\overrightarrow{IH} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x-0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ y-0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ z-1 = \frac{4}{9} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = \frac{8}{9} \\ z = \frac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA} = (2;2;1)$ làm vector pháp tuyến. Hơn nữa mặt phẳng (BCD) đi qua điểm H .

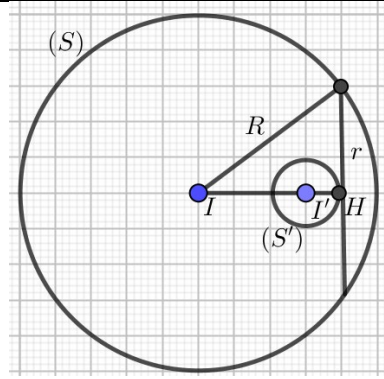
Vậy (BCD) có phương trình: $2 \cdot \left(x - \frac{8}{9}\right) + 2 \cdot \left(y - \frac{8}{9}\right) + 1 \cdot \left(z - \frac{13}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ và $(S'): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Tính khoảng cách từ O đến (P) bằng

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d(O, (P)) = \frac{14}{3}$



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=5$, mặt cầu (S') có tâm $I'(1;2;3)$, bán kính $R'=1$

Vì $I'I=3 < R-R'=4$ nên mặt cầu (S') nằm trong mặt cầu (S) .

Mặt phẳng (P) tiếp xúc $(S') \Rightarrow d(I', (P)) = R' = 1$; (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π (suy ra bán kính đường tròn là $r=3$) nên $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = 4$.

Nhận thấy $d(I, (P)) - d(I', (P)) = I'I$ nên tiếp điểm H của (P) và (S') cũng là tâm đường tròn giao của (P) và (S) . Khi đó, (P) là mặt phẳng đi qua H , nhận $\overrightarrow{I'H} = (1;2;2)$ làm vecto pháp tuyến.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IH} = \frac{4}{3} \overrightarrow{I'H} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{4}{3} \\ y_H = \frac{8}{3} \\ z_H = \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P): x - \frac{4}{3} + 2\left(y - \frac{8}{3}\right) + 2\left(z - \frac{11}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 14 = 0.$$

$$\text{Khoảng cách từ } O \text{ đến } (P) \text{ là } d(O, (P)) = \frac{14}{3}.$$

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(a+4b)x + 2(a-b+c)y + 2(b-c)z + d = 0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định.

Biết rằng $4a + b - 2c = 4$. Tìm khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (α) .

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Đáp án: } d(D, (\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{915}}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(a+4b; -a+b-c; -b+c)$.

Giả sử mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$.

Vì $I \in (\alpha)$ nên ta có

$$A(a+4b) + B(-a+b-c) + C(-b+c) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-B)a + (4A+B-C)b + (-B+C)c = -D \quad (1).$$

Theo bài ra ta có $4a+b-2c=4$ (2).

Đồng nhất (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A-B=4 \\ 4A+B-C=1 \\ -B+C=-2 \\ D=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{17}{4} \\ C=-\frac{25}{4} \\ D=-4 \end{cases}$$

Suy ra (α) có phương trình $x+17y+25z+16=0$.

Vậy, khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến (α) bằng

$$d(D,(\alpha)) = \frac{|1+17.2+25.(-2)+16|}{\sqrt{1^2+17^2+25^2}} = \frac{1}{\sqrt{915}}.$$

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là:

$$ax+by+cz+d=0 \quad (\text{đk: } a^2+b^2+c^2>0).$$

$$\text{Khi đó ta có hệ điều kiện sau: } \begin{cases} d(A;(P))=2 \\ d(B;(P))=1 \\ d(C;(P))=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \\ \frac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \\ \frac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó ta có: } |3a-b+c+d| = |-a-b+c+d| \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b+c+d = -a-b+c+d \\ 3a-b+c+d = a+b-c-d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-b+c+d=0 \end{cases}.$$

với $a = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d| = 2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ 4b-c-d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=0 \Rightarrow c=d=0, b \neq 0 \\ c+d=4b, c=\pm 2\sqrt{2}b \end{cases} \text{ do đó có 3 mặt}$$

phẳng.

$$\text{Với } a-b+c+d=0 \text{ thì ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 4|a| \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \frac{4}{3}|a| \\ |c| = \frac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$$

do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

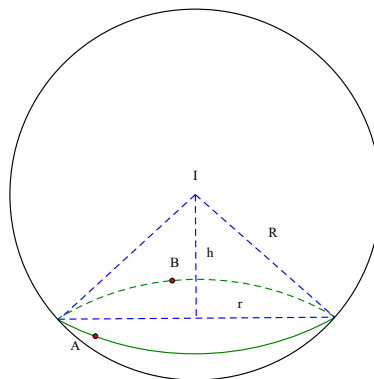
Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{7-\sqrt{3}}{2}; 3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{7+\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$. Xét mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}: d < -5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B . Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $T = |a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = |a+b+c+d| = 6$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Có $IA = IB = \sqrt{6}$ nên A, B thuộc mặt cầu (S) .

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0) = -\sqrt{3}(1; -1; 0) = -\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$ là trung điểm của AB .

Gọi $\vec{a} = (1; -1; 0)$ và $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P)

$$\text{Vì } A, B \in (P) \text{ nên có } \begin{cases} I \in (P) \\ \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}b + 3c + d = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -6a - 3c \\ a = b \end{cases}.$$

Gọi $h = d(I, (P))$, $(C) = (P) \cap (S)$, r là bán kính đường tròn (C) .

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{6 - h^2}.$$

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N) .

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2r = h \cdot \sqrt{6 - h^2} \leq \frac{h^2 + 6 - h^2}{2} = 3.$$

$$\text{Max} S = 3 \text{ khi } h^2 = 6 - h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}.$$

$$h = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{|a + 2b + 3c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}.$$

Nếu $a = c$ thì $b = a$; $d = -9a$ và $(P): ax + ay + az - 9a = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0$ (nhận).

Nếu $a = -c$ thì $b = a$; $d = -3a$ và $(P): ax + ay - az - 3a = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$ (loại).

Vậy $T = |a + b + c + d| = 6$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$ và $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) ?

Trả lời:

Lời giải

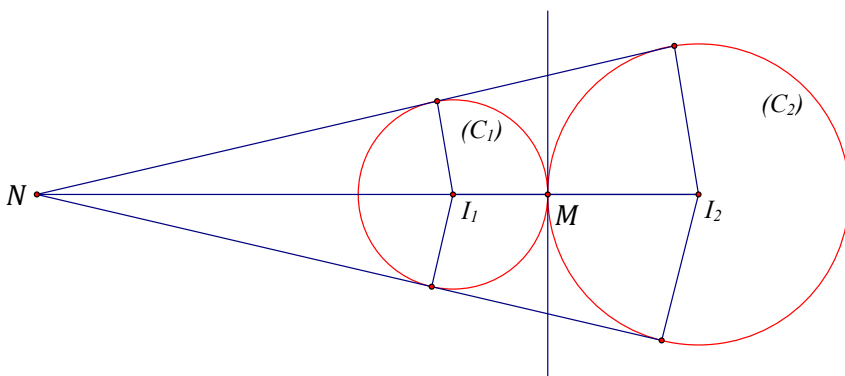
Đáp án: có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

$$\text{Ta có: } (S_1): \begin{cases} I_1(-3; 2; 4) \\ R_1 = 1 \end{cases}, (S_2): \begin{cases} I_2(0; 2; 4) \\ R_2 = 2 \end{cases}, (S_3): \begin{cases} I_3(-2; 2; 0) \\ R_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 I_2 = 3 = R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1), (S_2) \text{ tiếp xúc với nhau tại } M.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MI_2} = 2\overrightarrow{I_1 M} = \frac{2}{3}\overrightarrow{I_1 I_2} \Rightarrow M(-2; 2; 4)$$

Cắt hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo phương chứa đường nối tâm của chúng ta có thiết diện là hai đường tròn lớn $(C_1), (C_2)$.



Trường hợp 1: Mặt phẳng qua M vuông góc với I_1I_2 có phương trình là $(\alpha): x + 2 = 0$ mà

$$d(I_3; (\alpha)) = 0 \Rightarrow (\alpha) \text{ không tiếp xúc với } (S_3) \Rightarrow \text{LOẠI.}$$

Trường hợp 2: N là tâm vị tự ngoài của $(C_1), (C_2) \Rightarrow \overline{NI_2} = 2\overline{NI_1} = 2\overline{I_1I_2} \Rightarrow N(-6; 2; 4)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu. (P) qua N và có vtpt là $\vec{n}(1; a; b)$

$$\Rightarrow (P): x + 6 + a(y - 2) + b(z - 4) = 0 \Leftrightarrow (P): x + ay + bz - 2a - 4b + 6 = 0.$$

$$\text{Có: } \begin{cases} d(I_1; (P)) = 1 \\ d(I_2; (P)) = 2 \\ d(I_3; (P)) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \\ 6 = 2\sqrt{1 + a^2 + b^2} \\ |4b - 4| = 3\sqrt{1 + a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Với } b = \frac{13}{4} \Rightarrow a^2 = -\frac{41}{16} \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } b = -\frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{103}{16} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{103}}{4}$$

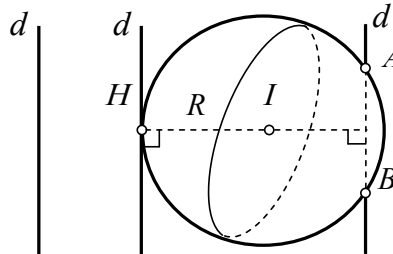
Vậy có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$.

CHỦ ĐỀ 4

BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .



- Nếu $d(I, \Delta) > R$: Δ không cắt (S) .
- Nếu $d(I, \Delta) = R$: Δ tiếp xúc với (S) tại H .
- Nếu $d(I, \Delta) < R$: Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

DẠNG 1

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S) :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

- A.3. B.0. C.1 **D. 2.**

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

- A.0.** B.0. C.2. **D. 3.**

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu.

$(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S) là:

- A.** $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$ **B.** $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) là:

A. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

B. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẺ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.
 B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}$.
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$.
 D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2; 3; -1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng

(d) có phương trình: $(d) \begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = t \\ z = -25 - 2t \end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$ là:

- A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 280$.
 B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 289$.
 C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$.
 D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 9 = 0$ tại điểm $H(a; b; c)$. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

- A. 2.
 B. -1.
 C. 1.
 D. -2.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng

- A. $\frac{5}{3}$.
 B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
 C. $\frac{\sqrt{30}}{3}$.
 D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R = 5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy . Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

- A. $M(-1; -2; 1)$.
 B. $N(1; 2; -1)$.
 C. $P(-5; 2; -7)$.
 D. $Q(5; -2; 7)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = \sqrt{3}$
 B. $R = 2$
 C. $R = 1$
 D. $R = \sqrt{6}$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng

$d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng

$(P): x - 2y + 2z = 0$; $(Q): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d)

và mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 1$.

B. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6$.

C. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}$.

D. $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 8$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường

thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với d .

Trả lời:

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường

thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M , tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Lập phương trình của mặt cầu (S) .

Trả lời:

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng

$(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

Trả lời:

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có phương trình lần lượt là

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ

$\vec{u} = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Tìm vectơ chỉ phương của d .

Trả lời:

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ (m là tham số) và

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$AB = 8$. Tìm giá trị của m .

Trả lời:

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): z + 2 = 0$, $K(0; 0; -2)$, đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện

là đường tròn tâm K , bán kính $r = \sqrt{5}$.

Trả lời:

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Gọi

D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$, $A(0; 0; 4), B(3; 1; 2)$. Một mặt cầu

(S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r . Tính bán kính r của đường tròn đó.

Trả lời:

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6; 0; 0)$, $N(0; 6; 0)$, $P(0; 0; 6)$. Hai

mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$ cắt nhau theo đường tròn (C) . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM ?

Trả lời:

Câu 24. Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$,

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu

$(S_1), (S_2)$ và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

Trả lời:

DẠNG 3

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 26. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 30.

B. 26.

C. 20.

D. 21.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M , N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q . Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.

B. $R = 6$.

C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$.

D. $R = 4$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3^2$, mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P) . Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c > 0)$ là một vectơ chỉ phương của Δ , tổng $b + c$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. 45.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 14$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y + 2z - 5 = 0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) . Vector nào sau đây là vector chỉ phương của Δ ?

A. $\vec{u} = (4; -2; 1)$.

B. $\vec{v} = (2; 0; -1)$.

C. $\vec{m} = (-3; 1; 0)$.

D. $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3; -2; 1)$, $r = 10$.

B. $K(-1; 2; 3)$, $r = 8$.

C. $K(1; -2; 3)$, $r = 8$.

D. $K(1; 2; 3)$, $r = 6$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.

A. $OA = \sqrt{11}$.

B. $OA = 5$.

C. $OA = 3$.

D. $OA = \sqrt{6}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}. \text{ Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho } MA, MB, MC \text{ là tiếp tuyến}$$

của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 30

B. 26

C. 20

D. 21

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 0; 3), B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 3; 9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. 39.

B. $12\sqrt{3}$.

C. 18.

D. $28\sqrt{3}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4; 1; 2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M; N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox; Oy$ sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. $6\sqrt{2}$.

B. 14.

C. 8.

D. $9\sqrt{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c), (a > 0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$, $\widehat{BMC} = 60^\circ$, $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Trả lời:

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 4; 2)$, bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , tính giá trị $AM \cdot AN$.

Trả lời:

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , Tính giá trị $AM \cdot AN$.

Trả lời:

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu: $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Trả lời:

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + t \end{cases}$, điểm

$M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A , cắt mặt cầu tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Lập phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB .

Trả lời:

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N . Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k = 2a - 5b + 10c$, tính giá trị của k .

Trả lời:

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + (1-2m)y + 4mz - 4 = 0$ và $2x + my - (2m+1)z - 8 = 0$. Khi đó m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

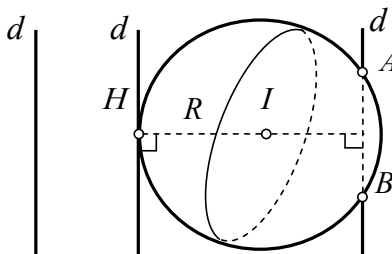
Trả lời:

CHỦ ĐỀ 4

BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .



- Nếu $d(I, \Delta) > R$: Δ không cắt (S) .
- Nếu $d(I, \Delta) = R$: Δ tiếp xúc với (S) tại H .
- Nếu $d(I, \Delta) < R$: Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

DẠNG 1

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S) :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

A.3.

B.0.

C.1

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua $M = (-2; 0; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; -3)$ và bán kính $R=9$

Ta có $\vec{MI} = (3; 2; -6)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (-4; -9; -5)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{\left| [\vec{u}, \vec{MI}] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\sqrt{366}}{3}$$

Vì $d(I, \Delta) < R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S):$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

A.0.

B.0.

C.2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ đi qua $M = (0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u} = (2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1;0;-2)$ và bán kính $R=2$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (1;-1;-4)$ và $[\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (-5;7;-3)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{\left| [\vec{u}, \overrightarrow{MI}] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\sqrt{498}}{6}$$

Vì $d(I, \Delta) > R$ nên Δ không cắt mặt cầu (S) .

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu.

$(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S) là:

A. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

B. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2+5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Để } \Delta \text{ không cắt mặt cầu } (S) \text{ thì (1) vô nghiệm, hay (1) có } \Delta' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{2} \\ m < \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) là:

A. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

B. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2+5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

Để Δ tiếp xúc mặt cầu (S) thì (1) có nghiệm kép, hay (1) có $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{2} \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2+5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

Để Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}.$$

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 (z-3)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 (z-3)^2 = \sqrt{10}$.
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 (z+3)^2 = 10$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 (z-3)^2 = 10$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là hình chiếu của $I(1; -2; 3)$ lên Oy , ta có: $I(0; -2; 0)$.

$\overline{IM} = (-1; 0; -3) \Rightarrow R = d(I, Oy) = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 (z-3)^2 = 10$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2; 3; -1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng

(d) có phương trình: $(d) \begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = t \\ z = -25 - 2t \end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$ là:

- A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 280$. B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 289$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$. D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng (d) đi qua $M(11; 0; -25)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -2)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Có: $IH = d(I, AB) = \frac{[\vec{u}, \overline{MI}]}{|\vec{u}|} = 15$ $R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17$.

Vậy phương trình mặt cầu: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 9 = 0$ tại điểm $H(a; b; c)$. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

- A. 2. B. -1. C. 1. D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{n_p} = (1; -2; 2) \text{ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng } OH \Rightarrow OH : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(t; -2t; 2t)$$

$$H \in (P) \Rightarrow t - 2 \cdot (-2t) + 2 \cdot 2t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 2; -2) \Rightarrow a + b + c = -1$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(1+2t; -t; t)$ là hình chiếu của I trên đường thẳng d .

Có $\overrightarrow{IH} = (2t; -t; t-2)$; vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

Vì H là hình chiếu vuông góc của I trên d nên $\overrightarrow{IH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow 2t \cdot 2 + (-t) \cdot (-1) + (t-2) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = IH = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R = 5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy . Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

A. $M(-1; -2; 1)$.

B. $N(1; 2; -1)$.

C. $P(-5; 2; -7)$.

D. $Q(5; -2; 7)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm I thuộc đường thẳng d nên có tọa độ dạng: $I(1+2t; -t; -2+t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I, Oy) = R \Leftrightarrow \sqrt{(1+2t)^2 + (-2+t)^2} = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5t^2 + 5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta có $I(5; -2; 0)$ (Loại).

Với $t = -2$ ta có $I(-3; 2; -4)$ (Thỏa mãn).

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm

$N(1;2;-1)$ thỏa mãn.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{3}$

B. $R = 2$

C. $R = 1$

D. $R = \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;2;1)$

$$d(I;(P)) = \frac{|3+2+1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R' = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{2}$

Ta có $H \in (S)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên $H \in (C) = (S) \cap (P)$

Bán kính của đường tròn (C) là $R = \sqrt{(R')^2 - d^2(I;(P))} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng

$d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.

Lời giải

Chọn B

$$(P) \cap Oz = A(0;0;3)$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ 2x-y-10=0 \\ y+2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow B(4;-2;7). \text{ Gọi } I \text{ là trung điểm của}$$

$$AB \Rightarrow I(2;-1;5) \Rightarrow IA = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$; $(Q): x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 1.$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6.$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}.$

D. $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 8.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I \in (d) \Rightarrow I(2t; 3+t; 2+t).$

$I \in (P) \Rightarrow (P): 2t - 2(3+t) + 2(2+t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 4; 3)$

(Q) tiếp xúc với (S) nên $R = d(I, (Q)) = \sqrt{\frac{2}{7}}.$

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}.$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $I(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}.$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}.$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; 1; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Ta có $\vec{MI} = (0; -1; 2)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (5; -2; -1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Có: $IH = d(I, AB) = \frac{[\vec{u}, \vec{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}.$

Xét tam giác IAB , có $IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với d .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1; 2; -3)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -1) \Rightarrow d(A, d) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{AI} \right] \right|}{|\vec{u}|} = 5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $M(4; 1; 6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M , tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Lập phương trình của mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

d đi qua $N(-5; 7; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; -2; 1)$; $\overrightarrow{MN} = (-9; 6; -6)$.

Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ M đến đường thẳng $d \Rightarrow MH = d(M, d) = 3$.

Bán kính mặt cầu (S) : $R^2 = MH^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = 18$.

$\Rightarrow$ PT mặt cầu (S) : $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $H(3; 0; 2)$

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P) , ta có:

$2(1+2t) - 2(2-2t) - (3-t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $H(3;0;2)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Tìm vectơ chỉ phương của d .

Trả lời:

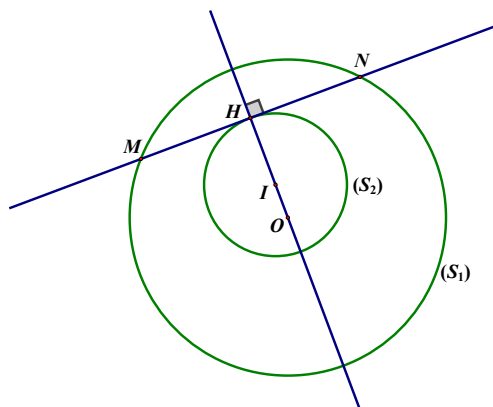
Lời giải

Đáp án: $\vec{u} = (1; 1; 0)$

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1 = 5$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Có $OI = 1 < R_1 - R_2$ nên (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1) .



Giả sử d tiếp xúc với (S_2) tại H và cắt mặt cầu (S_1) tại M, N . Gọi K là trung điểm MN .

Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \geq OK$.

Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1, IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \geq OH \geq OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI .

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ và vuông góc với $\vec{OI} = (0; 0; 1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = [\vec{OI}, \vec{u}] = (1; 1; 0)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ (m là tham số) và

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$AB = 8$. Tìm giá trị của m .

Trả lời:

Lời giải

Ta có: $\overline{IM} = (6; 0; 3) \Rightarrow [\overline{IM}, \vec{u}] = (-3; -6; 6) \Rightarrow IH = d(I, \Delta) = \frac{[\overline{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 3$.

Trả lời:

Lời giải

Viết lại phương trình của đường thẳng d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

$$\vec{n} = (0; 0; 1) \text{ cùng phương. Do đó tồn tại số thực } k \text{ để } \overrightarrow{IK} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = k.0 \\ -t = k.0 \\ -2-t = k.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}.$$

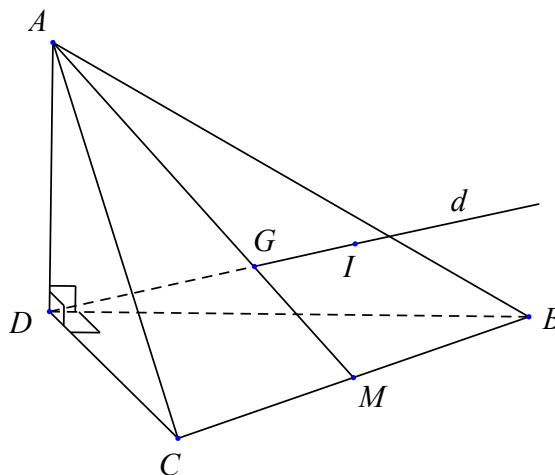
Vây mặt cầu cần tìm có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA , DB , DC đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $S = -1$



Gọi d là trục của ΔABC , ta có $(ABC): x + y + z + 2 = 0$.

Do ΔABC đều nên d đi qua trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 1)$, suy ra $d: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{2}{3} + t \end{cases}$.

Ta thấy $\Delta DAB = \Delta DBC = \Delta DCA$, suy ra $DA = DB = DC \Rightarrow D \in d$ nên giả sử $D\left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right); \overrightarrow{BD} = \left(-\frac{2}{3} + t; \frac{4}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right); \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; \frac{4}{3} + t\right)$

Có $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \Rightarrow D\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ t = \frac{2}{3} \Rightarrow D(0; 0; 0) \text{ (loại)} \end{cases}$.

Ta có $I \in d \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right)$, do tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm I nên

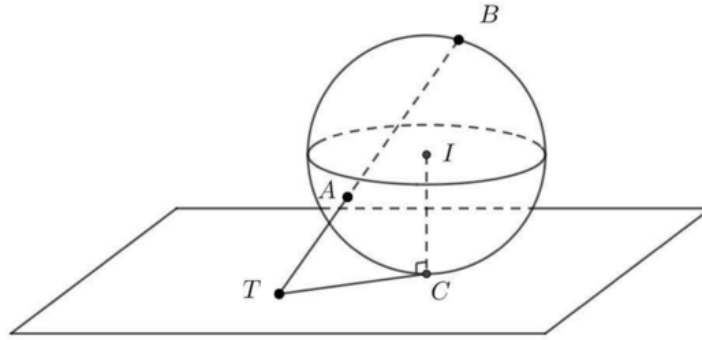
$IA = ID \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S = -1$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$, $A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r . Tính bán kính r của đường tròn đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 4 - 2t \end{cases}.$$

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t;t;4-2t)$. Do $T \in (P): 2x + y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-7}{3}$.

Khi đó

$$T\left(-7; \frac{-7}{3}; \frac{26}{3}\right); \overrightarrow{TA}\left(7; \frac{7}{3}; \frac{-14}{3}\right) \Rightarrow TA = \frac{7\sqrt{14}}{3}; \overrightarrow{TB}\left(10; \frac{10}{3}; \frac{-20}{3}\right) \Rightarrow TB = \frac{10\sqrt{14}}{3}.$$

Ta có $TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

Ta có $\frac{TA}{TB} = \frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{7}{10}; AB = \sqrt{14}$.

Giả sử AB cắt (P) tại T . Suy ra A nằm giữa B và T (vì A, B cùng phía so với (P)).

Khi đó ta có

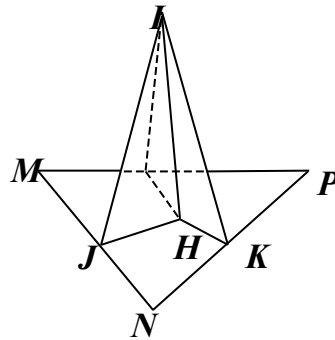
$$\begin{cases} TB - TA = \sqrt{14} \\ TA = \frac{7}{10}TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA = \frac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB = \frac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}$$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6; 0; 0)$, $N(0; 6; 0)$, $P(0; 0; 6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$ cắt nhau theo đường tròn (C) . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN , NP , PM ?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Vô số.



Nếu điểm $A(x; y; z)$ thuộc (C) thì

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y - z = 0.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) chứa đường tròn (C) là $3x - 2y - z = 0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x + y + z - 6 = 0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thỏa bài toán, H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP) , J , K , L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MN , NP , PM . Ta có $IJ = IK = IL \Rightarrow HJ = HK = HL$.

Suy ra I thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Hình chóp $O.MNP$ là hình chóp đều nên đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) cũng chính là đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Phương trình đường thẳng d là $x = y = z$.

Dễ thấy $d \subset (\alpha)$ suy ra mọi điểm thuộc d đều là tâm của một mặt cầu thỏa bài toán. Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN , NP , PM .

Câu 24. Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu

(S_1) , (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{7}{9}\pi$

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 5$. Mặt cầu (S) có tâm $E(-2;0;2)$ bán kính $R_2 = 1$.

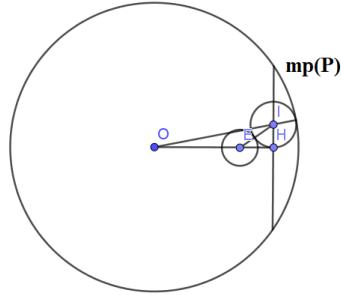
Ta có $d(O, (P)) = \frac{6}{\sqrt{2}} < R_1$ và $d(E, (P)) = \sqrt{2} > R_2$, $OE = 2\sqrt{2}$, $OE + R_2 < R_1$ nên mặt cầu (S_2) nằm

trong mặt cầu (S_1) . Như vậy mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với cả (S_1) và (S_2) thì (S) tiếp xúc trong

mặt cầu (S_1) và tiếp xúc ngoài với (S_2) . Gọi R là bán kính của (S) khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} OI + R = R_1 \\ EI - R = R_2 \end{cases} \Rightarrow OI + EI = R_1 + R_2 \Rightarrow OI + EI = 6.$$

Hình vẽ minh họa



Nhận xét: $\overrightarrow{OE} = (-2;0;2)$ nên OE vuông góc với $(P): x - z + 6 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P) , đặt $IH = x$, điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$OI + EI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + HI^2} + \sqrt{EH^2 + HI^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{18 + x^2} + \sqrt{2 + x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm H bán kính $r = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường

tròn là: $S = \pi r^2 = \frac{7\pi}{9}$.

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

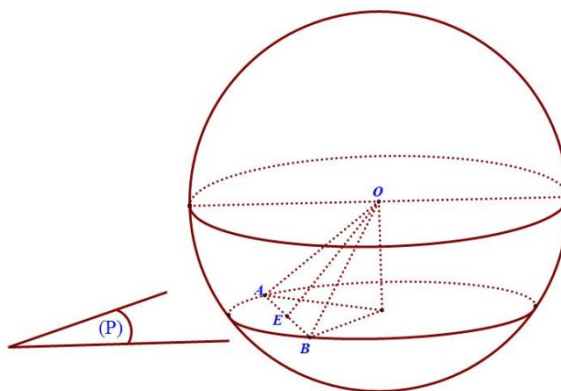
B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=2$. Tam giác OAB là tam giác đều có cạnh bằng 2. Gọi

M là trung điểm AB ta có $OM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, mặt khác $\overrightarrow{OE}(1;1;1) \Rightarrow OE = \sqrt{3}$. Vậy điểm M trùng

điểm E . Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ ta có: $\vec{u} \perp \overrightarrow{OE}$ và $\vec{u} \perp \vec{n}$ (với $\vec{n}(1;-3;5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) vì $\Delta \subset (P)$).

$[\vec{n}, \overrightarrow{OE}] = (-8; 4; 4)$, chọn $\vec{u} = -\frac{1}{4}[\vec{n}, \overrightarrow{OE}] = (2; -1; -1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua E , có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; -1; -1)$ có phương trình là:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 26. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Có $A(1;1;1), B(2;2;1) \Rightarrow$ Phương trình $AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P) \Rightarrow K(-1; -1; 1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H .

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2 = \overline{KA} \cdot \overline{KB} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 30.

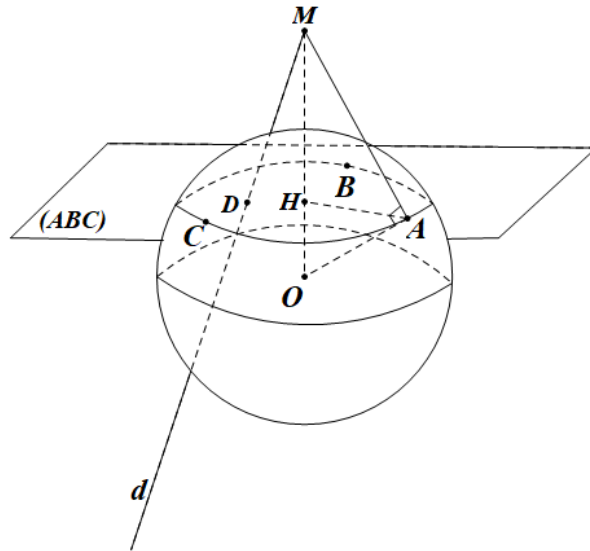
B. 26.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn B



* Ta có: $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 4.$

* Mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow$ tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 3$.

* MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO \perp (ABC)$.

$\Rightarrow (ABC)$ đi qua $D(1; 1; 2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overline{OM}(x_0; y_0; z_0)$ có phương trình dạng:

$x_0(x-1) + y_0(y-1) + z_0(z-2) = 0.$

* MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A \Rightarrow \Delta MOA$ vuông tại $A \Rightarrow OH \cdot OM = OA^2 = R^2 = 9$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) ($OH + OM = HM$), ta có:

$$d(O; (ABC)) = OH = \frac{|-x_0 - y_0 - 2z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = \frac{|x_0 + y_0 + z_0 + z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = \frac{|z_0 + 4|}{OM} \Rightarrow OH \cdot OM = |z_0 + 4|.$$

$$\Rightarrow |z_0 + 4| = 9 \Leftrightarrow z_0 = 5 \vee z_0 = -13.$$

* Với $z_0 = 5 \Rightarrow M(0; -1; 5) \Rightarrow T = 26$ nhận do: $OM = \sqrt{26}; OH = \frac{|z_0 + 4|}{OM} = \frac{9}{\sqrt{26}};$

$$pt(ABC): -y + 5z - 9 = 0 \Rightarrow MH = d(M; (ABC)) = \frac{17}{\sqrt{26}}.$$

$$\Rightarrow OH + HM = OM.$$

* Với $z_0 = -13 \Rightarrow M(6; 11; -13) \Rightarrow$ loại do: $OM = \sqrt{326}; OH = \frac{9}{\sqrt{326}};$

$$(ABC): 6x + 11y - 13z + 9 = 0 \Rightarrow MH = d(M; (ABC)) = \frac{335}{\sqrt{326}}.$$

$$\Rightarrow OH + HM \neq OM.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. **C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.** D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; -1)$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d , ta có $K(t; 2+t; -t) \Rightarrow \vec{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$.

Vì $IK \perp d$ nên $\vec{u}_d \cdot \vec{IK} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t-(-t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \vec{IK} = (-1; 2; 1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng IK là
$$\begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2t' \\ z = -1+t' \end{cases}$$

Khi đó, trung điểm H của TT' nằm trên IK nên $H(1-t'; 2t'; -1+t') \Rightarrow \vec{IH} = (-t'; 2t'; t')$. Mặt khác, ta

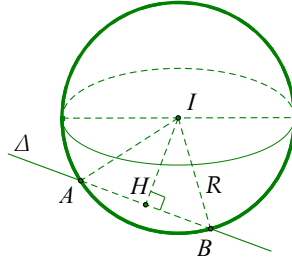
có: $\vec{IH} \cdot \vec{IK} = IT^2 \Leftrightarrow \vec{IH} \cdot \vec{IK} = 1 \Leftrightarrow t' + 4t' + t' = 1 \Leftrightarrow t' = \frac{1}{6} \Rightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D



$(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R = 2$.

$(P): x - 3y + 5z - 3 = 0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của $(P): \vec{n}_P = (1; -3; 5)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = 1$.

Xét $\triangle IAH$ vuông tại $H \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\overline{IE} = (1;1;1) \Rightarrow IE = \sqrt{3} = IH \Rightarrow H \equiv E \Rightarrow IE \perp \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;1;1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

Vectơ chỉ phương của $\Delta: \vec{n}_\Delta = [\vec{n}_P; \overline{IE}] = (-8; 4; 4)$.

$\Rightarrow$ vectơ $\vec{u} = (2; -1; -1)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ .

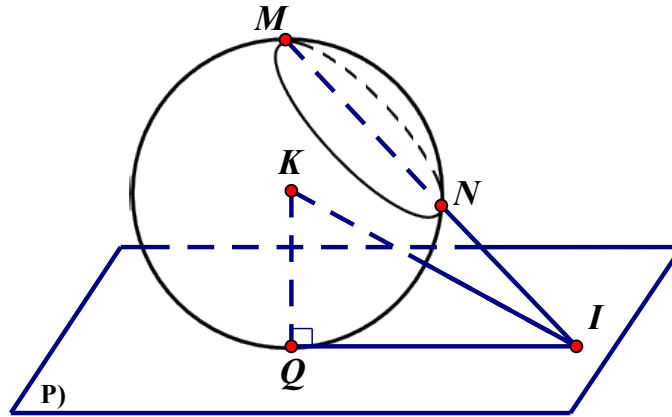
Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q . Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

- A. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $R = 6$. C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$. D. $R = 4$.

Lời giải

Chọn B



* Đường thẳng MN có phương trình là: $MN: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

* Gọi $I = MN \cap (P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

$$1+t+1+t-1-t-3=0 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow I(3;3;3) \Rightarrow IM = 2\sqrt{3}, IN = 6\sqrt{3}.$$

* Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$$IQ^2 = IM \cdot IN = KI^2 - R^2 \Rightarrow IQ^2 = IM \cdot IN = 36 \Leftrightarrow IQ = 6$$

Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 6$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

- I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.
- II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .
- III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 0)$, bán kính $R = 3$.

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } d: \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}.$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9t^2 + 2t - 6 = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 0 + 3|}{3} = \frac{11}{3} > R \Rightarrow (P) \text{ và } (S) \text{ không có điểm chung.}$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{3}{2}. \quad d \text{ cắt } (P) \text{ tại một điểm.}$$

Vậy có 3 phát biểu đúng.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3^2$, mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ và điểm $N(1; 0; -4)$ thuộc (P) . Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 4$. Gọi $\vec{u}(1; b; c)$, $(c > 0)$ là một vectơ chỉ phương của Δ , tổng $b + c$ bằng

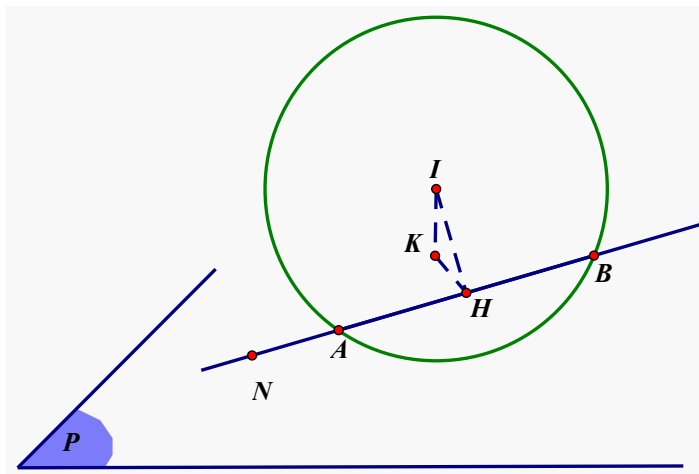
A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. 45.

Lời giải



Chọn D

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ bán kính $R = 3$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

Suy ra H là trung điểm của đoạn AB nên $AH = 2 \Rightarrow d(I, \Delta) = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5}$ và

$$IK = d(I, (P)) = \frac{|1 - 2 + 1 + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } \left. \begin{matrix} IK \perp (P) \\ \Delta \subset (P) \end{matrix} \right\} \Rightarrow IK \perp \Delta \text{ mà } IH \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp KH$$

hay $KH = d(K, \Delta)$ và $KH = \sqrt{IH^2 - IK^2} = \sqrt{2}$.

Do $IK \perp (P)$ nên phương trình tham số đường thẳng IK :
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow K(1+t; 2-t; 1+t).$$

Mà $K \in (P) \Rightarrow 1+t-2+t+1+t+3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow K(0; 3; 0)$

Từ đây ta có $KH = d(K, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{KN}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(4b-3c)^2 + (-c-4)^2 + (b+3)^2}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = \sqrt{2} \quad (*)$.

Mặt khác ta có $\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 1-b+c=0 \Leftrightarrow b=c+1$.

Thay vào (*) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{(c+4)^2 + (-c-4)^2 + (c+4)^3} &= \sqrt{2} \sqrt{1+(c+1)^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow 3c^2 - 24c + 48 &= 4c^2 + 4c + 4 \\ \Leftrightarrow c^2 - 20c - 44 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = 22(N) \\ c = -2(L) \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $b = 23 \Rightarrow b+c = 45$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 14$ và mặt phẳng $(\alpha): x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) . Vector nào sau đây là vector chỉ phương của Δ ?

- A. $\vec{u} = (4; -2; 1)$. B. $\vec{v} = (2; 0; -1)$. C. $\vec{m} = (-3; 1; 0)$. D. $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

Ta có $d(I, (\alpha)) = \sqrt{14} = R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với (S) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(\alpha) \Rightarrow H(1; 0; 2)$

Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A(a; 0; 0)$ và $\overrightarrow{AH} = (a-1; 0; -2)$

Đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) nên $\overrightarrow{AH} \perp \vec{n}_\alpha$. Tức là

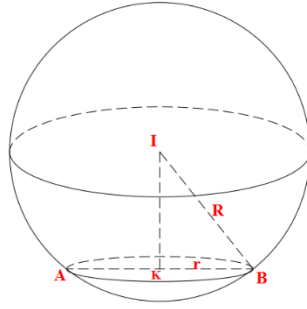
$a-1+0-4=0 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (4; 0; -2)$ cùng phương với $\vec{v} = (2; 0; -1)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) .

Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3; -2; 1)$, $r = 10$. B. $K(-1; 2; 3)$, $r = 8$. C. $K(1; -2; 3)$, $r = 8$. D. $K(1; 2; 3)$, $r = 6$.

Lời giải



• Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$; $R = 10$.

• Khoảng cách từ I đến (P) là $IK = d(I; (P)) = \frac{|6 + 4 - 1 + 9|}{3} = 6$.

• Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ khi đó Tọa độ

tâm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-1; 2; 3)$.

• Bán kính: $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.

A. $OA = \sqrt{11}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm I đến mp(P) là: $d(I; (P)) = \frac{|5 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6$.

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B , do đó ta có:

$$IA = \sqrt{IB^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = 6 = d(I; (P)) \Rightarrow A \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (P)$$

Đường thẳng IA đi qua $I(5; -3; 5)$ có VTCP $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; -2; 2)$ có phương trình $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

Có $A = IA \cap (P) \Rightarrow 5 + t - 2(-3 - 2t) + 2(5 + 2t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow A(3; 1; 1) \Rightarrow OA = \sqrt{11}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}. \text{ Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho } MA, MB, MC \text{ là tiếp tuyến}$$

của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 30

B. 26

C. 20

D. 21

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính R . Gọi $M(1 + t_0; 1 + 2t_0; 2 - 3t_0) \in d$.

Giả sử $T(x; y; z) \in (S)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu (S) . Khi đó

$$\begin{aligned} OT^2 + MT^2 &= OM^2 \\ \Leftrightarrow 9 + [x - (1 + t_0)]^2 + [y - (1 + 2t_0)]^2 + [z - (2 - 3t_0)]^2 &= (1 + t_0)^2 + (1 + 2t_0)^2 + (2 - 3t_0)^2 \\ \Leftrightarrow (1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $(1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0$

Do $D(1; 1; 2) \in (ABC)$ nên $1 + t_0 + 1 + 2t_0 + 2(2 - 3t_0) - 9 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1 \Rightarrow M(0; -1; 5)$.

Vậy $T = 0^2 + (-1)^2 + 5^2 = 26$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 0; 3), B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Gọi (P) mặt phẳng trung trực của AB , khi đó phương trình của (P) là: $x + z - 1 = 0$.

Ta có $\vec{n_P} = (1; 0; 1), \vec{n_\alpha} = (2; -1; 2)$ nên $[\vec{n_P}, \vec{n_\alpha}] = (1; 0; -1)$.

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α) . Chọn $\vec{u_d} = (1; 0; -1)$

$$\text{và điểm } M(1; 10; 0) \in d \text{ nên phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 \\ z = -t \end{cases}.$$

Do tam giác ABC đều nên $CA = CB$ hay C thuộc mặt phẳng trung trực của AB mà $C \in (\alpha)$ nên

$C \in (P) \cap (\alpha) = d$ suy ra tọa độ C có dạng $C(1 + t; 10; -t)$.

Do $\triangle ABC$ đều nên $AC = AB$, thay tọa độ các điểm ta có:

$$\sqrt{(1 + t - 0)^2 + (10 - 0)^2 + (-t - 3)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 3)^2} \Leftrightarrow t^2 + 4t + 51 = 0(*)$$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. 39.

B. $12\sqrt{3}$.

C. 18.

D. $28\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

+) Đặt $M(a;0;0)$ và $N(0;0;b)$.

Nhận xét: (S) tiếp xúc (Oxz) mà $MN \subset (Oxz)$ tiếp xúc (S)

$\Rightarrow MN$ tiếp xúc (S) tại tiếp điểm của (S) và $(Oxz) \Rightarrow A(1;0;9)$.

$$+) \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a-1; 0; -9) \\ \overrightarrow{AN} = (-1; 0; b-9) \end{cases} \Rightarrow \frac{a-1}{-1} = \frac{-9}{b-9} \Rightarrow (a-1)(b-9) = 9.$$

+) Khi đó $OIMN$ có $\triangle OMN$ vuông tại O , $(IMN) \perp (OMN)$ (do $IA \subset (IMN)$, $IA \perp (OMN)$)

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$ bằng $\frac{13}{2}$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot MN = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{13}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 39 \quad (1).$$

$$\text{Mà } IM = \sqrt{(a-1)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 90}.$$

$$IN = \sqrt{1^2 + 3^2 + (b-9)^2} = \sqrt{10 + \frac{81}{(a-1)^2}}.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } \left[(a-1)^2 + 90 \right] \left[10 + \frac{81}{(a-1)^2} \right] = 1521 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 27.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM = \sqrt{(a-1)^2 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \\ AN = \sqrt{1 + (b-9)^2} = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases} \Rightarrow AM \cdot AN = 12\sqrt{3}.$$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4;1;2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M; N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox; Oy$ sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. $6\sqrt{2}$.

B. 14.

C. 8.

D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1:

Ta có : $d(I, (Oxy)) = 2$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(4;1;0)$ do $MN \subset (Oxy)$

Gọi $M(m;0;0); N(0;n;0), m, n > 0$

$$\text{Do } A \in MN \text{ nên } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AN} \Rightarrow \begin{cases} m-4 = -4k \\ -1 = k(n-1) \end{cases} \Rightarrow (m-4)(n-1) = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4n}{n-1}, n-1 \neq 0.$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn } OI : 4x + y + 2z - \frac{21}{2} = 0$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn } OM : x = \frac{m}{2}$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn } ON : y = \frac{n}{2}$$

$$\text{Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } OIMN \text{ là } J\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{-n^2 + 6n - 21}{4n - 4}\right)$$

$$\text{Theo giả thuyết cầu ngoại tiếp tứ diện } OIMN \text{ có bán kính bằng } \frac{7}{2} \text{ nên } OJ = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow OJ^2 = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{4} + \frac{(n^2 - 6n + 21)^2}{16(n-1)^2} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow n^4 - 4n^3 - 10n^2 + 28n + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vì } n > 0 \text{ nên chọn } n = 1 + 2\sqrt{2}, \text{ suy ra } m = 4 + \sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } AM \cdot AN = 6\sqrt{2}.$$

Cách 2:

Dễ thấy mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(1;4;0)$ do $MN \subset (Oxy)$

Gọi $M(a;0;0); N(0;b;0).$

$$\text{Do } A \in MN \text{ nên } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AN} \Rightarrow \begin{cases} a-4 = -4k \\ -1 = k(b-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1.$$

Gọi J là trung điểm $MN \Rightarrow J\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$ và $I(4;1;2)$ thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (Oxy) tại

$$\text{điểm } J. \text{ Phương trình } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là điểm $K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; t\right)$.

$$\text{Theo giả thiết ta có hệ: } \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1 \\ OK = \frac{7}{2} \\ IK = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \\ \left(\frac{a}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (t - 2)^2 = \frac{49}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{b-1} \\ 4a + b + 4t - 21 = 0 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{b-1} \\ t = \frac{b^2 - 6b + 21}{4(b-1)} \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4} + \frac{4b^2}{(b-1)^2} + \frac{(b^2 - 6b + 21)^2}{16(b-1)^2} = \frac{49}{4} \Leftrightarrow 4b^2 + 64\left(1 + \frac{1}{b-1}\right)^2 + \left(b - 5 + \frac{16}{b-1}\right)^2 = 196$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 64 + \frac{128}{b-1} + \frac{64}{(b-1)^2} + (b-5)^2 + 32(b-5) \cdot \frac{1}{b-1} + \frac{256}{(b-1)^2} = 196$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 10b + 25 + \frac{320}{(b-1)^2} + 32(b-5+4) \cdot \frac{1}{b-1} = 132 \Leftrightarrow (b-1)^2 + \frac{64}{(b-1)^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow \left[(b-1)^2 - 8\right]^2 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{2} \\ b = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Với $b = 1 - 2\sqrt{2}$ ta được $a = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Với $b = 1 + 2\sqrt{2}$ ta được $a = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và

đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c), (a > 0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M

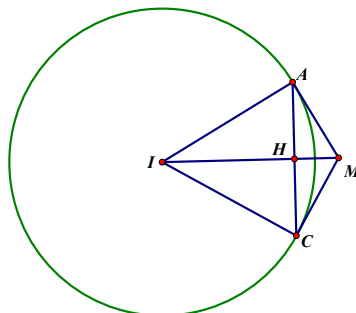
kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$,

$\widehat{BMC} = 60^\circ, \widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 13} = 3\sqrt{3}$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) .

Đặt $MA = MB = MC = x$ khi đó $AB = x; BC = x\sqrt{2}; CA = x\sqrt{3}$ do đó tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\widehat{AMC} = 120^\circ$ nên tam giác AIC đều do đó $x\sqrt{3} = R \Leftrightarrow x = 3$ suy ra $IM = 2AM = 2x = 6$.

Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t; -2+t; 1+t), (t > 1)$ mà $IM = 6$ nên $(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$$

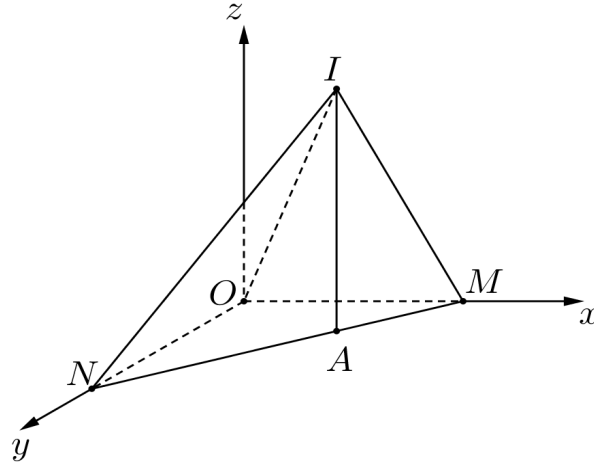
Mà $a > 0$ nên $t = \frac{4}{3}$ suy ra $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;4;2)$, bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , tính giá trị $AM \cdot AN$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$



Gọi $M(a; 0; 0) \in Ox$, $N(0; b; 0) \in Oy$.

Ta có $d(I; (Oxy)) = 2 = R$ nên (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(1; 4; 0)$ và MN cũng đi qua A .

Lại có $\overrightarrow{AM} = (a-1; -4; 0)$, $\overrightarrow{AN} = (-1; b-4; 0)$ và 3 điểm A, M, N thẳng hàng nên ta được:

$$\frac{a-1}{-1} = \frac{-4}{b-4} \Leftrightarrow (a-1)(b-4) = 4 \quad (1).$$

Tứ diện $OIMN$ có $IA \perp (OMN)$ và $\triangle OMN$ vuông tại O nên nếu gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ thì $J \in (IMN)$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.

Ta có $S_{\triangle IMN} = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4r}$ (với $r = \frac{7}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$).

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} IA \cdot MN = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{7}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 7 IA \Leftrightarrow IM \cdot IN = 14$$

$$\Leftrightarrow [(a-1)^2 + 20][(b-4)^2 + 5] = 196 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} m = a-1 \\ n = b-4 \end{cases}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} mn = 4 \\ (m^2 + 20)(n^2 + 5) = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{4}{m} \\ (m^2 + 20)\left(\frac{16}{m^2} + 5\right) = 196 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Từ (4) ta được: } (m^2 + 20)(16 + 5m^2) = 196m^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^4 - 80m^2 + 320 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{2} \\ n = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 1 + 2\sqrt{2}, b = 4 + \sqrt{2} \\ a = 1 - 2\sqrt{2}, b = 4 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy $AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , Tính giá trị $AM \cdot AN$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $AM \cdot AN = 12\sqrt{3}$

$I(9;3;1) \Rightarrow d(I(Oxz)) = 3 = R \Rightarrow (S)$ tiếp xúc với (Oxz) .

Gọi $M(a;0;0) \in Ox$

$N(0;0;b) \in Oz$

MN tiếp xúc với (S) tại A nên A là hình chiếu của I lên (Oxz) .

Suy ra $A(9;0;1)$.

Gọi K là trung điểm $MN \Rightarrow K\left(\frac{a}{2};0;\frac{b}{2}\right)$.

Gọi H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN \Rightarrow OH = \frac{13}{2} \Rightarrow HK \perp MN$.

Gọi T là trung điểm $OM \Rightarrow \begin{cases} OM \perp KT \\ OM \perp HT \end{cases} \Rightarrow OM \perp (KHT) \Rightarrow OM \perp HK \Rightarrow HK \perp (OMN)$

Mà $IA \perp (OMN) \Rightarrow HK \parallel IA$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (0;3;0)$

$\overrightarrow{KH} = \left(x_H - \frac{a}{2}; y_H - 0; z_H - \frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AI}$ cùng phương $\overrightarrow{KH}$ nên $\begin{cases} x_H = \frac{a}{2} \\ y_H = c \ (c \neq 0) \\ z_H = \frac{b}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow H\left(\frac{a}{2}; c; \frac{b}{2}\right)$

$OH = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{169}{4} \quad (1)$

$HI = OH = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2} - 9\right)^2 + (c - 3)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 = \frac{169}{4} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2}{4} = \left(\frac{a}{2} - 9\right)^2 + (c - 3)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2$

$$\Rightarrow 9a + b + 6c = 91 \quad (3)$$

$$\overrightarrow{AM} = (a - 9; 0; -1)$$

$$\overrightarrow{AN} = (-9; 0; b - 1)$$

$$A, M, N \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{a-9}{-9} = \frac{-1}{b-1}$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow ab - a - 9b + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow ab - a - 9b = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-1) = ab$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{9b}{b-1}$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow 9 \cdot \frac{9b}{b-1} + b + 6c = 91$$

$$\frac{81b}{b-1} + b + 6c = 91$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + 80b}{b-1} + 6c = 91 \Leftrightarrow 6c = 91 - \frac{b^2 + 80b}{b-1} = \frac{-b^2 + 11b - 91}{b-1}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-b^2 + 11b - 91}{6(b-1)}$$

$$\text{Ta có } a^2 + 4c^2 + b^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9b}{b-1}\right)^2 + 4\left(\frac{-b^2 + 11b - 91}{6(b-1)}\right)^2 + b^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow 9.81b^2 + (b^4 + 121b^2 + 8281 - 22b^3 + 182b^2 - 2002b) + 9b^2(b-1)^2 = 169.9.(b-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 729b^2 + b^4 + 121b^2 + 8281 - 22b^3 + 182b^2 - 2002b + 9b^4 - 18b^3 + 9b^2 = 1521b^2 - 3042b + 1521$$

$$\Leftrightarrow 10b^4 - 40b^3 - 480b^2 + 1040b + 6760 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{9(1+3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = 9 + \sqrt{3} \\ b = 1 - 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{9(1-3\sqrt{3})}{-3\sqrt{3}} = 9 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$+ \text{Trường hợp 1: } a = 9 + \sqrt{3}; b = 1 + 3\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (\sqrt{3}; 0; -1) \Rightarrow AM = 2.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = (-9; 0; 3\sqrt{3}) \Rightarrow AN = \sqrt{108}.$$

$$AM \cdot AN = 2 \cdot \sqrt{108} = 12\sqrt{3}.$$

$$+ \text{Trường hợp 2: } a = 9 - \sqrt{3}; b = 1 - 3\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-\sqrt{3}; 0; -1) \Rightarrow AM = 2.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = (-9; 0; -3\sqrt{3}) \Rightarrow AN = \sqrt{108}.$$

$$AM \cdot AN = 2 \cdot \sqrt{108} = 12\sqrt{3}.$$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu: $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Mặt cầu (S_m) có tâm $I\left(-\frac{m+2}{2}; -m; m\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{9m^2 + 8m + 16}}{2}$.

Với m_1, m_2 tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (m_1 + 2)x + 2m_1y - 2m_1z - m_1 - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + (m_2 + 2)x + 2m_2y - 2m_2z - m_2 - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được:

$$(m_1 - m_2)x + 2(m_1 - m_2)y - 2(m_1 - m_2)z - (m_1 - m_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1 - m_2) \cdot (x + 2y - 2z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad (3).$$

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Họ mặt cầu (S_m) có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) cố định có phương trình:

$$x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

$$\text{Mặt khác, đặt } d = d[I, (P)] = \frac{\left| -\frac{m+2}{2} - 2m - 2m - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9m - 4|}{6}.$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - d^2 = \frac{9m^2 + 8m + 16}{4} - \frac{(-9m - 4)^2}{36} = \frac{32}{9} \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, điểm

$M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt

đường thẳng Δ tại A , cắt mặt cầu tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Lập

phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2x - 4y - 4z - 43 = 0$

Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A suy ra tọa độ $A(3+a; -1-a; -2+a)$.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = \pm \overrightarrow{AB}$$

Trường hợp 1:

$$3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-a) = x-3-a \\ 3(3+a) = y+1+a \\ 3(1-a) = z+2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-2a \\ y = 8+2a \\ z = 1-2a \end{cases} \text{ suy ra } B(-3-2a; 8+2a; 1-2a)$$

Do $B \in (S)$ nên

$$(-3-2a)^2 + (8+2a)^2 + (1-2a)^2 - 4(-3-2a) + 10(8+2a) + 14(1-2a) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 + 40a + 244 = 0, \text{ phương trình vô nghiệm}$$

Trường hợp 2:

$$3\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-a) = -(x-3-a) \\ 3(3+a) = -(y+1+a) \\ 3(1-a) = -(z+2-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9+4a \\ y = -10-4a \\ z = -5+4a \end{cases}$$

Suy ra $B(9+4a; -10-4a; -5+4a)$

Do $B \in (S)$ nên

$$(9+4a)^2 + (-10-4a)^2 + (-5+4a)^2 - 4(9+4a) + 10(-10-4a) + 14(-5+4a) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 48a^2 + 112a + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Điểm B có hoành độ là số nguyên nên $B(5; -6; -9); A(2; 0; -3)$.

Mặt phẳng trung trực đoạn AB đi qua trung điểm $I\left(\frac{7}{2}; -3; -6\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến

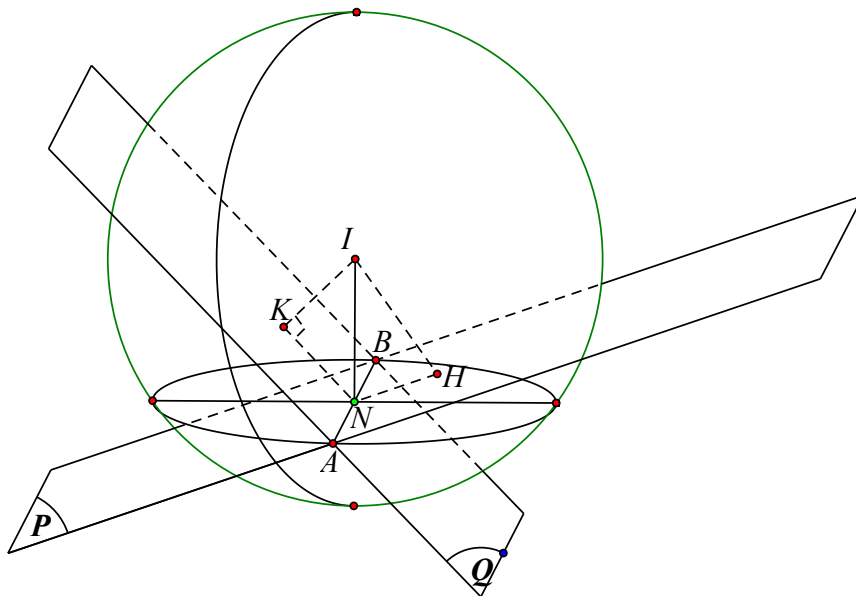
$$\vec{n} = (-1; 2; 2) \text{ nên có phương trình } \left(x - \frac{7}{2}\right) - 2(y+3) - 2(z+6) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 4z - 43 = 0$$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, điểm $M(7; 1; 3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N . Tiếp điểm N đi động trên đường tròn (T) có tâm $J(a, b, c)$. Gọi $k = 2a - 5b + 10c$, tính giá trị của k .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $k = 50$



Giả sử đường thẳng d_m cắt mặt cầu tại hai điểm A, B .

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -2; 1)$, bán kính $R = 4$.

Đường thẳng $M(x; y) \in d_m$ thỏa $\begin{cases} x + (1 - 2m)y + 4mz - 4 = 0 \\ 2x + my - (2m + 1)z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + y - 2z - 20 = 0$ nên các giao điểm

của (S) và d_m thuộc đường tròn giao tuyến giữa (S) và $(P): 5x + y - 2z - 20 = 0$.

$$d(I, (P)) = \frac{14}{\sqrt{30}} \text{ nên } r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{4^2 - \frac{14^2}{30}} = \sqrt{\frac{142}{15}}.$$

CHỦ ĐỀ 5

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

DẠNG 1

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = \left| \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \right| \left| \overrightarrow{MI} \right|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{MI} \right|_{\min}$

Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$

+ Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacôpxki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_n})^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI} (\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \\ \Rightarrow T &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \end{aligned}$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$.

+ Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bu-nhia-cốp-xki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có: $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

- A.** $P_{\min} = 20$. **B.** $P_{\min} = 5$. **C.** $P_{\min} = 25$. **D.** $P_{\min} = 27$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

- A. $M(0;1;-4)$. B. $M(2;1;0)$. C. $M(0;1;-2)$. **D. $M(0;1;4)$.**

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

- A. $T = 10$.** B. $T = 25$. C. $T = 13$. D. $T = 17$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

- A. $P = 0$.** B. $P = 2$. C. $P = 6$. D. $P = -2$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- A. 2. B. 3. **C. 4.** D. -4.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a + b + c$.

- A. 8.** B. 10. C. -10. D. -8.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$?

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{121}{54}$ C. 24 **D. $\frac{91}{54}$**

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

- A. 102.** B. 105. C. 30. D. 35.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. 2.

D. -1.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$.

C. $M(0;0;5)$.

D. $M(3;-4;0)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

A. 54.

B. 282.

C. 256.

D. 328.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

A. 11.

B. 9.

C. 15.

D. 14.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$.

B. $N(-2;0;1)$.

C. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $N(-1;2;1)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M \in (\alpha): x + 2y - 3z - 7 = 0$ sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13}; \frac{58}{13}; \frac{5}{13}\right)$.

B. $(4;3;1)$.

C. $(1;3;4)$.

D. $\left(\frac{37}{3}; -\frac{56}{3}; \frac{68}{3}\right)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

A. $T = 3$.

B. $T = -3$.

C. $T = 1$.

D. $T = -1$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

A. $P = 23$.

B. $P = 31$.

C. $P = 11$.

D. $P = 13$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 34$. Cho biết $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Tính tích số $x_0 y_0 z_0$.

A. 16.

B. 18.

C. 14.

D. 12.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Trả lời:

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3)$, $B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-1;0)$, $C(-4;0;-2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 2 = 0$.

Trả lời:

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $a + b$.

Trả lời:

Câu 29. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời:

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2)$, $B(1;1;0)$, $C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 5 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 2 = 0$ sao cho $3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(-1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

Trả lời:

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 2)$, $B(-2; 2; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$.

Trả lời:

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a; b; c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a + b + c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (MNP) .

Trả lời:

DẠNG 2

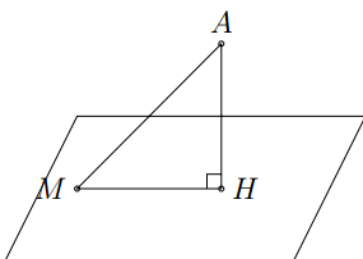
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.
- + Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
- + Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M ($M \equiv H$)

- + Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \vec{u}_{AH} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$.
- + Ta có $M \equiv H = AH \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpski

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

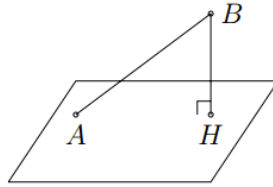
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó $d(B, (P)) = BH \leq BA$
- + Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \vec{n}_p = \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + Gọi $\vec{n}_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- + Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là: $a(x - x_A) + (y - y_A) + (z - z_A) = 0$
- + Khi đó $\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- + Ta có: $d(B, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.
- + Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

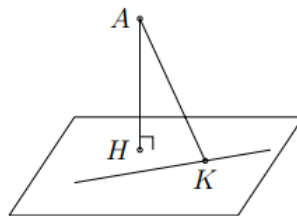
Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_p$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_p = (1; b; c)$.

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ .
- + Khi đó $d(A, (P)) = AH \leq AK$
- + Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bước 2:

- + Tìm tọa độ điểm K .
- + Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } K \\ \vec{n}_p = \overrightarrow{AK} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + Gọi $\vec{n}_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- + Khi đó $\vec{n}_p \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- + Ta có: $d(A, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.
- + Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_p = (1; b; c)$.

Bài toán 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Phương pháp giải

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta xét hai trường hợp sau:

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) .

Khi đó $AM + BM \geq AB$

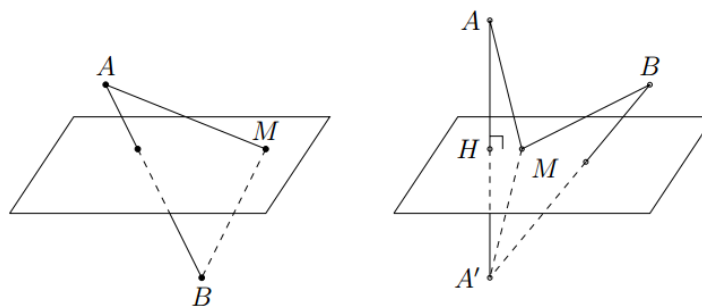
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

Gọi A' đối xứng với A qua (P) .

Khi đó $AM + BM = A'M + BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Ta xét hai trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

+ Khi đó $|AM - BM| \leq AB$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) .

+ Gọi A' đối xứng với A qua (P) ,

$$+ \text{ Khi đó } |AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và có $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì $P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{ID}$ và E là trung điểm BD .

$$\text{Khi đó: } P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) .

Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I .

$$\text{Khi đó } P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Phương pháp giải

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho.

$$\text{Khi đó: } \sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A .

$$\text{Khi đó } P = md(G_3, (P)) + kd(G_2, (P))$$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 5** trên.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

A. $2y + z = 0$. B. $2y - z = 0$. C. $y + z = 0$. D. $y - z = 0$.

Câu 38. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 7; 2)$ và cách $M(-2; 4; -1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P): 3x + 3y + 3z - 10 = 0$.

B. $(P): x + y + z - 1 = 0$.

C. $(P): x + y + z - 10 = 0$.

D. $(P): x + y + z + 10 = 0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$.

B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$.

C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$.

D. $3x + z + 2 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

A. -1 .

B. 3 .

C. 6 .

D. 2 .

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x + y - z - 2 = 0$.

B. $x + y - z = 0$.

C. $x + y - z + 1 = 0$.

D. $-x + 2y + z + 5 = 0$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) .

A. $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

B. $\vec{n} = (1; 0; -2)$.

C. $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

D. $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a + b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

A. $a + b = -\frac{1}{2}$.

B. $a + b = 2$.

C. $a + b = 0$.

D. $a + b = \frac{3}{2}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T = a + b + c$ bằng

A. 3 .

B. -3 .

C. -2 .

D. -5 .

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n} = (1;0;2)$. B. $\vec{n} = (1;0;-2)$. C. $\vec{n} = (1;1;1)$. D. $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B,(P))} = 2d_{(A,(P))}$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB . Tính $a+b+c$

- A. 8 B. 6 C. 12 D. 4

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1), B(2;3;2), C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. B. $M(0;3;0)$. C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. $\frac{81}{2}$. B. $\frac{243}{2}$. C. $\frac{81}{6}$. D. 243.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) .

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{27}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Lập phương trình của (P) .

Trả lời:

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

Trả lời:

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) .

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{3}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trả lời:

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tính m .

Trả lời:

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mp $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$, cắt mp (P) tại B . Điểm M nằm trong mp (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB .

Trả lời:

Câu 58. Cho $A(4;5;6); B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA - MB|$.

Trả lời:

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1), B(3;2;1), C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

Trả lời:

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$, $(Q): -x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

Trả lời:

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm

$A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Trả lời:

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, tính giá trị của $T=m+n+p$.

Trả lời:

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax+by+cz-3=0$ (a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2)$, $N(-1;1;3)$ và không đi qua $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của $P=a-2b+3c+12$.

Trả lời:

Câu 64. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $T=a+2b+3c$.

Trả lời:

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong

đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) .

Trả lời:

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời:

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4;1); B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)(a > 2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 0 \end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của

O trên d . Điểm M di động trên tia Oz , điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN = OM + AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA . Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, lập phương trình của mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng d .

Trả lời:

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P) , điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

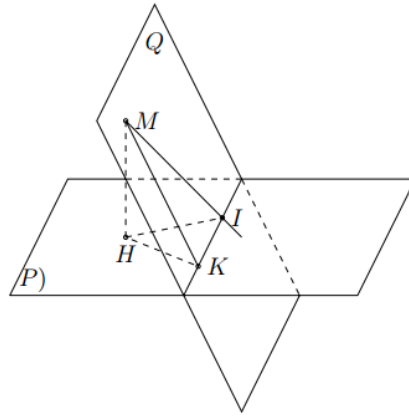
Trả lời:

DẠNG 3**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC**

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Lập phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó $\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận $[[\vec{n}_P, \vec{u}_d], \vec{u}_d]$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n}_Q = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .
- Khi đó $\vec{n}_Q \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có: $\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t)$

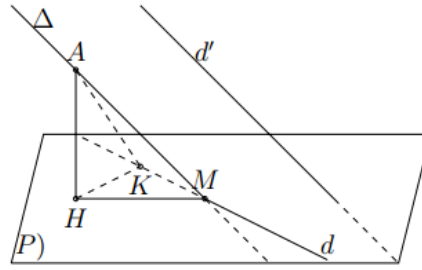
với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_Q$ của mặt phẳng (Q) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_Q = (1; b; c)$.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



- Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' .

Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

- Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

Khi đó $\phi = \widehat{AMH}$ và $\cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n}_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (P) .
- Khi đó $\vec{n}_p \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có $\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_p$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_p = (1; b; c)$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1; 2; 3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{7\sqrt{11}}{11}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $x - 2y + z = 0$.

B. $x + 22y + 10z = 0$.

C. $x - 2y - z = 0$.

D. $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với $\text{mp}(P)$ một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q) . Đẳng thức nào **đúng**?

A. $a - b = -1$.

B. $a + b = -2$.

C. $a - b = 1$.

D. $a + b = 0$.

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $E(-3; 0; 4)$.

B. $M(3; 0; 2)$.

C. $N(-1; -2; -1)$.

D. $F(1; 2; 1)$.

CHỦ ĐỀ 5

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

DẠNG 1

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = \left| \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \right| \left| \overrightarrow{MI} \right|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{MI} \right|_{\min}$

Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$

+ Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacôpxki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_n})^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI} (\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

• với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

• với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$.

+ Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bu-nhia-côp-xki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có: $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 9a + 3b + 6c$.

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (1-m; -n; 2-p); \overrightarrow{IB} = (3-m; 1-n; -1-p)$.

$$3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-m) - 2(3-m) = 0 \\ 3(-n) - 2(1-n) = 0 \\ 3(2-p) - 2(-1-p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -2 \\ p = 8 \end{cases} \Rightarrow I(-3; -2; 8).$$

Ta có $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = |3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| = |\overrightarrow{MI}| = MI$.

Khi đó, $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M \in (P) \Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M \in (P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Khi đó Δ nhận vector pháp tuyến của (P) là

$$\vec{n} = (1; 1; 1) \text{ làm vectơ chỉ phương} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 8 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{11}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 9a + 3b + 6c = 3.$$

Cách 2: Phương pháp đại số

$$M(a;b;c) \in (P) \Rightarrow a + b + c - 1 = 0$$

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (-3-a; -2-b; 8-c) \Rightarrow |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2 + (c-8)^2}$$

$$\text{Ta có: } a + b + c - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+3) + (b+2) + (c-8) = -1$$

$$|(a+3) + (b+2) + (c-8)| = |1.(a+3) + 1.(b+2) + 1.(c-8)| \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2 + (c-8)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2 + (c-8)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \frac{a+3}{1} = \frac{b+2}{1} = \frac{c-8}{1} \Leftrightarrow a+3=b+2=c-8 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ a-c=-11 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} a-b=-1 \\ a-c=-11 \\ a+b+c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{11}{3} \\ b=-\frac{8}{3} \\ c=\frac{22}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 9a + 3b + 6c = 3$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A.** $M(2; 3; 0)$. **B.** $M(1; 3; 0)$. **C.** $M(2; -3; 0)$. **D.** $M(2; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$

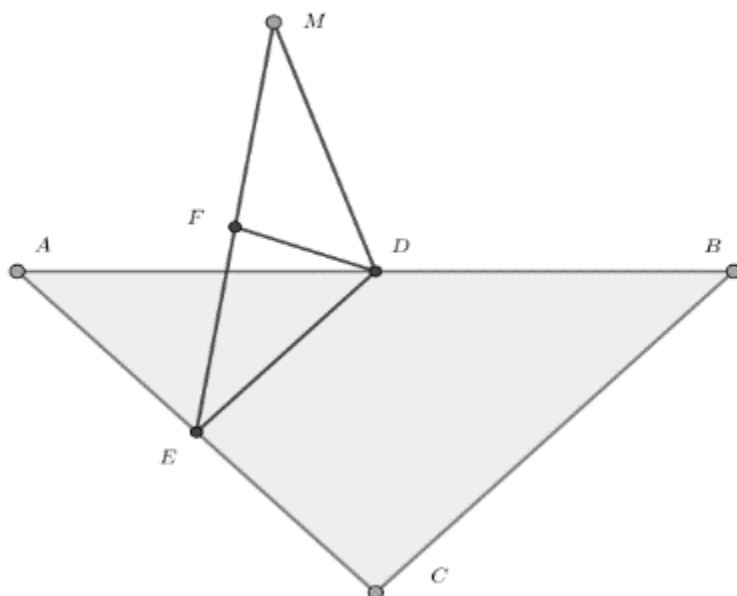
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \Rightarrow I(2; 3; 1)$$

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}| = 2MI$$

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MI \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } mp(Oxy).$$

$$\text{Vì } I(2; 3; 1) \Rightarrow M(2; 3; 0)$$

Cách 2: Phương pháp hình học



Gọi $D; E; F$ lần lượt là trung điểm của $AB; AC; ME$. Ta có:

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CB}| = |2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ED}| = 2|2\overrightarrow{FD}| = 4.FD$$

Ta lại có: $M(x; y; 0); D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); E(3; 0; 0); F\left(\frac{x+3}{2}; \frac{y}{2}; 0\right)$

$$FD_{\min} \Leftrightarrow F \text{ là hình chiếu của } D \text{ trên } mp(Oxy) \Leftrightarrow x = 2; y = 3 \Leftrightarrow M(2; 3; 0)$$

Cách 3: Phương pháp đại số

$$M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (4 - 2x; 6 - 2y; -1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(4 - 2x)^2 + (6 - 2y)^2 + 1} \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2; y = 3$. Khi đó $M(2; 3; 0)$.

Cách 4: Thử nghiệm, thay đáp án

$$M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0). \text{ Ta có:}$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (4 - 2x; 6 - 2y; -1) \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(4 - 2x)^2 + (6 - 2y)^2 + 1}$$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án A vào ta được $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = 1$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án B vào ta được $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{17}$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án C vào ta được $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{145}$

Điểm M ở đáp án D không thuộc (Oxy) nên bị loại.

Câu 3. Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 3; 5)$, $B(2; 6; -1)$, $C(-4; -12; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ là

A. 42.

B. 14.

C. $14\sqrt{3}$.

D. $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $G(x_1; y_1; z_1)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Vậy $S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG$.

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 2 - 4}{3} = -1 \\ y_1 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 6 - 12}{3} = -1 \Rightarrow G(-1; -1; 3). \\ z_1 = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{5 - 1 + 5}{3} = 3 \end{cases}$$

Vì G cố định nên $S = 3MG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Tức là $MG \perp (P)$.

$$\text{Ta có: } d(G, (P)) = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3} = MG.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất } S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG = 3 \cdot \frac{14}{3} = 14.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 2), B(1; 1; -1), C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

- A. $M(2; 3; 1)$. B. $M(0; 3; 1)$. C. $M(0; -3; 1)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = (2; 3; 1) \Leftrightarrow I(2; 3; 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| &= |(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| \\ &= |2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}| = 2|\overrightarrow{MI}| = 2MI. \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2; 3; 1)$ lên mặt phẳng (Oyz) . Suy ra $M(0; 3; 1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -1; 3), B(2; 1; 0), C(-3; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$. Gọi $M(a, b, c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = -1$. C. $S = 2$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA} = (1 - x; -1 - y; 3 - z) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} = (3 - 3x; -3 - 3y; 9 - 3z)$$

$$\overrightarrow{IB} = (2-x; 1-y; -z) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (4-2x; 2-2y; -2z)$$

$$\overrightarrow{IC} = (-3-x; -1-y; -3-z)$$

$$\text{Khi đó } 3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (-2x-4; -2y-6; -2z+6) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4=0 \\ -2y-6=0 \\ -2z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases} \text{ . Vậy } I(-2; -3; 3)$$

$$\text{Ta có } T = |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| = 2|\overrightarrow{MI}|$$

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng MI đi qua $I(-2; -3; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$$MI: \begin{cases} x = -2+t \\ y = -3+t \\ z = 3-t \end{cases} \text{ . Lấy } M(-2+t; -3+t; 3-t) \in MI$$

$$\text{Mặt khác } M \in (P) \Rightarrow (-2+t) + (-3+t) - (3-t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$$

$$\text{Suy ra } M(2; 1; -1) \text{ .}$$

$$\text{Vậy } a+b+c = 2$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a-10b+c$.

A. $\frac{62}{9}$.

B. $\frac{27}{9}$.

C. $\frac{46}{9}$.

D. $\frac{43}{9}$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (3-x; 1-y; 1-z) \\ \overrightarrow{IB} = (7-x; 3-y; 9-z) \\ \overrightarrow{IC} = (2-x; 2-y; 2-z) \end{cases} \text{ .}$$

$$+ \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 23-6x=0 \\ 13-6y=0 \\ 25-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{23}{6} \\ y=\frac{13}{6} \\ z=\frac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6}; \frac{13}{6}; \frac{25}{6}\right) \text{ .}$$

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |6\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC})| = |6\overrightarrow{MI}| = 6MI \text{ .}$$

$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

+ Gọi đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc (P) .

Ta có (d) đi qua $I\left(\frac{23}{6}; \frac{13}{6}; \frac{25}{6}\right)$ và nhận $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$ làm véc tơ chỉ phương.

$$\text{Suy ra phương trình } (d): \begin{cases} x = \frac{23}{6} + t \\ y = \frac{13}{6} + t \\ z = \frac{25}{6} + t \end{cases}$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow M\left(\frac{23}{6} + t; \frac{13}{6} + t; \frac{25}{6} + t\right)$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{23}{6} + t + \frac{13}{6} + t + \frac{25}{6} + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-43}{18} \Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9}; \frac{-2}{9}; \frac{16}{9}\right).$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = \frac{13}{9} \\ b = \frac{-2}{9} \\ c = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow 2a - 10b + c = \frac{62}{9}.$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; -1; 2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}|$.

A. $P_{\min} = 20$.

B. $P_{\min} = 5$.

C. $P_{\min} = 25$.

D. $P_{\min} = 27$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 5(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - 7(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 7\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } I = (-23; 20; -11)$$

$$\text{Khi đó: } \vec{u} = 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}) + 5(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) - 7(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})$$

$$= -\overrightarrow{IM} + (3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC}) = -\overrightarrow{IM}.$$

$$\text{Nên: } P = |3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}| = |-\overrightarrow{IM}| = IM \geq d(I, (\alpha)).$$

$$\text{Vậy: } P_{\min} = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-23) - 20 + 2 \cdot (-11) + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 27.$$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

- A. $M(0;1;-4)$. B. $M(2;1;0)$. C. $M(0;1;-2)$. D. $M(0;1;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

- A. $T = 10$. B. $T = 25$. C. $T = 13$. D. $T = 17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy) . Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$ Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó

$$T = (-1)^2 + 3^2 = 10.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 6$. D. $P = -2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(2; -2; 2)$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên

$$(Oyz) \Leftrightarrow M(0; -2; 2).$$

$$\text{Vậy } P = 0 - 2 + 2 = 0.$$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$.

Lời giải

Đáp án: giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ là 135

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ suy ra $I(-1; 1; 1)$

$$IA^2 = 27; IB^2 = 12; d(I, (P)) = 3$$

$$2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2 + 90$$

Mà $2MA^2 + 3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$$\text{Suy ra } MI \geq d(I, (P)) = 3$$

$$\text{Vậy } 2MA^2 + 3MB^2 \geq 5 \cdot 9 + 90 = 135$$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = (2; 1; 1) \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

$$\text{Khi đó, } T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

$$= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \text{ (vì } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0})$$

Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow M \equiv I(2; 1; 1) \Rightarrow a = 2, b = c = 1.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 4.$$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

A. 8. **B. 10.** **C. -10.** **D. -8.**

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*).

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = (2;1;1) \Leftrightarrow I(2;1;1)$.

Mặt khác, áp dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm $\Rightarrow T = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$.

Vì $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ là hằng số nên suy ra T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{IM} \text{ cùng phương } \vec{n}_{(P)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b-2c=29 \\ \frac{a-2}{3} = \frac{b-1}{3} = \frac{c-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Vậy $a+b+c=8$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z+3=0$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **B. $\frac{121}{54}$** **C. 24** **D. $\frac{91}{54}$**

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(1-a;2-b;3-c)$, $\overrightarrow{IB}(-a;1-b;1-c)$, $\overrightarrow{IC}(1-a;-b;-2-c)$

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-2a+3-3a=0 \\ 2-b+2-2b-3b=0 \\ 3-c+2-2c-6-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=4 \\ 6b=4 \\ 6c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases} I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right).$$

Ta chứng minh được $T=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$. Do đó T đạt GTNN khi MI đạt GTNN $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Ta có } MI: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{1}{6} + t \end{cases}, M \in MI \Rightarrow M\left(t + \frac{2}{3}; t + \frac{2}{3}; t - \frac{1}{6}\right), M \in (P) \Rightarrow 3t + \frac{19}{6} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{19}{18}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{7}{18}; -\frac{7}{18}; -\frac{11}{9}\right) \Rightarrow d(M; (Q)) = \frac{\left|-\frac{7}{9} + \frac{7}{18} + \frac{22}{9} + 3\right|}{3} = \frac{91}{54}.$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(-1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

A. 102.

B. 105.

C. 30.

D. 35.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2(\vec{OA} - \vec{OI}) + (\vec{OB} - \vec{OI}) - (\vec{OC} - \vec{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OC} = (1; 0; 4)$$

$$\Leftrightarrow I(1; 0; 4).$$

Khi đó, với mọi điểm $M(x; y; z) \in (P)$, ta luôn có:

$$\begin{aligned} T &= 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 - (\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= 2\vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC}) + 2\vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 - \vec{IC}^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + IB^2 - IC^2. \end{aligned}$$

Ta tính được $2IA^2 + IB^2 - IC^2 = 30$.

Do đó, T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MI \perp (P)$.

$$\text{Lúc này, } IM = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 4 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6.$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = 2 \cdot 6^2 + 30 = 102.$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}}{2} \Rightarrow I(1; 2; -2)$$

Ta có $2MA^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA}$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC}$$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB})$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2 + IC^2 - IB^2$ không đổi.

Vậy $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

• Đường thẳng Δ qua $I(1; 2; -2)$ và vuông góc với (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \\ 3x - 3y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(4; -1; 0)$$

Suy ra $a + b + c = 3$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(3; 1; -5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $M(0; 0; 5)$. **D.** $M(3; -4; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm E thỏa $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Suy ra E là trung điểm của AB , suy ra $E(3; -4; 5)$.

Khi đó: $MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 - 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = -ME^2 + EA^2 - 2EB^2$.

Do đó $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của $E(3; -4; 5)$ lên (Oxy)

$$\Leftrightarrow M(3; -4; 0).$$

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau

+ Loại C vì $M(0; 0; 5)$ không thuộc (Oxy) .

+ Lần lượt thay $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$, $M(3; -4; 0)$ vào biểu thức $MA^2 - 2MB^2$ thì $M(3; -4; 0)$

cho giá trị lớn nhất nên ta chọn $M(3; -4; 0)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8)$, $B(2; 1; -1)$, $C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

A. 54.

B. 282.

C. 256.

D. 328.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-10 - x; -5 - y; 8 - z)$, $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$, $\overrightarrow{IC} = (2 - x; 3 - y; -z)$.

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} (-10 - x) + 2(2 - x) + 3(2 - x) = 0 \\ (-5 - y) + 2(1 - y) + 3(3 - y) = 0 \\ (8 - z) + 2(-1 - z) + 3(-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1).$$

Với điểm M thay đổi trên (P) , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Ta lại có $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 185 + 2.8 + 3.9 = 228$.

Do đó, $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Khi đó, $MI = d(I, (P)) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng

$$6MI^2 + 228 = 6.9 + 228 = 282.$$

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Phương trình của Δ : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Ta có $M = \Delta \cap (P)$. Xét phương trình

$$t + 2(1 + 2t) - 2(1 - 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 3; -1).$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

A. 11.

B. 9.

C. 15.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E(3; 0; 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 = 4ME^2 + EA^2 + EB^2 + 2EC^2. \end{aligned}$$

Vì $EA^2 + EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } ME: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình: } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ 3x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow M(0; -1; 2) \Rightarrow a = 0, b = -1, c = 2.$$

$$\Rightarrow a + b + 5c = 0 - 1 + 5 \cdot 2 = 9.$$

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 1; 4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$.

B. $N(-2; 0; 1)$.

C. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $N(-1; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Với mọi điểm I ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ Suy ra tọa độ điểm } I \text{ là: } I(0; 1; 2).$$

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm $N(t; 1-t; 2+t) \in (P) \Rightarrow t-1+t+2+t+2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow N(-1; 2; 1)$.

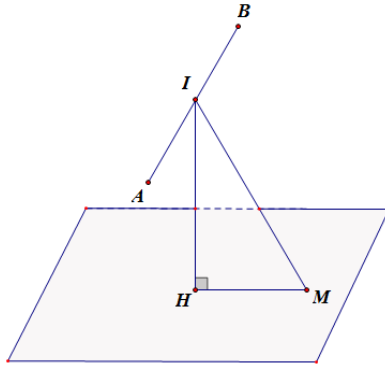
Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4; -2; 6)$, $B(2; 4; 2)$, $M \in (\alpha): x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

- A. $\left(\frac{29}{13}; \frac{58}{13}; \frac{5}{13}\right)$. B. $(4; 3; 1)$. C. $(1; 3; 4)$. D. $\left(\frac{37}{3}; \frac{-56}{3}; \frac{68}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Suy ra I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3; 1; 4)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = MI^2$

Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α) .

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = IH \Leftrightarrow M \equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) .

Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (1; 2; -3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

$H \in \Delta \Leftrightarrow H(3+t; 1+2t; 4-3t)$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow (3+t) + 2(1+2t) - 3(4-3t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow H(4; 3; 1)$.

Vậy $M(4; 3; 1)$.

Cách 2: Phương pháp đại số

Gọi $M(x; y; z) \in (\alpha) \Rightarrow x + 2y - 3z - 7 = 0$

$\overrightarrow{MA} = (4-x; -2-y; 6-z)$; $\overrightarrow{MB} = (2-x; 4-y; 2-z)$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (4-x)(2-x) + (-2-y)(4-y) + (6-z)(2-z)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 8z + 12 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 - 12$$

Áp dụng bất B. C. S:

$$\left[1^2 + 2^2 + (-3)^2\right] \left[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2\right] \geq [x-3 + 2(y-1) - 3(z-4)]^2$$

$$\Leftrightarrow 14 \left[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2\right] \geq [x + 2y - 3z + 7]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \geq \frac{(7+7)^2}{14}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 - 12 \geq 2$$

$$\text{Min}(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) = 2 \text{ xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + 2y - 3z - 7 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(4; 3; 1)$$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

A. $T = 3$.

B. $T = -3$.

C. $T = 1$.

D. $T = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$$

$$= 6MI^2 + \overrightarrow{MI}(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IAIB} + 2\overrightarrow{IBIC} + 3\overrightarrow{ICIA}$$

$$\text{Gọi I là điểm thỏa mãn } 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{4x_A + 3x_B + 5x_C}{12} \\ y_I = \frac{4y_A + 3y_B + 5y_C}{12} \\ z_I = \frac{4z_A + 3z_B + 5z_C}{12} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{-2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}\right).$$

Mà: $(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) = \vec{0}$. $\overrightarrow{IAIB} + 2\overrightarrow{IBIC} + 3\overrightarrow{ICIA} = \text{const}$. Nên $S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$

Suy ra M là hình chiếu của I lên mặt $Oxy \Rightarrow M\left(-\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, 0\right) \Rightarrow T = 12a + 12b + c = -1$

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4; 1; 5)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-1; 2; 0)$ và điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

A. $P = 23$.

B. $P = 31$.

C. $P = 11$.

D. $P = 13$.

Lời giải

Chọn D

+ Đặt $Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$.

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2).$$

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2.$$

$$(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})^2 = MC^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2).$$

$$\Rightarrow Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + MB^2 + MC^2 - BC^2 - \frac{5}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2)$$

$$= -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 - \frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2.$$

$$-\frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2 \text{ không đổi nên } Q \text{ lớn nhất khi } T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

$$+ T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2.$$

Gọi E là điểm thỏa mãn $-2\overrightarrow{EA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$$

$$\Rightarrow E\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

$$T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 = -2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + \frac{3}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 - \frac{3}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2$$

$$= -2ME^2 - 2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2 \leq -2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2.$$

Vì $-2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2$ không đổi nên T đạt giá trị lớn nhất khi $ME = 0 \Rightarrow M \equiv E$.

$$\Rightarrow M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

$$P = a - 2b + 4c = 1 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{17}{4} = 13.$$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8; 1; 1)$, $B(2; 1; 3)$ và $C(6; 4; 0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 34$. Cho biết $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Tính tích số $x_0 y_0 z_0$.

A. 16.

B. 18.

C. 14.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M = (a; b; c)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 34$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MA} = (-8 - a; 1 - b; 1 - c), \overrightarrow{BC} = (4; 3; -3)$$

$$\text{Suy ra } 4(-8 - a) + 3(1 - b) - 3(1 - c) = 34 \Leftrightarrow -4a - 3b + 3c - 66 = 0.$$

Vậy $M \in (P)$ có phương trình $-4x - 3y + 3z - 66 = 0$.

Ký hiệu $f(M) = f(x; y; z) = -4x - 3y + 3z - 66$, với $M(x; y; z)$

$$\text{Ta có } f(A) \cdot f(B) = (-4(-8) - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 66)((-4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 66)) = (-34) \cdot (-68) = 2312 > 0$$

Suy ra điểm $A(-8; 1; 1)$ và điểm $B(2; 1; 3)$ nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (P) .

Khi đó $|MA - MB| \leq AB$ (tính chất 3 cạnh của tam giác) suy ra $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi

M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB với (P) .

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (10; 0; 2)$ và qua điểm $B(2; 1; 3)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } -4(2 + 5t) - 3 \cdot 1 + 3(3 + t) - 66 = 0 \Leftrightarrow -17t = 68 \Leftrightarrow t = -4.$$

Vậy $M(-18; 1; -1)$ hay $x_0 y_0 z_0 = 18$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3; 2; 1)$, $B(-2; 3; 6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 2$

$$\text{Gọi điểm } H \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0} \text{ khi đó: } \begin{cases} x_H = \frac{x_A + 3x_B}{1 + 3} \\ y_H = \frac{y_A + 3y_B}{1 + 3} \\ z_H = \frac{z_A + 3z_B}{1 + 3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; \frac{19}{4}\right).$$

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

$$\text{Xét } T = \frac{z_H}{1} = \frac{19}{4} \text{ do đó tọa độ điểm } M \text{ cần tìm là: } \begin{cases} x_M = x_H - aT \\ y_M = y_H - bT \\ z_M = z_H - cT \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; 0\right).$$

$$\text{Vậy } T = x_M + y_M + z_M = -\frac{3}{4} + \frac{11}{4} + 0 = 2.$$

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 3), B(6; -5; 8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a - b = 0$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k} \Rightarrow M(a; 0; b)$$

$$\overrightarrow{MA} = (-1 - a; 2; 3 - b); \overrightarrow{MB} = (6 - a; -5; 8 - b) \Rightarrow -2\overrightarrow{MB} = (-12 + 2a; 10; -16 + 2b)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (a - 13; 12; b - 13)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(a - 13)^2 + 12^2 + (b - 13)^2} \geq 12$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 13 \end{cases}. \text{ Do đó } a - b = 0$$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; 5), B(3; -1; 0), C(-4; 0; -2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 2 = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d(I; (P)) = 6$

$$\text{Gọi } M(a; b; c) \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} -1 - a - 2(3 - a) + 3(-4 - a) = 0 \\ 2 - b - 2(-1 - b) + 3(0 - b) = 0 \\ 5 - c - 2(0 - c) + 3(-2 - c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{19}{2} \\ b = 2 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{19}{2}; 2; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{IM} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{IM} + 3\overrightarrow{MC}|$$

$$= |2\overrightarrow{IM} + (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})| = 2|\overrightarrow{IM}| = 2IM.$$

Biểu thức $|\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của M

$$\text{lên } (Oxy) \Leftrightarrow I\left(-\frac{19}{2}; 2; 0\right).$$

$$\text{Khoảng cách từ điểm } I \text{ đến mặt phẳng } (P) \text{ là: } d(I; (P)) = \frac{\left|4 \cdot \left(-\frac{19}{2}\right) + 3 \cdot 2 + 2\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6.$$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$; $B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a + b = 2$

Ta thấy $M(a; b; 0) \in (Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{IA} - \vec{IM})^2 + (\vec{IB} - \vec{IM})^2 \\ &= (\vec{IA}^2 + \vec{IM}^2 - 2\vec{IA} \cdot \vec{IM}) + (\vec{IB}^2 + \vec{IM}^2 - 2\vec{IB} \cdot \vec{IM}) \\ &= IM^2 + 2IA^2 - 2\vec{IM}(\vec{IA} + \vec{IB}) = IM^2 + \frac{AB^2}{2} = IM^2 + 7. \end{aligned}$$

Bởi vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy) . Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Như vậy $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

Câu 29. Trong không gian cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 6; -5)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $M(1; 3; 0)$

Lấy $G(1; 3; -1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy . Vậy $M(1; 3; 0)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 5 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{34}{3}$

Gọi điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra $G\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &\geq 3[d(G, (Q))]^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q) .

$$\text{Ta có } d(G, (Q)) = \frac{\left| \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1 - 5 \right|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{GA} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; 1 \right) \Rightarrow GA^2 = \frac{26}{9}; \overrightarrow{GB} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -1 \right) \Rightarrow GB^2 = \frac{11}{9}; \overrightarrow{GC} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; 0 \right) \Rightarrow GC^2 = \frac{29}{9}.$$

Vậy $\min P = 3 \cdot \frac{4}{3} + \frac{26}{9} + \frac{11}{9} + \frac{29}{9} = \frac{34}{3}$ khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q) .

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$, biết $M(x; y; z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{21}{4}$

Xét điểm $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \\ &= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \text{ (vì } MI^2 \geq 0 \text{ với mọi điểm } M) \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow M \equiv I \text{ tức là } M\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}.$$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 2 = 0$ sao cho $3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\min(3MA^2 + 2MB^2 + MC^2) = \frac{61}{6}$

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{3x_A + 2x_B + x_C}{6} = -\frac{1}{6} \\ y_I = \frac{3y_A + 2y_B + y_C}{6} = \frac{1}{3} \\ z_I = \frac{3z_A + 2z_B + z_C}{6} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 &= 3(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 + 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 + (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})^2 \\ &= 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 + 6IM^2 + 2\overrightarrow{MI}(3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \\ &= 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 + 6IM^2. \end{aligned}$$

Do đó $3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên

$$(P) \Rightarrow M\left(-\frac{11}{18}; -\frac{1}{9}; \frac{5}{9}\right) \Rightarrow \min(3MA^2 + 2MB^2 + MC^2) = \frac{61}{6}$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\min T = 102$

Gọi I là điểm thỏa $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{2x_A + x_B - x_C}{2} = 1 \\ y_I = \frac{2y_A + y_B - y_C}{2} = 0 \\ z_I = \frac{2z_A + z_B - z_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;4).$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\underbrace{2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right) + (2IA^2 + IB^2 - IC^2) = 2MI^2 + (2IA^2 + IB^2 - IC^2) \end{aligned}$$

Để T nhỏ nhất thì $2MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ ngắn nhất M là hình chiếu của điểm $I/(P)$. Khi đó

$$MI = d(I, (P)) = 6; 2IA^2 + IB^2 - IC^2 = 30 \Rightarrow \min T = 102$$

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 4; 5), B(3; 4; 0), C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $S = a + b + c = 3$.

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \overrightarrow{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ \overrightarrow{IC} = (2-x; -1-y; -z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 4-y; 5-z) \\ \overrightarrow{IB} = (3-x; 4-y; -z) \\ 3\overrightarrow{IC} = (6-3x; -3-3y; -3z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (10-5x; 5-5y; 5-5z)$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

$$\text{Mặt khác: } MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

Vì I, A, B, C cố định nên $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Gọi $\{M\} = d \cap (\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2} \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6=3y-3 \\ -2x+4=3z-3 \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

Vậy $a = \frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0 \Rightarrow S = a + b + c = 3$.

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 2), B(-2; 2; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\min(2AM^2 + 3BN^2) = \frac{143}{3}$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$ bằng 49,8

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng

$(P) \Rightarrow AH = BK = 3, H(1; -1; 0), K(0; 1; 2), HK = 3$. Đặt $HM = t$ ta có:

$$HM + MN + NK \geq HK = 3 \Rightarrow NB \geq 2 - t$$

$$2AM^2 + 3BN^2 = 2AH^2 + 2HM^2 + 3BK^2 + 3KN^2 \geq 45 + 2t^2 + (2-t)^2 = \left(\sqrt{3}t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{143}{3} \geq \frac{143}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $M, N \in$ đoạn thẳng HK .

Vậy Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$ bằng $\frac{143}{3}$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a; b; c)$ với a, b, c là các số thực dương

thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a + b + c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N ,

P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (MNP) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Phương trình mặt phẳng (MNP) $3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

Đặt $t = b + c$ ($t > 0$); $b^2 + c^2 \geq \frac{t^2}{2}$; $bc \leq \frac{t^2}{4}$.

$$\begin{aligned} 5(a^2 + b^2 + c^2) &= 9(ab + 2bc + ca) \Leftrightarrow 5a^2 + 5(b + c)^2 - 9a(b + c) = 28bc \Rightarrow 5a^2 + 5t^2 - 9at \leq 7t^2 \\ &\Leftrightarrow (5a + t)(a - 2t) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2t. \end{aligned}$$

Vậy $Q \leq \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} = f(t)$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$ (vì $t > 0$).

Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			16	0

Vậy $Q_{\max} = 16 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}; b = c = \frac{1}{12}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right); N\left(0; \frac{1}{12}; 0\right); P\left(0; 0; \frac{1}{12}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{12}} + \frac{z}{\frac{1}{12}} = 1 \Leftrightarrow 3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

DẠNG 2

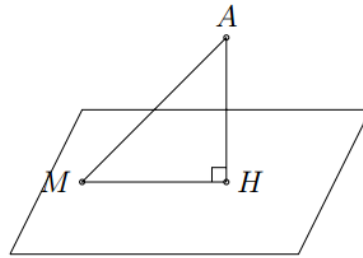
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.
- + Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
- + Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M ($M \equiv H$)

- + Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \vec{u}_{AH} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$.
- + Ta có $M \equiv H = AH \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacôpxki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

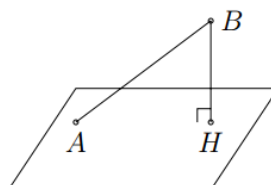
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó $d(B, (P)) = BH \leq BA$
- + Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + Gọi $\vec{n}_P = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- + Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là: $a(x - x_A) + (y - y_A) + (z - z_A) = 0$
- + Khi đó $\vec{n}_P \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- + Ta có: $d(B, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.
- + Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

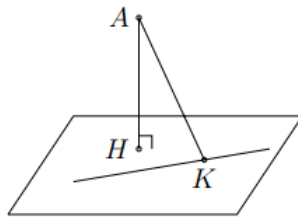
Chú ý: Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1; b; c)$.

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ .
- + Khi đó $d(A, (P)) = AH \leq AK$
- + Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bước 2:

- + Tìm tọa độ điểm K .
- + Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } K \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AK} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + Gọi $\vec{n}_P = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- + Khi đó $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

+ Ta có: $d(A, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_P$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1; b; c)$.

Bài toán 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Phương pháp giải

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta xét hai trường hợp sau:

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) .

Khi đó $AM + BM \geq AB$

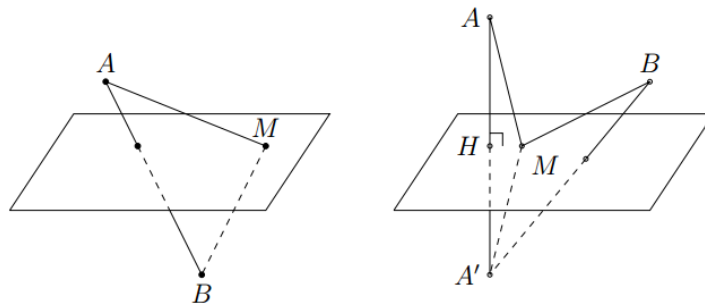
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

Gọi A' đối xứng với A qua (P) .

Khi đó $AM + BM = A'M + BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Ta xét hai trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

+ Khi đó $|AM - BM| \leq AB$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) .

+ Gọi A' đối xứng với A qua (P) ,

+ Khi đó $|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và có $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì $P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{ID}$ và E là trung điểm BD .

Khi đó: $P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) .

Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I .

Khi đó $P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Phương pháp giải

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho.

Khi đó: $\sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A .

Khi đó $P = md(G_1, (P)) + kd(G_2, (P))$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 5** trên.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

A. $2y + z = 0$.

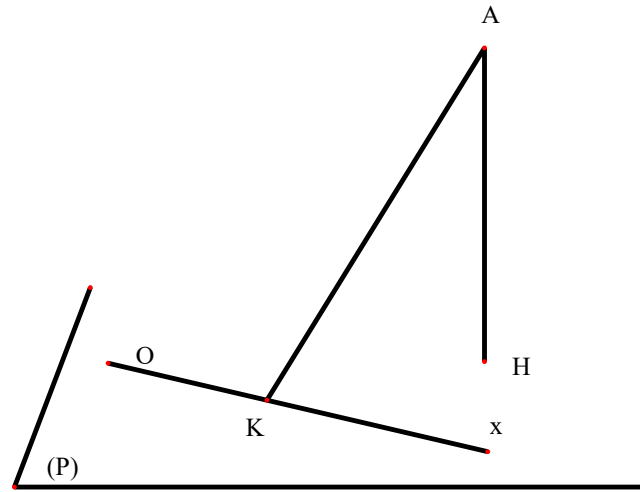
B. $2y - z = 0$.

C. $y + z = 0$.

D. $y - z = 0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;-2)$ lên trục Ox .

Ta có $K(1;0;0)$, $\overrightarrow{AK} = (0;-2;2)$.

Gọi H là điểm chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

Ta có $d(A, (P)) = AH \leq AK = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\max d(A, (P)) = 2\sqrt{2}$, đạt được khi $H \equiv K(1;0;0)$.

Khi đó mặt phẳng (P) qua $O(0;0;0)$ có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AK} = (0;-2;2)$.

Nên phương trình mặt phẳng (P) là $0 \cdot (x-1) - 2(y-0) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$.

Vậy $(P): y - z = 0$.

Câu 38. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P): 3x + 3y + 3z - 10 = 0$.

B. $(P): x + y + z - 1 = 0$.

C. $(P): x + y + z - 10 = 0$.

D. $(P): x + y + z + 10 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(M, (P)) \leq MA$

Nên $d(M, (P))_{\max} = MA$ khi A là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) .

Suy ra $AM \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3; -3; -3)$ là vector pháp tuyến của (P) .

(P) đi qua $A(1;7;2)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (-3; -3; -3)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình

$$-3(x-1) - 3(y-7) - 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 10 = 0.$$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương

trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và

khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$.

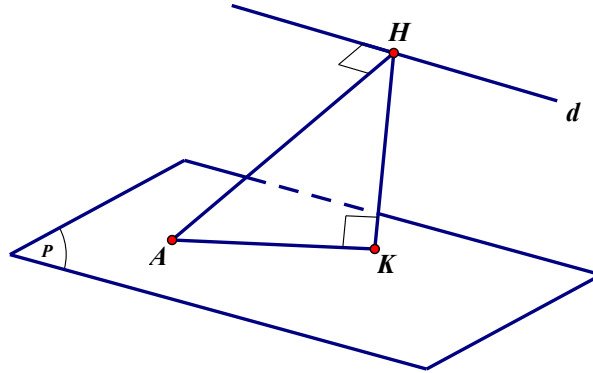
B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$.

C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$.

D. $3x + z + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d . Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) . Do $d \parallel (P)$ nên ta có $d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \leq HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng HA . Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1; 2; 3)$ làm vector pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2; -1; -2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x + z + 2 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

A. -1 .

B. 3 .

C. 6 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7 + 2t \\ z = -8 - t \end{cases}$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB .

Ta tìm được điểm $K(3; -3; -10)$. Ta luôn có bất đẳng thức $d(M, (P)) = MH \leq MK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$. Khi đó $\overrightarrow{MH} = (-4; -2; -8) = -2(2; 1; 4)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 4)$. Vậy ta có $a + b = 3$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x + y - z - 2 = 0$.

B. $x + y - z = 0$.

C. $x + y - z + 1 = 0$.

D. $-x + 2y + z + 5 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và d . Khi đó ta có $AH \leq AK$.

Vì $H \in d$ nên $H(2-t; -1+2t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t; 2t; 1+t)$.

Do $AH \perp d$ nên ta có $-(-1-t) + 2 \cdot 2t + 1+t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AH = AK$. Do đó (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$. Vậy $(\alpha): 1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Vẫn là đánh giá bất đẳng thức $AH \leq AK$ nói trên, nhưng bài toán sau đây lại phát biểu hơi khác một chút.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) .

A. $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

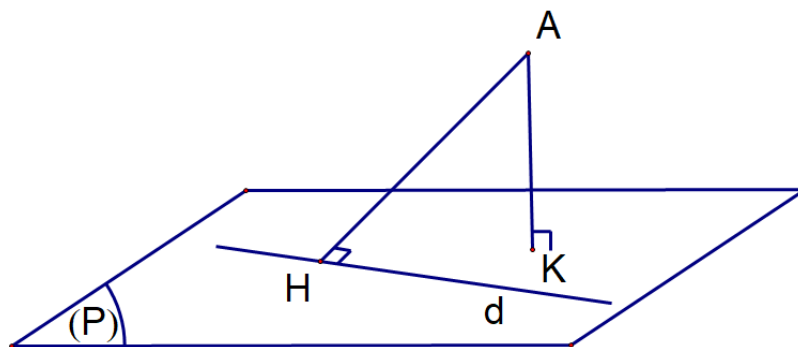
B. $\vec{n} = (1; 0; -2)$.

C. $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

D. $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d , gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

Do đó khoảng cách từ A đến (P) là: $d(A; (P)) = AK$.

Ta có $d: \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$. Vì $H \in d$ nên $H(-2t-1; t; t+1)$.

$\overrightarrow{AH}(-2t-2; t-2; t-2)$, VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d(-2; 1; 1)$.

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -2(-2t-2) + t-2 + t-2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Do đó $H(-1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{AH}(-2; -2; -2) \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$ (không đổi).

Vì $AK \leq AH$ (đường vuông góc luôn ngắn hơn đường xiên) nên AK lớn nhất khi $AK = AH$ hay $K \equiv H$.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH} = (-2; -2; -2) = -2(1; 1; 1)$. Vậy, một vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A. $a+b = -\frac{1}{2}$. B. $a+b = 2$. C. $a+b = 0$. **D. $a+b = \frac{3}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

$$x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(y + 2z - 1) + x + z - 2 = 0 (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm với } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } (P) \text{ luôn đi qua đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}.$$

$$K \in d \Rightarrow K(2-t; 1-2t; t), \overrightarrow{AK}(-t; -2t; t-3)$$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(-1; -2; 1)$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } AH \leq AK \Rightarrow AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K.$$

$$\text{Vậy } a+b = \frac{3}{2}.$$

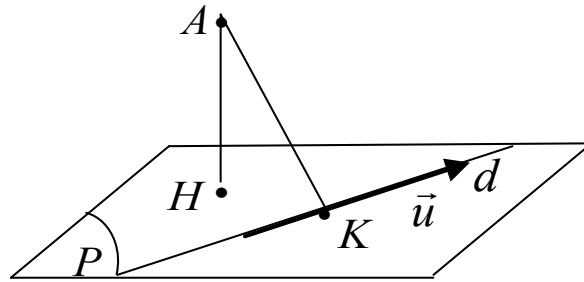
Câu 44. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng

$(P): ax + by + cz - 3 = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T = a + b + c$ bằng

- A. 3. B. -3. **C. -2.** D. -5.

Lời giải

Chọn C



Đường thẳng d đi qua $M(1; 0; 2)$, có 1VTCP $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trên d thì $AH \leq AK$ (cổ định).

Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H \equiv K$ hay $(P) \perp AK$.

$K(2t+1; t; 2t+2) \in d$ là hình chiếu của A trên d khi $\overrightarrow{AK} \perp \vec{u}$, với $\overrightarrow{AK} = (2t-1; t-5; 2t-1)$.

$$\overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t-5) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

(P) qua $M(1; 0; 2)$, có một VTPT $\overrightarrow{AK} = (1; -4; 1)$ nên $(P): x - 4y + z - 3 = 0$.

$$\text{Suy ra } T = a + b + c = 1 + (-4) + 1 = -2.$$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

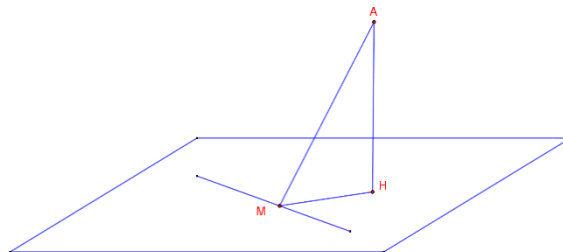
B. $\vec{n} = (1; 0; -2)$.

C. $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

D. $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (P) . Từ H kẻ $HM \perp d$. Dễ thấy $AM \perp d$.

Ta có $AH \leq AM$. Suy ra khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $M \equiv H$, hay $IM \perp (P)$.

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ véc-tơ chỉ phương là } \vec{u} = (-2; 1; 1).$$

$$M \in d \Rightarrow M(-1-2t; t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2-2t; 2-t; 2-t).$$

$$\overrightarrow{MA} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (-2) \cdot (2+2t) + 1 \cdot (2-t) + 1 \cdot (2-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{Suy ra } M(-1; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; 2; 2).$$

Do $\vec{n} = (1; 1; 1)$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$ nên $\vec{n} = (1; 1; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; -4; -1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B, (P))} = 2d_{(A, (P))}$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$

A. 8

B. 6

C. 12

D. 4

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (P) qua Ox nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $by + cz = 0$ ($b^2 + c^2 > 0$)

$$d_{(B, (P))} = 2d_{(A, (P))} \Leftrightarrow \frac{|-4b - c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 2 \cdot \frac{|2b + 3c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b - c = 4b + 6c \\ -4b - c = -4b - 6c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 7c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $8b + 7c = 0$ chọn $b = 7; c = -8$ khi đó $(P): 7y - 8z = 0$

Xét $f(y, z) = 7y - 8z$

Thay tọa độ A, B vào ta được $(7 \cdot 2 - 8 \cdot 3)(7 \cdot (-4) - 8 \cdot (-1)) > 0$ suy ra A, B nằm cùng phía so với (P) (loại)

Trường hợp 2: $c = 0$ suy ra phương trình $(P): y = 0$

Thay tọa độ A, B vào ta được $2 \cdot (-4) < 0$ suy ra A, B nằm khác phía so với (P) . Do đó đường thẳng AB cắt (P) tại I nằm giữa AB

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AB: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 - 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Tọa độ điểm I là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 - 4t \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{7}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$$

Vậy $a + b + c = \frac{7}{3} + 0 + \frac{5}{3} = 4$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A.** $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $G(1;2;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=4(-1-x) \\ 3-y=4(0-y) \\ -1-z=4(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;-1;3).$$

Nhận thấy G và H nằm về hai phía đối với mặt phẳng (Oxz) ; $HG = \sqrt{22}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \\ &= |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{MH} - 4\overrightarrow{HC}| + |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = |-3\overrightarrow{MH}| + |3\overrightarrow{MG}| \\ &= 3(MH + MG) \geq 3GH = 3\sqrt{22}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H, M, G thẳng hàng theo thứ tự.

Lại do $M \in (Oxz)$ nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng GH với mặt phẳng (Oxz) .

$$\text{Đường thẳng } GH \text{ có phương trình } \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases}; \text{ mặt phẳng } (Oxz) \text{ có phương trình } y=0.$$

$$M \in GH \Rightarrow M(1+3t; 2+3t; 1-2t).$$

$$M \in (Oxz) \Rightarrow 2+3t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right).$$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A.** $\frac{81}{2}$. **B.** $\frac{243}{2}$. **C.** $\frac{81}{6}$. **D.** 243.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Mặt phẳng (P) có phương trình (theo đoạn chắn): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ nên $\frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Ta có $1 = \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{a.b.c}} \Rightarrow a.b.c \geq 243$.

$V_{OABC} = \frac{1}{6}a.b.c \geq \frac{243}{6} = \frac{81}{2}$. Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{81}{2}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{1}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$(m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{9}{m^2 + n^2 + p^2} = 3$$

Khi đó: $d(O; (P)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = n = p = 1$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

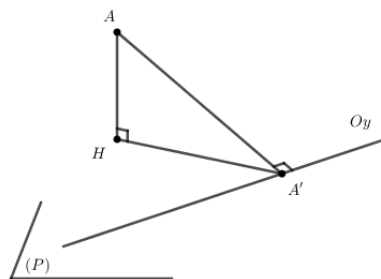
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: phương trình của (P) $2x - z = 0$



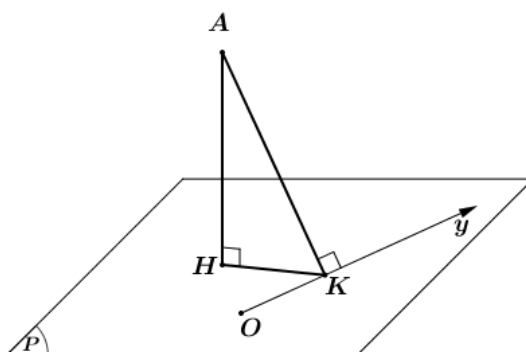
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P) , A' là hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Oy suy ra $A'(0;1;0)$. Khi đó khoảng cách từ A đến (P) là đoạn thẳng $AH \leq AA'$. Độ dài đoạn thẳng AH dài nhất khi H và A' trùng nhau. Khi đó mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{A'A} = (2;0;-1)$ làm vector pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A'(0;1;0)$ có VTPT: $\overrightarrow{A'A} = (2;0;-1)$ là: $2(x-0)+0(y-1)+(-1)(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x-z=0$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: phương trình của (P) $2x+z=0$



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trục Oy .

Ta có $d(A, (P)) = AH \leq AK$. Do đó khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H \equiv K(0;1;0)$.

Khi đó (P) đi qua $K(0;1;0)$ và có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AK} = (-2;0;-1) = -(2;0;1)$ nên có phương trình là $2x+z=0$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Lập phương trình của (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $y+z=0$

Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;2)$ lên trục Ox là $M(1;0;0)$.

Khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất nên mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MA} = (0; 2; 2)$.

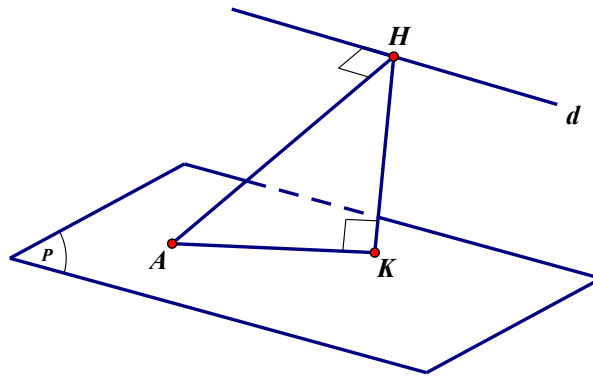
Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 0; 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MA} = (0; 2; 2)$ nên $0.(x-1) + 2(y-0) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow y + z = 0$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x - 2y - 3z - 10 = 0$



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Ta suy ra $H(1; 1; 1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d . Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) . Do $d \parallel (P)$ nên ta có $d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \leq HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng HA . Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2; -1; -2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) .

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{3}{\sqrt{6}}$.

C. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vector pháp tuyến của (P) , với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Điểm $M(1; 0; 2) \in d \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình của $(P): ax + by + cz - (a + 2c) = 0$.

Một vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; 1; 2) \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 2c = 0$.

$$\Rightarrow b = -(2a + 2c) \Rightarrow d(A, (P)) = \frac{|a + 5b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{9|a + c|}{\sqrt{a^2 + c^2 + 4(a + c)^2}}.$$

Ta có $(a + c)^2 \leq 2(a^2 + c^2) \Leftrightarrow \frac{(a + c)^2}{2} \leq a^2 + c^2$ với $\forall a, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } a^2 + c^2 + 4(a + c)^2 \geq \frac{(a + c)^2}{2} + 4(a + c)^2 = \frac{9}{2}(a + c)^2.$$

$$\text{Do đó } d(A, (P)) = \frac{9|a + c|}{\sqrt{a^2 + c^2 + 4(a + c)^2}} \leq \frac{9|a + c|}{\sqrt{\frac{9}{2}(a + c)^2}} = \frac{9|a + c|\sqrt{2}}{3|a + c|} = 3\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \text{Max } d(A, (P)) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -4a \end{cases}. \text{ Chọn } a = c = 1 \Rightarrow b = -4.$$

$$\text{Phương trình } (P): x - 4y + z - 3 = 0 \Rightarrow d(O, (P)) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m - 1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tính m .

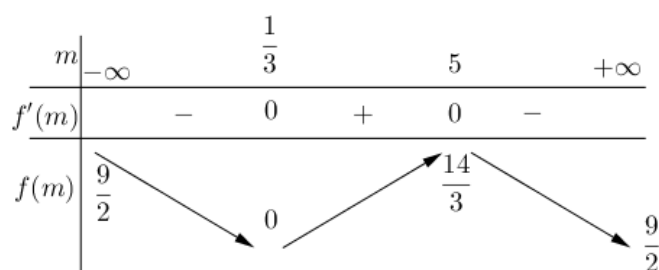
Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 5$

$$\text{Ta có } d(A, (P)) = \frac{|m - 1 + 1 + 2m - 1|}{\sqrt{(m - 1)^2 + 1 + m^2}} = \sqrt{\frac{(3m - 1)^2}{2(m^2 - m + 1)}}.$$

$$\text{Xét } f(m) = \frac{(3m - 1)^2}{2(m^2 - m + 1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5 - m)(3m - 1)}{2(m^2 - m + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}.$$



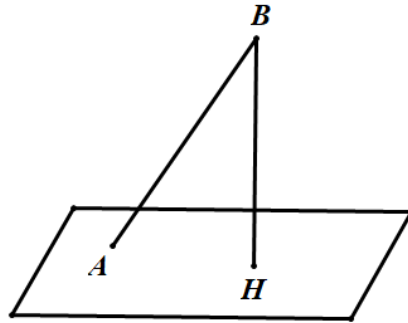
Vậy $\max d(A; (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m = 5$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(3; 0; 3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P): x - y + 2z + 3 = 0$



Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P) .

Ta có $d(B, (P)) = BH \leq BA = 2\sqrt{6} \Rightarrow \max d(B, (P)) = 2\sqrt{6}$, đạt được khi $H \equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4)$ là vectơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1) - 2(y-2) + 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z + 3 = 0$.

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mp $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$, cắt mp (P) tại B . Điểm M nằm trong mp (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $MB = \sqrt{5}$

Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0 \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$

B là giao điểm của d và mặt phẳng $(P) \Rightarrow B(-2; -2; 1)$.

$\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) có đường kính AB .

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) .

$\Rightarrow BM$ lớn nhất bằng đường kính của đường tròn (C) .

Ta có (S) có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

$$d(I, (P)) = 3.$$

Bán kính của đường tròn (C) là: $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{\frac{41}{4} - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy BM lớn nhất bằng $2r = \sqrt{5}$.

Câu 58. Cho $A(4; 5; 6); B(1; 1; 2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA - MB|$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $\sqrt{41}$

Ta có $|MA - MB| \leq AB$ với mọi điểm $M \in (P)$

Vì $(2.4 + 5 + 2.6 + 1).(2.1 + 1 + 2.2 + 1) = 208 > 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía với (P)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$

Khi đó, $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{41}$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(5; 3; 7)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 5$

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I(1; 1; 1)$; $\overline{AB} = (4; 2; 0)$.

Điểm M thỏa mãn $MA = MB$ khi $M \in (\alpha)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB : $(\alpha): 2x + y - 3 = 0$.

Vì $(2.3 + 1.2 - 3).(2.5 + 1.3 - 3) = 50 > 0$ nên B, C nằm về một phía so với (α) , suy ra A, C nằm về hai phía so với (α) .

Khi đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M = AC \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng AC : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$, $(Q): -x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T=a^2+b^2+c^2=3$

Từ giả thiết ta có M thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;1)$. Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(-1;1;1)$. Khi đó đường thẳng d đi qua $N(1;1;1)$ và có một vector chỉ phương là

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; -2; 3) \text{ nên có phương trình tham số là } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=1+3t \end{cases} \text{ suy ra } M(1+t; 1-2t; 1+3t).$$

$$MA+MB = \sqrt{(t+4)^2 + 4t^2 + 9t^2} + \sqrt{(t-4)^2 + 4t^2 + 9t^2} = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16} = \sqrt{14} \left[\sqrt{t^2 + \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} + \sqrt{t^2 - \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} \right]$$

$$= \sqrt{14} \left[\sqrt{\left(t + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} + \sqrt{\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} \right].$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = \left(t + \frac{2}{7}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right), \vec{v} = \left(\frac{2}{7} - t; \frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

$$\text{Khi đó } f(t) = \sqrt{14} [|\vec{u}| + |\vec{v}|] \geq \sqrt{14} |\vec{u} + \vec{v}|. \text{ Suy ra } f(t) \geq \sqrt{14} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{8\sqrt{7}}{49}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vector } \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng hướng hay } \frac{t + \frac{2}{7}}{\frac{2}{7} - t} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} > 0 \Rightarrow t = 0.$$

Do đó $M(1;1;1)$. Vậy $T=a^2+b^2+c^2=3$.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm

$A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M, d)=2$ và $NA=2NB$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $MN_{\min} = 1$

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 2-t; 1)$

$I \in (P) \Rightarrow 2-t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow I(1; 1; 1)$

Ta có $d \perp (P) \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(1; 1; 1), R_1 = 2$.

$N(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{NA}(-1-x; -3-y; 11-z); \overrightarrow{NB}\left(\frac{1}{2}-x; -y; 8-z\right)$

$$NA = 2NB \Leftrightarrow (1+x)^2 + (3+y)^2 + (11-z)^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + y^2 + (8-z)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 42z + 126 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14z + 42 = 0$$

Vậy $N \in S(J(1; 1; 7); R_2 = 3)$ và $J \in (P): y = 1$

Nên N thuộc đường tròn tâm $J(1; 1; 7); R_2 = 3$

Ta có $IJ = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow MN_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 1$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 1), B(3; 1; 5), C(1; 2; 0), D(4; 2; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x + my + nz - p = 0$. Khi đó, tính giá trị của $T = m + n + p$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = m + n + p = 9$

Vì mặt phẳng (α) đi qua $D(4; 2; 1)$ nên phương trình (α) có dạng:

$$a.(x-4) + b.(y-2) + c.(z-1) = 0$$

$$\text{Đặt } S = d[A, (\alpha)] + d[B, (\alpha)] + d[C, (\alpha)] = \frac{|-2a-2b| + |-a-b+4c| + |-3a-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Theo giả thiết, A, B, C nằm cùng phía đối với (α) nên không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$$\begin{cases} -2a-2b > 0 \\ -a-b+4c > 0 \\ -3a-c > 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, } S = \frac{-2a-2b-a-b+4c-3a-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-6a-3b+3c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $B.C.S$ cho hai bộ số $(-6; -3; 3)$ và $(a; b; c)$, ta được:

$$-6a-3b+3c \leq |-6a-3b+3c| \leq \sqrt{(6^2+3^2+3^2).(a^2+b^2+c^2)} \Rightarrow S \leq 3\sqrt{6}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 3b + 3c \geq 0 \\ \frac{a}{-6} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{3} \end{cases}. \text{ Ta chọn } \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (\alpha): -2x - y + z + 9 = 0 \text{ hay } (\alpha): 2x + y - z - 9 = 0 \Rightarrow m = 1, n = -1, p = 9.$$

$$\text{Vậy } T = m + n + p = 9.$$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ (a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ và không đi qua $H(0; 0; 2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của $P = a - 2b + 3c + 12$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = a - 2b + 3c + 12 = 16$

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ nên ta có $\begin{cases} -b + 2c - 3 = 0 \\ -a + b + 3c - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c - 3 \\ a = 5c - 6 \end{cases}$ (*).

$$\text{Mặt khác } d(H; (P)) = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (**).$$

$$\text{Thay (*) vào (**) ta được } d(H; (P)) = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{30c^2 - 72c + 45}}.$$

Xét hàm số $y = \frac{2c - 3}{\sqrt{30c^2 - 72c + 45}}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{18c - 18}{30c^2 - 72c + 45}; y' = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } \lim_{c \rightarrow +\infty} y = \frac{2}{\sqrt{30}}; \lim_{c \rightarrow -\infty} y = -\frac{2}{\sqrt{30}}$$

$$\Rightarrow \min_D y = y(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(c) = \frac{|2c - 3|}{\sqrt{30c^2 - 72c + 45}}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max_{\mathbb{R}} g(c) = f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ đạt tại } c = 1.$$

$$\text{Với } c = 1 \Rightarrow a = -1; b = -1.$$

$$\text{Vậy } P = a - 2b + 3c + 12 = 16$$

Câu 64. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $T = a + 2b + 3c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 18$

Từ giả thiết ta có $a > 0, b > 0, c > 0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27$.

Do đó $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq \frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Vậy $\min_{V_{OABC}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 3$. Khi đó $T = a + 2b + 3c = 18$.

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d = \frac{36}{7}$.

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$M(1;4;9) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$.

Áp dụng BĐT **Bunhiacopxki**:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right)(a+b+c) = \left[\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\right] \geq (1+2+3)^2.$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 49.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \end{cases} \xrightarrow{a+b+c=49} \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \\ c = 18 \end{cases}.$$

Nên $(P): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1$.

$$\text{Vậy } d = \frac{36}{7}.$$

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$

Gọi (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ ($a, b, c > 0$)

Ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì $M \in (P)$ nên ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 54$

Thể tích khối chóp $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq 9$

Dấu bằng xảy ra khi các số tham gia cô si bằng nhau nghĩa là $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3; b = 6; c = 3$

Vậy pt mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d_{\max}(O; (ABC)) = 3$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Nhận thấy, điểm $M(2; -2; 1) \in (ABC)$; $\overrightarrow{OM} = (2; -2; 1)$, $OM = 3$.

Ta có: $d(O; (ABC)) = OH \leq OM \Rightarrow$ khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) có giá trị lớn

$$\text{nhất khi } OM \perp (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(ABC)}} = k \cdot \overrightarrow{OM}, (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 2k \\ \frac{1}{b} = -2k \\ \frac{1}{c} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2k} \\ b = -\frac{1}{2k} \\ c = \frac{1}{k} \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ nên } \frac{2}{\frac{1}{2k}} - \frac{2}{-\frac{1}{2k}} + \frac{1}{\frac{1}{k}} = 1 \Leftrightarrow 9k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}. \text{ Do đó } a = \frac{9}{2}; b = -\frac{9}{2}; c = 9.$$

$$\text{Vậy } d_{\max}(O; (ABC)) = OM = 3 \text{ khi } a = \frac{9}{2}; b = -\frac{9}{2}; c = 9.$$

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 4; 9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d(O; (P)) = \frac{36}{7}$

Gọi mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 4; 9)$ cắt các tia tại $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$

ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$ và $OA + OB + OC = a + b + c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{b} + \frac{3^2}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 36$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=18 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1$$

$$\text{Nên } d(O; (P)) = \frac{\left| \frac{0}{6} + \frac{0}{12} + \frac{0}{18} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{18}\right)^2}} = \frac{36}{7}$$

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $S = \frac{49}{4}$

Dựng $OH \perp (ABC)$; ($H \in (ABC)$) vì $OABC$ là tứ diện vuông nên ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2^2}{4b^2} + \frac{4^2}{16c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2^2}{4b^2} + \frac{4^2}{16c^2} \geq \frac{(1+2+4)^2}{a^2 + 4b^2 + 16c^2} = 1 \Rightarrow OH \leq 1$$

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất là 1 khi:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2}{4b^2} = \frac{4}{16c^2} = \frac{1+2+4}{a^2 + 4b^2 + 16c^2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow S = \frac{49}{4} \\ c^2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1); B(7; -4; -3)$. Điểm $M(a; b; c)$ ($a > 2$) thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 0$

Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên AB .

Do AB không đổi nên S_{ABM} nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow AB // (P)$$

MH nhỏ nhất khi M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) ;

với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với $\text{mp}(P)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8; -4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (3; 0; 3) \Rightarrow \text{phương trình mp } (Q) \text{ là } x + z - 4 = 0.$$

M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Rightarrow M(t; 2 - 2t; 4 - t) \text{ với } t > 2.$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t - 3; -2 - 2t; 3 - t); \overrightarrow{BM} = (t - 7; 6 - 2t; 7 - t)$.

Tam giác ABM vuông tại M nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t - 7) + (-2 - 2t)(6 - 2t) + (3 - t)(7 - t) = 0$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t-7)+2(t-3)(t+1)=0 \Leftrightarrow (t-3)(3t-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \text{ (n)} \\ t=\frac{5}{3} \text{ (l)} \end{cases}.$$

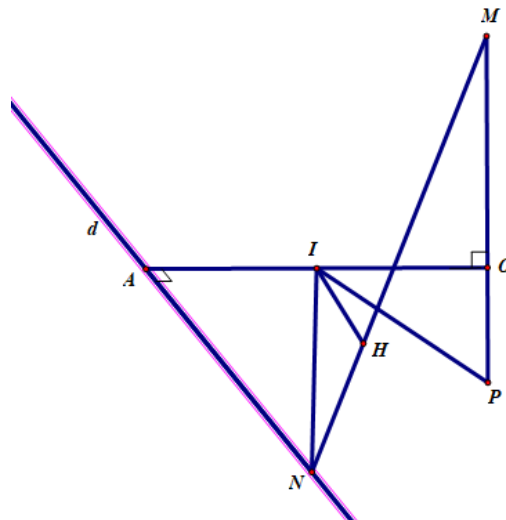
$$+ t=3 \Rightarrow M(3;-4;1) \Rightarrow a+b+c=3-4+1=0.$$

Câu 71. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=4-3t \\ y=3+4t \\ z=0 \end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d . Điểm M di động trên tia Oz , điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN = OM + AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA . Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, lập phương trình của mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng d .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $4x+3y+5\sqrt{2}z-10=0$



Gọi $A(4-3t;3+4t;0)$ là hình chiếu vuông góc của O trên d

$$\Leftrightarrow OA \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A(4;3;0).$$

Trên Oz lấy điểm P sao cho $OP = AN \Rightarrow MP = OM + OP = MN$

và $\triangle AIN = \triangle OIP \Rightarrow IN = IP$

Ta có $\triangle IMP = \triangle IMN$, kẻ $IH \perp MN \Rightarrow IH = IO \Rightarrow S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2}IH.MN \Rightarrow S_{\triangle IMN} \text{ min} \Leftrightarrow MN_{\text{min}}$

$$\text{Ta có } MN^2 = MO^2 + OA^2 + AN^2 \geq 2\left(\frac{MO+AN}{2}\right)^2 + 25 \Rightarrow MN \geq 5\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } MN_{\text{min}} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow OM = AN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M\left(0;0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (M, d) là $[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u_d}] = \left(10\sqrt{2}; \frac{15}{\sqrt{2}}; 25\right)$

Chọn $\vec{n} = (4; 3; 5\sqrt{2})$

lập phương trình củaa mặt phẳng $(M, d): 4x + 3y + 5\sqrt{2}z - 10 = 0$

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P) , điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P_{\Delta ABC})_{\min} = 4\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(1; 4; 3)$ lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1; 4; 0)$

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) , ta tìm được $A_1(1; 4; -3)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của $A(1; 4; 3)$ lên mặt phẳng (P)

Ta có phương trình đường thẳng $AK: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, Gọi $K(1; 4 + 2t; 3 - t) \in AK$

Mặt khác, $K \in (P) \Rightarrow 5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow K(1; 2; 4)$

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) thì K là trung điểm của AA_2 .

Ta có $\begin{cases} x_{A_2} = 2x_K - x_A = 1 \\ y_{A_2} = 2y_K - y_A = 0 \\ z_{A_2} = 2z_K - z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A_2(1; 0; 5)$

Ta có chu vi tam giác ABC là $P_{\Delta ABC} = AC + AB + BC = A_1C + A_2B + BC \geq A_1A_2$.

Dấu bằng xảy ra khi A_1, A_2, B, C thẳng hàng

Suy ra $(P_{\Delta ABC})_{\min} = A_1A_2 = 4\sqrt{5}$.

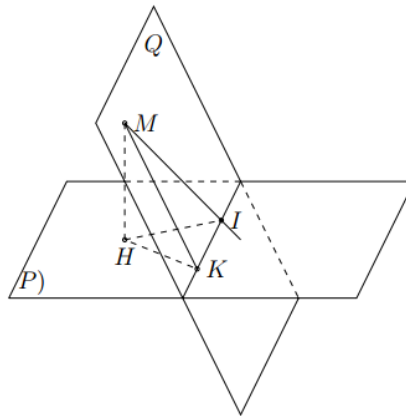
DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Lập phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó $\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận $[[\vec{n}_P, \vec{u}_d], \vec{u}_d]$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .
- Khi đó $\vec{n}_Q \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có: $\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t)$

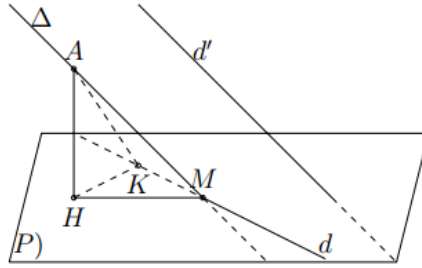
với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_Q$ của mặt phẳng (Q) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_Q = (1; b; c)$.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



- Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' .

Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

- Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

$$\text{Khi đó } \phi = \widehat{AMH} \text{ và } \cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n}_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (P) .
- Khi đó $\vec{n}_p \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có $\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_p$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_p = (1; b; c)$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1; 2; 3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$.

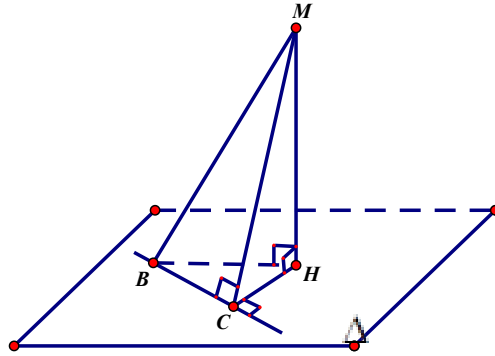
B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{7\sqrt{11}}{11}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$ có VTCP $\vec{u} = (1; -2; -1)$.

$(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2; -1; -2)$.

Gọi α là góc tạo bởi d và (Q) , ta có $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Từ hình vẽ, ta có $(d, (P)) = \widehat{MBH}$ và $((P), (Q)) = \widehat{MCH}$.

Ta thấy $\sin \widehat{MCH} = \frac{MH}{MC} \geq \frac{MH}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy góc $((P), (Q)) = \widehat{MCH}$ nhỏ nhất khi $\sin \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ hay $\cos \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

*Viết phương trình mặt phẳng (P)

-CÁCH 1:

Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(Q)} \cdot \vec{u} = 0 \\ \cos(\vec{n}, \vec{n}_{(Q)}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B - C = 0 \\ \frac{|2A - B - 2C|}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ |3B| = \sqrt{3(2B + C)^2 + B^2 + C^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ 6B^2 + 6C^2 + 12BC = 0 \end{cases} \quad (1)$

Nếu $B = 0$ suy ra $A = C = 0$ loại.

Nếu $B \neq 0$ từ (1) suy ra $\left(\frac{C}{B}\right)^2 + 2\frac{C}{B} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B} = -1 \Rightarrow C = -B$ suy ra $A = B$.

Mặt phẳng $(P): Bx + By - Bz + D = 0$ đi qua điểm $N(0; -1; 2) \in d$ suy ra $D = 3B$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Suy ra $d(A; (P)) = \sqrt{3}$.

-CÁCH 2

Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$ thì góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp d$. Do đó, mặt phẳng (P) thỏa đề bài là mặt phẳng chứa d và cắt (Q) theo giao tuyến Δ sao cho $\Delta \perp d$.

• $\begin{cases} \Delta \subset (Q) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q]$ làm vec tơ chỉ phương.

• (Q) chứa d và $\Delta \Rightarrow (P)$ qua $M(0; -1; 2) \in d$ và nhận $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (6; 6; -6)$ làm vector

pháp tuyến $\Rightarrow \boxed{(P): x + y - z + 3 = 0}$. Vậy $d(A; (P)) = \sqrt{3}$.

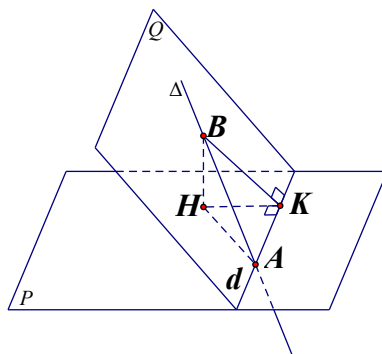
Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

- A. $x - 2y + z = 0$. B. $x + 22y + 10z = 0$. C. $x - 2y - z = 0$. D. $x + 10y - 22z = 0$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ được viết lại dưới dạng tham số $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Do đó Δ cắt (P) tại điểm $A(0; 0; 0) \equiv O$.

Lại có Δ và (P) không vuông góc nhau nên ta đi chứng minh góc nhỏ nhất giữa (P) và (Q) là góc giữa Δ và (P) . Thật vậy trên Δ lấy B khác A , kẻ BH vuông góc với (P) tại H và BK vuông góc d tại K (d là giao tuyến của (P) và (Q)) tại K . Khi đó góc giữa (Q) và (P) là góc $\widehat{BKH}$.

$$HA \geq HK \Rightarrow \tan \widehat{BKH} = \frac{BH}{HK} \geq \frac{BH}{HA} = \tan \widehat{BAH}$$

$$\begin{cases} \widehat{BKH}, \widehat{BAH} < 90^\circ \\ \tan \widehat{BKH} \geq \tan \widehat{BAH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BKH} \geq \widehat{BAH} = \left(\widehat{\Delta, (P)} \right) = \arcsin \frac{4}{9}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv A \Leftrightarrow \Delta \perp d$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa (Δ) và cắt (P) theo một giao tuyến vuông góc Δ .

***Viết phương trình của (Q)**

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$, (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; -2)$ nên d có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = [\vec{u}_1, \vec{n}_1] = (-6; 5; 2)$.

(Q) chứa Δ và d nên nhận $\vec{n}_2 = [\vec{u}_2; \vec{u}_1] = (1; 10; -22)$ làm vector pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $A(0; 0; 0)$ và nhận $\vec{n}_2 = (1; 10; -22)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với $\text{mp}(P)$ một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một vector pháp tuyến của (Q) . Đẳng thức nào **đúng**?

A. $a - b = -1$.

B. $a + b = -2$.

C. $a - b = 1$.

D. $a + b = 0$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 2; 1)$.

Theo giả thiết, $d \subset (Q)$ và $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một vector pháp tuyến của (Q) nên ta có $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow -a + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2b + 1$. (1)

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; -1; -2)$.

$$\text{Ta có } \cos(\widehat{(P), (Q)}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_P, \vec{n}_Q}) \right| = \frac{|2a - b - 2|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad (2)$$

$$\text{Thế (1) vào (2) ta được } \cos(\widehat{(P), (Q)}) = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}$$

Khi góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất thì $\cos(\widehat{(P), (Q)})$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(b) = \frac{b}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}$, có $f'(b) = \frac{b+1}{\sqrt{(5b^2 + 4b + 2)^3}} = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Bảng biến thiên

b	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(b)$	$-$	0	$+$
$f(b)$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Từ đó suy ra với hàm số $g(b) = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4b + 2}}$ có $\max_{\mathbb{R}} g(b) = g(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $b = -1 \Rightarrow a = -1$

Vậy: $a + b = -2$.

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $E(-3; 0; 4)$. B. $M(3; 0; 2)$. C. $N(-1; -2; -1)$. D. $F(1; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (1; -1; -2)$ và VTCP của trục Oy là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Gọi α là góc giữa d và Oy , ta có $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{j}|}{|\vec{u}_d| |\vec{j}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$ với

Gọi β là góc giữa mặt phẳng (P) và Oy , do (P) chứa d nên ta có $\beta \leq \alpha$. Dấu bằng xảy ra khi mặt phẳng (P) tạo với Oy một góc β thỏa mãn $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

(P) chứa d nên (P) có dạng $m(x + y + 1) + n(2x + z - 2) = 0$, $m^2 + n^2 > 0$

$\Leftrightarrow (m + 2n)x + my + nz + m - 2n = 0$, $m^2 + n^2 > 0$

$\sin \beta = \frac{|m|}{\sqrt{(m + 2n)^2 + m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow 4m^2 + 20mn + 25n^2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 5n = 0$.

Chọn $m = 5$, $n = -2$ suy ra phương trình mặt phẳng $(P): x + 5y - 2z + 9 = 0$.

Vậy điểm $N(-1; -2; -1) \in (P)$.

CHỦ ĐỀ 6

GIA TRỊ LỚN NHẤT, GIA TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| |\overrightarrow{MI}|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|_{\min}$

Mà $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{IM}$

+ Do $IM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

+ $T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}| = f(t)$ theo hàm t .

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_n})^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI} (\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \\ \Rightarrow T &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \end{aligned}$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{IM}$

+ Do $IM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

+ $T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}| = f(t)$ theo hàm t .

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

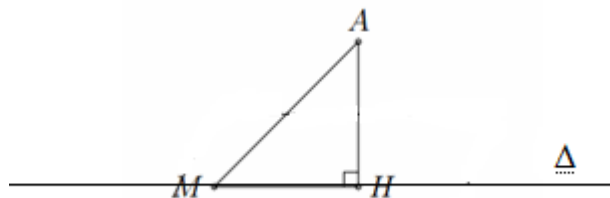
Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ .
- + Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.
- + Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
- + Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

- + $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{AM}$
- + Do $AM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$
- + $T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}| = f(t)$ theo hàm t .
- + Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3; -2; 3)$, $B(1; 0; 5)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(1; 2; 3)$. B. $M(2; 0; 5)$. C. $M(3; -2; 7)$. D. $M(3; 0; 4)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ và ba điểm

$A(6; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a + b + c$ bằng

A. -3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 6$.

B. $T = 12$.

C. $T = \sqrt{5}$.

D. $T = 21$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 2 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

A. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

B. $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Câu 6. Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x - 4y + z - 12 = 0$ và cách $A(-2; 5; 0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

B. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$.

C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$.

D. $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 3; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = -3$.

B. $a + 2b = 0$.

C. $a + 2b = 4$.

D. $a + 2b = 7$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(-3;2;1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\frac{x-1}{-5} = y-2 = \frac{z}{4}$.

B. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$.

B. $M(-1;-2;1)$.

C. $M(3;4;3)$.

D. $M(7;13;5)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ' . Biểu thức $a^2 + 2b^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó giá trị $x_0 + y_0$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. 0 .

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2 < m < 6$.

B. $m > 6$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $-6 < m < 2$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0;8;-5)$.

B. $N(0;2;-5)$.

C. $P(0;-2;-5)$.

D. $Q(-2;0;-3)$.

Câu 14. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với

đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 7 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S) . Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 \end{cases}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$ **B.** $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$ C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$ D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA , MB , MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN .

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A. $J(-3;2;7)$. B. $K(3;0;15)$. C. $H(-2;-1;3)$. D. $I(-1;-2;3)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=2$.

Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P), (Q)$ là mặt phẳng chứa d và

tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N . Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d .

- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{237}}{21}$. D. $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90° . Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

- A. $\frac{36}{\sqrt{5}}$. B. $\sqrt{41}$. C. 6 . D. $\sqrt{5}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{5}{6}$, mặt phẳng

$(P): x+y+z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Giá trị lớn nhất của $d(M; \Delta)$ là

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0)$, $C(0;1;0)$ và $B'(-x_0;0;y_0)$ trong đó $x_0; y_0$ là các số thực dương và thỏa mãn $x_0 + y_0 = 4$.

Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C'$ lớn nhất thì bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

- A. $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$. B. $R = \frac{29}{4}$. C. $R = \frac{\sqrt{41}}{4}$. D. $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

- A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 - t \end{cases}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .

Trả lời:

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ ?

Trả lời:

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

Trả lời:

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng d .

Trả lời:

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng

$(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất. Viết phương trình của

đường thẳng Δ .

Trả lời:

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm

$A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $P = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1; 1; 6)$, $B(-3; -2; -4)$, $C(1; 2; -1)$, $D(2; -2; 0)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

Trả lời:

CHỦ ĐỀ 6

GIA TRỊ LỚN NHẤT, GIA TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| |\overrightarrow{MI}|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|_{\min}$

Mà $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{IM}$

+ Do $IM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

+ $T = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}| = f(t)$ theo hàm t .

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_n})^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI} (\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad \left(\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \right) \\ \Rightarrow T &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \end{aligned}$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{IM}$

+ Do $IM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

+ $T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = f(t)$ theo hàm t .

+ Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

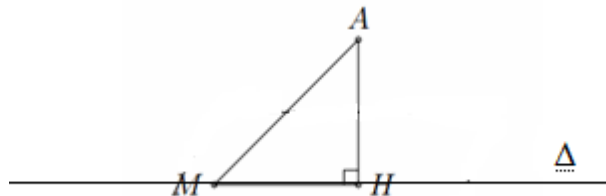
Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ .
- + Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.
- + Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
- + Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

- + $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Tính $\overrightarrow{AM}$
- + Do $AM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow t \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + $M \in \Delta \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$
- + $T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = f(t)$ theo hàm t .
- + Xét $f(t)$ để tìm giá trị nhỏ nhất, suy ra t

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3; -2; 3)$, $B(1; 0; 5)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(1; 2; 3)$. B. $M(2; 0; 5)$. C. $M(3; -2; 7)$. D. $M(3; 0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AB , ta có $I(2; -1; 4)$.

Khi đó: $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$$= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = MI^2 + 6.$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d .

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$$1.(x-2) - 2.(y+1) + 2.(y-4) = 0 \text{ hay } (P): x - 2y + 2z - 12 = 0.$$

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \\ x - 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(2; 0; 5).$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ và ba điểm

$A(6; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a + b + c$ bằng

A. -3 . **B.** 4 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn B

Vì $M \in d$ nên giả sử $M(1-t; 2+t; -t)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 = 3t^2 + 14t + 29; MB^2 = 3t^2 - 4t + 2; MC^2 = 3t^2 + 10t + 21$$

$$\Rightarrow P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 18t^2 + 36t + 96 = 18(t+1)^2 + 78 \geq 78$$

Do đó $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$, khi đó:

$$M(2; 1; 1) \Rightarrow a + b + c = 4.$$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $M(2; 1; 0)$. Gọi

$H(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 6$. **B.** $T = 12$. **C.** $T = \sqrt{5}$. **D.** $T = 21$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$. Vì $H \in d$ nên tọa độ điểm H có dạng

$H(1+2t; -1+t; -t)$. Độ dài MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M lên d .

Ta có $\vec{u}(2; 1; -1)$ là vectơ chỉ phương của d , $\overrightarrow{MH}(-1+2t; -2+t; -t)$.

H là hình chiếu của M lên $d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-1+2t) + (-2+t) + t = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Tọa

$$\text{độ điểm } H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ suy ra } \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 6.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 2 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

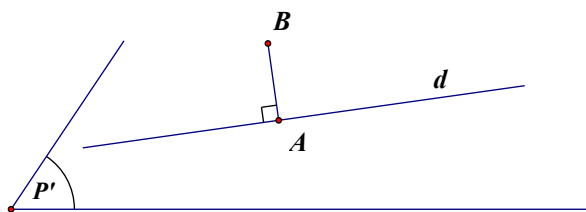
A. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

B. $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải



Gọi (P') chứa A và song song (P) suy ra $(P'): x + y + 2z - 4 = 0$.

Ta thấy $B \in (P')$ do đó $d(B, d)$ đạt giá trị lớn nhất là AB .

Khi đó d vuông góc với AB và d vuông góc với giá của $\vec{n}$ là VTPT của (P) .

Suy ra một VTCP của d là $\vec{u} = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (2; 2; -2)$.

Kết hợp với điểm A thuộc d nên ta chọn đáp án **C**.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3)$, $B(-2; -2; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

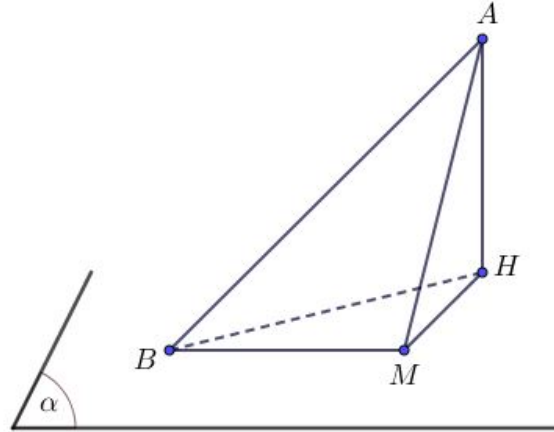
B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) - 1 + 9 = 0 \Rightarrow B \in (\alpha)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên (α) thì $AH \perp MB$, $AM \perp MB \Rightarrow MH \perp MB$

$\Rightarrow MB \leq BH$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$, lúc đó M là hình chiếu của A trên (α) .

Gọi $H(x; y; z)$, $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y - 2; z + 3)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ x - y = -1 \\ x + 2z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-3; -2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1; 0; 2) \Rightarrow MB: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Câu 6. Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4; -2; 1)$, song song với mặt phẳng

$(\alpha): 3x - 4y + z - 12 = 0$ và cách $A(-2; 5; 0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AM} = (6; -7; 1)$, vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (3; -4; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên a .

$d(A; a) = AH \leq AM = \sqrt{86} \Rightarrow d(A; a)$ lớn nhất khi $H \equiv M$.

Khi đó a là đường thẳng đi qua M , song song với (α) và vuông góc với AM .

Gọi $\vec{u}$ là vector chỉ phương của $a \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AM} \end{cases}; [\overrightarrow{AM}, \vec{n}] = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1).$

Chọn $\vec{u} = (1; 1; 1)$. **Đáp án D thỏa mãn.**

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}.$

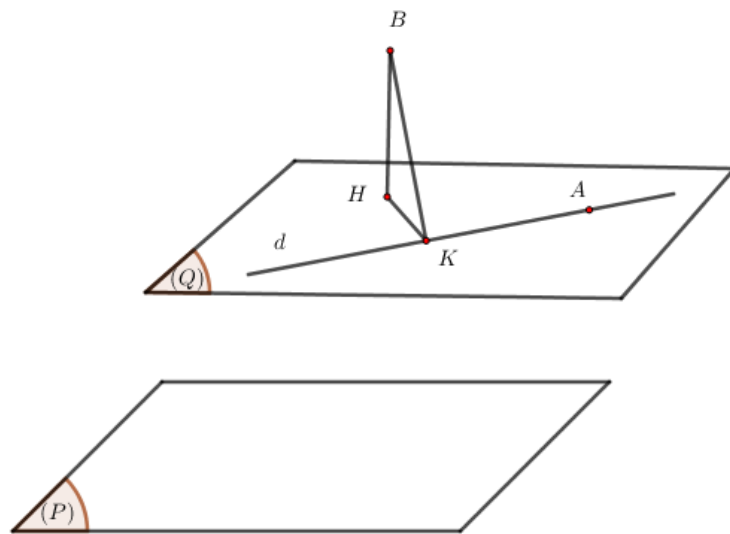
B. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}.$

C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}.$

D. $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3) - 2(y-0) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q) , khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1; -1; 3)$ và

nhận $\vec{n}_{(Q)} = (1; -2; 2)$ làm vector chỉ phương có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Vì $H = BH \cap (Q) \Rightarrow H \in BH \Rightarrow H(1+t; -1-2t; 3+2t)$ và $H \in (Q)$ nên ta có

$$(1+t) - 2(-1-2t) + 2(3+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; \frac{-2}{9}\right) = \frac{1}{9}(26; 11; -2).$$

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d , khi đó

Ta có $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK = BH$, do đó đường thẳng d

đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (26; 11; -2)$ có phương trình chính tắc: $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 3; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm

trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = -3$.

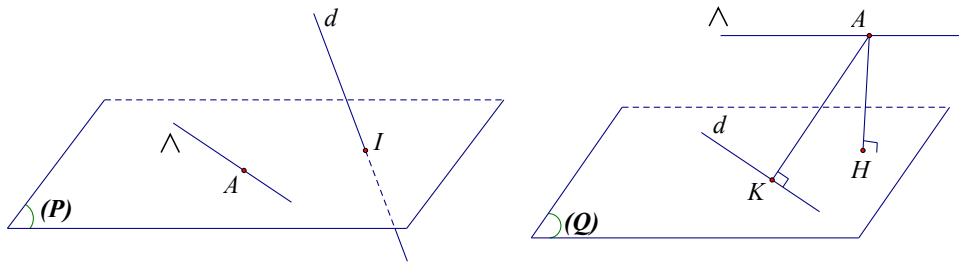
B. $a + 2b = 0$.

C. $a + 2b = 4$.

D. $a + 2b = 7$.

Lời giải

Chọn A



Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$.

Nhận xét rằng, $A \notin d$ và $d \cap (P) = I(-7; 3; -1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Δ . Khi đó $d(\Delta, d) = d(\Delta, (Q)) = d(A, (Q))$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (Q) và d . Ta có $AH \leq AK$.

Do đó, $d(\Delta, d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(A, (Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv K$. Suy ra AH chính là đoạn vuông góc chung của d và Δ .

Mặt phẳng (R) chứa A và d có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(R)} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1] = (-2; 4; 8)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (R) nên có véc tơ pháp tuyến là

$\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(R)}, \vec{u}_1] = (12; 18; -6)$.

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) và song song với mặt phẳng (Q) nên có véc tơ chỉ phương là

$\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (66; -42; 6) = 6(11; -7; 1)$.

Suy ra, $a = 11; b = -7$. Vậy $a + 2b = -3$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -3)$, $B(-3; 2; 1)$. Gọi (d) là

đường thẳng đi qua $M(1; 2; 3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi

đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\frac{x-1}{-5} = y-2 = \frac{z}{4}$.

B. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d(A, (d)) \leq AM$, $d(B, (d)) \leq BM$.

$d(A, (d)) + d(B, (d))$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} AM \perp (d) \\ BM \perp (d) \end{cases}$.

$\overrightarrow{MA} = (1; -1; -6)$ và $\overrightarrow{MB} = (-4; 0; -2)$.

Khi đó (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] = (2; 26; -4) \Rightarrow \vec{u}_1 = (1; 13; -2)$.

Phương trình (d) : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$.

B. $M(-1;-2;1)$.

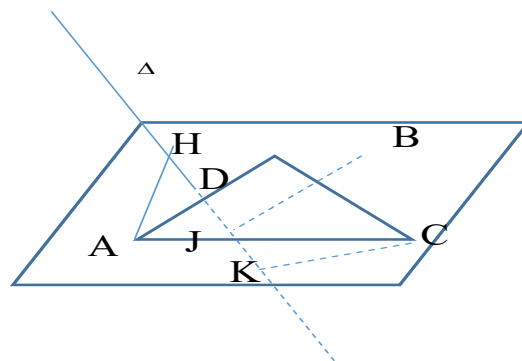
C. $M(3;4;3)$.

D. $M(7;13;5)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C



Ta có phương trình của (P) : $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$

Ta thấy $D(1;1;1) \in (P)$

Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên Δ

Khi đó: $AH \leq AD, BJ \leq BD, CK \leq CD$ Suy ra tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất bằng $AD + BD + CD$ hay Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ khi đó Δ đi qua $M(5; 7; 3)$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ' . Biểu thức $a^2 + 2b^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó giá trị $x_0 + y_0$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử PQ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và Δ'

Với $P \in \Delta$ và $Q \in \Delta'$ có $P(0, 0, 1)$ và $Q(1, 0, 0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ và Δ'

Khi đó ta có $a + b = ME + MF \geq EF \geq PQ$ hay $a + b \geq \sqrt{2}$.

Nhận thấy $\frac{1}{3}(a - 2b)^2 = (a^2 + 2b^2) - \left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{3}ab + \frac{2}{3}b^2\right) = (a^2 + 2b^2) - \frac{2}{3}(a + b)^2$

Do đó ta có $\frac{1}{3}(a - 2b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 \geq \frac{2}{3}(a + b)^2$ hay $a^2 + 2b^2 \geq \frac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + 2b^2$ bằng $\frac{4}{3}$ đạt được khi dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} M \in EF \\ EF \equiv PQ \\ a = 2b \end{cases}$

$\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MQ}$ hay $M\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

- A. $2 < m < 6$. B. $m > 6$. C. $-2 < m < 2$. D. $-6 < m < 2$.

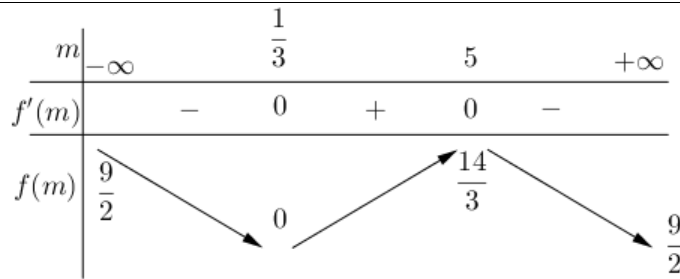
Lời giải

Chọn a

Cách 1:

Ta có $d(A; (P)) = \frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2}} = \frac{(3m-1)}{\sqrt{2(m^2 - m + 1)}}$.

Xét $f(m) = \frac{(3m-1)^2}{2(m^2 - m + 1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2 - m + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}$.



Vậy $\max d(A; (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m = 5 \in (2; 6)$.

Cách 2:

Ta đi tìm đối tượng cố định của mặt phẳng (P) :

$$(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+z)m - x + y - 1 = 0.$$

Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mặt phẳng (P) luôn đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $\begin{cases} x+z=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases}$ tức luôn đi qua

$$\text{đường thẳng } (d): \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}.$$

Gọi $H(t; 1+t; -t) \in (d) \Rightarrow \overline{AH} = (t-1; t; -t-2)$. Để khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất thì

$AH \perp (P) \Rightarrow \overline{AH}$ cùng phương với VTPT của (P) là $\vec{n}_P = (m-1; 1; m)$, suy ra:

$$\frac{t-1}{m-1} = \frac{t}{1} = \frac{-t-2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} mt-t=t-1 \\ mt=-t-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ m=5 \in (2; 6) \end{cases}.$$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0; 8; -5)$.

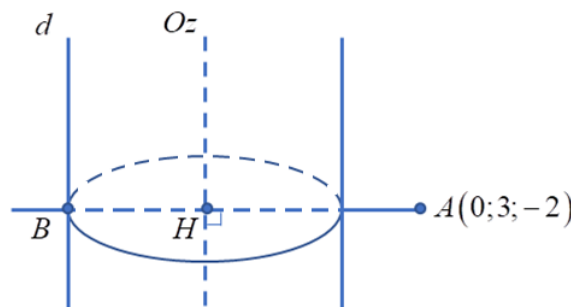
B. $N(0; 2; -5)$.

C. $P(0; -2; -5)$.

D. $Q(-2; 0; -3)$.

Lời giải

Chọn C



Do đường thẳng $d \parallel Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz , suy ra tọa độ $H(0; 0; -2)$.

Do đó $d_{(A,Oz)} = AH = 3$.

Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow B(0; -2; -2).$$

Vậy $d(A, d)_{\max} = 5 \Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz .

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -2 + t \end{cases}.$$

Kết luận: d đi qua điểm $P(0; -2; -5)$.

Câu 14. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3; 1; 1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$

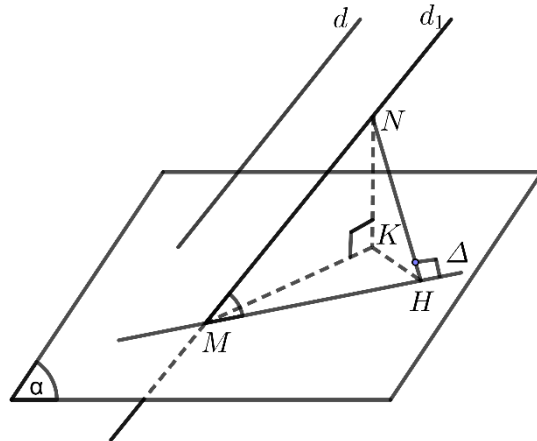
B. $\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = -3 - 4t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 5t' \\ y = 1 - 4t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (0; 3; -2)$.

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Vì $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 5 \neq 0$ nên d cắt (α) .

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1 \parallel d$, suy ra d_1 có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Lấy $N(3;4;-1) \in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ .

Ta có: $(\widehat{d, \Delta}) = \widehat{NMH}$ và $\sin \widehat{NMH} = \frac{NH}{MN} \geq \frac{NK}{MN}$.

Do vậy $(\widehat{d, \Delta})$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK .

Đường thẳng NK có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$$(3+t) + (4+t) - (-1-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3}. \text{ Suy ra } K\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 7 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S) . Phương trình của đường thẳng Δ là

A.
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -2 - t \end{cases}$$

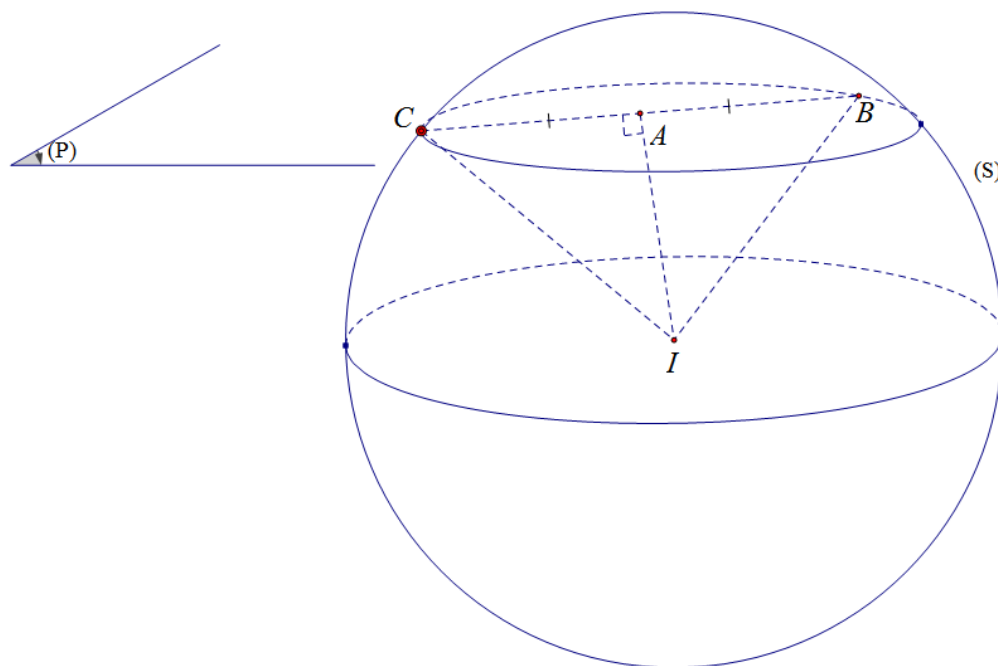
B.
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 7} = 2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AI} = (1;1;2) \Rightarrow AI = \sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) và A nằm trên dây cung BC (1).

$S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \cdot \sin \widehat{BIC} = \frac{R^2}{2} \sin \widehat{BIC} \leq \frac{R^2}{2}$ nên diện tích ΔIBC đạt giá trị lớn nhất là

$$\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow \sin \widehat{BIC} = 1 \Rightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta IBC \text{ vuông cân tại } I \Rightarrow BC = IC\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

Gọi J là trung điểm của BC . Ta có $IJ \perp BC$ và $IJ = \frac{BC}{2} = \sqrt{6}$ (2).

ΔAIJ vuông tại $J \Rightarrow AI \geq IJ$, kết hợp thêm với (1) và (2) ta có $IJ = AI \Rightarrow A \equiv J \Rightarrow A$ là trung điểm của BC và $IA \perp BC$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1)$ có giá vuông góc với Δ .

Vậy Δ nhận $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{AI}] = (1; -1; 0)$ làm vectơ chỉ phương và đi qua $A(0; 1; -2)$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng (P): $2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu (S): $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 5)$ và bán kính $R = 6$.

$$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow \text{điểm } E \text{ nằm trong mặt cầu } (S).$$

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

$$\text{Suy ra: } \vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}_P; \vec{EI}] = (5; -5; 0) = 5(1; -1; 0).$$

$$\text{Vậy phương trình của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng (α): $2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$$d(I,(\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 5 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 6 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (S) = C(H;r), H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (\alpha).$$

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; -2; 1)$.

$$\Rightarrow \text{PTTS } \Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}. \text{ Tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 7; 3).$$

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\vec{MH} = (1;4;6)$.

Suy ra phương trình $\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

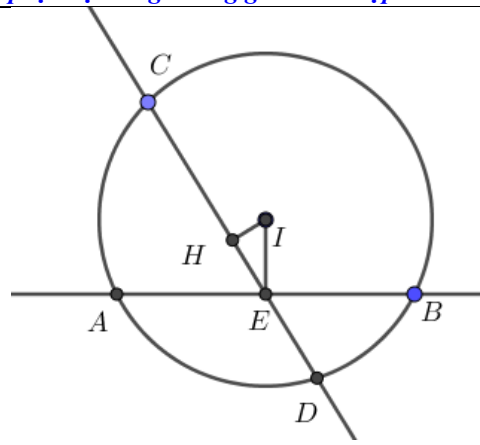
Chọn C

Ta có tâm và bán kính mặt cầu (S) là $I(3;2;5); R=6$

$$IE = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} < R$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua E

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ



Dây cung càng nhỏ khi khoảng cách từ tâm tới đường thẳng Δ càng lớn

Ta có $d(I, \Delta) = IH \leq IE$

Vậy dây cung nhỏ nhất khi đường thẳng Δ vuông góc với $\overrightarrow{IE} = (-1; -1; -2)$

Dựa vào các đáp án ta thấy trong các vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (9; 9; 8)$ $\vec{u}_3 = (-5; 3; 0)$ $\vec{u}_3 = (1; -1; 0)$

$\vec{u}_4 = (4; 3; -3)$

Thì chỉ có $\vec{u}_3 \cdot \overrightarrow{IE} = 0$

Nhận xét: ta hoàn toàn có thể viết được pt đường thẳng Δ bằng cách viết pt mặt phẳng (Q) đi qua E

nhận $\overrightarrow{IE} = (-1; -1; -2)$ làm một vectơ pháp tuyến, khi đó $\Delta = (P) \cap (Q)$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1

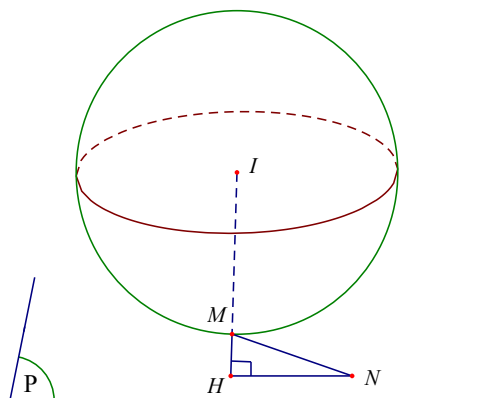
B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$; $d(I; (P)) = 4 > R \Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)

không có điểm chung.

Dựng $IH \perp (P), (H \in (P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N \equiv H$.

Phương trình đường thẳng IH :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

Điểm $M(1+2t; -2-t; -1+2t) \in (S)$ nên $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1. \text{ Khi đó } M_1(3; -3; 1), M_2(-1; -1; -3).$$

Thử lại: $d(M_1; (P)) = 1$; $d(M_2; (P)) = 7 > IH = 4$ (loại).

Vậy $MN_{\min} = MH = 1$ khi $M(3; -3; 1); N\left(\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-1; 2; 4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA , MB , MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN .

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

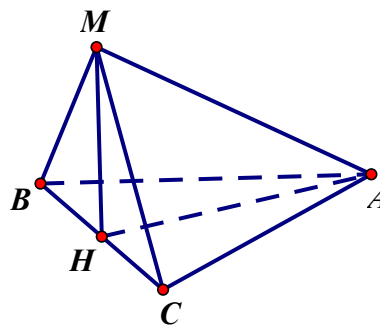
B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ suy ra ΔABC vuông tại A .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (ABC) . Ta có:

$$(\widehat{MA, (ABC)}) = (\widehat{MA, HA}) = \widehat{MAH}$$

$$(\widehat{MB, (ABC)}) = (\widehat{MB, HB}) = \widehat{MBH}$$

$$(\widehat{MC, (ABC)}) = (\widehat{MC, HC}) = \widehat{MCH}$$

Theo giả thiết $\widehat{MAH} = \widehat{MBH} = \widehat{MCH} \Rightarrow \Delta MAH = \Delta MBH = \Delta MCH$ (g.c.g)

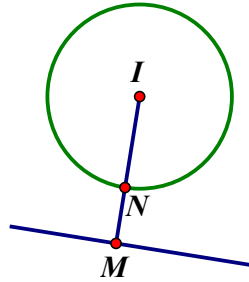
Do đó: $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Suy ra: H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(1; 2; 2)$.

Ta có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; -8; 8)$, Chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng MH là $\overrightarrow{u_{MH}} = (1; -1; 1)$.

Phương trình đường thẳng MH có dạng:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 3)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Gọi $K(1+t; 2-t; 2+t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng MH .

Ta có: $\overrightarrow{IK} = (t-2; -t; t-1)$, $\overrightarrow{u_{MH}} = (1; -1; 1)$

Do $IK \perp MH$ nên $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{u_{MH}} = 0$, ta được: $t = 1$. Khi đó: $K(2; 1; 3)$ và $IK = \sqrt{2}$

Do $IK > R$ nên đường thẳng MH không cắt mặt cầu.

Ta có: $MN \geq d(I, MH) - IN = IK - IN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

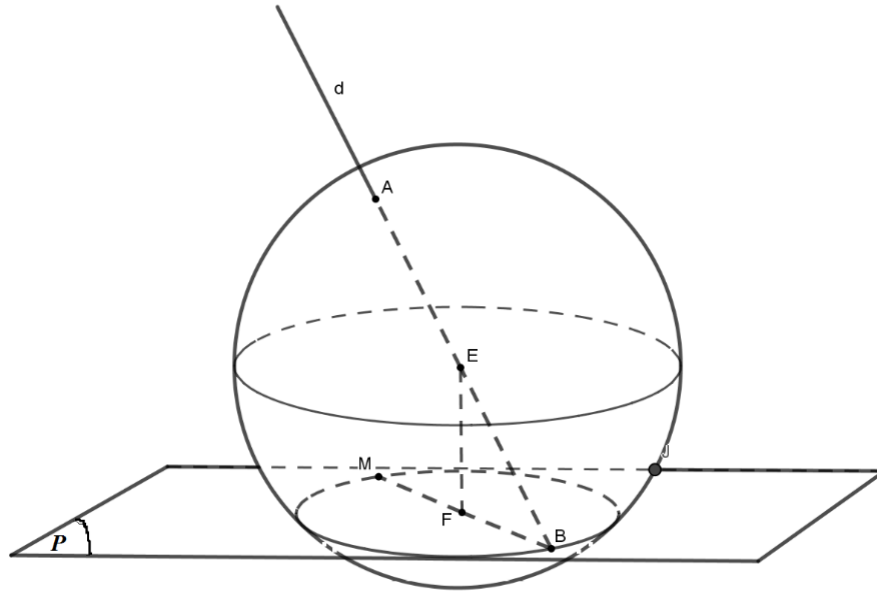
Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A. $J(-3; 2; 7)$. B. $K(3; 0; 15)$. C. $H(-2; -1; 3)$. D. $I(-1; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn D



- Đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ có phương trình là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-4} \Rightarrow \text{giao điểm của } d \text{ và } (P) \text{ là } B = (-2; -2; 1).$$

- Do M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° nên M nằm trên mặt cầu (S) đường kính AB .

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow E = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right) \Rightarrow AE^2 = \frac{41}{4}$$

$$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + x + 2z - 9 = 0.$$

- Lại do $M \in (P)$ nên M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) , gọi là đường tròn (C) .

- Mặt khác B là điểm cố định trên đường tròn (C) nên độ dài MB lớn nhất khi MB là đường kính của đường tròn (C) .

- Gọi F là tâm của $(C) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của E trên (P) .

Đường thẳng EF nhận vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; -1)$ của (P) làm vector pháp tuyến

$$\Rightarrow EF: \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow F = \left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right) \text{ (là giao điểm của } (P) \text{ và } EF).$$

- Vì MB là đường kính của (C) nên $M = (-3; -2; -1) \Rightarrow \vec{MB} = (1; 0; 2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng $MB \Rightarrow$ phương trình đường thẳng MB là:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Trong các điểm đã cho ở các đáp án A, B, C, D chỉ có điểm $I(-1; -2; 3)$ (đáp án D) thuộc đường thẳng MB .

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r = 2$.

Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), m$ là tham số thực. Giả sử $(P), (Q)$ là mặt phẳng chứa d và

tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N . Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d .

A. $\sqrt{5}$.

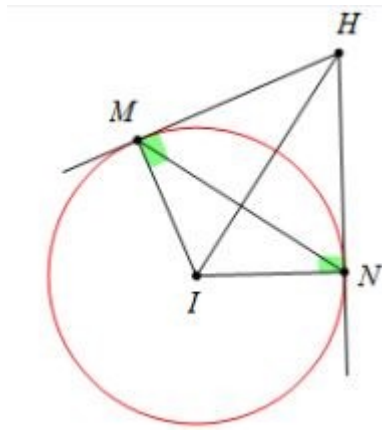
B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{237}}{21}$.

D. $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng thiết diện đi qua tâm I, M, N cắt đường thẳng d tại $H \Rightarrow IH \perp d, d(I, d) = IH$.

Ta có $MN = 2MK = 2 \cdot \frac{MH \cdot MI}{IH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{IH^2 - r^2} \cdot r}{IH} = \frac{4\sqrt{IH^2 - 4}}{IH} = \frac{4\sqrt{x^2 - 4}}{x} = f(x)$ với $x = IH > 2$.

Ta có $f'(x) = \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} > 0, \forall x > 2$, suy ra hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Do đó $MN_{\min} \Leftrightarrow IH_{\min}$. Ta có $\vec{u}_d = (1; -m; m-1), A(1;0;0) \in d$, suy ra $d(I, d) = \frac{|\left[\vec{u}_d, \vec{IA} \right]|}{|\vec{u}_d|}$

$$\frac{\sqrt{25m^2 - 20m + 17}}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{25m^2 - 20m + 17}{2m^2 - 2m + 2}$ có bảng biến thiên là

m	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	3	$+\infty$			
$f'(m)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
f	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{3}$	$\nearrow$	13	$\searrow$	$\frac{25}{2}$

Suy ra $IH_{\min}$ khi $m = \frac{1}{5}$. Đường thẳng d có phương trình là $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -\frac{1}{5}t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -\frac{4}{5}t \end{cases}$.

$$\text{Khoảng cách } d(B, d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d \right] \right|}{\left| \vec{u}_d \right|} = \frac{\sqrt{416}}{\sqrt{42}} = \frac{4\sqrt{273}}{21}.$$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ và điểm $A(1; 2; -3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90° . Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

- A. $\frac{36}{\sqrt{5}}$. B. $\sqrt{41}$. C. 6. **D. $\sqrt{5}$.**

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \\ 2x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 3t) + 2(2 + 4t) - (-3 - 4t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1).$$

Do M nhìn đoạn AB dưới một góc 90° nên M thuộc mặt cầu (S) có đường kính $AB = \sqrt{41}$. Lại do $M \in (P)$ nên M thuộc đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) .

Do MB là một dây cung của đường tròn này nên MB lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) . Gọi $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$ là trung điểm AB thì I là tâm mặt cầu (S) và $d(I; (P)) = 3$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là

$$r = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{\frac{41}{4} - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } MB_{\max} = 2r = \sqrt{5}.$$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{5}{6}$, mặt phẳng

$(P): x + y + z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P)

và (S) . Giá trị lớn nhất của $d(M; \Delta)$ là

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. **D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.**

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;0)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Ta có: $d(I;(P)) = \frac{1}{3} < R$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ qua O và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OI} = (1;-1;0), [\overrightarrow{OI}, \vec{a}] = (-1;-1;2)$.

Ta có: $d(I;\Delta) = \frac{|\overrightarrow{OI}, \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{2}$.

Mặt khác $\Delta \perp (P)$, gọi H là tâm của đường tròn (C) giao tuyến của (P) và (S) .

Ta có: $IH \parallel \Delta$. Do đó $d(M;\Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(M;\Delta) = r + d(IH;\Delta) = r + d(I;\Delta)$

Khoảng cách lớn nhất của $d(M;\Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy đáp án cần chọn là **A**.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0)$, $C(0;1;0)$ và $B'(-x_0;0;y_0)$ trong đó x_0, y_0 là các số thực dương và thỏa mãn $x_0 + y_0 = 4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

A. $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

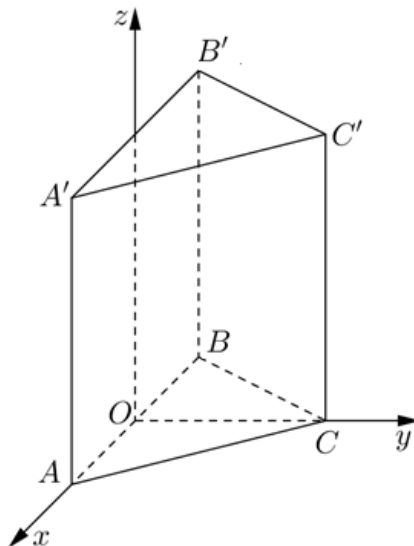
B. $R = \frac{29}{4}$.

C. $R = \frac{\sqrt{41}}{4}$.

D. $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Xác định tọa độ các đỉnh hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0)$, $C(0;1;0)$

$A'(x_0;0;y_0)$, $B'(-x_0;0;y_0)$, $C'(0;1;y_0)$

+ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$.

$$\overrightarrow{AC'} = (-x_0; 1; y_0), \overrightarrow{B'C} = (x_0; 1; -y_0) \text{ và } \overrightarrow{CC'} = (0; 0; y_0)$$

$$d(AC', B'C) = \frac{|\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{CC'}|}{|\overrightarrow{AC'} \times \overrightarrow{B'C}|} = \frac{|x_0 y_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \sqrt{\frac{(x_0 y_0)^2}{(x_0 + y_0)^2 - 2x_0 y_0}}$$

$$\text{Đặt } t = x_0 y_0 \leq \left(\frac{x_0 + y_0}{2} \right)^2 = 4 \Rightarrow t \in (0; 4]$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2}{16 - 2t} \Rightarrow f'(t) = \frac{32t - 2t^2}{(16 - 2t)^2}.$$

$$\text{Cho } f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 16 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(t)$			+	
$f(t)$				

Giá trị lớn nhất của $d(AC', B'C)$ bằng $f(4)$ nên $x_0 y_0 = 4$ (1)

Mặt khác $x_0 + y_0 = 4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $x_0 = y_0 = 2$.

Khi đó, $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{5}$ và chiều cao hình lăng trụ là $h = CC' = 2$

Ta có $r = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{2}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ΔABC .

$$\text{Vậy } R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -2)$, $B(5; 1; 1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 9 = 0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 - t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; -3; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{3^2 + 6^2 - 9} = 6$.

Vì $IA = R$ nên $A \in (S) \Rightarrow d$ đi qua A và vuông góc với $IA \Rightarrow d$ nằm trong (P) là mặt phẳng đi qua A

và vuông góc với IA . Ta có $(P): x + 2y + 2z = 0$.

Mặt khác, ta luôn có: $d(B, d) \geq d(B, (P)) = 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow d$ là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P) .

Ta tìm hình chiếu H của B trên (P) :

Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc với $(P) \Rightarrow \Delta: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Vì H là giao điểm của Δ và (P) nên tọa độ H là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow H(4; -1; -1).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2; -2; 1).$$

Do đó, d là đường thẳng đi qua hai điểm A và H nên có phương trình:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm

$A(2; 0; 3)$, $B(2; -2; -3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x_0 = 2$

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} MA^4 + MB^4 &= (MA^2 + MB^2)^2 - 2MA^2 \cdot MB^2 = \left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \right)^2 - 2 \left(MI^2 - \frac{AB^2}{4} \right)^2 \\ &= 4MI^4 + 2MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} - 2MI^4 + MI^2 AB^2 - \frac{AB^4}{8} \\ &= 2MI^4 + 3MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} = 2 \left(MI^2 + \frac{3AB^2}{4} \right)^2 - \frac{7}{10} AB^4 \end{aligned}$$

Do đó, $MA^4 + MB^4$ đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên d .

Điểm $I(2; -1; 0)$. Lấy $M(2+t; -1+2t; 3t) \in d$. $\overrightarrow{IM} = (t; 2t; 3t)$

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $M \equiv I$.

Vậy $x_0 = 2$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , song song với (P) và cách điểm $B(-1; 0; 2)$ một khoảng ngắn nhất. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ ?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\vec{u} = (6; -3; -5)$

Cách 1

Gọi (Q) chứa Δ và song song với (P) . Suy ra (Q) có phương trình:

$$x - 1 + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0.$$

Khi đó $d(B; \Delta)_{\min} = BH$ với H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (Q) .

$$\text{Đường thẳng } BH \text{ đi qua } B, \text{ vuông góc với mặt phẳng } (Q) \text{ có phương trình } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tọa độ giao điểm H của đường thẳng BH và mặt phẳng (Q) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}. \text{ Giải hệ trên ta được } H\left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; 2\right).$$

$$\text{Do đó } \Delta \text{ là đường thẳng } AH \text{ có } \overrightarrow{AH} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; -1\right).$$

Suy ra $\vec{u} = (6; -3; -5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ .

Cách 2 :

Gọi $\vec{u} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

Mặt phẳng $(P): x + 2y = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

Δ song song với (P) nên $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b \Rightarrow \vec{u} = (-2b; b; c)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 1), [\vec{u}, \overrightarrow{AB}] = (b + c; 2b - 2c; 4b)$.

$$\text{Khoảng cách từ } B(-1; 0; 2) \text{ đến } \Delta \text{ là } d(B, \Delta) = \frac{\|[\vec{u}, \overrightarrow{AB}]\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{\frac{21b^2 - 6bc + 5c^2}{5b^2 + c^2}}.$$

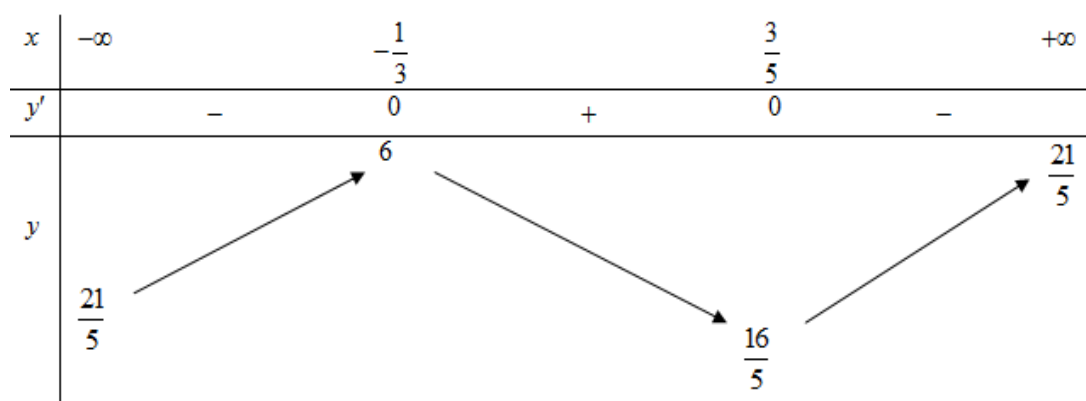
Nếu $c = 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow d(B, \Delta) = \sqrt{\frac{21}{5}}$.

Nếu $c \neq 0$ $d(B, \Delta) = \sqrt{\frac{21\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 6\frac{b}{c} + 5}{5\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}}$, đặt $t = \frac{b}{c} \Rightarrow d(B, \Delta) = \sqrt{\frac{21t^2 - 6t + 5}{5t^2 + 1}}$.

Xét $f(t) = \frac{21t^2 - 6t + 5}{5t^2 + 1}$, $f'(t) = \frac{30t^2 - 8t - 6}{(5t^2 + 1)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ bằng $\frac{16}{5}$ khi $t = \frac{3}{5}$.

$\Rightarrow (d(B, \Delta))_{\min} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ khi $t = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$.

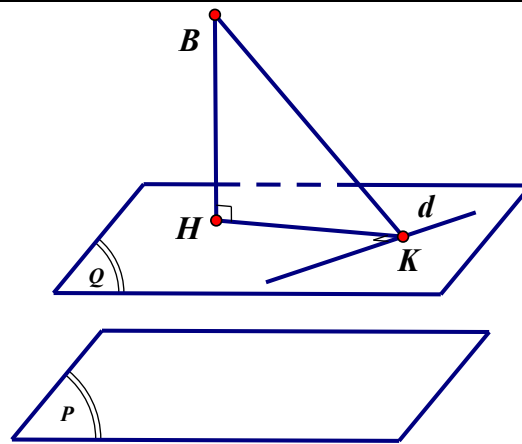
Chọn $b = -3, c = -5 \Rightarrow a = 6$. Vậy Δ nhận vectơ $\vec{u} = (6; -3; -5)$ làm vectơ chỉ phương

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$



Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và $(Q) \parallel (P)$. Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P) . Ta lập được phương trình mặt phẳng $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d . Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH .

Đường thẳng d bây giờ đi qua A, H nên có phương trình $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 30. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng d .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$

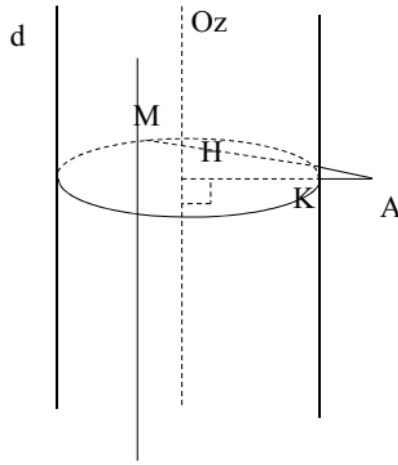
Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2.

Có $H(0; 0; -2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0; 3; -2)$ trên Oz.

Có $\overrightarrow{HA}(0; 3; 0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz. M là hình chiếu vuông góc của A trên d

Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).



Để thấy $d(A; d) = AM \geq AK$; $AK = AH - d(A; d) = 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HA} \Rightarrow K(0; 2; -2) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Câu 31. Trong không gian Oxyz, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3; 1; 1)$, nằm trong mặt phẳng

$(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất. Viết phương trình của

đường thẳng Δ .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = -3 - 4t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$

Cách 1.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên (α) , khi đó góc $(\widehat{d, d'})$ là góc nhỏ nhất trong các góc tạo bởi d với đường thẳng bất kỳ trong (α) .

d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (0; 3; -2)$, (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 1; -1)$, gọi $\vec{n}_\beta$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) tạo bởi d và d' thì $\vec{n}_\beta \perp \vec{u}_d, \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha$ ta chọn $\vec{n}_\beta = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_d] = (1; 2; 3)$

Gọi $\vec{u}_{d'}$ là véc tơ chỉ phương của d' thì $\vec{u}_{d'} \perp \vec{n}_\alpha, \vec{u}_{d'} \perp \vec{n}_\beta$, ta chọn $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (5; -4; 1)$.

Đường thẳng Δ song song hoặc trùng với d' nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_{d'} = (5; -4; 1)$.

Trong các đáp án A, B, C, D cho ở đề bài thì chỉ có đáp án B có véc tơ chỉ phương thỏa điều kiện.

Thay tọa độ của M vào phương trình của Δ trong đáp án B ta được:

$$\begin{cases} 3 = 8 + 5t' \\ 1 = -3 - 4t' \Leftrightarrow t' = -1 \text{ (thỏa mãn).} \\ 1 = -3 - 2t' \end{cases}$$

Vậy đáp án B thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2.

d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (0; 3; -2)$, (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 1; -1)$,

Giả sử Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$

Do $\Delta \subset (\alpha)$ ta có: $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b$.

Gọi φ là góc giữa Δ và d , $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, khi đó:

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d)| = \frac{|3b - 2c|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b - 2a|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2ab}}$$

Góc φ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos \varphi$ lớn nhất, ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $a = 0$ ta được $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 0$ ta được: $\cos \varphi = \frac{|t - 2|}{\sqrt{26(t^2 + t + 1)}}$, $\left(t = \frac{b}{a}\right)$

Ta có $26 \cos^2 \varphi = \frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + t + 1}$, đặt $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + t + 1}$, $t \in \mathbb{R}$, có:

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 6t - 8}{(t^2 + t + 1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	$-\infty$	$-4/5$	2	$+\infty$	
f'(t)	+	0	-	0	+
f(t)		$28/3$		1	
	1		$2/3$		

Do $\cos \varphi \geq 0$ nên $\cos \varphi$ lớn nhất khi $f(t)$ lớn nhất, từ bảng biến thiên ta được $\max_{\mathbb{R}} f(t) = f\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Khi đó $\frac{b}{a} = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5b = -4a$, chọn $a = 5 \Rightarrow b = -4$ và ta được và ta được $c = 1$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (5; -4; 1)$.

Trong các đáp án A, B, C, D cho ở đề bài thì chỉ có đáp án B có véc tơ chỉ phương thỏa điều kiện.

Thay tọa độ của M vào phương trình của Δ trong đáp án B ta được:

$$\begin{cases} 3 = 8 + 5t' \\ 1 = -3 - 4t' \Leftrightarrow t' = -1 \text{ (thỏa mãn).} \\ 1 = -3 - 2t' \end{cases}$$

Vậy đáp án B thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm

$A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $P = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 3$

$$M \in d \Rightarrow M(-1 + 2t; 1 - t; 2t).$$

Chu vi tam giác MAB là: $AM + BM + AB$. Vì $AB = \text{const}$ nên chu vi nhỏ nhất khi $(AM + BM)$ nhỏ nhất.

$$\overline{AM}(2t - 2; -t - 4; 2t), \overline{BM}(2t - 4; -t - 2; 2t - 6).$$

$$AM + BM = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(6 - 3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = (3t; 2\sqrt{5}), \vec{v} = (6 - 3t; 2\sqrt{5}) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}).$$

Áp dụng bất đẳng thức vector: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$. Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

Ta có: $AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{29}$. Do đó $(AM + BM)$ nhỏ nhất khi

$$\text{tồn tại số } k \text{ dương sao cho } \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = k(6 - 3t) \\ 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 1 \end{cases}. \text{ Khi đó } M(1; 0; 2).$$

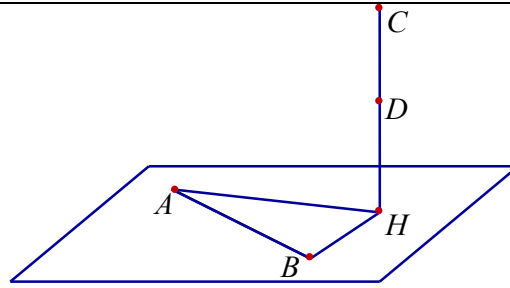
$$\text{Vậy } P = a + b + c = 1 + 0 + 2 = 3.$$

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = a + b + c = 1$



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM .

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10) \Rightarrow AB = \sqrt{113}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -3; -10), \overrightarrow{CD} = (1; -4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -2 + 12 - 10 = 0 \Rightarrow AB \perp CD.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD .

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD .

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1; 1; 6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD} = (1; -4; 1)$ là:

$$x - 4y + z - 1 = 0.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$H \in CD \Leftrightarrow H(1+t; 2-4t; -1+t).$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 1+t-4(2-4t)-1+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Với } \forall M \in CD, \text{ ta có } \begin{cases} AM \geq AH \\ BM \geq BH \end{cases} \Rightarrow AM + BM \geq AH + BH.$$

$$C_{ABM} = AB + AM + BM \geq \sqrt{113} + AH + BH, \forall M \in CD.$$

$$\text{Suy ra } \min C_{ABM} = \sqrt{113} + AH + BH, \text{ đạt được } M \equiv H \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } T = a + b + c = 1.$$

CHỦ ĐỀ 7

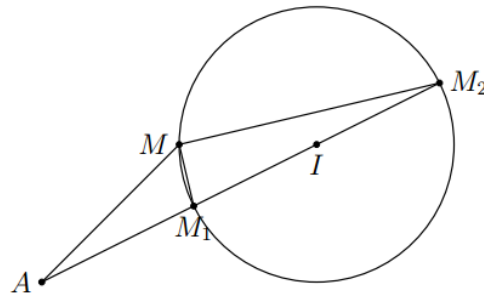
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

DẠNG 4

MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

Bài toán. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .

Phương pháp giải



Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI . Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) .

Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có $AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \leq AM \leq R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

DẠNG 1

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4), C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

- A. $P = 0$. B. $P = 6$. C. $P = \sqrt{14}$. D. $P = 3\sqrt{14}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 9.

Câu 3. Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 1; 3), B(21; 9; -13)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a.b.c$ bằng

- A. 3. B. 8. C. 6. D. -18.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2), B(1; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{19}{4}$. D. $\frac{21}{4}$.

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là

- A. 12. B. 6. C. 10. D. 24.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1), B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

- A. 64. B. 68. C. 60. D. 48.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3), B(1;-1;2), C(3;-6;0), D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$ sao cho $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $P = 6$.

B. $P = 2$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64.

B. 68.

C. 60.

D. 48.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 103.

B. 108.

C. 105.

D. 100.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 39$ thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

A. $\sqrt{7}$.

B. $2\sqrt{7}$.

C. $3\sqrt{7}$.

D. $4\sqrt{7}$.

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}|$ là:

A. 12.

B. $12\sqrt{2}$.

C. 24.

D. $24\sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $(MA + 2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$.

B. $3\sqrt{79}$.

C. $5\sqrt{79}$.

D. $3\sqrt{82}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ và

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$.

B. 5.

C. $\sqrt{34}$.

D. 3.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

A. $S_{\min} = 30$.

B. $S_{\min} = 20$.

C. $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$.

D. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$.

B. 27.

C. $5\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{742}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

A. $2\sqrt{265}$.

B. $\sqrt{265}$.

C. $3\sqrt{265}$.

D. $4\sqrt{265}$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

A. $\sqrt{41}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. 7.

D. $\sqrt{17}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$.

B. 8.

C. 6.

D. $\frac{51}{7}$.

Câu 22. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1$.

B. $\sqrt{3}+1$.

C. $4-2\sqrt{3}$.

D. $4+2\sqrt{3}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$.

B. $12\sqrt{3}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

D. $5\sqrt{3}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + y + z + 3 = 0$.

B. $x + y + z - 3 = 0$.

C. $x + 2y + 3z - 3 = 0$.

D. $x + 2y + 3z + 3 = 0$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $(d): \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A' , B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA' , BB' cùng song song với (d) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Điểm $M \in (S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox ; Oy ; Oz tại các điểm A , B , C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2)$ là:

A. 24.

B. 27.

C. 64.

D. 8.

Câu 28. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn
$$\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$$
. Gọi giá trị lớn

nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng

- A. 10. B. $\sqrt{10}$. C. 8. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t; 2t; 0)$, $B(0; 0; t)$ (với $t > 0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$

tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng

- A. 5 B. 13. C. 11. D. 9.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Câu 30. Cho x, y, z là ba số thực thỏa $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2x + 2y - z$.

A. $\max P = 20$.

B. $\max P = -18$.

C. $\max P = 18$.

D. $\max P = 12$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Tọa độ điểm M trên (S) sao cho $d(M, d)$ đạt GTLN là:

A. $(1; 2; -1)$.

B. $(2; 2; -1)$.

C. $(0; 2; -1)$.

D. $(-3; -2; 1)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$.

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB nhỏ nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$.

D. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z+3}{10}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 2)$, $B(3; 0; 2)$ và mặt cầu $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

A. $x - 4y - 5z + 17 = 0$.

B. $3x - 2y + z - 7 = 0$.

C. $x - 4y + 5z - 13 = 0$.

D. $3x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vector $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$

B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$

C. $MN = 3\sqrt{2}$

D. $MN = 14$

Câu 36. Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1; m; n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

A. $m.n = 4$.

B. $m.n = 2$.

C. $m.n = -4$.

D. $m.n = -2$.

DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}. \text{ Mặt phẳng chứa } d \text{ và cắt } (S) \text{ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có}$$

phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$.

B. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

C. $x - 2y - 3 = 0$.

D. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

A. $T = 3$

B. $T = 4$

C. $T = 5$

D. $T = 2$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4), B(0; 0; 1)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 4 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$?

A. $T = \frac{1}{5}$.

B. $T = \frac{3}{4}$.

C. $T = 1$.

D. $T = -2$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.

C. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

D. $(P): x + 2y + z - 2 = 0$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0; 0; -4), B(2; 0; 0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) , là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax + by - z + c = 0$, khi đó $a - b + c$ bằng:

A. 8.

B. 0.

C. 2.

D. -4.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 4.

B. 2.

C. 4π .

D. Không tồn tại.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

- A. $S = \sqrt{7}$. B. $S = 4$. C. $S = 2\sqrt{7}$. D. $S = 2\sqrt{2}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

- A. $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$ B. $R = \frac{\sqrt{17}}{3}$ C. $R = \frac{\sqrt{17}}{6}$ D. $R = \frac{\sqrt{17}}{17}$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$.
C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$. D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau

$d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}), d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả

hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là:

- A. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$. B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$.
C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$. D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{3}{2}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt

cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

- A. $\sqrt{12}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\sqrt{24}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có

phương trình là

- A.** $y + z + 1 = 0$. **B.** $x + 3y + 5z + 2 = 0$. **C.** $x - 2y - 3 = 0$. **D.** $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$. Gọi tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- A.** $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{11}{3}$ **C.** 14 **D.** $\frac{16}{3}$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

- A.** $O(0; 0; 0)$. **B.** $A\left(1; \frac{3}{5}; -\frac{1}{4}\right)$. **C.** $B(-1; -2; -3)$. **D.** $C(2; 1; 0)$.

CHỦ ĐỀ 7

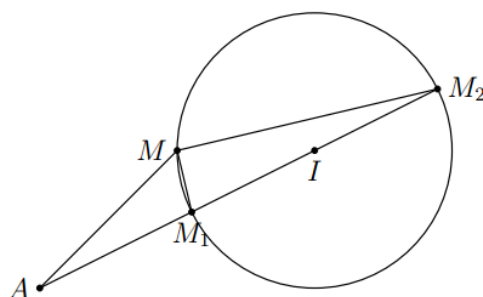
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

DẠNG 4

MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

Bài toán. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .

Phương pháp giải



Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI . Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) .

Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có $AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \leq AM \leq R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

DẠNG 1

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -1; 3), B(-2; -8; -4), C(2; -1; 1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

A. $P = 0$.

B. $P = 6$.

C. $P = \sqrt{14}$.

D. $P = 3\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi J là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JO} + 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OJ} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow J(3; 6; 9)$.

Mà $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ} + (3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC})$ nên $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MJ}|$

Do đó $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MJ}|_{\min}$.

Mặt khác: (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{14}$ và $IJ = 2\sqrt{14} > R \Rightarrow$ điểm J nằm ngoài mặt cầu nên IJ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1, M_2 .

Phương trình đường thẳng $(IJ): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6t \end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 6t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $M_1(2; 4; 6), M_2(0; 0; 0), M_1J = \sqrt{14}; M_2J = 3\sqrt{14}$.

Vậy $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MJ}|_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$.

$P = x_M + y_M = 2 + 4 = 6$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8; 5; -11), B(5; 3; -4), C(1; 2; -6)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a; b; c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a + b$.

A. 6.

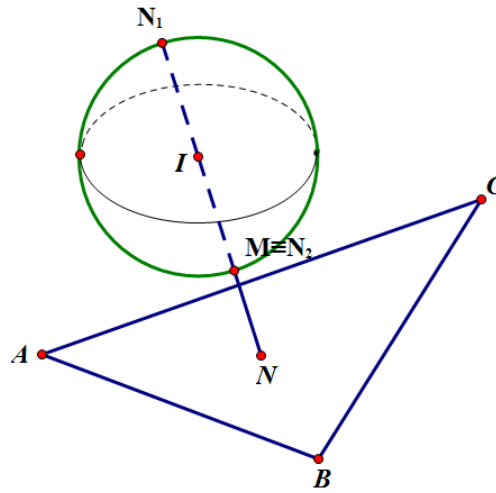
B. 2.

C. 4.

D. 9.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, suy ra $N(-2; 0; 1)$.

Khi đó: $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}) - (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) - (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC})| = |(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}) - \overrightarrow{MN}| = MN$.

Suy ra $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 4; -1)$, suy ra:

$$\overrightarrow{NI} = (4; 4; -2) = (2; 2; -1). \text{ Phương trình } NI = \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{ Thay phương trình NI vào phương trình } (S)$$

$$\text{ta được: } (2t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3; 6; -2), N_2(0; 2; 0)$.

Vì $NN_1 > NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N_2$. Vậy $M(0; 2; 0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a + b = 2$.

Câu 3. Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 1; 3), B(21; 9; -13)$.

Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a.b.c$ bằng

A. 3.

B. 8.

C. 6.

D. -18.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(6; 3; -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } 3MA^2 + MB^2 &= 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2. \end{aligned}$$

Do $3IA^2 + IB^2$ không đổi vì ba điểm $A; B; I$ cố định nên $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S) , $(J(2; 1; 3))$ là tâm của mặt cầu (S) .

Ta có phương trình đường thẳng IJ là
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow IJ \cap (S) = \begin{bmatrix} M_1(4; 2; 1) \\ M_2(0; 0; 5) \end{bmatrix}.$$

Kiểm tra $IM_1 < IM_2$ ($3 < 9$) nên $M_1(4; 2; 1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T = a.b.c = 8$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2)$, $B(1; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$. Xét

điểm M thay đổi thuộc (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{19}{4}$. D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 + 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2 \\ &= 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2 + 2\overrightarrow{MK}(\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB}) = 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2. \end{aligned}$$

Biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } (MA^2 + 2MB^2)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{4}.$$

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là

- A. 12. B. 6. C. 10. D. 24.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ có tâm $I(0; 0; 1)$.

Vì A, B cùng thuộc mặt cầu tâm I nên $IA = IB$.

$$\begin{aligned} OA^2 - OB^2 &= (\overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2OI \cdot BA \cdot \cos \varphi, \text{ với } \varphi = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA}). \end{aligned}$$

Suy ra biểu thức $OA^2 - OB^2$ đạt GTLN khi và chỉ khi $\varphi = 0$.

$$\text{Vậy } \max(OA^2 - OB^2) = 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos 0 = 12.$$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64.

B. 68.

C. 60.

D. 48.

Lời giải

Chọn C

Xét điểm I sao cho: $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$. Giả sử $I(x; y; z)$, ta có:

$$\vec{IA}(4-x; 3-y; 1-z), \vec{IB}(3-x; 1-y; 3-z).$$

$$\text{Do đó: } 2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x) = 3-x \\ 2(3-y) = 1-y \\ 2(1-z) = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow I(5; 5; -1).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= 2MA^2 - MB^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= 2\vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IA} - (\vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB}) \\ &= \vec{MI}^2 + 2\vec{IA}^2 - \vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} - \vec{IB}) = MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + 2\vec{MI} \cdot (2\vec{IA} - \vec{IB}) \\ &= MI^2 + 2IA^2 - IB^2. \end{aligned}$$

Do I cố định nên IA^2, IB^2 không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất). $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1; 2; -1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S) .

Ta có: MI đi qua $I(5; 5; -1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{KI}(4; 3; 0)$.

$$\text{Phương trình của } MI \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1. \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$(1+4t-1)^2 + (2+3t-2)^2 + (-1+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 25t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5}; \frac{19}{5}; -1\right) \Rightarrow M_1I = 2 \text{ (min).}$$

$$\text{Với } t = -\frac{3}{5} \Rightarrow M_2\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}; -1\right) \Rightarrow M_2I = 8 \text{ (max).} \text{ Vậy } \begin{cases} m = P_{\max} = 48 \\ n = P_{\min} = -12 \end{cases} \Rightarrow m - n = 60.$$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$ sao cho $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $P = 6$.

B. $P = 2$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2$.

Lời giải

Chọn A

Với mọi điểm I ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI}(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ Suy ra tọa độ điểm } I \text{ là } I(0;1;2).$$

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

$$\text{Phương trình đường thẳng đi qua } I \text{ và vuông góc với mặt phẳng } (P) \text{ là } \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ điểm } N(t; 1-t; 2+t) \in (P) \Rightarrow t - 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(-1; 2; 1).$$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64.

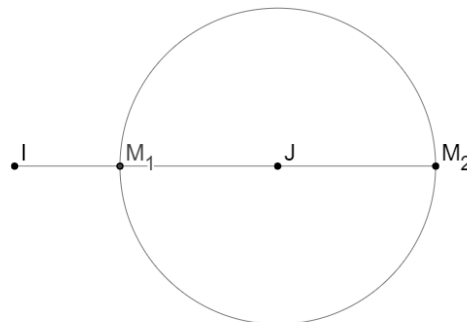
B. 68.

C. 60.

D. 48.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow I(2x_A - x_B; 2y_A - y_B; 2z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow I(5; 5; -1).$$

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 \text{ có tâm } J(1; 2; -1) \text{ và bán kính } R = 3$$

$$\text{Suy ra } IJ = 5$$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$$\min MI = IM_1 = IJ - R = 5 - 3 = 2$$

$$\max MI = IM_2 = IJ + R = 5 + 3 = 8$$

$$\text{Suy ra } m - n = 8^2 - 2^2 = 60$$

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 103.

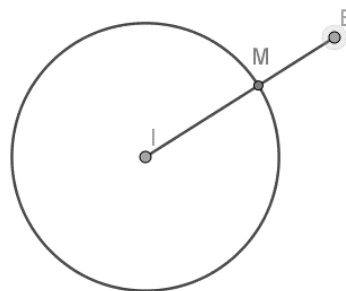
B. 108.

C. 105.

D. 100.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 3)$ bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Suy ra $E(-1; 1; 1)$.

$$\text{Xét } P = 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + 3(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2.$$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

$IE = 2\sqrt{3} > R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng

$$IE - R = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

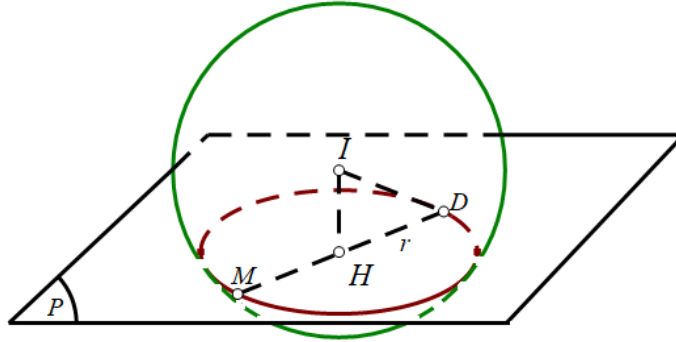
$$\text{Vậy } P = 2MA^2 + 3MB^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 105.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 39$ thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

- A. $\sqrt{7}$. B. $2\sqrt{7}$. C. $3\sqrt{7}$. D. $4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B



+ Mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 39$ có tâm là $I(-2;4;0)$, bán kính $R = \sqrt{39}$.

Gọi $M(x, y, z) \in (S)$. Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = 19 - 4x + 8y$.

$$MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 20 - 6x + 8y.$$

$$\overrightarrow{MB} = (2-x; 1-y; 3-z); \overrightarrow{MC} = (-x; 2-y; -3-z).$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = -2x + x^2 + 2 - 3y + y^2 - 9 + z^2 = 19 - 4x + 8y - 2x - 3y - 7 = -6x + 5y + 12.$$

$$\text{Suy ra } MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = -18x + 18y + 44.$$

$$\text{Theo giả thiết } MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8 \Leftrightarrow -18x + 18y + 44 = 8 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0.$$

$$\text{Do đó } M \in (P): -x + y + 2 = 0.$$

Ta có $d(I; (P)) = \frac{|8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} < \sqrt{39}$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn

$$(C) \text{ có bán kính } R_1 \text{ với } R_1 = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{39 - 32} = \sqrt{7}.$$

$$\text{Mặt khác ta có } \begin{cases} D, M \in (P) \\ D, M \in (S) \end{cases} \Rightarrow D, M \in (C). \text{ Do đó độ dài } MD \text{ lớn nhất bằng } 2R_1 = 2\sqrt{7}.$$

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}|$ là:

- A. 12. B. $12\sqrt{2}$. C. 24. D. $24\sqrt{2}$.

Lời giải

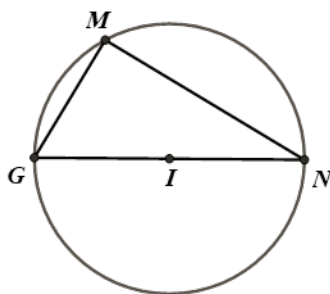
Chọn B

Mặt cầu (S) : tâm $I(0;1;0)$ bán kính $R = 1$

Gọi trọng tâm tam giác ABC là $G(0;0;0)$, trung điểm DE là $N(0;2;0)$

do G, N đều nằm trên (S) và I là trung điểm GN nên GN là đường kính của (S)

$$\begin{aligned} P &= 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}| = 2|3\overrightarrow{MG}| + 3|2\overrightarrow{MN}| \\ &= 6MG + 6MN = 6(MG + MN) \end{aligned}$$



Ta có: $(MG + MN)^2 \leq 2(MG^2 + MN^2) = 2GN^2 = 8$

Suy ra $MG + MN \leq 2\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $12\sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

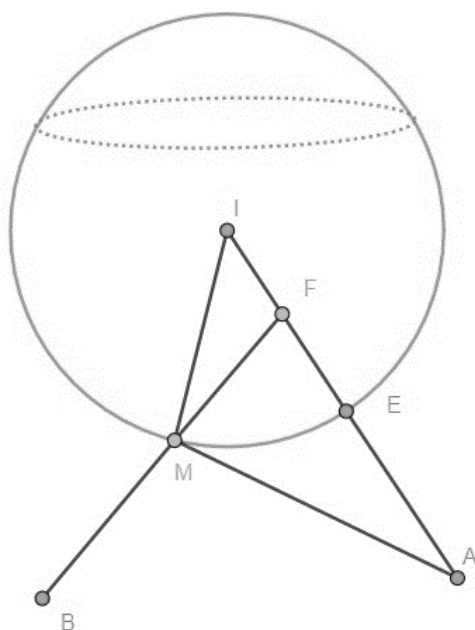
B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0), R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA = 4\sqrt{2} = 2R, E = IA \cap (S) \Rightarrow E(1;2;0)$.

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có $\widehat{AIM}$ chung và $\frac{IF}{IM} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$.

Ta có: $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M = BF \cap (S)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0)$, $B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x; y; z)$.

Ta có: $\overline{AM} = (x-3; y; z)$, $\overline{BM} = (x-4; y-2; z-1)$.

Và $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8 \Leftrightarrow 3[(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 8] = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= MA + 2MB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2 + 3[(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 8]} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 24y + 4z^2 + 36} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\ &= 2\left[\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}\right] \\ &= 2\left[\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2}\right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \geq \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} > 0$.

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{(x+4-x)^2 + (y-3+2-y)^2 + (z+1-z)^2} = 2\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{x}{4-x} = \frac{y-3}{2-y} = \frac{z}{1-z} = t > 0 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4t}{t+1} \\ y = \frac{2t+3}{t+1} \\ z = \frac{t}{t+1} \\ \left(\frac{5t+1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{-2t-1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4t}{t+1} \\ y = \frac{2t+3}{t+1} \\ z = \frac{t}{t+1} \\ 22t^2 - 2t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4+4\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ y = \frac{34+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ z = \frac{1+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ t = \frac{1+\sqrt{133}}{22} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $6\sqrt{2}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

- A. $2\sqrt{82}$. B. $3\sqrt{79}$. C. $5\sqrt{79}$. D. $3\sqrt{82}$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có $IA = 2\sqrt{10} = 2R$ nên tồn tại điểm C cố định sao cho $MA = 2MC \quad \forall M \in (S)$ (1).

Thật vậy, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ điểm C . Khi đó, với mọi điểm

$M(x;y;z) \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4z + 5$, ta có:

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 21$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2x - 4y + 8z + 21 = -4y + 12z + 26.$$

$$MC^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = (2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5.$$

Nên (1) $\Leftrightarrow MA^2 = 4MC^2 \quad \forall M \in (S)$

$$\Leftrightarrow -4y + 12z + 26 = 4[(2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5] \quad \forall x, y, z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-2a)=0 \\ 4(-2b)=-4 \\ 4(4-2c)=12 \\ 4(a^2+b^2+c^2+5)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Lúc này, $IC = \frac{\sqrt{10}}{2} < R < IB = 2\sqrt{37}$ nên C nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S) và

$$MA + 2MB = 2MC + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2BC = 3\sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S) .

$$\text{Vậy } \min(MA + 2MB) = 3\sqrt{82}.$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. 5.

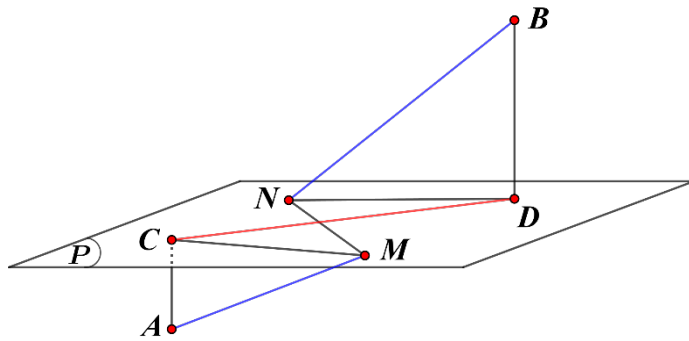
B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



$$\bullet \text{ Xét hệ } \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Vậy $(P): x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P) . Suy ra $AC = 1$, $BD = 2$, $CD = 5$.

• Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, ta được

$$\begin{aligned} AM + BN &= \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} \\ &\geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2} \\ &\geq \sqrt{9 + (CM + DN)^2} \end{aligned}$$

Lại có $CM + MN + ND \geq CD = 5$ nên suy ra $CM + ND \geq 4$. Do đó $AM + BN \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0; \frac{4}{5}; \frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0; \frac{7}{5}; \frac{28}{15}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là 5.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$.

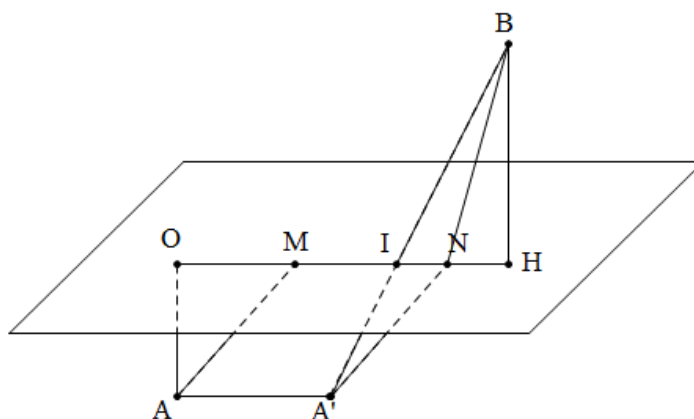
B. 5.

C. $\sqrt{34}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Từ } \begin{cases} (S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25 & (1) \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2), ta được $6z = 0$ hay

$(P): z = 0$ tức là $(P) \equiv (Oxy)$.

Dễ thấy A, B nằm khác phía đối với (P) , hình chiếu của A trên (P) là O , hình chiếu của B trên (P) là $H(3;4;0)$.

Lấy A' sao cho $\overline{AA'} = \overline{MN}$.

Khi đó $AM + BN = A'N + BN \geq A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overline{MN}$ cùng phương $\overline{OH}$.

$$\text{Lấy } \overline{MN} = \frac{\overline{OH}}{|\overline{OH}|} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right).$$

Khi đó vì $\overline{AA'} = \overline{MN}$ nên $A'\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$. Do đó $AM + BN = A'N + BN \geq A'B = 5$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

A. $S_{\min} = 30$.

B. $S_{\min} = 20$.

C. $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$.

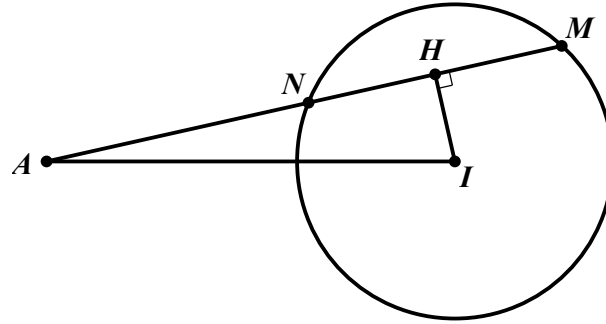
D. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R = 3$.

$AI = \sqrt{34} > R \Rightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu (S) .



Do hai điểm M, N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M . Gọi H

là trung điểm $MN \Rightarrow IH \perp MN, NH = \frac{1}{2}MN$

$$S = 4(AH - NH) + AH + NH = 5AH - 3NH$$

$$S = 5\sqrt{AI^2 - IH^2} - 3\sqrt{R^2 - IH^2} = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, x = IH$$

Xét hàm số $f(x) = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, (0 \leq x < 3)$

$$f'(x) = \frac{-5x}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{9 - x^2}} = x \left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} \right)$$

$$\text{Xét } \left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{9 - x^2} < 3\sqrt{34 - x^2} \Leftrightarrow 225 - 25x^2 < 9 \cdot 34 - 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 81 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Suy ra : $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;3), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;3)$

$$\text{Suy ra } \min_{[0;3)} f(x) = f(0) = 5\sqrt{34} - 9.$$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S):$

$(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$.

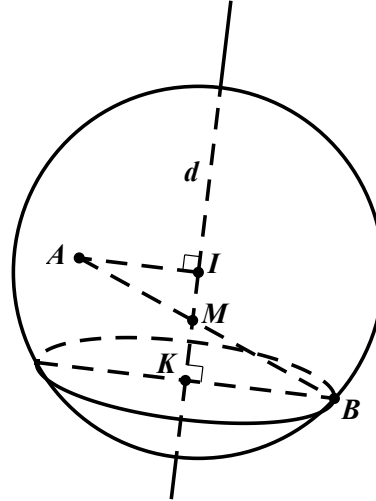
B. 27.

C. $5\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{742}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3; -4; -5)$ và bán kính $R = 27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 4) \Rightarrow d \perp (P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d . Vì $I \in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB \perp d$.

Ta có $\vec{IA} = (1; 2; -2) \Rightarrow IA = 3$ và $\vec{IA} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow IA \perp d$.

Ta tính được $IK = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-5) - 107|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = 5\sqrt{29}$ và $KB = \sqrt{R^2 - IK^2} = 2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M = AB \cap d$.

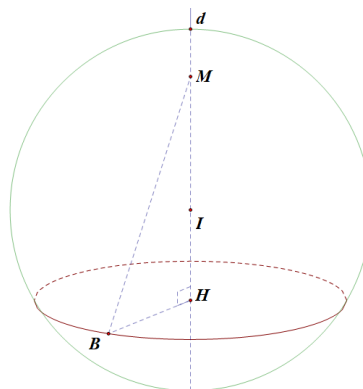
Khi đó, ta có $\frac{MI}{MK} = \frac{IA}{KB} = \frac{3}{2}$ và $MI + MK = IK = 5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI = 3\sqrt{29}$, $MK = 2\sqrt{29}$.

Ta có $AM = \sqrt{IA^2 + MI^2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow BM = \frac{2}{3}AM = 2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ là $AM + BM = 3\sqrt{30} + 2\sqrt{30} = 5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3; -4; -5)$, bán kính $R = 27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3; -4; -5)$ và vuông góc với (P) .

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r = 2$.

$$M \in d \Leftrightarrow M(1+2t; 2+3t; 3+4t).$$

$$\text{Ta có } T = MA + MB = MA + \sqrt{MH^2 + r^2}.$$

$$\text{Lại có } MH = d(M; (P)) = \frac{|29t - 87|}{\sqrt{29}} = |\sqrt{29}t - 3\sqrt{29}|.$$

$$\text{Suy ra } T = \sqrt{29t^2 + 116t + 125} + \sqrt{29(t-3)^2 + 4} = \sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2 + \frac{9}{29}} + \sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2 + \frac{4}{29}}.$$

$$\text{Xét } \vec{u} = \left(t+2; \frac{3}{\sqrt{29}}\right), \vec{v} = \left(3-t; \frac{2}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(5; \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

$$\text{Do đó } T = \sqrt{29}(|\vec{u}| + |\vec{v}|) \geq \sqrt{29}|\vec{u} + \vec{v}| = 5\sqrt{50}.$$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$. Gọi M là điểm

thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC \text{ là}$$

A. $2\sqrt{265}$.

B. $\sqrt{265}$.

C. $3\sqrt{265}$.

D. $4\sqrt{265}$.

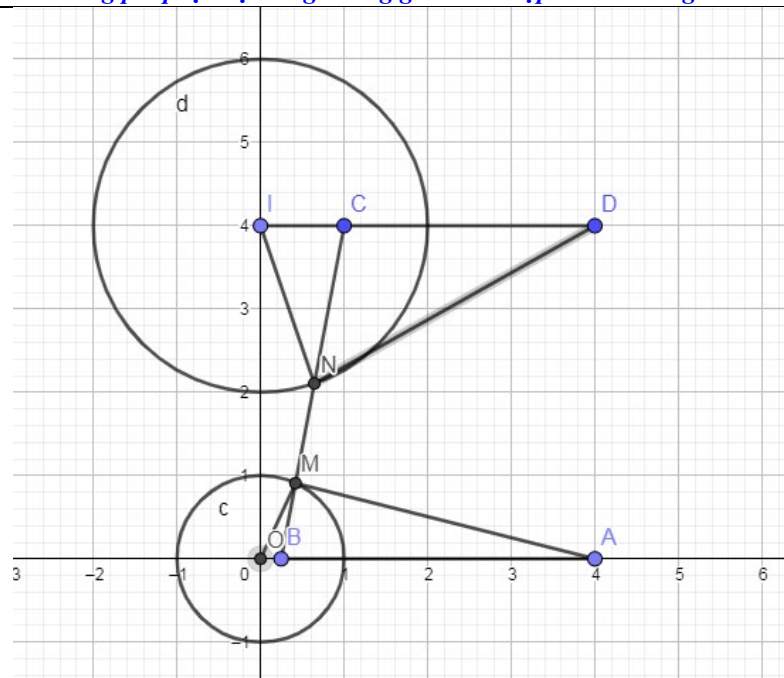
Lời giải

Chọn A

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên (S_1) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R_1 = 1$

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ nên (S_2) có tâm $I(0; 4; 0)$ và bán kính $R_2 = 2$

Vậy các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$, $O(0; 0; 0)$ và $I(0; 4; 0)$ cùng thuộc (Oxy)



Nhận thấy $OB.OA = OM^2$ suy ra OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB

Do đó ΔMOB đồng dạng ΔAOM

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OM} = 4 \Rightarrow MA = 4MB$$

Hoàn toàn tương tự $\frac{ND}{NC} = \frac{DI}{NI} = 2 \Rightarrow ND = 2NC$

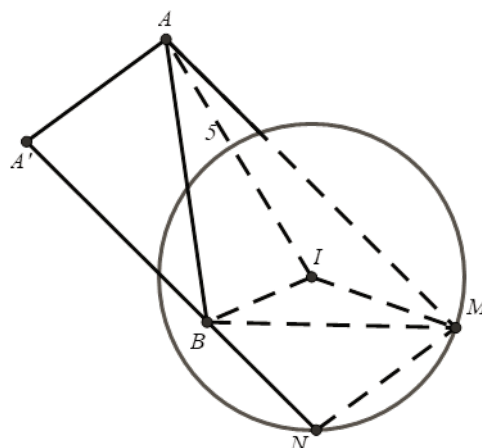
$$Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC = 4(MB + NC + MN) + 4BC \geq 4BC + 4BC = 8BC = 2\sqrt{265}$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4; 2; 4), B(1; 4; 2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overline{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0; 1; 1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

- A. $\sqrt{41}$. B. $4\sqrt{2}$. **C. 7.** D. $\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn C



Tâm $I(1; 2; 0)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (3; 0; 4) \Rightarrow IA = 5$, $\overrightarrow{IB} = (0; 2; 2) \Rightarrow IB = 2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4; 2; 4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1; 4; 2)$ nằm trong mặt cầu (S) .

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0; 1; 1)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (0; k; k), k > 0$ do $MN = 4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (0; 4; 4)$.

Gọi $A' = T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A' = (4; 6; 8)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM = A'N$

Ta có $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm N luôn tồn tại).

$\overrightarrow{A'B} = (-3; -2; -6)$ suy ra $A'B = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7$.

Vậy $|AM - BN|_{\min} = A'B = 7$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a; b; c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$.

B. 8.

C. 6.

D. $\frac{51}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16.$$

$$M(a; b; c) \in (S) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 16.$$

$$\text{Ta có: } |2(a-1) + 3(b-2) + 6(c-2)| \leq \sqrt{(2^2 + 3^2 + 6^2) \cdot [(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2]}.$$

$$\Leftrightarrow |2a + 3b + 6c - 20| \leq 28 \Rightarrow 2a + 3b + 6c - 20 \leq 28 \Rightarrow 2a + 3b + 6c \leq 48.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 48 \\ \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{3} \\ \frac{a-1}{2} = \frac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 48 \\ 3a - 2b = -1 \\ 3a - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{15}{7} \\ b = \frac{26}{7} \\ c = \frac{38}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = 2a - b + c = 2 \cdot \frac{15}{7} - \frac{26}{7} + \frac{38}{7} = 6.$$

Câu 22. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$.

A. $\sqrt{3} - 1$.

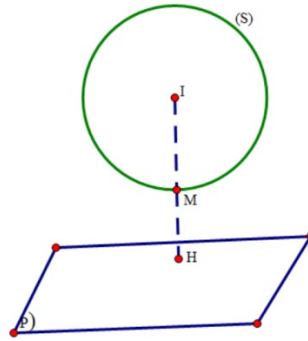
B. $\sqrt{3} + 1$.

C. $4 - 2\sqrt{3}$.

D. $4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y; z) \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-1; -1; 2)$ bán kính $R = 1$

Gọi $H(a; b; c) \Rightarrow H$ thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|-1-1+2-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} > R \Rightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung

$P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = MH^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi vị trí của M và H như hình vẽ

Khi đó $HI = d(I, (P)) = \sqrt{3} \Rightarrow HM = HI - R = \sqrt{3} - 1$

Do đó $P_{\min} = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$; $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$.

B. $12\sqrt{3}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

D. $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108.$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm

$A(0; 2; 0)$, $B(2; -6; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng

$a + b + c$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(-1; 2; 1), \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Vì $IA = \sqrt{2} > R$ và $IB = \sqrt{82} > R$ nên hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) .

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1; -2; -1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S) .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) \cdot (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) \\ &= MK^2 + \overrightarrow{MK} \cdot (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = MK^2 - KA^2. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

$$\text{Đánh giá: } IM + MK \geq IK \Rightarrow R + MK \geq IK \Rightarrow MK \geq IK - R.$$

Suy ra MK nhỏ nhất bằng $IK - R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K .

Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S) .

$$\text{Có } \overrightarrow{IK} = (2; -4; -2), \quad IK = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6} = 4R = 4IM.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IK} = 4\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4(a+1) \\ -4 = 4(b-2) \\ -2 = 4(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 1.$$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + y + z + 3 = 0$.

B. $x + y + z - 3 = 0$.

C. $x + 2y + 3z - 3 = 0$.

D. $x + 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $H(a; b; c)$ là tiếp điểm của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

Từ giả thiết ta có a, b, c là các số dương.

$$\text{Mặt khác, } H \in (S) \text{ nên } a^2 + b^2 + c^2 = 3 \text{ hay } OH^2 = 3 \Leftrightarrow OH = \sqrt{3}. \quad (1)$$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm H và vuông góc với đường thẳng OH nên nhận $\overrightarrow{OH} = (a; b; c)$ làm vectơ pháp tuyến. Do đó, mặt phẳng (α) có phương trình là

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-3=0$$

$$\text{Suy ra: } A\left(\frac{3}{a};0;0\right), B\left(0;\frac{3}{b};0\right), C\left(0;0;\frac{3}{c}\right).$$

$$\text{Theo đề: } OA^2+OB^2+OC^2=27 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{9}{c^2}=27 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=9.$$

$$\text{Mặt khác, ta có: } (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 9 \text{ và dấu "=" xảy ra khi } a=b=c=1.$$

$$\text{Suy ra phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ là: } x+y+z-3=0$$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, đường thẳng

$$(d): \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2} \text{ và mặt cầu } (S): x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0. \text{ Một đường thẳng } (\Delta)$$

thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}.$

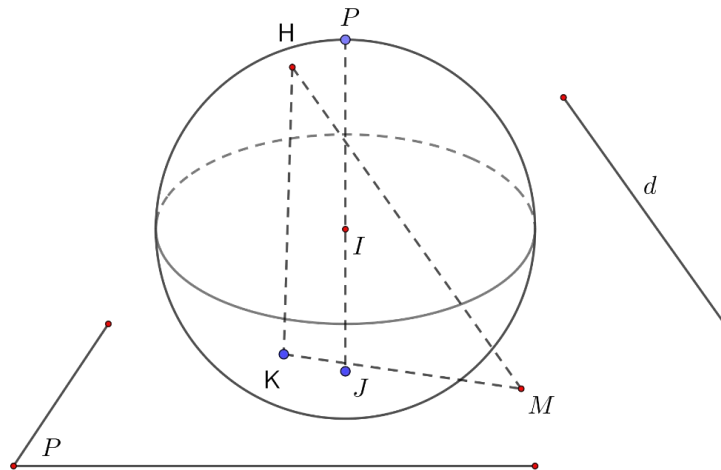
B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}.$

C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}.$

D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}.$

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và $IH=3$ nên H thuộc mặt cầu (S') tâm I bán kính $R'=3$.

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA'+BB'=2HM$, M nằm trên mặt phẳng (P) .

Mặt khác ta có $d(I;(P)) = \frac{4}{\sqrt{3}} < R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) và $\sin(d;(P)) = \sin \alpha = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là

hình chiếu của H lên (P) thì $HK = HM \cdot \sin \alpha$.

Vậy để $AA' + BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$$\Leftrightarrow HK \text{ đi qua } I \text{ nên } HK_{\max} = R' + d(I; (P)) = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } AA' + BB' \text{ lớn nhất bằng } 2 \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} = \frac{24 + 18\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Điểm $M \in (S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia $Ox; Oy; Oz$ tại các điểm A, B, C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2)$ là:

A. 24.

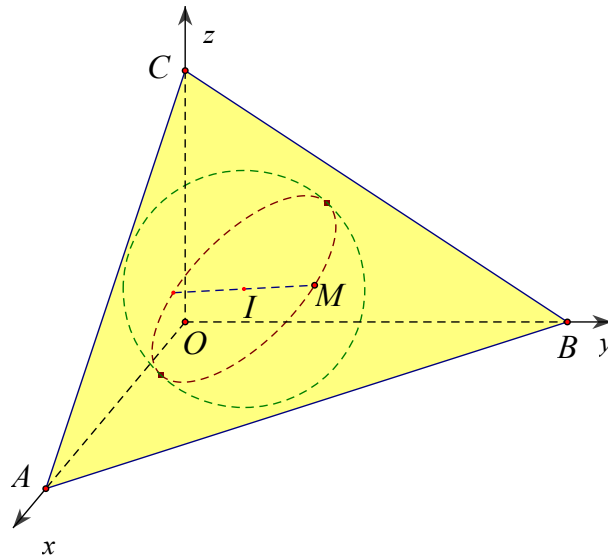
B. 27.

C. 64.

D. 8.

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm (O) và bán kính $R = 1$.

Theo đề bài ta có $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c); (a, b, c > 0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$(P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ tại } M \in (S) \Leftrightarrow d(O; (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow abc = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \quad (1) \text{ vì } (a, b, c > 0).$$

$$\text{Khi đó: } T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2) = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

$$\Rightarrow T = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2c^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2$$

$$\text{Mặt khác } 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2 \geq 1 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 2a^2b^2c^2 \geq 64 \quad (2) \Rightarrow T \geq 64.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi (1) và (2) xảy ra đồng thời $\Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 28. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá trị lớn

nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng

A. 10.

B. $\sqrt{10}$.

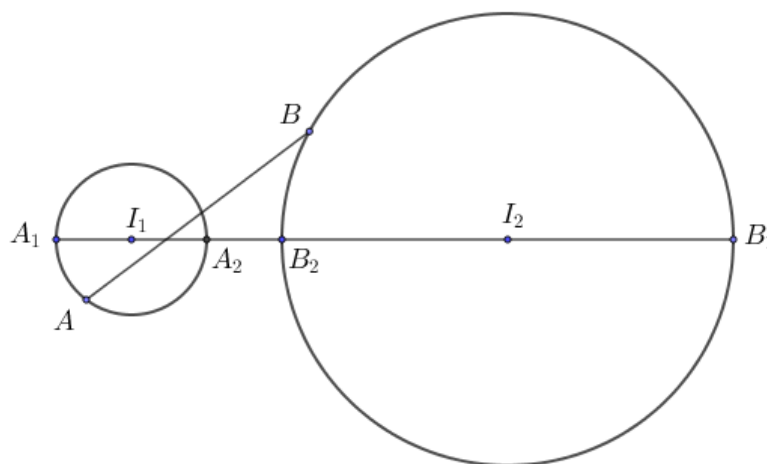
C. 8.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(d, e, f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I_1(1; 2; 3)$, bán kính $R_1 = 1$, $B(a, b, c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2): (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I_2(-3; 2; 0)$, bán kính $R_2 = 3$. Ta có $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t; 2t; 0)$, $B(0; 0; t)$ (với $t > 0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng

A. 5

B. 13.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi $P(x; y; z)$, ta có: $\overrightarrow{OP} = (x; y; z)$, $\overrightarrow{AP} = (x - 2t; y - 2t; z)$, $\overrightarrow{BP} = (x; y; z - t)$

Vì $P(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4tx - 4ty - 2tz - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}tx - \frac{4}{3}ty - \frac{2}{3}tz - 1 = 0$$

Nên P thuộc mặt cầu tâm $I\left(\frac{2t}{3}; \frac{2t}{3}; \frac{t}{3}\right)$, $R = \sqrt{t^2 + 1}$.

Ta có $OI = t < R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

Để $OP_{\max}$ thì P, I, O thẳng hàng và $OP = OI + R$.

Suy ra $OP_{\max} = OI + R \Leftrightarrow 3 = t + \sqrt{t^2 + 1}$. Từ đó tìm được $t = \frac{4}{3}$ Suy ra $a = 4, b = 3$

Vậy, $Q = 2a + b = 11$.

DẠNG 2**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH**

Câu 30. Cho x, y, z là ba số thực thỏa $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = 2x + 2y - z.$$

A. $\max P = 20$.

B. $\max P = -18$.

C. $\max P = 18$.

D. $\max P = 12$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P = 2x + 2y - z \Leftrightarrow 2x + 2y - z - P = 0$ (1).

$$\text{Lại có: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25 \quad (2)$$

Xét trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta thấy (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là $mp(\alpha)$ và (2) là phương trình của một mặt cầu (S) tâm $I(2; -3; 1)$, bán kính $R = 5$.

Giá trị lớn nhất của $P = 2x + 2y - z$ là giá trị lớn nhất của P để (α) và (S) có điểm chung, điều này

$$\text{tương đương với } d(I, (\alpha)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 - P|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \leq 5 \Leftrightarrow |P + 3| \leq 15 \Leftrightarrow -18 \leq P \leq 12.$$

Vậy $\max P = 12$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Tọa độ điểm M trên (S) sao cho $d(M, d)$ đạt GTLN là:

A. $(1; 2; -1)$.

B. $(2; 2; -1)$.

C. $(0; 2; -1)$.

D. $(-3; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(I, d) = 1 = R$ suy ra (S) tiếp xúc với d và tiếp điểm là $H(2; 2; -1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên $d \Rightarrow H(2; 2; -1)$.

$$\text{Đường thẳng } IH \text{ có pt: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tọa độ giao điểm của IH và (S) là: $A(0; 2; -1)$, $B \equiv H(2; 2; -1)$.

Ta có: $d(A, (d)) = AH = 2 \geq d(B, (P)) = BH = 0$.

$$\Rightarrow d(A, (d)) = 2 \geq d(M, (d)) \geq d(B, (d)) = 0.$$

Vậy $M(0; 2; -1)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

$$\text{C.} \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}.$$

$$\text{D.} \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}.$$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I,(\alpha)) < R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B .

Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I, (\Delta))$ nhỏ nhất nên Δ qua H , với H là hình

$$\text{chiếu vuông góc của } I \text{ lên } (\alpha). \text{ Phương trình } BH: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

$$H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2+2t) - 2(3-2t) + 5+t+15=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(-2; 7; 3).$$

Do vậy $\overrightarrow{AH} = (1; 4; 6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ . Phương trình của $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB nhỏ nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

$$\text{A.} \frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}.$$

$$\text{B.} \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

$$\text{C.} \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}.$$

$$\text{D.} \frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z+3}{10}.$$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I,(\alpha)) < R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B .

Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2}$. Do đó, AB nhỏ nhất thì $d(I, (\Delta))$ lớn nhất nên Δ là đường thẳng nằm trong (α) , qua A và vuông góc với AI . Do đó Δ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{n_\alpha}] = (16; 11; -10)$

Vậy, phương trình của $\Delta: \frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

$$\text{A.} x-4y-5z+17=0.$$

$$\text{B.} 3x-2y+z-7=0.$$

$$\text{C.} x-4y+5z-13=0.$$

$$\text{D.} 3x+2y+z-11=0.$$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$, bán kính $R = 5$. Do $IA = \sqrt{17} < R$ nên AB luôn cắt (S) . Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - (d(I, (\alpha)))^2}$. Để bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với $mp(ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -3; -2)$ suy ra (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 4; -5)$

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (-9 - 6; -3) = -3(3; 2; 1)$

Phương trình $(\alpha): 3(x - 2) + 2(y - 1) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$

B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$

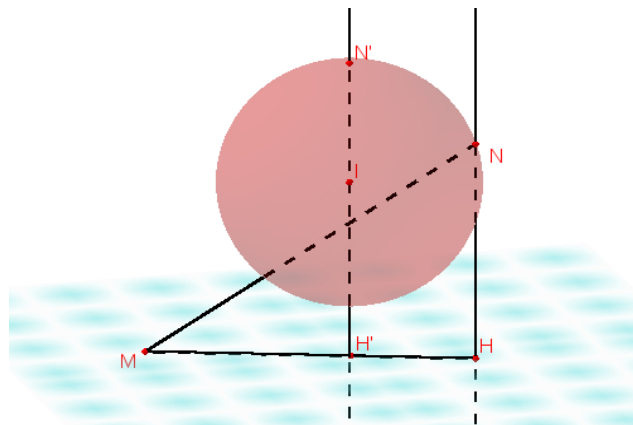
C. $MN = 3\sqrt{2}$

D. $MN = 14$

Lời giải

Chọn C

Cách 1



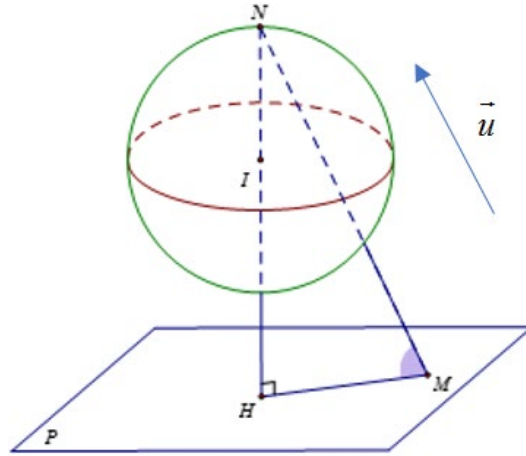
Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $r = 1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45° . Vì $d(I; (P)) = 2 > 1 = r$ nên (P) không cắt (S) .

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH} = 45^\circ$ và $MN = \frac{NH}{\sin 45^\circ} = NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N \equiv N'$ và $H \equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I , vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P) .

Lúc đó $NH_{\max} = N'H' = r + d(I; (P)) = 3$ và $MN_{\max} = \frac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$.

Cách 2

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $d(I,(P)) = \frac{|-1-2.2+2.1-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 2 > R$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH .

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha = \widehat{HNM}$.

Có $HN = MN \cdot \cos \alpha \Rightarrow MN = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow HN$ lớn nhất

$\Leftrightarrow HN = d(I,(P)) + R = 3$.

Có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}_P) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{1}{\cos \alpha} HN = 3\sqrt{2}$.

Câu 36. Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giải sử $\vec{n} = (1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

A. $m.n = 4$.

B. $m.n = 2$.

C. $m.n = -4$.

D. $m.n = -2$.

Lời giải

Chọn C

(P) đi qua điểm $A(0;8;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;m;n) \Rightarrow (P): x + my + nz - 8m - 2n = 0$.

(P) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Rightarrow \frac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = 6\sqrt{2}$.

$d = d(B;(P)) = \frac{|9-15m+21n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \frac{|5-11m+5n+4-4m+16n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.

$\leq \frac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} + 4 \frac{|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.

$\leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} \cdot \sqrt{1+m^2+n^2}}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$ (Bunhiacôpxki).

$= 18\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow d_{\max} = 18\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{m} = \frac{4}{n} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow m.n = -4$$

DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}. \text{ Mặt phẳng chứa } d \text{ và cắt } (S) \text{ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có}$$

phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$.

B. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

C. $x - 2y - 3 = 0$.

D. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d .

$$H \in d \Leftrightarrow H(1+2t; -1+t; -t); \overrightarrow{IH} = (-2+2t; -2+t; -t).$$

Véc tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (2;1;-1)$.

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2(-2+2t) + 1(-2+t) + t = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Suy ra } H(3;0;-1) \Rightarrow IH = \sqrt{2}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính r . Ta có

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{4 - [d(I, (P))]^2}.$$

$$\text{Mà } d(I, (P)) \leq IH = \sqrt{2} \text{ nên } r = \sqrt{4 - [d(I, (P))]^2} \geq \sqrt{4 - IH^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}.$$

Suy ra $\min r = \sqrt{2}$, đạt được khi $IH \perp (P)$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $H(3;0;-1)$ nhận $\overrightarrow{IH} = (0;-1;-1)$ làm một véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $0(x-3) - 1(y-0) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow y + z + 1 = 0$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25. \text{ Mặt phẳng } (P): ax + by + cz - 2 = 0 \text{ đi qua } A, B \text{ và cắt } (S) \text{ theo}$$

giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

A. $T = 3$

B. $T = 4$

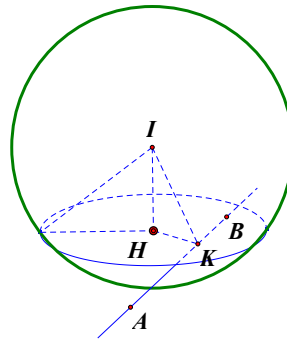
C. $T = 5$

D. $T = 2$

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0) \in (P) : b-2=0 \Leftrightarrow b=2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u} = (1;-1;2)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB : \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB , H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t;1-t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (0; -2; -1)$.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}.$$

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$.

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \vec{n}_p$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_p = k \cdot \overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2k \\ c=-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ k=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow t = a+b+c = 0+2+1=3.$$

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-2c \\ b=2 \end{cases}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn giao tuyến là } r = \sqrt{R^2 - [d(I; (P))]^2} = \sqrt{25 - [d(I; (P))]^2}$$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I; (P))$ lớn nhất

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = \frac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}} = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$$

$$\text{Xét } f(c) = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2 \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$						
			0		$\sqrt{5}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d(I; (P))$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c = 1 \Rightarrow a = 0, b = 2 \Rightarrow a + b + c = 3$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4), B(0; 0; 1)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 4 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$?

A. $T = \frac{1}{5}$.

B. $T = \frac{3}{4}$.

C. $T = 1$.

D. $T = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: (S) có tâm $I(-1; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$.

$$\text{Do } A, B \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 4c - 4 = 0 \\ c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 12 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow (P): -2(b+6)x + by + 4z - 4 = 0.$$

Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (P) và $(S) \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}$, để r đạt giá trị

$$\text{nhỏ nhất} \Leftrightarrow d(I, (P)) \text{ đạt giá trị lớn nhất. Mà } d(I, (P)) = \frac{|3b+8|}{\sqrt{5b^2+48b+160}}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{3x+8}{\sqrt{5x^2+48x+160}}; f'(x) = \frac{32x+288}{(\sqrt{5x^2+48x+160})^3}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -9.$$

Bảng xét biến thiên:

x	$-\infty$	-9	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-1,34$	$f(-9) \approx -1,66$	$1,34$

suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$	-9	$-\frac{8}{3}$	$+\infty$
$ f(x) $	$1,34$	$f(-9) \approx 1,66$	0	$1,34$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $x = -9 \Rightarrow b = -9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow T = 1$.

Kết luận: $T = 1$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$.

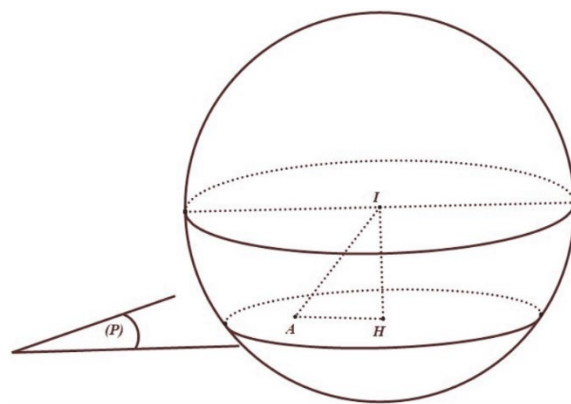
B. $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.

C. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$.

D. $(P): x + 2y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) .

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính

$r = \sqrt{R^2 - IH^2}$ (với H là hình chiếu của $I(1;2;3)$ trên (P)).

Ta luôn có $IA \geq IH \Rightarrow \sqrt{R^2 - IH^2} \geq \sqrt{R^2 - IA^2} \Rightarrow r \geq \sqrt{R^2 - IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r = \sqrt{R^2 - IA^2} \Leftrightarrow H \equiv A$.

Khi đó $IA \perp (P) \Rightarrow$ mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA} = (-1; -2; -1)$ làm một VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $-x - 2y - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) , là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax + by - z + c = 0$, khi đó $a - b + c$ bằng:

A. 8.

B. 0.

C. 2.

D. -4.

Lời giải

Chọn D

+ Vì (α) qua A ta có: $-(-4) + c = 0 \Rightarrow c = -4$.

+ Vì (α) qua B ta có: $2a + c = 0 \Rightarrow a = 2$.

$\Rightarrow (\alpha): 2x + by - z - 4 = 0$.

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3), R = 3\sqrt{3}$.

+ Chiều cao khối nón: $h = d_{(I, \alpha)} = \frac{|2 - 2b - 3 - 4|}{\sqrt{4 + b^2 + 1}} = \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$.

+ Bán kính đường tròn: $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{27 - \left(\frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}\right)^2} = \sqrt{27 - \frac{(2b + 5)^2}{b^2 + 5}}$.

+ Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(27 - \frac{(2b + 5)^2}{b^2 + 5}\right) \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$

+ Tới đây ta có thể Thử các trường hợp đáp án.

Hoặc ta làm tự luận như sau:

Đặt $t = \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$ và xét hàm số $f(t) = (27 - t^2)t$ trên đoạn $[0; 3\sqrt{3}]$.

Ta có: $f'(t) = 27 - 3t^2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3(l) \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên:

t	0	3	$3\sqrt{3}$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			54	
	0			0

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi $t = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}} \right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 4b^2 + 20b + 25 = 9b^2 + 45$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow b = 2.$$

Vì vậy $a - b + c = -4$.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 4.

B. 2.

C. 4π .

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB = 2R = 4$.

$$\text{Ta có } S_{AMB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow MA = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ và } AB = 4.$$

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường

thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

A. $S = \sqrt{7}$.

B. $S = 4$.

C. $S = 2\sqrt{7}$.

D. $S = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $O = (0;0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $OM = 1 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Đặt $x = OI \leq OM \Rightarrow 0 < x \leq 1$.

$$\text{Khi đó } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OI \cdot AB = OI \sqrt{R^2 - OI^2} = x \sqrt{8 - x^2} = f(x).$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}} (0 < x \leq 1), \text{ ta có bảng biến thiên}$$

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\sqrt{7}$

Vậy $\max S_{\Delta OAB} = \sqrt{7}$ khi $OI = 1$ hay $I \equiv M$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

A. $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$

B. $R = \frac{\sqrt{17}}{3}$

C. $R = \frac{\sqrt{17}}{6}$

D. $R = \frac{\sqrt{17}}{17}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $A; B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường.

Gọi M là trung điểm AB . Để có mặt cầu tâm M bán kính $R = \frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng

Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A; B$ lần lượt là:

$$A(2t_1 - 1; t_1 - 1; 2t_1 - 1) \text{ và } B(2t_2 + 1; 2t_2 + 1; t_2 + 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t_2 - 2t_1 + 2; 2t_2 - t_1 + 2; t_2 - 2t_1 + 2).$$

$$\text{Có } \overrightarrow{u_1}(2; 1; 2) \text{ và } \overrightarrow{u_2}(2; 2; 1) \text{ lần lượt là 2 vector chỉ phương của } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ nên } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 + (2t_2 - t_1 + 2) \cdot 1 + (t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 = 0 \\ (2t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 + (2t_2 - t_1 + 2) \cdot 2 + (t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2 - 9t_1 + 10 = 0 \\ 9t_2 - 8t_1 + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{10}{17} \\ t_2 = \frac{-10}{17} \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{17}; \frac{-7}{17}; \frac{3}{17}); B(\frac{-3}{17}; \frac{-3}{17}; \frac{7}{17}) \quad \overrightarrow{AB}(\frac{-6}{17}; \frac{4}{17}; \frac{4}{17}).$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 4^2}}{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu cần tính là } R = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. $(S) : (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$.

B. $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$.

C. $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

D. $(S) : (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; 0)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 , đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t; t; 4)$ thuộc d_1 ; gọi điểm $N(3-t'; t'; 0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

Ta có $\vec{MN} = (3-t'-2t; t'-t; -4)$.

$$MN \text{ là đoạn thẳng vuông góc chung} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (3-t'-2t) + t' - t = 0 \\ (-1) \cdot (3-t'-2t) + t' - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 5t = 6 \\ 2t' + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 1; 4) \\ N(2; 1; 0) \end{cases}$$

Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S) , do đó điểm I là trung điểm MN .

$$\Rightarrow I(2; 1; 2) \Rightarrow R = IM = IN = 2.$$

$$\text{Suy ra mặt cầu } (S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4.$$

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau

$$d_1 : \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}), d_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R}).$$

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là:

A. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$.

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$.

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$.

D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với $(d_1), (d_2)$ là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$. Lấy $A(4 - 2t; t; 3) \in d_1; B(1; t'; -t') \in d_2$. A, B là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t + t' = -6 \\ -t + 2t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}.$$

Khi đó $A(2; 1; 3); B(1; -1; 1)$. Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$, bán kính $R = \frac{3}{2}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt

cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$.

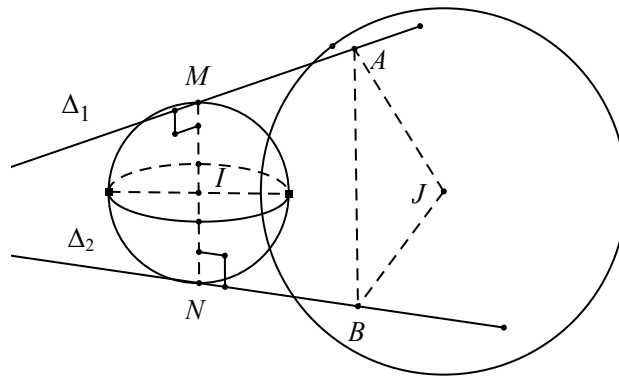
B. $\sqrt{6}$.

C. $\sqrt{24}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\Delta_1: \begin{cases} x = 4 + 3t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = -5 - 2t_1 \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + t_2 \\ y = -3 + 3t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$), gọi $\vec{u}_1(3; -1; -2), \vec{u}_2(1; 3; 1)$ lần lượt là véc tơ chỉ

phương của hai đường thẳng.

Gọi $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(4 + 3t_1; 1 - t_1; -5 - 2t_1); N \in \Delta_2 \Rightarrow N(2 + t_2; 3t_2 - 3; t_2)$.

Suy $\overrightarrow{MN} = (t_2 - 3t_1 - 2; 3t_2 + t_1 - 4; t_2 + 2t_1 + 5)$.

MN là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t_1 + t_2 = -6 \\ 2t_1 + 11t_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 1 \end{cases}.$

$\overrightarrow{MN} = (2; -2; 4) \Rightarrow MN = 2\sqrt{6}$.

Giả sử (S) là mặt cầu tâm J đường kính d tiếp xúc với lần lượt Δ_1, Δ_2 tại A, B . Khi đó $JA + JB \geq AB$.

Hay $d \geq AB \geq MN \Rightarrow d \geq MN$. Vậy đường kính d nhỏ nhất khi $d = MN$. Suy ra mặt cầu (S) có bán

kính nhỏ nhất $r = \frac{MN}{2} = \sqrt{6}$.

Cách khác

Hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1, Δ_2 là $(P), (Q)$. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với $(P), (Q)$ nên đường kính cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ hay là khoảng cách từ Δ_2 đến (P) .

Gọi $\vec{u}_1(3; -1; -2), \vec{u}_2(1; 3; 1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng, $N(2; -3; 0) \in \Delta_2$.

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (5; -5; 10) \Rightarrow \vec{n}_p = (1; -1; 2)$, phương trình $(P): x - y + 2z + 7 = 0$.

$d((P), (Q)) = d(\Delta_2, (P)) = d(N, (P)) = \frac{|2 - 3 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{6}$. Suy ra bán kính cần tìm là $\sqrt{6}$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có

phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$.

B. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

C. $x - 2y - 3 = 0$.

D. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu $I(3; 1; 0)$ lên d , từ đó ta tìm được $H(3; 0; -1)$.

Thấy $IH \leq R$ nên d cắt (S) .

Vậy mặt phẳng cần tìm nhận $\overline{IH} = (0; -1; -1)$ làm VTPT nên pt mặt phẳng là $y + z + 1 = 0$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm

I và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$. Gọi tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{11}{3}$

C. 14

D. $\frac{16}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ngắn nhất khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$
. Khi đó

tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2(1 + 2t) - (-2 - t) + 2(2t) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{11}{3}$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

- A. $O(0; 0; 0)$. B. $A\left(1; \frac{3}{5}; -\frac{1}{4}\right)$. C. $B(-1; -2; -3)$. D. $C(2; 1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $H(2t; 1-2t; -1-t)$ là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

Ta có: $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow 2(2t-1) - 2(3-2t) - (-2-t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Vì $IH = \sqrt{10} < 4 = R \Rightarrow d$ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

Mặt phẳng (Q) bất kì chứa d luôn cắt (S) theo một đường tròn bán kính r .

Khi đó $r^2 = R^2 - d^2(I, (Q)) \geq R^2 - d^2(I, d) = 16 - 10 = 6$.

Do vậy mặt phẳng (P) chứa d cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi

$d(I, (P)) = d(I, d)$ hay mặt phẳng (P) đi qua H nhận $\overrightarrow{IH} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ làm vector pháp tuyến, do đó

(P) có phương trình $x + 5y - 8z - 13 = 0$.

Khi đó điểm $O(0; 0; 0)$ có khoảng cách đến (P) lớn nhất.