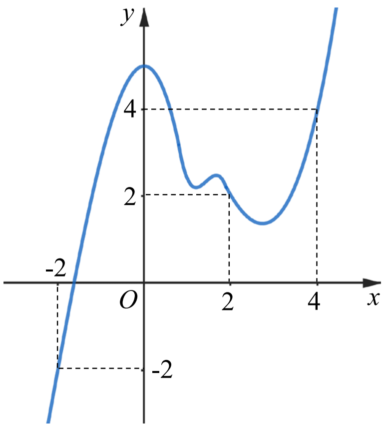
SỞ GD&ĐT THANH HÓA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN THI: TOÁN - THPT
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính giá trị của biểu thức $I=\int\limits_2^4 f'\left(2x-6\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^{\frac{5}{3}} f'\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 2: Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm O và A là một điểm nằm trên $\left(S\right)$. Gọi I, K là hai điểm trên đoạn OA sao cho $OI=IK=KA$. Các mặt phẳng $\left(P\right)$, $\left(Q\right)$ lần lượt đi qua I, K, cùng vuông góc với OA và cắt mặt cầu $\left(S\right)$ theo các đường tròn có bán kính lần lượt là r_1 và r_2. Tính tỷ số $\frac{r_2}{r_1}$.

A. $\frac{r_2}{r_1}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\frac{r_2}{r_1}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sqrt{10}}{6}$.

Câu 3: Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x=5$, khi đó $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8. **B.** -3. **C.** 12. **D.** 1.

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{2022x-21}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

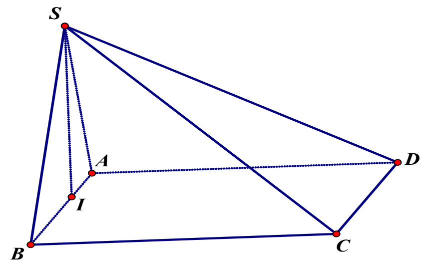
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;2022\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;2022\right)$.

Câu 5: Cho cấp số cộng hình chóp $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $u_1=3$ và tổng hai số hạng đầu bằng 9. Số hạng u_3 bằng

A. 15. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là điểm I thuộc đoạn thẳng AB sao cho $BI=2AI$. Góc giữa mặt bên $\left(SCD\right)$ với mặt phẳng đáy là 60^0 (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.



A. $\frac{9\sqrt{31}}{31}a$. **B.** $\frac{6\sqrt{31}}{31}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{93}}{31}a$. **D.** $\frac{6\sqrt{93}}{31}a$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ bằng $\sqrt{3}a^3$, tính theo a tổng diện tích các mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $12a^2$. **B.** $3a^2$. **C.** $18a^2$. **D.** $24a^2$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số

$y=\frac{1}{(x-m)\sqrt{4x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 198. **B.** 0. **C.** 196. **D.** 200.

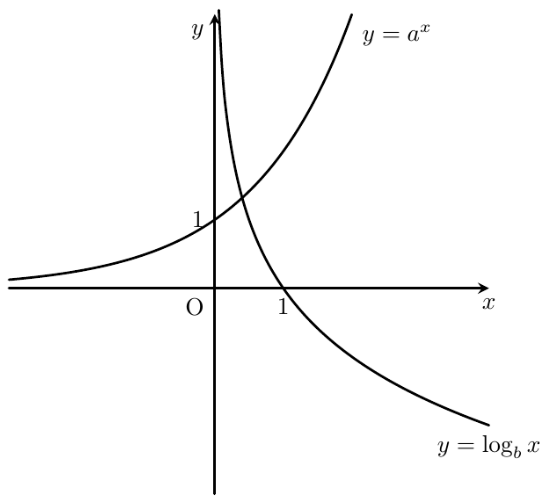
Câu 9: Cắt mặt trụ tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của mặt trụ đó ta xác được thiết diện là

A. Một hình chữ nhật. **B.** Một đường tròn.
C. Một đường Parabol. **D.** Một đường elip.

Câu 10: Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{x+3}$ tại hai điểm phân biệt mà cả hai điểm đó đều có tọa độ nguyên?(điểm $M(x;y)$ có tọa độ nguyên nghĩa là $x,y\in\mathbb{Z}$)

A. 15. **B.** 12. **C.** 66. **D.** 28.

Câu 11: Cho đồ thị hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $0<b<1<a$. **B.** $0<a<1<b$. **C.** $a>1,b>1$. **D.** $0<a<1,0<b<1$.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+79)-4\right]\le 0$

A. 80. **B.** 79. **C.** 26. **D.** Vô số.

Câu 13: Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8$ ta lập các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số vừa lập, tính xác suất để chọn được một số có đúng 3 chữ số lẻ và các chữ số lẻ đứng kề nhau.

A. $\frac{3}{14}$. **B.** $\frac{4}{35}$. **C.** $\frac{1}{35}$. **D.** $\frac{1}{14}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+4$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(\log(\log e)\right)=2$. Tính $f\left(\log(\ln 10)\right)$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 2.

Câu 15: Tính số cách sắp xếp 4 nam sinh và 6 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ sao cho tất cả nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau.

A. $6!\times 4!$. **B.** $7!\times 4!$. **C.** $10!$. **D.** $6!\times 5!$.

Câu 16: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 17: Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2$?

A. $\left[-\sqrt{3}-3;\sqrt{3}-1\right]$. **B.** $\left[-2;\sqrt{3}\right]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-2;0]$.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2;4]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=2$, $f\left(4\right)=2022$. Tính tích phân $\int_1^2 f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 1011. **D.** 2022.

Câu 19: Tính $a^2+2b^2+c^2$ biết $\int_{16}^{55}\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ.

A. $\frac{4}{9}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{9}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

Câu 20: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4\left(2x+2y\right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{x}{y}=1+\sqrt{3}$. **D.** $\frac{x}{y}=\sqrt{3}-1$.

Câu 21: Cho hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ có cạnh bằng $4a$. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $100\sqrt{3}a^2$. **B.** $20\sqrt{3}a^2$. **C.** $4\sqrt{3}a^2$. **D.** $80\sqrt{3}a^2$.

Câu 22: Cho hai số tự nhiên a, b không lớn hơn 10. Có bao nhiêu cặp số $\left(a;b\right)$ để

$\lim\left(\sqrt{n^2-bn+7}+a-n\right)=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 5.

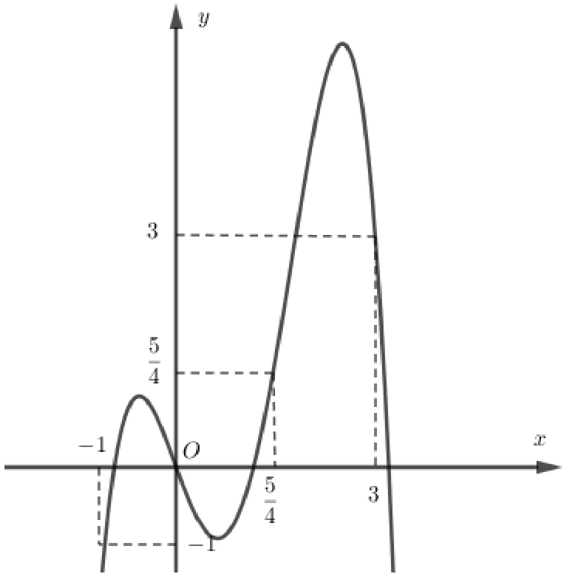
Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB=a; A'C'=4a; BB'=3a$. Giá trị lớn nhất thể tích lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $2a^3$.

Câu 24: Cho hình nón có đường sinh $l=2a$, góc giữa đường sinh và mặt đáy bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

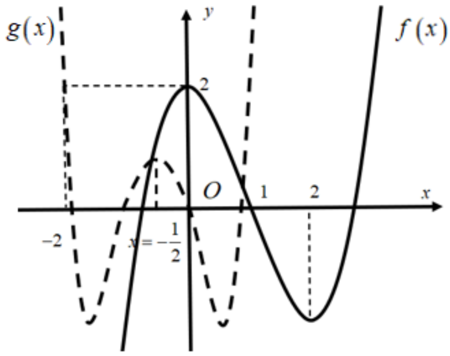
A. $3\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ .Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x-1\right)-x^2+2x+2022$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 26: Cho hai hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là đường nét liền ; đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ là đường nét đứt). Biết rằng hai đồ thị hàm số $y=f\left(-3x+2\right)$ và $y=3g\left(ax+b\right)$ có chung khoảng đồng biến. Giá trị của biểu thức $a+2b$ là:



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx-c\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ với a,b,c là các số thực dương, biết $f(1)=-3, f(5)=2$. Xét hàm số $g(x)=\left|3f(3-2x)+2f(3x-2)-m\right|$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=10$. Tổng các phần tử của S là

A. -11. **B.** 11. **C.** -13. **D.** 13

Câu 28: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A,D sao cho $AD=a\sqrt{15}$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm (O'); trên đường tròn tâm (O') lấy điểm B (AB,CD chéo nhau). Đặt α là góc giữa AB với đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SA, tam giác ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $30°$, gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC), $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{20\pi\alpha^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 30: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (SCD) sao cho tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 2MS^2$ nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{17}{4}$. **B.** $\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{21}{5}$.

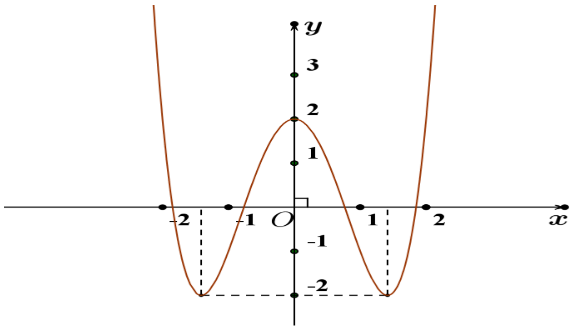
Câu 31: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = 2a + b - c$.

A. $S = 19$. **B.** $S = 7$. **C.** $S = 17$. **D.** $S = 13$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm x thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 2276. **B.** 1749. **C.** 1750. **D.** 2277.

Câu 33: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $m \in [0;25]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \left|\,|2f(x) + m + 4| - f(x) - 3\,\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1 ?

A. 21. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 19.

Câu 34: Cho hình vuông kích cỡ 4 x 4 như hình vẽ. Sắp xếp ngẫu nhiên các số tự nhiên từ 1 đến 16 vào 16 ô vuông. Tính xác suất để có tổng bốn số ở các ô trong cùng một hàng hay cùng một cột đều là một số lẻ.

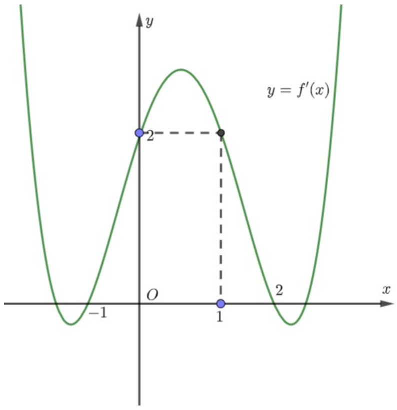
1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

A. $\dfrac{1}{14}$. **B.** $\dfrac{46}{6435}$. **C.** $\dfrac{8}{715}$. **D.** $\dfrac{16}{2145}$.

Câu 35: Biết $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+2b+c$.

A. $S=99$. **B.** $S=67$. **C.** $S=51$. **D.** $S=88$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=3f(-x^3-3x+m)+(x^3+3x-m)^2\left(-2x^3-6x+2m-6\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$ là

A. 4027. **B.** 4017. **C.** 2023. **D.** 2021.

Câu 37: Số nghiệm của phương trình $\left(x^2-2023x+2022\right)\left(2022^{x-1}+1\right)=\frac{2x-2023}{2022}$

A. 3. **B.** 2 . **C.** 0. **D.** 1.

Câu 38: Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{x+1}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m^2+6m-3\right)3^x+1=0$ có nghiệm duy nhất . Tổng các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 39: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$, trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S di động không trùng với A. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt là H, K. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

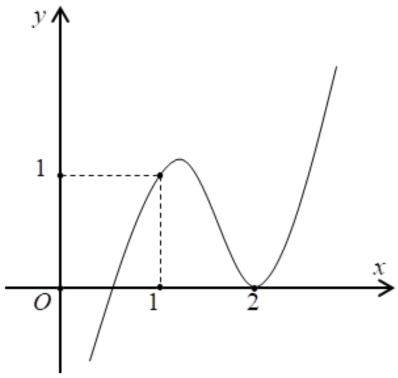
A. $\frac{16}{7}$. **B.** $\frac{7}{16}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{9}{16}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $3a$, tam giác SAB đều, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC, biết rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$.

A. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

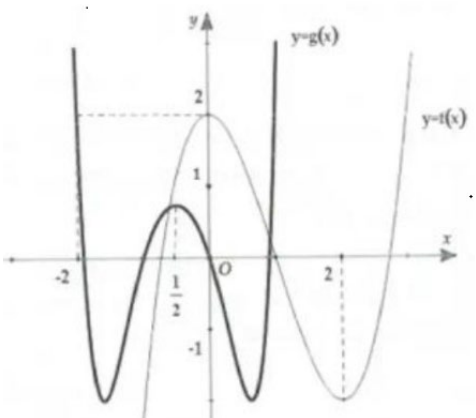
Câu 41: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$y=\frac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{x\left[2f^3(x)-3f^2(x)+f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



A. 8.
B. 4.
C. 5.
D. 6.

Câu 42: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và hàm số $g(x) = f\left(mx^2 + nx + p\right)$ $(m, n, p \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ (đường nét liền là đồ thị hàm số $f(x)$, nét đứt là đồ thị hàm số $g(x)$), đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g(x)$. Tính $g(4)$



A. 9198.
B. 7940.
C. 6802.
D. 1692.

Câu 43: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2022]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập hợp S.

A. 2045187.
B. 2045162.
C. 2045208.
D. 2045117.

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x - m + 1| + 3}\right) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 30.
B. 14.
C. 29.
D. 15.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = -1$. Biết $F(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) - f(x)$ và $\int_0^1 f(x)\,dx = a + be^2$ với a, b là các số hữu tỉ.

Tính $S = a^3 + b^3$:

A. $S = \dfrac{7}{64}$.
B. $S = \dfrac{13}{32}$.
C. $S = \dfrac{9}{64}$.
D. $S = \dfrac{7}{16}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R},c<0)$ có đồ thị (C). Gọi A là giao điểm của (C) và trục tung, biết (C) có đúng hai điểm chung với trục hoành là M, N đồng thời tiếp tuyến của (C) tại M đi qua A và tam giác AMN có diện tích bằng 16. Tính $f(1)$

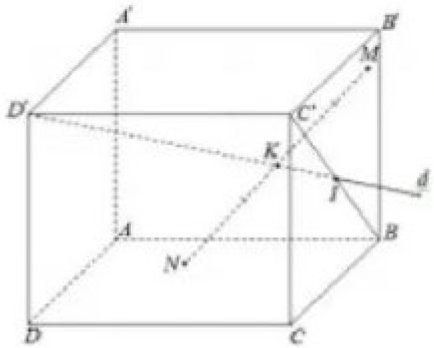
A. -3. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị của tham số m thỏa mãn $10m\in\mathbb{Z}$ để phương trình

$2\sin^2 x-(5m+1)\sin x+2m^2+2m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};3\pi\right)$

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 48: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3, AD=5, AA'=4$. Một đường thẳng d đi qua D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M,N thay đổi lần lượt thuộc về các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN là



A. $4\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{12\sqrt{13}}{13}$.

Câu 49: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a^2+3b$.

A. 33. **B.** 25. **C.** 30. **D.** 17.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SDC) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

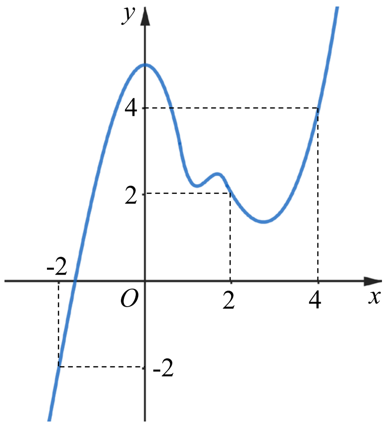
A. $\frac{64a^3}{81}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{3a^3}{64}$. **D.** $\frac{4a^3}{3}$.

HẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.C	5.C	6.C	7.C	8.A	9.B	10.C
11.A	12.A	13.D	14.B	15.D	16.D	17.C	18.B	19.D	20.C
21.D	22.C	23.B	24.D	25.B	26.A	27.C	28.C	29.D	30.B
31.B	32.D	33.B	34.C	35.B	36.B	37.B	38.B	39.D	40.A
41.C	42.B	43.B	44.C	45.B	46.A	47.A	48.D	49.A	50.C

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính giá trị của biểu thức $I=\int\limits_{2}^{4} f'\left(2x-6\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{\frac{5}{3}} f'\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$I=\int\limits_{2}^{4} f'\left(2x-6\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{\frac{5}{3}} f'\left(3x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\int\limits_{2}^{4} f'\left(2x-6\right)\mathrm{d}\left(2x-6\right)-\frac{1}{3}.\int\limits_{1}^{\frac{5}{3}} f'\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}.f\left(2x-6\right)\Big|_{2}^{4}-\frac{1}{3}.f\left(3x-1\right)\Big|_{1}^{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2}.\left[f\left(2\right)-f\left(-2\right)\right]-\frac{1}{3}.\left[f\left(4\right)-f\left(2\right)\right]$$

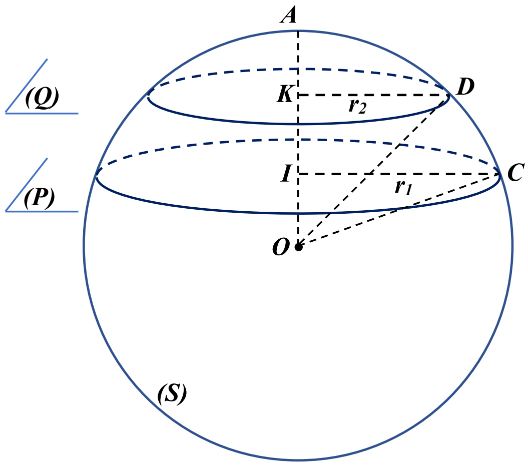
$$=\frac{1}{2}.\left[2-\left(-2\right)\right]-\frac{1}{3}.\left(4-2\right)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Câu 2: Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm O và A là một điểm nằm trên $\left(S\right)$. Gọi I, K là hai điểm trên đoạn OA sao cho $OI=IK=KA$. Các mặt phẳng $\left(P\right)$, $\left(Q\right)$ lần lượt đi qua I, K, cùng vuông góc với OA và cắt mặt cầu $\left(S\right)$ theo các đường tròn có bán kính lần lượt là r_1 và r_2. Tính tỷ số $\frac{r_2}{r_1}$.

A. $\frac{r_2}{r_1}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\frac{r_2}{r_1}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sqrt{10}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



- Gọi R là bán kính mặt cầu (S).

Trên đường tròn tâm I và tâm K lần lượt lấy điểm C và D bất kì. Khi đó: ΔKOD vuông tại K và ΔIOC vuông tại I.

Ta có: $r_1 = IC = \sqrt{OC^2 - IO^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{3}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{8}}{3}$;

$r_2 = KD = \sqrt{OD^2 - KO^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{2R}{3}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{5}}{3}$.

- $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{\dfrac{R\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{R\sqrt{8}}{3}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 3: Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 \left[f(x) - 2g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8. **B.** -3. **C.** 12. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^1 \left[f(x) - 2g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 2 - 2.5 = -8$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \dfrac{2022x - 21}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2022)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2022)$.

Lời giải

Chọn C

$y = \dfrac{2022x - 21}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{2043}{(x+1)^2} > 0; \forall x \ne -1$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ nên nó cũng đồng biến trên các khoảng $(1;2022)$ và $(-1;2022)$.

Câu 5: Cho cấp số cộng hình chóp (u_n) thỏa mãn $u_1=3$ và tổng hai số hạng đầu bằng 9. Số hạng u_3 bằng

A. 15. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

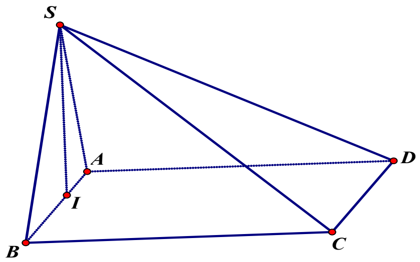
Lời giải

Chọn C

Ta có $u_3=u_1+2d=u_1+2(u_2-u_1)=u_1+2\left[(9-u_1)-u_1\right]$

$u_3=18-3u_1=9$.

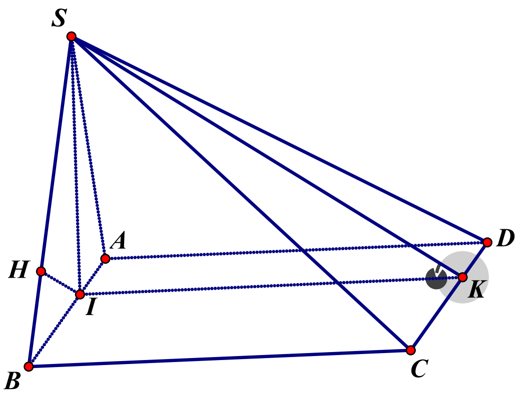
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là điểm I thuộc đoạn thẳng AB sao cho $BI=2AI$. Góc giữa mặt bên (SCD) với mặt phẳng đáy là 60^0 (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.



A. $\dfrac{9\sqrt{31}}{31}a$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{31}}{31}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{93}}{31}a$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{93}}{31}a$.

Lời giải

Chọn C



$SI\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp CD$. Dựng $IK\perp CD$ suy ra $CD\perp(SIK)\Rightarrow CD\perp SK$.

Ta có $(SCD)\cap(ABCD)=CD$, do đó $((SCD),(ABCD))=\widehat{SIK}=60^0$.

$IK=AD=a\sqrt{3}$, $SI=IK.\tan 60^0=3a$.

Vì $AD//BC$ nên $AD//(SBC)$, do đó $d(AD,SC)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$.

Vì $AI\cap(SBC)=B$ nên $\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(I,(SBC)\right)}=\dfrac{AB}{IB}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d\left(AD,SC\right)=\dfrac{3}{2}d\left(I,(SBC)\right)$.

Ta có $(SBI)\perp(SBC)$ và $(SBI)\cap(SBC)=SB$.

Dựng $IH\perp SB\Rightarrow IH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(I,(SBC)\right)=IH$.

$$IH=\frac{SI.IB}{\sqrt{SI^2+IB^2}}=\frac{SI.\frac{2}{3}AB}{\sqrt{SI^2+\frac{4}{9}AB^2}}=\frac{3a.\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{9a^2+\frac{4a^2}{3}}}=\frac{2a\sqrt{31}}{31}.$$

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ bằng $\sqrt{3}a^3$, tính theo a tổng diện tích các mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $12a^2$. **B.** $3a^2$. **C.** $18a^2$. **D.** $24a^2$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng x.

Ta có: $V_{ACB'D'}=V_{B'.ACD'}=2V_{D.ACD'}=2.\dfrac{1}{6}.DA.DC.DD'=\dfrac{1}{3}x^3$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}x^3=\sqrt{3}a^3\Leftrightarrow x=a\sqrt{3}$.

Do đó tổng diện tích của các các mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$6S=6.\left(a\sqrt{3}\right)^2=18a^2$

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số

$y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{4x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 198. **B.** 0. **C.** 196. **D.** 200.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $4x-x^2\ge0\Leftrightarrow0\le x\le4$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Vậy để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{4x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.

Mặt khác,

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x-m)\sqrt{4x-x^2}}=\infty \text{ và } \lim_{x\to4^-}y=\lim_{x\to4^-}\frac{1}{(x-m)\sqrt{4x-x^2}}=\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số đã có hai tiệm cận đứng là $x=0$ và $x=4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 4 \end{array}\right.$. Vì m nguyên thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m \in \{-100;-99;...;0;4;5;...;100\}$ nên có $101+97=198$ giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 9: Cắt mặt trụ tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của mặt trụ đó ta xác được thiết diện là

A. Một hình chữ nhật.
B. Một đường tròn.
C. Một đường Parabol.
D. Một đường elip.

Lời giải

Chọn B

Câu 10: Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x}{x+3}$ tại hai điểm phân biệt mà cả hai điểm đó đều có tọa độ nguyên?(điểm $M(x;y)$ có tọa độ nguyên nghĩa là $x, y \in \mathbb{Z}$)

A. 15. **B.** 12. **C.** 66. **D.** 28.

Lời giải

Chọn C

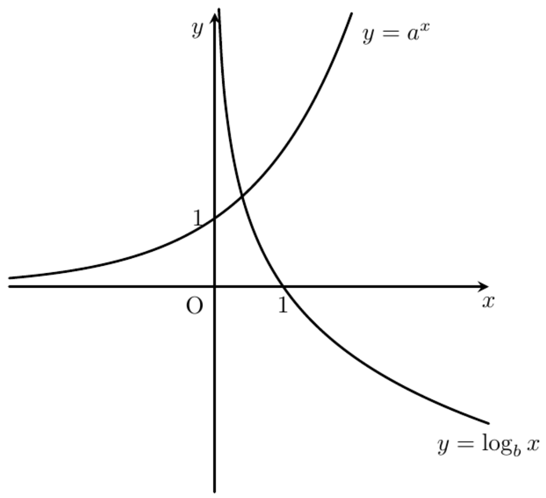
$y=\dfrac{4x}{x+3}=4-\dfrac{12}{x+3}$ với $x \ne -3$

$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x+3)$ là ước của 12

$\Leftrightarrow (x+3) \in \{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6;\pm 12\} \Rightarrow x \in \{-15;-9;-7;-6;-5;-4;-2;-1;0;1;3;9\}$.

Có 12 điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị qua 2 điểm có một đường thẳng đi qua. Vậy số đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm có tọa độ nguyên là $C_{12}^{2}=66$.

Câu 11: Cho đồ thị hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

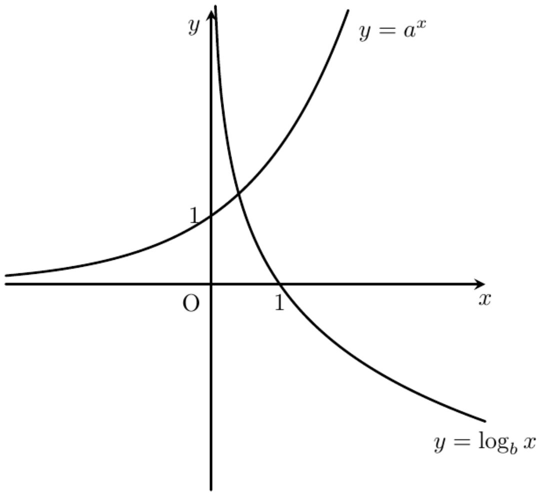


A. $0<b<1<a$. **B.** $0<a<1<b$. **C.** $a>1, b>1$. **D.** $0<a<1, 0<b<1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có



Trên đồ thị hàm số $y = a^x$, xét tại điểm có hoành độ $x = 1$ ta có tung độ $y = a^1 = a$, vì hàm số $y = a^x$ đồng biến nên $a > 1$.

Trên đồ thị hàm số $y = \log_b x$, xét điểm có tung độ $y = 1$ thì hoành độ là $x = b^1 = b$, vì hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến nên ta có $b < 1$.

Vậy $0 < b < 1 < a$.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2} - 4^x\right)\left[\log_3(x+79) - 4\right] \le 0$

A. 80. **B.** 79. **C.** 26. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > -79$.

$$\left(2^{x^2} - 4^x\right)\left[\log_3(x+79) - 4\right] \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \ge 0 \\ \log_3(x+79) - 4 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \le 0 \\ \log_3(x+79) - 4 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2} \ge 2^{2x} \\ x+79 \le 3^4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{x^2} \le 2^{2x} \\ x+79 \ge 3^4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 \ge 2x \\ x \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 \le 2x \\ x \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty) \\ x \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty;0] \cup \{2\} \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;0] \cup \{2\}.$$

Đối chiếu điều kiện $x > -79$ ta có

Vậy có 80 số nguyên thỏa mãn.

Câu 13: Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8$ ta lập các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số vừa lập, tính xác suất để chọn được một số có đúng 3 chữ số lẻ và các chữ số lẻ đứng kề nhau.

A. $\dfrac{3}{14}$. **B.** $\dfrac{4}{35}$. **C.** $\dfrac{1}{35}$. **D.** $\dfrac{1}{14}$.

Giải

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=A_8^7$.

Ta chọn ra 3 chữ số lẻ: có C_4^3.

Tiếp theo ta chọn ra 4 chữ số chẵn C_4^4.

Xem 3 chữ số lẻ là một khối, kết hợp với 4 chữ số còn lại là xem như 5 chữ số, đồng thời hoán vị.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn là: $C_4^3.C_4^4.5!.3!$.

Xác suất là $\dfrac{C_4^3.C_4^4.5!.3!}{A_8^7}=\dfrac{1}{14}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+4$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(\log(\log e)\right)=2$. Tính $f\left(\log(\ln 10)\right)$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 2.

Đặt $t=\log(\log e)=\log\left(\dfrac{1}{\ln 10}\right)=-\log(\ln 10)\Rightarrow \log(\ln 10)=-t$

Với $f(t)=2$.

Suy ra $f\left(\log(\ln 10)\right)=f(-t)$

$\Leftrightarrow f\left(\log(\ln 10)\right)=a\ln\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin(-t)+4$

$\Leftrightarrow f\left(\log(\ln 10)\right)=a\ln\left(\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\right)-b\sin t+4$

$\Leftrightarrow f\left(\log(\ln 10)\right)=-a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-b\sin t+4$

$\Leftrightarrow f\left(\log(\ln 10)\right)=-a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-b\sin t-4+8$

$\Leftrightarrow f\left(\log(\ln 10)\right)=-f(t)+8=6.$

Câu 15: Tính số cách sắp xếp 4 nam sinh và 6 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ sao cho tất cả nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau.

A. $6!\times 4!$. **B.** $7!\times 4!$. **C.** $10!$. **D.** $6!\times 5!$.

Lời giải

Chọn D

Coi 6 nữ sinh là 1 sinh, ta sẽ xếp 5 học sinh (gộp 4 nam sinh và 1 nữ sinh vừa coi) có: $5!$ (cách).

Mỗi cách xếp trên có số cách xếp 6 nữ sinh là: $6!$(cách).

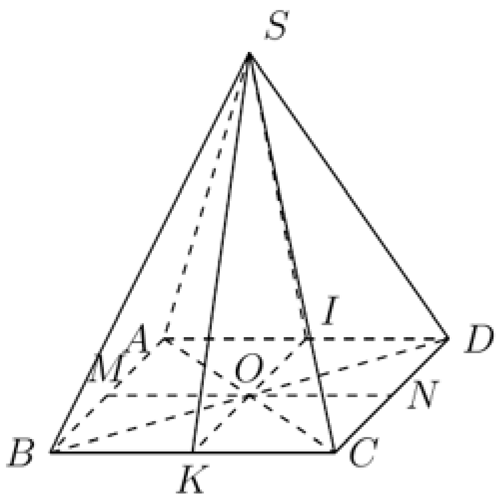
Vậy số cách xếp thỏa mán đề bài là: $6!\times 5!$.

Câu 16: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D



Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng là: $(SAC),(SBD),(SIK),(SMN)$.

Câu 17: Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2$?

A. $\left[-\sqrt{3}-3;\sqrt{3}-1\right]$. **B.** $\left[-2;\sqrt{3}\right]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-2;0]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x-\cos x=2+y$.

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi

$$\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2\ge(2+y)^2\Leftrightarrow 3+1\ge 4+4y+y^2\Leftrightarrow y^2+4y\le 0\Leftrightarrow -4\le y\le 0.$$

Vậy tập giá trị là $T=[-4;0]$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2;4]$ và thỏa mãn $f(2)=2$, $f(4)=2022$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 1011. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Ký hiệu $I=\int\limits_1^2 f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận : $x=1\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=4$.

Từ đó suy ra $I=\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(t)\Big|_2^4=\frac{1}{2}\left[f(4)-f(2)\right]=\frac{1}{2}(2022-2)=1010$.

Câu 19: Tính $a^2+2b^2+c^2$ biết $\int\limits_{16}^{55}\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ.

A. $\frac{4}{9}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{9}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ký hiệu $I=\int\limits_{16}^{55}\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$. Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2tdt=dx$

Đổi cận:

x	16	55
t	5	8

Suy ra :

$$I=\int\limits_5^8\frac{2tdt}{\left(t^2-9\right).t}=\int\limits_5^8\frac{2dt}{(t-3)(t+3)}=\frac{1}{3}\int\limits_5^8\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-3|-\ln|t+3|\right)\Big|_5^8=\frac{1}{3}\left(\ln 5-\ln 11-\ln 2+\ln 8\right)$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=\dfrac{1}{3}\\ c=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}\Rightarrow a^2+2b^2+c^2=\frac{7}{9}$$

Câu 20: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{x}{y}=1+\sqrt{3}$. **D.** $\frac{x}{y}=\sqrt{3}-1$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)=t\Rightarrow\begin{cases}x=6^t & (1)\\ y=9^t & (2)\\ 2x+2y=4^t & (3)\end{cases}$$

Thế (1), (2) vào (3) ta được:

$$2.6^t+2.9^t=4^t\Leftrightarrow-\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}+2.\left(\frac{2}{3}\right)^t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^t=1-\sqrt{3}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^t=1+\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)}=1+\sqrt{3}.$$

Câu 21: Cho hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ có cạnh bằng $4a$. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $100\sqrt{3}a^2$. **B.** $20\sqrt{3}a^2$. **C.** $4\sqrt{3}a^2$. **D.** $80\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

Chọn D

Hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ là hình hai mươi mặt đều, các mặt là các tam giác đều cạnh $4a$.

S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện.

Vậy $S = 20.\dfrac{(4a)^2.\sqrt{3}}{4} = 80\sqrt{3}a^2$.

Câu 22: Cho hai số tự nhiên a, b không lớn hơn 10. Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ để

$\lim\left(\sqrt{n^2-bn+7}+a-n\right)=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-bn+7}+a-n\right) = \lim\left[\sqrt{n^2-bn+7}-(n-a)\right]$

$$= \lim\frac{n^2-bn+7-(n-a)^2}{\sqrt{n^2-bn+7}+n-a} = \lim\frac{n^2-bn+7-n^2+2na-a^2}{\sqrt{n^2-bn+7}+n-a}$$

$$= \lim\frac{n(2a-b)+7-a^2}{\sqrt{n^2-bn+7}+n-a} = \frac{2a-b}{2}$$

Theo giả thiết $2a-b=0 \Leftrightarrow b=2a$.

Ta có $0 \le b \le 10$ nên $0 \le 2a \le 10 \Leftrightarrow 0 \le a \le 5$.

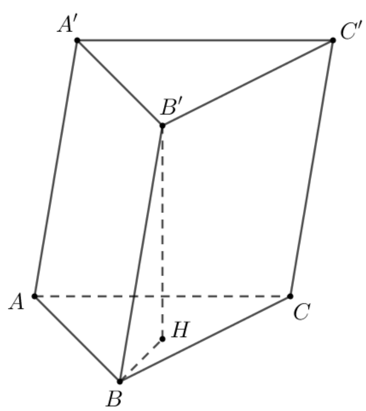
Vậy có tất cả là 6 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB=a; A'C'=4a; BB'=3a$. Giá trị lớn nhất thể tích lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của B' trên (ABC).

Trong tam giác $BB'H$ có $\sin\widehat{B'BH} = \dfrac{B'H}{BB'} \Rightarrow B'H = BB'.\sin\widehat{B'BH}$.

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta ABC} = BB'.\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = BB'.\sin\widehat{B'BH}.\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$.

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} \le BB'.\dfrac{1}{2}AB.AC = 3a.\dfrac{1}{2}.a.4a = 6a^3$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sin\widehat{B'BH} = 1 \\ \sin\widehat{BAC} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\widehat{B'BH} = 90° \\ \widehat{BAC} = 90°\end{cases}$.

Hay dấu "=" xảy ra khi lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đứng và có đáy là tam giác ABC vuông tại A.

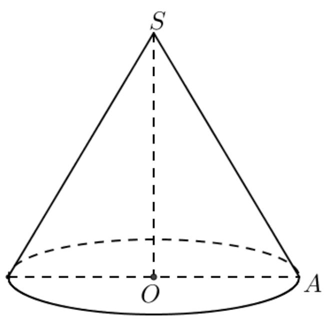
Giá trị lớn nhất thể tích lăng trụ bằng $6a^3$.

Câu 24: Cho hình nón có đường sinh $l = 2a$, góc giữa đường sinh và mặt đáy bằng $60°$. Diện tich xung quanh của hình nón bằng

A. $3\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

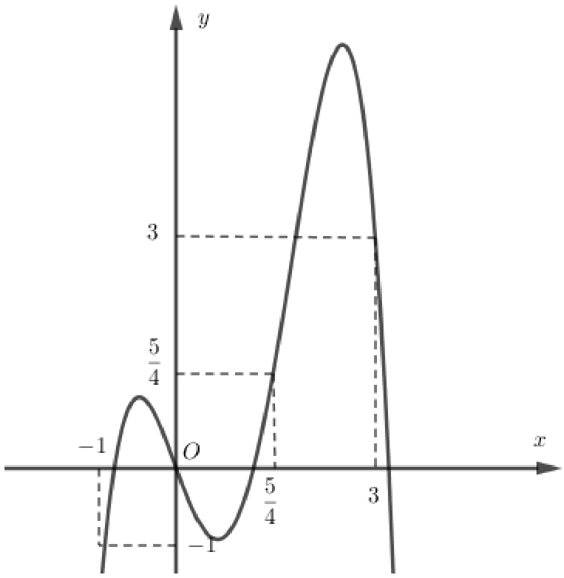


Góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SAO} = 60°$.

Ta có: $l = SA = 2a \Rightarrow r = OA = SA.\cos 60° = \dfrac{2a}{2} = a$.

Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ .Hàm số $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 3 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$g'(x)=2f'(x-1)-2x+2=2f'(x-1)-2(x-1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-1)=(x-1)$

Quan sát đồ thị đã cho ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt đường thẳng $y=x$ tại 3 điểm có hoành độ là $-1;\frac{5}{4};3$ nên phương trình $f'(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó phương trình

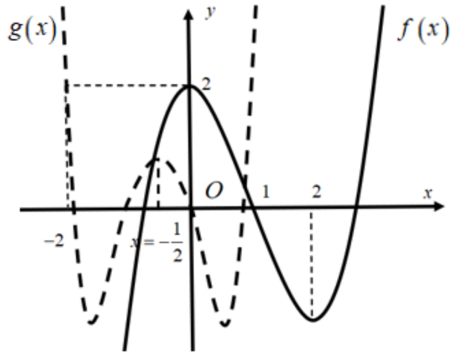
Ta có BBT của đồ thị hàm số $y=g(x)$ $f'(x-1)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=\frac{5}{4} \\ x-1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{9}{4} \\ x=4 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		$\frac{9}{4}$		4		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 2 cực đại.

Câu 26: Cho hai hàm số bậc ba $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị hàm số $y=f(x)$

là đường nét liền ; đồ thị hàm số $y=g(x)$ là đường nét đứt). Biết rằng hai đồ thị hàm số $y=f(-3x+2)$ và $y=3g(ax+b)$ có chung khoảng đồng biến. Giá trị của biểu thức $a+2b$ là:



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $y=f(-3x+2)\Rightarrow y'=-3.f'(-3x+2)>0\Leftrightarrow 0<-3x+2<2\Leftrightarrow 0<x<\frac{3}{2}$

Nên hàm số $y=f(-3x+2)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Xét hàm số: $y=3g(ax+b)\Rightarrow y'=3a.g'(ax+b)>0$.

- Th1 : $a>0$. Khi đó
  $3a.g'(ax+b)>0\Leftrightarrow g'(ax+b)>0\Leftrightarrow -1<ax+b<1\Leftrightarrow \frac{-1-b}{a}<x<\frac{1-b}{a}$

Theo đề ta có hàm số $y=3g(ax+b)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $\begin{cases}\frac{-1-b}{a}=0\\ \frac{1-b}{a}=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\ a=3\end{cases}$

nên $a+2b=1$.

- Th 2 : $a=0$. Khi đó $y=3g(ax+b)=3g(b)$ là hàm hằng nên không thỏa yêu cầu bài toán.

- Th3: $a>0$ Khi đó $3a.g'(ax+b)>0\Leftrightarrow g'(ax+b)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ax+b>-1\\ ax+b<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<\frac{-1-b}{a}\\ x>\frac{1-b}{a}\end{array}\right.$

Do đó $y=3g(ax+b)$ không có cùng khoảng đồng biến với hàm số $y=f(-3x+2)$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx-c\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ với a,b,c là các số thực dương, biết $f(1)=-3, f(5)=2$. Xét hàm số $g(x)=\left|3f(3-2x)+2f(3x-2)-m\right|$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=10$. Tổng các phần tử của S là

A. -11. **B.** 11. **C.** -13. **D.** 13

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=ax^3+bx-c\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=-ax^3-bx-c\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=-ax^3-bx-c\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=-ax^3-bx+c\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow f(-5)=-f(5)$

Mặt khác ta lại có: $f'(x)=3ax^2+b-\dfrac{c}{\sqrt{1+x^2}}$

Xét hàm số $h(x)=3f(3-2x)+2f(3x-2)-m$, có $h'(x)=-6f'(3-2x)+6f'(3x-2)$

$$h'(x)=6\left[f'(3x-2)-f'(3-2x)\right]=6\left(3a\left[(3x-2)^2-(3-2x)^2\right]+c\left[\frac{1}{\sqrt{1+(3-2x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+(3x-2)^2}}\right]\right)$$

$$=6\left(\sqrt{1+(3x-2)^2}-\sqrt{1+(3-2x)^2}\right)\left[3a\left(\sqrt{1+(3x-2)^2}+\sqrt{1+(3-2x)^2}\right)+\frac{c}{\sqrt{1+(3x-2)^2}.\sqrt{1+(3-2x)^2}}\right]$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1+(3t-2)^2}-\sqrt{1+(3-2t)^2}=0\Leftrightarrow(3x-2)^2=(3-2x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-2=3-2x\\3x-2=2x-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Do

$h(1)=3f(1)+2f(1)-m=5f(1)-m=-m-15; h(-1)=3f(5)+2f(-5)-m=f(5)-m=-m+2$

cho nên $A=\max\limits_{[-1;1]} g(x)=-m+2$, $B=\min\limits_{[-1;1]} g(x)=-m-15$.

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\max\left\{|-m-15|,|-m+2|\right\}$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}|-m-15|\ge|-m+2|\\ \max\limits_{[-1;1]} g(x)=|-m-15|=|m+15|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m+15|\ge|-m+2|\\|m+15|=10\end{cases}\Leftrightarrow m=-5.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}|-m+2|>|m+15|\\ \max\limits_{[-1;1]} g(x)=|-m+2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|-m+2|>|m+15|\\|-m+2|=10\end{cases}\Leftrightarrow m=-8.$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=-5, m=-8$.

Câu 28: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A,D sao cho $AD=a\sqrt{15}$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm (O'); trên đường tròn tâm (O') lấy điểm B (AB,CD chéo nhau). Đặt α là góc giữa AB với đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

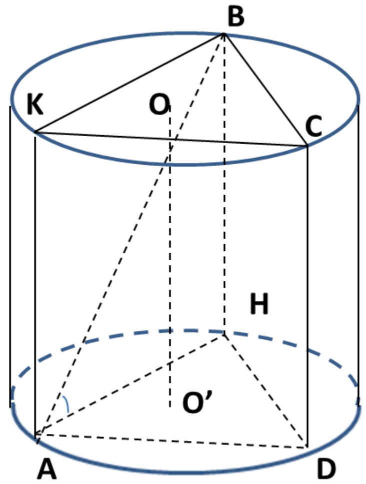
A. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.

Ta có: hình lăng trụ đứng $ADH.KCB$



Do đó:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{ADH.KCB}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot S_{ADH}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot d\left(H,AD\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}a\cdot d\left(H,AD\right)=\frac{\sqrt{15}a^2}{3}\cdot d\left(H,AD\right).$$

Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách từ H đến AD lớn nhất nên H nằm chính giữa cung lớn chứa dây AD.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ADH ta có:

$$\frac{AD}{\sin\widehat{AHD}}=2R\Leftrightarrow \sin\widehat{AHD}=\frac{AD}{2R}=\frac{a\sqrt{15}}{4a}=\frac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow \cos\widehat{AHD}=\frac{1}{4}.$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác cân ADH ta có:

$$AD^2=2AH^2-2AH^2\cos AHD=2AH^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}AH^2$$

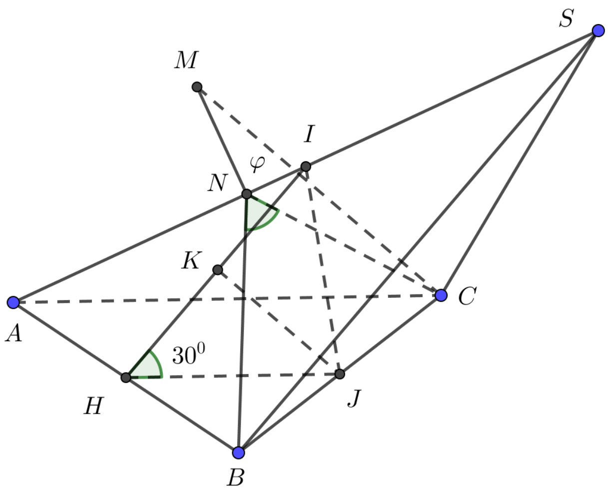
$$\Rightarrow AH=\frac{2}{3}AD=\frac{2\sqrt{15}a}{3}.$$

Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABH ta có $\tan\alpha=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{2a}{\dfrac{2\sqrt{15}a}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SA , tam giác ABC là tam giác vuông tại A, $AC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $30°$, gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC), $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{20\pi a^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi I, J, H lần lượt là trung điểm SA, BC, AB.

Ta có $HJ = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$ (tính chất đường trung bình).

Ta có $\left.\begin{matrix} HJ \,//\, AC\left(tinh\,chat\,duong\,tb\right) \\ AC \perp AB\left(vi\,SA\,la\,duong\,kinh\right)\end{matrix}\right\} \Rightarrow HJ \perp AB$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} HI \,//\, SB \\ AB \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow HI \perp AB$.

$\left(SAB\right) \cap \left(ABC\right) = AB$

$\Rightarrow \widehat{\left(\left(SAB\right);\left(ABC\right)\right)} = \widehat{\left(HI;HJ\right)} = \widehat{IHJ} = 30^\circ$ (do tam giác IJH vuông tại J).

Gọi K là hình chiếu của J trên $IH \Rightarrow JK \perp \left(SAB\right)$, $d\left(J;\left(SAB\right)\right) = JK$.

Gọi M là hình chiếu của C trên $\left(SAB\right)$, kẻ $CN \perp SA$ tại N.

Ta có $KJ = HJ\sin 30^\circ = \frac{a}{4}$.

$\frac{d\left(J;\left(SAB\right)\right)}{d\left(C;\left(SAB\right)\right)} = \frac{JK}{CM} = \frac{BJ}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\left(C;\left(SAB\right)\right) = 2d\left(J;\left(SAB\right)\right) = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{\left(\left(SAB\right);\left(SAC\right)\right)} = \widehat{\left(MN;CN\right)} = \widehat{CNM} = \varphi$.

Tam giác CMN vuông tại $M \Rightarrow CN = \frac{CM}{\sin\varphi} = \frac{a}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Tam giác SAC vuông tại C

$\Rightarrow \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{CN^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow SC = a\sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu là $r = \frac{SA}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 4\pi\alpha^2$.

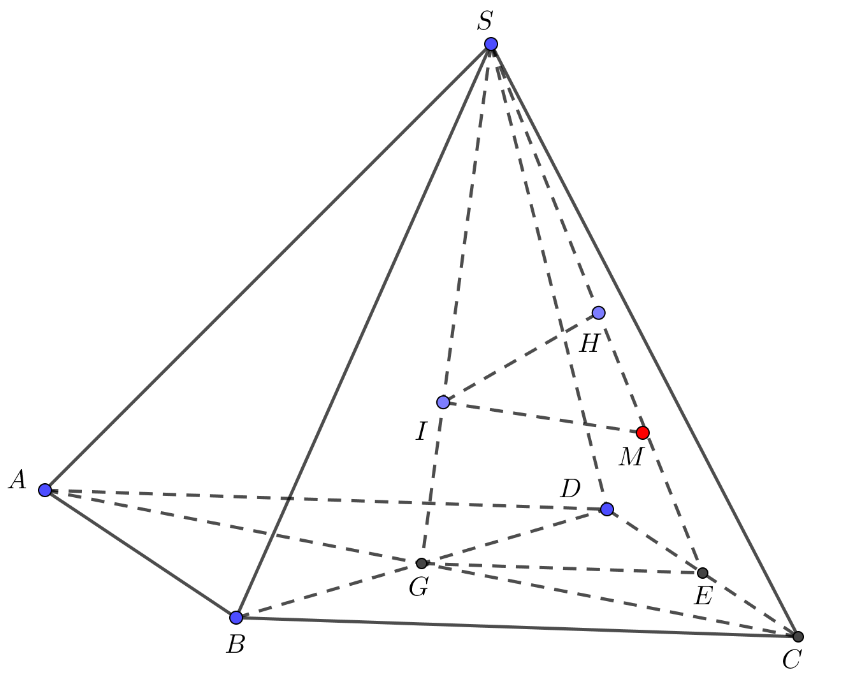
Câu 30: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng $\left(SCD\right)$ sao cho tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 2MS^2$

nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{17}{4}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{21}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là tâm của hình vuông $ABCD$

I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{IS}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{IS}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}+2\overrightarrow{IS}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IS}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GS}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GS}$

$\Rightarrow I$ thuộc đoạn SG sao chó $IG=\frac{GS}{3}$.

Ta có $T=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IS}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$\Rightarrow T=IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2IS^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{IS}\right)+6IM^2$

$\Rightarrow T=IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2IS^2+6IM^2$

$\Rightarrow T\geq IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2IS^2+6IH^2$ (H là hình chiếu của I trên (SCD))

$\Rightarrow \text{Min}T=IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2IS^2+6IH^2\,\text{T} \Leftrightarrow M\equiv H$

$V_1=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SG.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SG.a^2=\frac{1}{3}SG.a^2$

$V_2=V_{M.ACD}=V_{H.ACD}=\frac{1}{3}d\left(H;\left(ACD\right)\right).S_{ACD}=\frac{1}{3}d\left(H;\left(ACD\right)\right).\frac{a^2}{2}=\frac{1}{6}d\left(H;\left(ACD\right)\right).a^2$

$SG=\sqrt{SA^2-GA^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SI=\frac{2}{3}SG=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Gọi E là trung điểm CD, $SE=\sqrt{SG^2+OE^2}=\sqrt{SG^2+OE^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

$\Delta SHI \sim \Delta SGE(g.g) \Rightarrow \frac{SH}{SG}=\frac{SI}{SE} \Rightarrow \frac{SH}{SE}=\frac{SI.SG}{SE^2}=\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{EH}{SE}=\frac{7}{3}$

$\frac{d(H;(ACD))}{d(S;(ABCD))}=\frac{SH}{SE}=\frac{4}{7}$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}d(S;(ABCD)).S_{ABCD}}{\frac{1}{3}d(H;(ABCD)).S_{ACD}}=\frac{2SE}{EH}=\frac{14}{3}$.

Câu 31: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2}=8-(2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$ là số có dạng $M=a\sqrt{b}-c$ với $a,b,c\in\mathbb{N},a>2$. Tính $S=2a+b-c$.

A. $S=19$. **B.** $S=7$. **C.** $S=17$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết $\Leftrightarrow (y+2)\log_2[(y+2)(2x+1)]=8-(2x-2)(y+2)$

$\Leftrightarrow \log_2(y+2)+\log_2(2x+1)=\frac{8}{y+2}-2x+2 \Leftrightarrow \log_2(2x+1)+2x+1=\frac{8}{y+2}+\log_2\frac{1}{y+2}+3$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+1)+2x+1=\log_2\frac{8}{y+2}+\frac{8}{y+2}$ $(*)$.

Vì $x,y>0$ nên $2x+1>0$ và $\frac{8}{y+2}>0.$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0.$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(2x+1)=f\left(\frac{8}{y+2}\right)\Leftrightarrow 2x+1=\frac{8}{y+2}\Leftrightarrow 2x=\frac{8}{y+2}-1.$

Ta có $P=2x+y=\frac{8}{y+2}+y-1=\left(\frac{8}{y+2}+y+2\right)-3.$

$\geq 2\sqrt{\frac{8}{y+2}.(y+2)}-3=4\sqrt{2}-3$ (Theo BĐT Côsi cho hai số dương $\frac{8}{y+2}$ và $y+2$).

Suy ra $\min P=4\sqrt{2}-3$ hay $a=4,b=2,c=3$. Vậy $S=2a+b-c=2.4+2-3=7$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm x thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 2276. **B.** 1749. **C.** 1750. **D.** 2277.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)\Leftrightarrow \sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}=-x$

$\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+m=-x^3 \Leftrightarrow -m=f^3(x)+f(x)+x^3$ $(*)$.

Xét hàm số $g(x)=f^3(x)+f(x)+x^3$ trên $[-2;2]$ có

$g'(x)=3f'(x)f^2(x)+f'(x)+3x^2>0,\forall x\in[-2;2]$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-2;2]$.

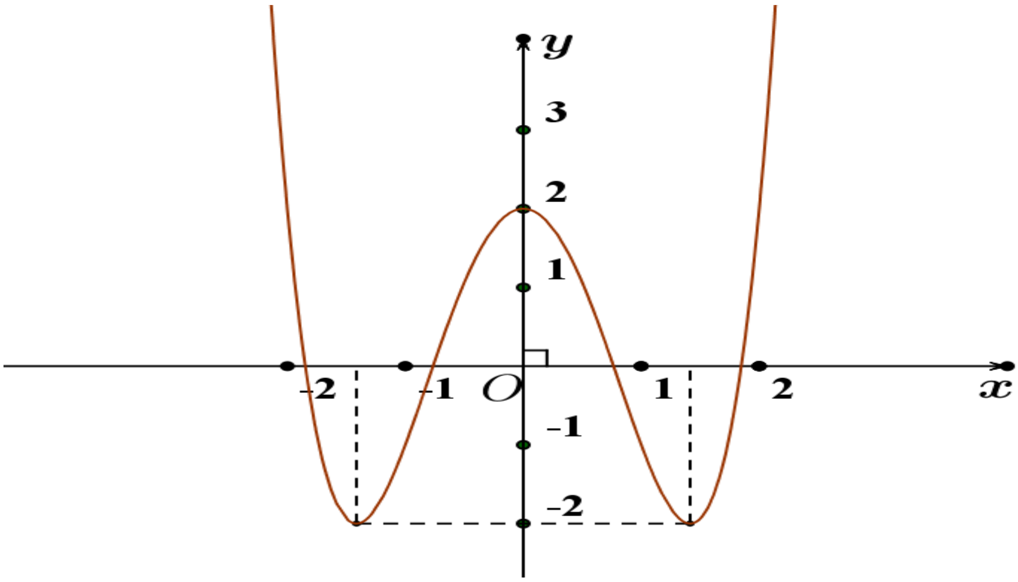
Khi đó $\min\limits_{[-2;2]} g(x)=g(-2)=-528$ và $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=g(2)=1748$.

Để phương trình ban đầu có nghiệm trên $[-2;2]$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm trên $[-2;2]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)\le -m\le \max\limits_{[-2;2]} g(x)\Leftrightarrow -1748\le m\le 528$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên có $\dfrac{528-(-1748)}{1}+1=2277$ số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 33: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $m\in[0;25]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=||2f(x)+m+4|-f(x)-3|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1 ?

A. 21. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

Do $m\in[0;25]$ và $-2\le f(x)\le 2,\forall x\in[-2;2]$

$\Rightarrow |2f(x)+m+4|=2f(x)+m+4\Rightarrow g(x)=|f(x)+m+1|$.

Nếu $m\le 1\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)=0\ge 1$ không thoả mãn;

Nếu $m\ge 2\Rightarrow g(x)\ge 1\Rightarrow m\ge 2$ thỏa mãn.

Do $\begin{cases} m\ge 2\\ m\in\mathbb{Z}\\ m\in[0;25]\end{cases}\Rightarrow m=2...25\Rightarrow$ có $[25-2]+1=24$ giá trị của m.

Câu 34: Cho hình vuông kích cỡ 4 x 4 như hình vẽ. Sắp xếp ngẫu nhiên các số tự nhiên từ 1 đến 16 vào 16 ô vuông. Tính xác suất để có tổng bốn số ở các ô trong cùng một hàng hay cùng một cột đều là một số lẻ.

1	**2**	**3**	**4**
8	**7**	**6**	**5**
9	**10**	**11**	**12**
16	**15**	**14**	**13**

A. $\frac{1}{14}$. **B.** $\frac{46}{6435}$. **C.** $\frac{8}{715}$. **D.** $\frac{16}{2145}$.

Lời giải

Ta có $n(\Omega)=16!$

Gọi A là biến cố: "tổng bốn số ở các ô trong cùng một hàng hay cùng một cột đều là một số lẻ".

Từ 1 đến 16 có 8 số lẻ.

Để tổng bốn số ở các ô trong cùng một hàng hay cùng một cột đều là một số lẻ thì mỗi hàng và mỗi cột chỉ có 1 số lẻ hoặc 3 số lẻ.

TH1:

L	**L**	**L**	
	L	**L**	**L**
	L		
		L	

Xếp 8 số lẻ có 8! cách. Xếp 8 số chẵn có 8! cách. Nên có 8!.8! cách xếp.

Hoán vị các hàng ta có 4! cách.

Vậy TH này có 8!.8!.4! cách xếp.

TH2:

L	**L**	**L**	
L	**L**		**L**
L			
	L		

Xếp 8 số lẻ có 8! cách. Xếp 8 số chẵn có 8! cách. Nên có 8!.8! cách xếp.

Hoán vị các hàng ta có 4! cách.

Vậy TH này có 8!.8!.4! cách xếp.

TH3:

L	**L**	**L**	
L		**L**	**L**
L			
		L	

Xếp 8 số lẻ có 8! cách. Xếp 8 số chẵn có 8! cách. Nên có 8!.8! cách xếp.

Hoán vị các hàng ta có 4! cách.

Vậy TH này có 8!.8!.4! cách xếp.

TH4:

L	L		L
L		L	L
L			
			L

Xếp 8 số lẻ có 8! cách. Xếp 8 số chẵn có 8! cách. Nên có 8!.8! cách xếp.
Hoán vị các hàng ta có 4! cách.
Vậy TH này có 8!.8!.4! cách xếp.
TH5:

	L	L	L
L	L		L
	L		
			L

Xếp 8 số lẻ có 8! cách. Xếp 8 số chẵn có 8! cách. Nên có 8!.8! cách xếp.
Hoán vị các hàng ta có 4! cách.
Vậy TH này có 8!.8!.4! cách xếp.
TH6:

	L	L	L
L		L	L
		L	
			L

Xếp 8 số lẻ có 8! cách. Xếp 8 số chẵn có 8! cách. Nên có 8!.8! cách xếp.
Hoán vị các hàng ta có 4! cách.
Vậy TH này có 8!.8!.4! cách xếp.

Từ đó ta có $n(A)=6.8!.8!.4! \Rightarrow P(A)=\dfrac{8}{715}$.

Câu 35: Biết $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+2b+c$.

A. $S=99$. **B.** $S=67$. **C.** $S=51$. **D.** $S=88$.

Bài làm

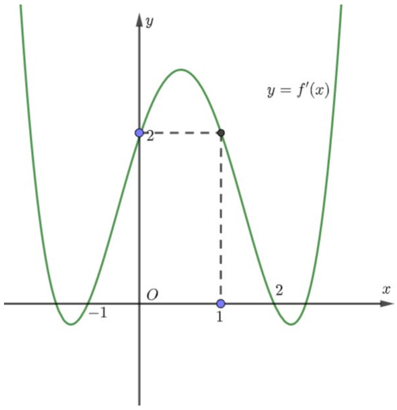
$$\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}} \Rightarrow t^3=x-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4\Bigg|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$.

Suy ra $\begin{cases}a=21\\b=32\\c=14\end{cases}$. Vậy $S=a+2b+c=21+2.32+14=67$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=3f(-x^3-3x+m)+(x^3+3x-m)^2\left(-2x^3-6x+2m-6\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2022;2022\right]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$ là

A. 4027. **B.** 4017. **C.** 2023. **D.** 2021.

Bài làm

Đặt $u=-x^3-3x+m \Rightarrow \begin{cases} -u=x^3+3x-m \\ 2u-6=-2x^3-6x+2m-6 \end{cases}$.

Ta có $u'=-3x^2-3<0, \forall x\in(-2;2)$ với $x\in(-2;2)$ thì $u\in(m-14;m+14)$.

Khi đó $g(x)$ trở thành $g(u)=3f(u)+u^2(2u-6)=3f(u)+2u^3-6u^2$.

$g'(u)=3f'(u).u'+(6u^2-12u).u'=3u'\left[f'(u)+(2u^2-4u)\right]$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-2;2)$ thì $f'(u)+(2u^2-4u)>0, \forall u\in(m-14;m+14)$.

Dựa vào ĐTHS ở trên ta thấy $ycbt \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+14\le 1 \\ m-14\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -13 \\ m\ge 16 \end{array}\right.$.

Vậy có 4017 giá trị nguyên thỏa mãn là $\left\{-2022;-2021;...;-13;16;17;...;2022\right\}$.

Câu 37: Số nghiệm của phương trình $\left(x^2-2023x+2022\right)\left(2022^{x-1}+1\right)=\dfrac{2x-2023}{2022}$

A. 3. **B.** 2 . **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

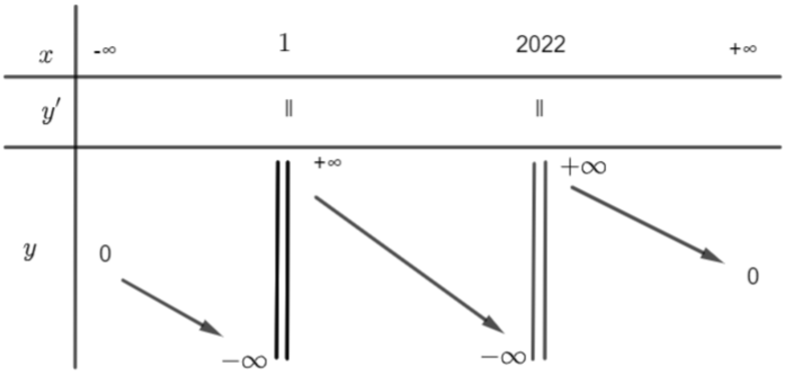
$\left(x^2-2023x+2022\right)\left(2022^{x-1}+1\right)=\dfrac{2x-2023}{2022}$

$\Leftrightarrow 20222^x+2022=\dfrac{x-1+x-2022}{(x-1)(x-2022)}$

$\Leftrightarrow 2022^x+2022=\dfrac{1}{x-2022}+\dfrac{1}{x-1}$

Xét hàm số $y=2022^x+2022$ có $a>1$ nên là hàm đồng biến và có $I=\left(2022;+\infty\right)$

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{x-2022}+\dfrac{1}{x-1}$ có $y'=\dfrac{-1}{\left(x-2022\right)^2}-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}<0$



Ta thấy hàm số $y = 2022^x + 2022$ lên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ BBT suy ra đồ thị hàm số $y = 2022^x + 2022$ cắt ĐTHS $y = \dfrac{1}{x-2022} + \dfrac{1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt.

Câu 38: Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{x+1} - m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1} + 3m^2 + 6m - 3\right)3^x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất . Tổng các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Ta có

$$9^{x+1} - m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1} + 3m^2 + 6m - 3\right)3^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 3^x + 3^{-x} = m\left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} + 3m^2 + 6m - 3\right)(*)$$

Nhận xét: nếu x_0 là nghiệm của $(*)$ thì $-x_0 - 2$ cũng là nghiệm của $(*)$. Thật vậy

$$9\cdot 3^{-x_0-2} + 3^{x_0+2} = m\left(4\sqrt[4]{(-x_0-2+1)^2} + 3m^2 + 6m - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow 3^{-x_0} + 9\cdot 3^{x_0} = m\left(4\sqrt[4]{(x_0+1)^2} + 3m^2 + 6m - 3\right)$$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0 = -x_0 - 2 \Leftrightarrow x_0 = -1$

Thay $x_0 = -1$ vào $(*)$ ta được:

$$1 - m\left(3m^2 + 6m - 3\right)3^{-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^3 + 6m^2 - 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

Thử lại

Với $m = -2$ ta được: $9.3^x + 3^{-x} = -2\left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 3\right)$

$$\left.\begin{array}{l} VT = 9.3^x + 3^{-x} \geq 6 \\ VP = -2\left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 3\right) \leq 6 \end{array}\right\} \Rightarrow VT = VP \Rightarrow m = -2(tm).$$

Với $m = 1$ ta được: $9.3^x + 3^{-x} = \left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} + 6\right)$

Ta thấy phương trình luôn có hai nghiệm $x = -1; x = 0$ do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m = -1$ ta được: $9.3^x + 3^{-x} = -\left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 6\right)$

$$\left.\begin{array}{l} VT = 9.3^x + 3^{-x} \geq 6 \\ VP = -\left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 6\right) \leq 6 \end{array}\right\} \Rightarrow VT = VP \Rightarrow m = -1(tm).$$

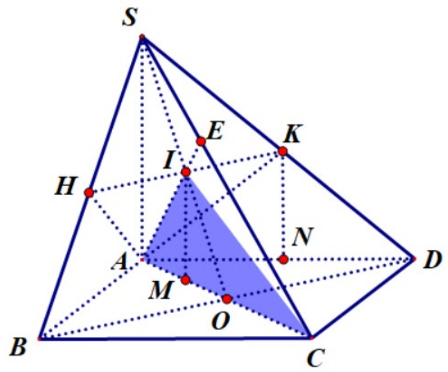
Tổng các phần tử của S bằng -3.

Câu 39: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$, trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S di động không trùng với A. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt là H, K. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

A. $\frac{16}{7}$. **B.** $\frac{7}{16}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{9}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta dễ dàng chứng minh được $SC \perp (AHK)$, $HK // BD$, $AH = AK$;

gọi $AC \cap BD = \{O\}$, $SO \cap HK = \{I\}$, $AI \cap SC = \{E\}$, thì ta có $\Rightarrow AE \perp SC$

Cũng dễ chứng minh được $BD \perp (SAC) \Rightarrow HI \perp (SAC)$;

Vậy ta suy ra $V_{ACHK} = 2.V_{H.IAC} = 2.\frac{1}{3}.HI.S_{\Delta IAC}$.

Đặt $SA = x > 0$, ta dễ dàng sử dụng các hệ thức lượng trong các tam giác vuông để có các kết quả

$$\frac{HI}{BO} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2+3} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{x^2}{x^2+3}.$$

Gọi N là hình chiếu của K tới AD, gọi M là hình chiếu của I tới AC, ta dễ dàng có $IM = KN$; còn dễ thấy $\frac{KN}{SA} = \frac{DK}{DS} = \frac{DA^2}{DS^2} = \frac{3}{x^2+3} \Rightarrow IM = KN = \frac{3x}{x^2+3}$; suy ra $S_{\triangle IAC} = \frac{IM.AC}{2} = \frac{3x\sqrt{6}}{2\left(x^2+3\right)}$.

Vật ta có $V_{ACHK} = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{x^2}{x^2+3}.\frac{3x\sqrt{6}}{2\left(x^2+3\right)} = \frac{3x^3}{\left(x^2+3\right)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^3}{\left(x^2+3\right)^2}$, có $f'(x) = \frac{3x^2\left(9-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$; dễ thấy đạo hàm có nghiệm dương là $x = 3$;

Ta có bảng biến thiên:

x	0		3		$+\infty$
f'	|	$+$	0	-	
f	|	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	

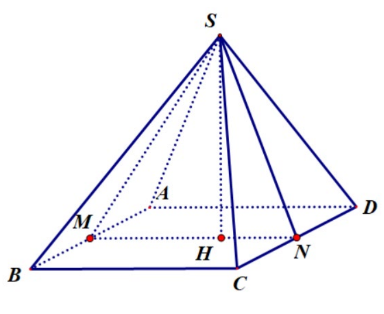
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ bằng $\frac{9}{16}$.

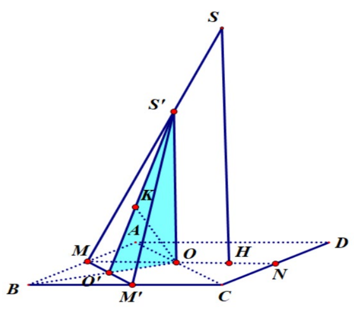
Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $3a$, tam giác SAB đều, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC, biết rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$.

A. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A





Gọi hình chiếu của S tới $(ABCD)$ là H; gọi N là trung điểm CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SNH}$ bằng $60°$; đặt $NH = x$, dễ suy ra $SH = x\sqrt{3}$, $MH = 3 - x$ Xét tam giác vuông ΔSMH có $3x^2 + x^2 - 6x + 9 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Gọi tâm của đáy là O; gọi điểm S' thuộc đoạn SM mà có O là hình chiếu của nó lên mặt đáy; ta có $\frac{S'O}{SO} = \frac{MO}{MH} = \frac{2}{3} \Rightarrow S'O = \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lấy M' là trung điểm của BC, dễ thấy $AC // MM' \Rightarrow AC // (SMM')$ và $BO \perp MM'$;

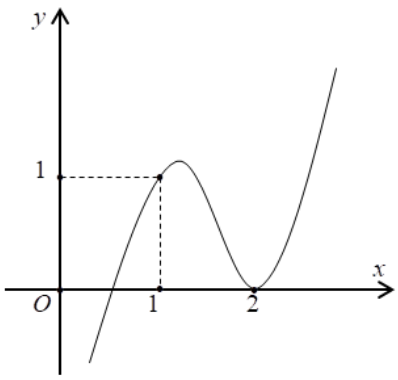
Gọi $\{O'\} = BO \cap MM'$; kẻ $OK \perp S'O' \Rightarrow OK \perp (SMM')$

$\Rightarrow OK = d(O,(SMM')) = d(AC, SM)$

Dễ tính được $OO' = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ và $S'O' = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$; vậy ta có $OK = \dfrac{OO'.OS'}{O'S'} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 41: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$y = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x\left[2f^3(x) - 3f^2(x) + f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



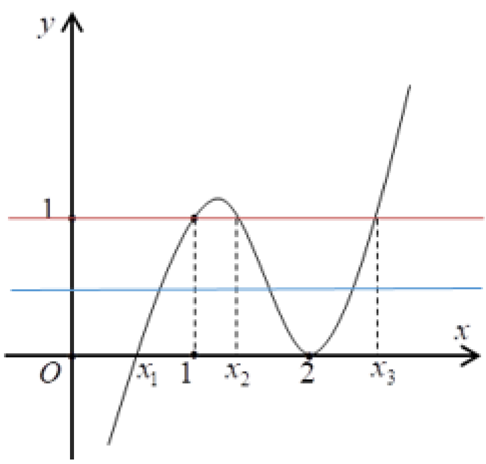
A. 8. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Giải

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x\left[2f^3(x) - 3f^2(x) + f(x)\right]} = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{xf(x)\left[f(x)-1\right]\left[2f(x)-1\right]}$$

$$xf(x)\left[f(x)-1\right]\left[2f(x)-1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta có:



Từ đồ thị hàm số ta suy ra:

+) Phương trình $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=2\end{array}\right.$ (trong đó $x=x_1<1$ là nghiệm đơn, $x=2$ là nghiệm kép).

+) Phương trình $f\left(x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right.$ (trong đó $x=x_2$, $x=x_3$ là các nghiệm đơn lớn hơn 1).

+) Phương trình $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_4\\x=x_5\\x=x_6\end{array}\right.$ (với $x_1<x_4<1,x_2<x_5<2<x_6<x_3$)

Đặt $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\quad\left(a\neq0\right)$

$$\Rightarrow g\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\sqrt{x-1}}{xf\left(x\right)\left[f\left(x\right)-1\right]\left[2f\left(x\right)-1\right]}=\frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\sqrt{x-1}}{a^3x\left(x-x_1\right)\left(x-2\right)^2\left(x-1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)...\left(x-x_6\right)}$$

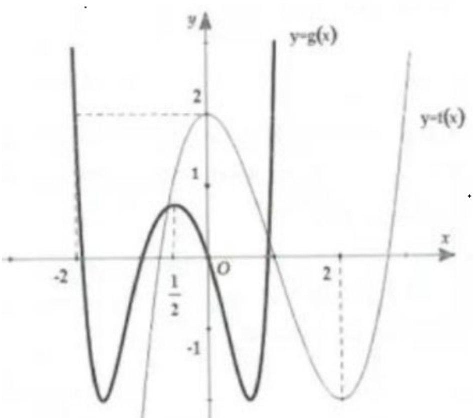
$$=\frac{\sqrt{x-1}}{a^3x\left(x-2\right)\left(x-x_1\right)...\left(x-x_6\right)}$$

Do điều kiện tồn tại của căn thức $x\geq1$, suy ra đồ thị có 4 tiệm cận đứng $x=x_2,x=x_5,x=2,x=x_6,x=x_3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{a^3x\left(x-2\right)\left(x-x_1\right)...\left(x-x_6\right)}=0$ do bậc tử bé hơn bậc mẫu, nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 5 tiệm cận tất cả.

Câu 42: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)$ và hàm số $g\left(x\right)=f\left(mx^2+nx+p\right)$ $\left(m,n,p\in\mathbb{Q}\right)$ có đồ thị như hình vẽ (đường nét liền là đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, nét đứt là đồ thị hàm số $g\left(x\right)$), đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g\left(x\right)$. Tính $g\left(4\right)$



A. 9198. **B.** 7940. **C.** 6802. **D.** 1692.

Giải

Ta có $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$

Hàm số đạt cực trị tại $x=0,x=2$ và đồ thị hàm số qua điểm $\left(1;0\right),\left(0;2\right)$ nên

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \\ f(1)=0 \\ f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2$$

Ta có $g(x)=(mx^2+nx+p)^3-3(mx^2+nx+p)^2+2$. Hệ số tự do bằng p^3-3p^2+2

Đồ thị hàm số $g(x)$ qua điểm $(0;0)$ nên $p^3-3p^2+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=1 \\ p=1-\sqrt{3} \\ p=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$, $p \in \mathbb{Q} \Rightarrow p=1$

Đồ thị hàm số $g(x)=f(mx^2+nx+p)$ có trục đối xứng $x=-\frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số

$y=mx^2+nx+p$ cũng có trục đối xứng $x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow -\frac{n}{2m}=-\frac{1}{2} \Rightarrow n=m$

Đồ thị hàm số $g(x)$ qua điểm $(-2;2)$ nên

$$g(-2)=0 \Rightarrow g(x)=(2m+1)^3-3(2m+1)^2+2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=n=1 \\ m=n=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Do đồ thị có hướng quay lên trên suy ra $m>0$ $\Rightarrow m=n=p=1$

$\Rightarrow g(4)=f(4^2+4+1)=f(21)=21^3-3.21^2+2=7940$.

Câu 43: Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021;2022]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập hợp S.

A. 2045187. **B.** 2045162. **C.** 2045208. **D.** 2045117.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm chung

$x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$.

Từ phương trình đã cho ta thấy $x=0$, không là nghiệm của phương trình và $x>0$.

Đặt $\sqrt{m-15x}=t$ $(t\ge 0)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$x^6+6x^4+6x^2+1=x^3t(t+3) \Leftrightarrow x^3+6x+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}=t(t^2+3) \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^3+3t.$$

- Xét hàm số $y=t^3+3t$ trên $(0;+\infty)$, hàm số đồng biến

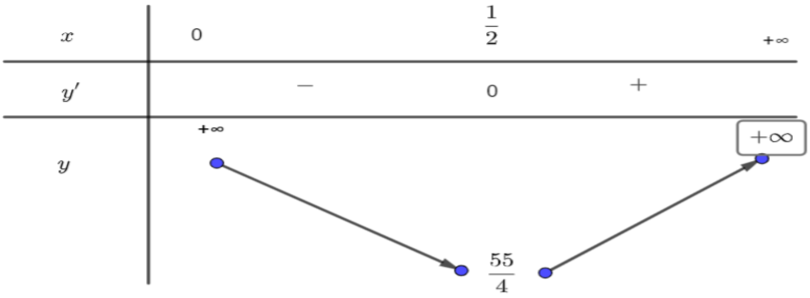
$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{m-15x} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x=m$ (1).

Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

- Xét hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x$ trên $(0;+\infty)$

$y'=2x-\dfrac{2}{x^3}+15=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

BBT hàm số là :



Từ BBT suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương khi $m>\dfrac{55}{4}$.

Vì $m\in[-2021;2022]$ nên $\begin{cases} m\in[14;2022] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy $S=\sum\limits_{k=14}^{2022} k=2045162$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x-m+1|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 30. **B.** 14. **C.** 29. **D.** 15.

Lời giải

Ta có $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_3\left(\dfrac{1}{x}\right)+3^{\frac{1}{x}}-3^x=-\log_3 x-3^x+3^{\frac{1}{x}}=-f(x),\forall x>0$.

Ta lại có $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}+3^x\ln 3+\dfrac{1}{x^2}.3^{\frac{1}{x}}\ln 3>0,\ \forall x>0$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

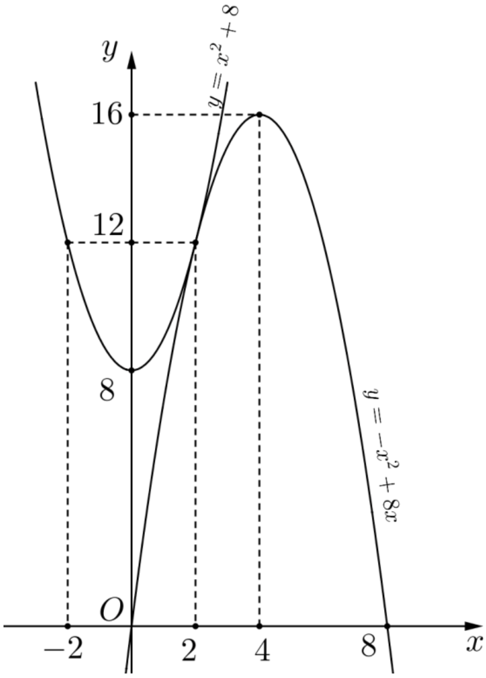
Khi đó phương trình

$f\left(\dfrac{1}{4|x-m+1|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0\Leftrightarrow -f\left(4|x-m+1|+3\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$

$\Leftrightarrow f\left(x^2-4x+7\right)=f\left(4|x-m+1|+3\right)$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4=4|x-m+1|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x-m+1)=x^2-4x+4 \\ 4(x-m+1)=-x^2+4x-4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m=-x^2+8x \\ 4m=x^2+8 \end{array}\right.(1)$.



Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt. Dựa vào đồ thị các hàm số $y=-x^2+8x$ và $y=x^2+8$ ta có có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}4m=8\\4m=12\\4m=16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=3\\m=4\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng 29.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=-1$. Biết $F(x)=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)-f(x)$ và $\int_0^1 f(x)dx=a+be^2$ với a,b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$:

A. $S=\frac{7}{64}$. **B.** $S=\frac{13}{32}$. **C.** $S=\frac{9}{64}$. **D.** $S=\frac{7}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{4}\left[2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}\right]=\frac{1}{4}.4xe^{2x}=xe^{2x}$

Nên $f'(x)-f(x)=xe^{2x}$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=xe^{x}$

$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)'=xe^{x}$

$\Leftrightarrow f(x)e^{-x}=\int xe^{x}dx=e^{x}(x-1)+C$ mà $f(0)=-1\Rightarrow(-1).1=-1+C\Rightarrow C=0$

Vậy $f(x)=(x-1)e^{2x}$

$$f\left(x\right)=(x-1)e^{2x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x-1)e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}\left(x-1\right)\Big|_0^1-\frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{e^2}{4}$$

Vậy $S=a^3+b^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{-1}{4}\right)^3=\frac{13}{32}$

Câu 46: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R},c<0)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi A là giao điểm của $\left(C\right)$ và trục tung, biết $\left(C\right)$ có đúng hai điểm chung với trục hoành là M, N đồng thời tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M đi qua A và tam giác AMN có diện tích bằng 16. Tính $f\left(1\right)$

A. -3. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M\left(m;0\right),N\left(n;0\right),A\left(0;c\right)\left(c<0\right)$. Từ giả thiết ta có $f'\left(x\right)=3x^2+2ax+b$

Do $\left(C\right)$ có đúng hai điểm chung với trục hoành là M, N đồng thời tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M đi qua A nên $\left(C\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại N

$\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c=\left(x-m\right)\left(x-n\right)^2\ (m.n\neq 0\,do\,c<0)$

$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=\left(x-m\right)\left(x^2-2nx+n^2\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-m-2n\\ b=2mn+n^2\ (1)\\ c=-m.n^2\end{cases}$$

Ta có phương trình tiếp tuyến tại M có dạng $y=(3m^2+2am+b)\left(x-m\right)$

Do tiếp tuyến tại M đi qua $A(0;c)$ nên $c=-m(3m^2+2am+b)$

Kết hợp (1) và $m\neq 0$ ta có $-m.n^2=-m(3m^2+2(-m-2n)m+2mn+n^2)\Leftrightarrow m=2n$

Ta có $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}d(A,Ox).MN=\frac{1}{2}|c||m-n|=\frac{1}{2}\left|-m.n^2\right||m-n|=\frac{1}{2}\left|2n^3\right||n|=16\Leftrightarrow n=\pm 2$

mà $n=-2$ loại do $c<0$ $\Rightarrow\begin{cases}a=-8\\ b=20\\ c=-16\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-8x^2+20x-16\Rightarrow f(1)=-3$.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị của tham số m thỏa mãn $10m\in\mathbb{Z}$ để phương trình $2\sin^2 x-(5m+1)\sin x+2m^2+2m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};3\pi\right)$

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

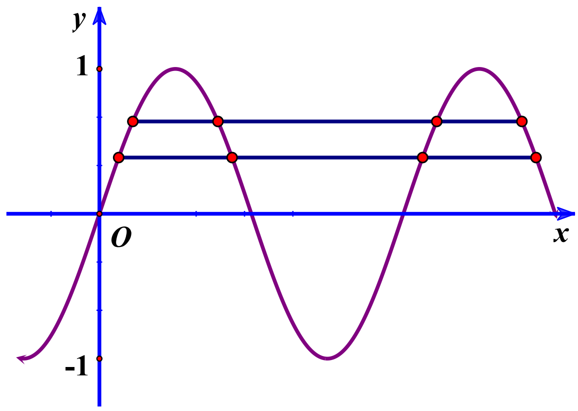
Chọn A

Đặt $t=\sin x\left(-1\le t\le 1\right)$ với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

Khi đó ta có phương trình $2t^2-\left(5m+1\right)t+2m^2+2m=0$ với $-1\le t\le 1$. (1)

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2m\\ t=\dfrac{m+1}{2}\end{array}\right..$$

Ta xét đồ thị của hàm $f\left(x\right)=\sin x$ với $x\in\left(\frac{-1}{2}\pi;3\pi\right)$.

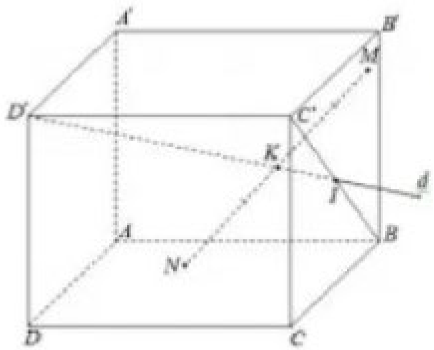


Để phương trình có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}0<2m<1\\ 0<\dfrac{m+1}{2}<1\\ 2m\ne\dfrac{m+1}{2}\end{cases}$, khi đó $\begin{cases}0<m<\dfrac{1}{2}\\ m\ne\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Vì $10m$ là số nguyên nên $m\in\{1,2,3,4\}$.

Vậy m có 4 giá trị nguyên thỏa mãn.

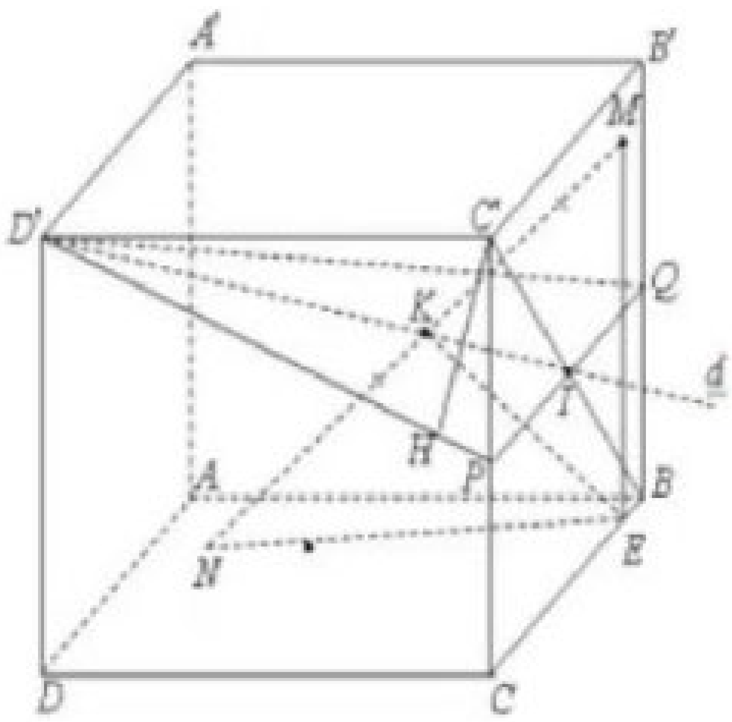
Câu 48: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3, AD=5, AA'=4$. Một đường thẳng d đi qua D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc về các mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ và $\left(ABCD\right)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN là



A. $4\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{12\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ ME vuông góc với CB, tam giác MEN vuông tại E nên $MN = 2EK$.
Vậy MN bé nhất khi và chỉ khi EK bé nhất. Lúc này EK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và đường thẳng CB.
Qua I kẻ PQ song song với BC.
Khi đó $d(BC,d) = d(BC,(D'PQ)) = d(C,(D'PQ)) = d(C',(D'PQ)) = C'H$ với $CH' \perp D'P$.

Ta có $\dfrac{1}{C'H^2} = \dfrac{1}{C'P^2} + \dfrac{1}{C'D'^2} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{13}{36} \Rightarrow C'H = \dfrac{6\sqrt{13}}{13} \Rightarrow MN = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$.

Câu 49: Xét các số nguyên dương $a,\ b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3,\ x_4$ thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a^2 + 3b$.

A. 33. **B.** 25. **C.** 30. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện để hai phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ và $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2 - 20a > 0$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \ln x_1 + \ln x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \log x_3 + \log x_4 = -\dfrac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x_1x_2) = -\dfrac{b}{a} \\ \log(x_3x_4) = -\dfrac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1x_2 = e^{-\frac{b}{a}} \\ x_3x_4 = 10^{-\frac{b}{5}} \end{cases}$.

Mà $x_1x_2 > x_3x_4 \Rightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a} > -\dfrac{b}{5}\ln 10$

$\Rightarrow a > \dfrac{5}{\ln 10} \Rightarrow a \geq 3$.

Theo điều kiện có $b^2-20a>0 \Rightarrow b^2>20a \geq 60 \Rightarrow b \geq 8$.

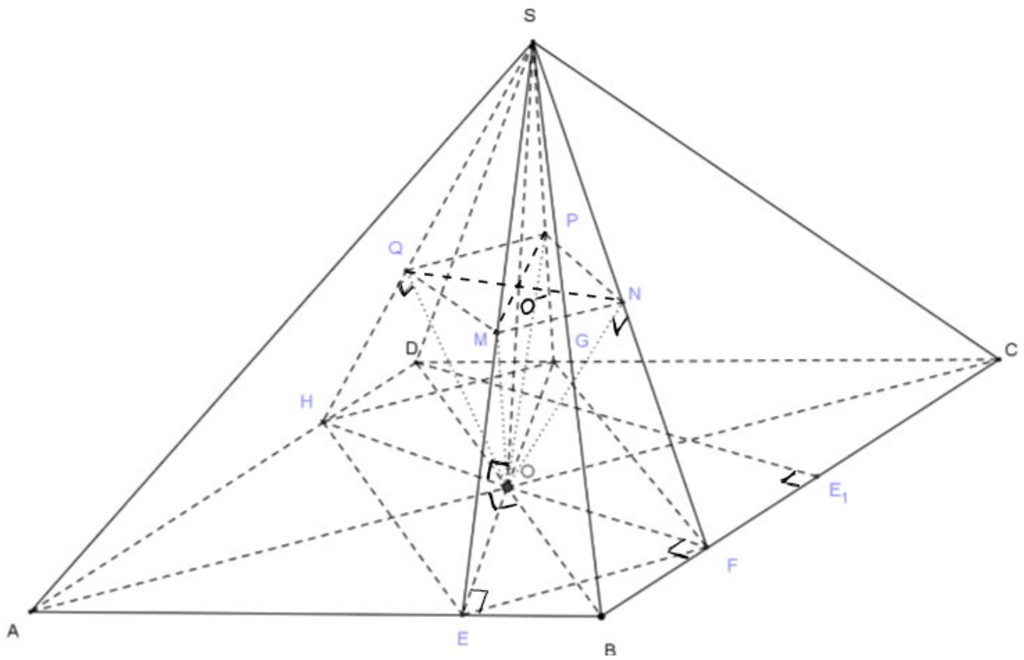
Từ và suy ra $S=a^2+3b \geq 33 \Rightarrow Min\,S=33 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SDC) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{64a^3}{81}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{3a^3}{64}$. **D.** $\frac{4a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta nhận xét các tam giác ABD và tam giác BCD là đều, gọi E_1 là trung điểm của BC thì $DE_1 \perp BC$ Gọi E,F,G,H lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB,BC,CD và DA sao cho $EB=BF=DG=DH=\frac{a}{2}$. Theo tính chất đường trung bình, suy ra

$OF \perp BC, OE \perp AB, OQ \perp CD, OH \perp AD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O lên các đường thẳng SE,SF,SG,SH ta suy ra M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SDC)$ và (SDA). Ta có $EFGH$ là hình chữ nhật

$$S_{EFGH}=EF.EH=(\frac{3}{4}BD).(\frac{1}{4}AC)=\frac{3}{4}2a.\frac{1}{4}2a\sqrt{3}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau , suy ra $\widehat{ESG}=90^0 \Rightarrow SO=\frac{1}{2}EG=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$V_{S.EFGH}=\frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^3}{8}.$$

Các độ dài $SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOE ta có $\frac{SM}{SE}=\frac{SO^2}{SE^2}=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{SN}{SF}=\frac{SP}{SG}=\frac{SQ}{SH}=\frac{1}{2}$.

Xét hai hình chóp $S.EFGH$ và $O.MNPQ$ ta có hai đường cao OO' và SO tương ứng tỷ lệ $\frac{OO'}{SO}=\frac{1}{2}$, đồng thời diện tích đáy $\frac{S_{MNPQ}}{S_{EFGH}}=\left(\frac{MN}{EF}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Do vậy $\frac{V_{O.MNPQ}}{V_{S.EFGH}}=\frac{1}{8}$ hay $V_{O.MNPQ}=\frac{1}{8}V_{S.EFGH}=\frac{1}{8}.\frac{3a^3}{8}=\frac{3a^3}{64}$.

HẾT