

# KỸ THUẬT THỂ HẰNG SỐ TRONG TOÁN PHỨC

Vũ Quốc Triệu, Hà Nội tháng 6.2021

Trong Toán học nói chung và toán Phức nói riêng, ngoài các phép toán thông thường ta còn có một phép toán ‘ thể hằng số’, nghĩa là thay một hằng số bởi một biểu thức chứa biến. Phép toán này giúp giảm sự phức tạp trong tính toán, rút gọn các biểu thức số phức bậc cao hoặc đôi khi nó còn là điểm mấu chốt để giải quyết vấn đề. Một hằng số nếu chỉ nhìn nó ở góc độ số học thì đó là điều rất bình thường, thế nhưng khi thay thế nó bởi một biểu thức chứa biến phù hợp lại tạo ra điều bất ngờ trong việc giải quyết bài toán.

VŨ QUỐC TRIỆU

VŨ QUỐC TRIỆU

## A. KIẾN THỨC SỬ DỤNG

1. Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khi đó :

$$+) z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = a^2 + b^2.$$

$$+) k = |z| \Rightarrow k^{2n} = (|z|^2)^n = (z \cdot \bar{z})^n = z^n \cdot (\bar{z})^n \quad (k \geq 0).$$

2. Với hai số phức bất kì  $z$  và  $w$ , ta luôn có :

$$+) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|; |z^n| = |z|^n.$$

$$+) \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0).$$

$$+) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \overline{|z + w|} = |\bar{z} + \bar{w}| = |z + w|.$$

3. Bất đẳng thức môđun

$$+) |z + w| \leq |z| + |w|. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \text{ sao cho } z = k \cdot w.$$

$$+) ||z| - |w|| \leq |z + w|. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0 \text{ sao cho } z = k \cdot w.$$

## B. ỨNG DỤNG

**BÀI TOÁN 1 ( Trích đề thi thử THPT QG – SGD Thái Bình 2021 ) :** Cho các số phức  $z_1; z_2; z_3$  thỏa mãn  $|z_1| = 4; |z_2| = 5; |z_3| = 2$  và  $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 25z_1z_3| = 80$ . Giá trị của biểu thức  $P = |z_1 + z_2 + z_3|$  bằng

A. 8.

**B. 2.**

C. 1.

D. 6.

**Nhận xét :** Quan sát các hệ số trong giả thiết  $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 25z_1z_3| = 80$  ta thấy

$$16 = 4^2 = |z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1; 25 = 5^2 = |z_2|^2 = z_2 \cdot \bar{z}_2; 4 = 2^2 = |z_3|^2 = z_3 \cdot \bar{z}_3.$$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Từ giả thiết  $|z_1| = 4, |z_2| = 5, |z_3| = 2$  ta có,  $\overline{z_3 \cdot z_3} = 4; \overline{z_1 \cdot z_1} = 16; \overline{z_2 \cdot z_2} = 25$ .

Thay các hệ số 4; 16 và 25 bởi các biểu thức tương ứng ở trên vào giả thiết  $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 25z_1z_3| = 80$ , ta được :

$$\begin{aligned} & \left| (z_3 \cdot \overline{z_3}) z_1 z_2 + (z_1 \cdot \overline{z_1}) z_2 z_3 + (z_2 \cdot \overline{z_2}) z_1 z_3 \right| = 80 \\ \Leftrightarrow & \left| (z_1 z_2 z_3) (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) \right| = 80 \Leftrightarrow |z_1 z_2 z_3| |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = 80 \\ \Leftrightarrow & |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = 80 \Leftrightarrow 4.5.2 \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = 80 \\ \Leftrightarrow & |z_1 + z_2 + z_3| = 2. \end{aligned}$$

### BÀI TOÁN 2 ( Trích đề thi thử THPT QG – THPT Trần Hưng Đạo, Nam Định 2021 ) :

Cho các số phức  $z; w$  thỏa mãn  $|z| = 4$ ,  $|iw - 5 + 2i| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z^2 - wz + 16|$  bằng

A. 16.

**B. 14**

C. 18.

D. 17.

#### Lời giải

Chọn B.

Ta có :

\*)  $|iw - 5 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5i + 2| = 1 \Rightarrow$  tập hợp điểm biểu diễn tất cả các số phức  $w$  là đường tròn  $(C): (x+2)^2 + (y+5)^2 = 1$

\*)  $P = |z^2 - wz + z \cdot \overline{z}| = |z| \cdot |z - w + \overline{z}| = 4 |z + \overline{z} - w|$ .

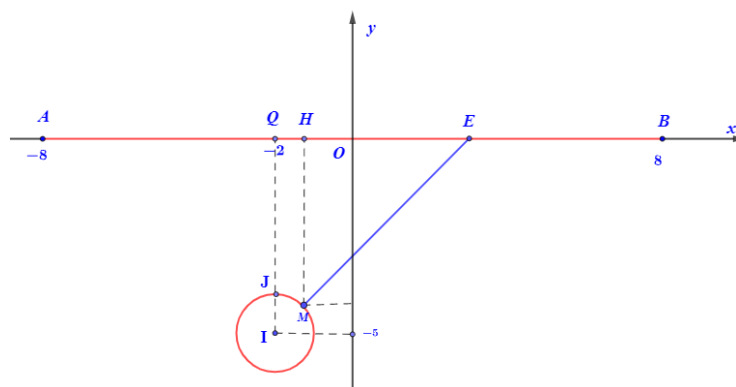
Đặt  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ). Vì  $|z| = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 16$ .

Khi đó :  $P = 4|2a - w|$ .

Gọi  $M(w) \Rightarrow M \in (C)$ . Chọn điểm  $E(2a; 0)$  thì  $P = 4ME$ .

Vì  $a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow a^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq a \leq 4 \Rightarrow -8 \leq 2a \leq 8$ .

Chọn  $A(-8; 0); B(8; 0)$  thì điểm  $E$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .



Từ hình vẽ suy ra  $ME \geq MH \geq JQ = IQ - IJ = 5 - 1 = 4 \Rightarrow P = 4ME \geq 16$ .

Vậy  $P_{\min} = 16$ .

**Nhận xét:** Mấu chốt để giải quyết bài toán là ta nhận ra:  $16 = 4^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

**BÀI TOÁN 3:** Cho hai số phức  $z; w$  thay đổi thỏa mãn  $|z| = 3$ ,  $|w| = 2$  và  $|z + \bar{w} \cdot \bar{z}| = 3\sqrt{5}$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |w \cdot z^2 + 38 - i|$  bằng

- A. 19.                      B.  $19\sqrt{2}$ .                      C.  $19\sqrt{5}$ .                      D.  $19\sqrt{3}$ .

**Nhận xét:** Ta có  $9 = 3^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ;  $16 = 4^2 = |w|^2 = w \cdot \bar{w}$ . Từ đó ta nghĩ đến  $36 = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}$ .

**Lời giải**

**Chọn B.**

$$\text{Giả thiết} \Rightarrow P = |w \cdot z^2 + 38 - i| = |w \cdot z^2 + 36 + (2 - i)|.$$

Áp dụng bất đẳng thức môđun:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , ta có:

$$P = |w \cdot z^2 + 36 + (2 - i)| \leq |w \cdot z^2 + 36| + |2 - i|.$$

Vì:

$$* |2 - i| = \sqrt{5}.$$

$$* |w \cdot z^2 + 36| = |w \cdot z^2 + 9 \cdot 4| = |w \cdot z^2 + z \bar{z} \cdot w \bar{w}| = |wz(z + \bar{z} \cdot \bar{w})| = |w| \cdot |z| \cdot |z + \bar{z} \cdot \bar{w}| = 3 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } P \leq 18\sqrt{5} + \sqrt{5} \Leftrightarrow P \leq 19\sqrt{5}.$$

Dễ thấy khi  $z = 3i$ ;  $w = 2i$  (thỏa mãn các giả thiết) thì  $P = 19\sqrt{5}$ .

Vậy  $\max P = 19\sqrt{5}$ .

**BÀI TOÁN 4 ( Trích đề thi thử THPT QG –Cụm liên trường, SGD Quảng Nam 2021 ) :** Cho số phức  $z$  thay đổi và thỏa mãn  $|z| = 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$ . Khi đó  $M - m$  bằng

- A.  $M - m = 1$ .                      B.  $M - m = 3$ .                      C.  $M - m = 6$ .                      D.  $M - m = 7$ .

**Nhận xét:** Ta có:  $1 = 1^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ;  $1 = (1^2)^2 = (|z|^2)^2 = z^2 \cdot (\bar{z})^2$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

$$\begin{aligned} P &= |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1| = |z^5 + \bar{z}^3 \cdot z \cdot \bar{z} + 6z| - 2|z^4 + (z \cdot \bar{z})^2| \\ &= |z| \cdot |z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^2| \cdot |z^2 + \bar{z}^2| = |z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^2 + \bar{z}^2| \\ &= |(z^2 + \bar{z}^2)^2 - 2z^2 \cdot \bar{z}^2 + 6| - 2|z^2 + \bar{z}^2| = |(z^2 + \bar{z}^2)^2 + 4| - 2|z^2 + \bar{z}^2| \end{aligned}$$

Đặt  $z = x + yi$ , ( $x; y \in \mathbb{R}$ ).

$$+) |z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2.$$

$$\begin{aligned} +) P &= \left| 4(x^2 - y^2)^2 + 4 \right| - 2 \left| 2(x^2 - y^2) \right| = 4 \left( (x^2 - y^2)^2 + 1 \right) - 4 \left| (x^2 - y^2) \right| \\ &= 4 \left[ (2x^2 - 1)^2 + 1 \right] - 4 \left| 2x^2 - 1 \right|. \end{aligned}$$

Lại đặt  $t = \left| 2x^2 - 1 \right| \xrightarrow[\substack{x^2 \in [0;1] \\ 2x^2 - 1 \in [-1;1]}]{x^2 \in [0;1]} t \in [0;1]$ .

Khi đó:  $P = f(t) = 4(t^2 + 1) - 4t = 4t^2 + 4 - 4t = 4(t^2 - t + 1)$ .

|         |           |   |               |   |   |
|---------|-----------|---|---------------|---|---|
| $t$     | $-\infty$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |   |
| $f'(t)$ |           |   | -             | 0 | + |
| $f(t)$  |           | 4 |               | 3 | 4 |

Từ bảng biến thiên suy ra  $M$  ax  $P = 4$ ;  $m$  in  $P = 3$ .

Vậy  $M - m = 1$ .

**BÀI TOÁN 5:** Cho số phức  $z$  thay đổi, thỏa mãn  $z + 2 + i = |z|(1 + i)$  và  $|z| < 5$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z^2 + z + 1| + |z^2 - z + 1|$ . Tổng  $M + m$  bằng

A. 2.

**B. 6.**

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $z = |z| + |z|i - 2 - i \Leftrightarrow z = (|z| - 2) + (|z| - 1)i$ .

Lấy môđun hai vế ta được:  $|z| = \sqrt{(|z| - 2)^2 + (|z| - 1)^2}$ .

Đặt  $t = |z|$  ( $t \geq 0$ )

Suy ra  $t = \sqrt{(t - 2)^2 + (t - 1)^2} \Leftrightarrow t^2 = t^2 - 4t + 4 + t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhĩa)} \\ t = 5 \text{ (loại)} \end{cases}$ .

Vậy  $|z| = 1$ .

Lại có:  $P = |z^2 + z + z\bar{z}| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z| \cdot |z + 1 + \bar{z}| + |z| \cdot |z - 1 + \bar{z}| = |z + 1 + \bar{z}| + |z - 1 + \bar{z}|$ .

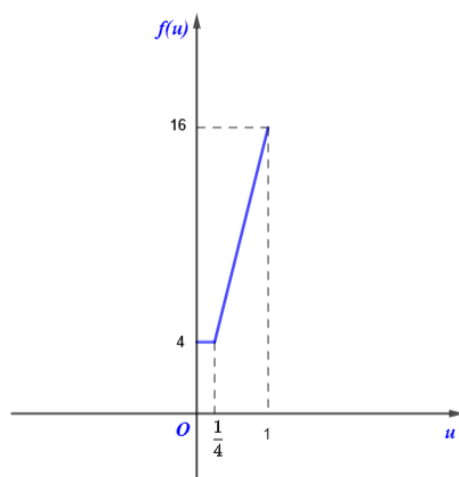
Đặt  $z = x + yi$  ( $x; y \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ P = |2x + 1| + |2x - 1| \end{cases}$

Vì  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$  và  $x^2 \in [0;1]$ .

Ta có:  $P^2 = 8x^2 + 2 + 2|4x^2 - 1|$

Đặt  $u = x^2 \Rightarrow u \in [0; 1]$ .

Suy ra  $P^2 = 8u + 2 + 2|4u - 1| = f(u) = \begin{cases} 16u; & u \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \\ 4 & ; u \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \end{cases}$ .



Từ đồ thị hàm số  $f(u) \Rightarrow f(u) \in [4; 16] \Rightarrow P^2 \in [4; 16] \Rightarrow P \in [2; 4]$ .

Vậy  $\max P = 4; \min P = 2$ .

**Nhận xét:** Mấu chốt để giải quyết nhanh việc rút gọn biểu thức là sử dụng:  $1 = 1^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

### C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI TẬP 1:** Cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$  thỏa mãn  $|z_1| = 1, |z_2| = 2, |z_3| = 3$  và  $|z_1 + z_2 + z_3| = 4$ . Giá trị của biểu thức  $P = |9z_1z_2 + z_2z_3 + 4z_3z_1|$  bằng

- A. 27.                      B. 31.                      C. 35.                      D. 24.

**BÀI TẬP 2:** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = |z^4 + 1| = 1$ .

- A. 0.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 8.

**BÀI TẬP 3:** Cho số phức  $z$  thay đổi và thỏa mãn  $|z| = 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z^4 + 1| + |z^4 - 1|$ . Tích  $M \cdot m$  bằng

- A. 2.                      B. 4.                      C.  $\sqrt{2}$ .                      D.  $4\sqrt{2}$ .

**BÀI TẬP 4 :** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 2, |z_2| = 1$  và  $|z_1 + 2z_2| = 2$ . Giá trị của biểu thức

$T = \left| 2 - \frac{3z_2}{z_1} \right|$  bằng

- A.  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ .                      B.  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{19}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{37}}{2}$ .

**BÀI TẬP 5:** Cho hai số phức  $z, w$  thay đổi thoả mãn  $|z|=1, |w|=2$  và  $|w.z + \bar{w}.\bar{z}|=1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |w^2.z^2 - 1 - \sqrt{3}i|$  bằng

- A. 3.                      B. 5.                      C.  $2\sqrt{7}+2$ .                      D.  $7\sqrt{2}+7$ .

**BÀI TẬP 6:** ( Trích đề thi thử THPT QG –Cụm liên trường, SGD Quảng Nam 2021 ) : Cho các số phức  $z_1; z_2; z_3$  thoả mãn  $|z_1|=|z_2|=|z_3|=k>0$  và  $z_1+z_2+z_3 \neq 0$ . Giá trị của biểu thức

$$P = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \text{ bằng}$$

- A.  $k$ .                      B.  $k^2$ .                      C. 1.                      D.  $k^3$ .

### HƯỚNG DẪN GIẢI

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1.D | 2.D | 3.B | 4.A | 5.C | 6.A |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

**BÀI TẬP 1:** Cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$  thoả mãn  $|z_1|=1, |z_2|=2, |z_3|=3$  và  $|z_1+z_2+z_3|=4$ . Giá trị của biểu thức  $P = |9z_1 z_2 + z_2 z_3 + 4z_3 z_1|$  bằng

- A. 27.                      B. 31.                      C. 35.                      D. 24.

### Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } P &= |z_1.z_2.z_3.\bar{z}_3 + z_1.\bar{z}_1.z_2.z_3 + z_2.\bar{z}_2.z_3.z_1| \\ &= |z_1.z_2.z_3.(\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2)| \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot |\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = 24 \end{aligned}$$

**BÀI TẬP 2:** Có bao nhiêu số phức  $z$  thoả mãn  $|z|=|z^4+1|=1$ .

- A. 0.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 8.

### Lời giải

Chọn D.

Đặt  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ .

Ta có:

$$+) |z|=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1 \Leftrightarrow a^2=1-b^2.$$

$$+) |z^4+1|=1 \Leftrightarrow \left| z^4 + (1^2) \right| = 1 \Leftrightarrow \left| z^4 + z^2.z^{-2} \right| = 1 \Leftrightarrow |z^2| \cdot |z^2 + \bar{z}^{-2}| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z^2 + \bar{z}^2| = 1 \Leftrightarrow 2|a^2 - b^2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \\ a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

**Trường hợp 1:**  $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{4} \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{có 4 số phức thỏa mãn.}$

**Trường hợp 2:**  $\begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{có 4 số phức thỏa mãn.}$

Vậy có tất cả 8 số phức  $z$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Nhận xét:** Mấu chốt để giải quyết nhanh việc rút gọn là sử dụng:  $1 = (1^2)^2 = (|z|^2)^2 = z^2 \cdot (\bar{z})^2$ .

**BÀI TẬP 3:** Cho số phức  $z$  thay đổi và thỏa mãn  $|z| = 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z^4 + 1| + |z^4 - 1|$ . Tích  $M.m$  bằng

A. 2.

B.  $4\sqrt{2}$ .

C.  $\sqrt{2}$ .

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $1 = 1^2 = (|z|^2)^2 = (z \cdot \bar{z})^2 = z^2 \cdot \bar{z}^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= |z^4 + z^2 \cdot \bar{z}^2| + |z^4 - z^2 \cdot \bar{z}^2| = |z^2(z^2 + \bar{z}^2)| + |z^2(z^2 - \bar{z}^2)| \\ &= |z^2| |z^2 + \bar{z}^2| + |z^2| |z^2 - \bar{z}^2| = |z^2 + \bar{z}^2| + |z^2 - \bar{z}^2|. \end{aligned}$$

Đặt  $z = x + yi$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

$$+) |z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2.$$

$$+) P = 2|x^2 - y^2| + 4xy$$

$$\text{Bình phương hai vế, ta được } P^2 = 4(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2 + 16|xy||x^2 - y^2|$$

$$= 4(x + y)^2(x - y)^2 + 16x^2y^2 + 16|xy|\sqrt{(x + y)^2 \cdot (x - y)^2}$$

$$= 4(1 - 2xy)(1 - 2xy) + 16x^2y^2 + 16|xy|\sqrt{(1 - 2xy)(1 - 2xy)}$$

$$= 4 + 16|xy|\sqrt{1 - 4x^2y^2}.$$

Đặt  $t = |xy|$ . Vì  $0 \leq |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Suy ra:  $P^2 = 4 + 16t\sqrt{1-4t^2} = f(t)$ .

Ta có  $f'(t) = \frac{16(1-8t^2)}{\sqrt{1-4t^2}}$ ;  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

Mà  $f(0) = 4$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ ;  $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 8$ . Từ đó  $\max f(t) = 8$ ;  $\min f(t) = 4$ .

Vậy  $M = 2\sqrt{2}$ ;  $m = 2$ .

**BÀI TẬP 4 :** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 2$ ,  $|z_2| = 1$  và  $|z_1 + 2z_2| = 2$ . Giá trị của biểu thức

$T = \left|2 - \frac{3z_2}{z_1}\right|$  bằng

**A.**  $\frac{\sqrt{37}}{2}$ .

**B.**  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{19}}{2}$ .

**D.**  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có  $4 = |z_1 + 2z_2|^2 = (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1 + 2z_2}) = (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1} + 2\overline{z_2})$   
 $= |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = 8 + 2(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$ .

Suy ra  $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -2$

Lại có  $T = \left|2 - \frac{3z_2}{z_1}\right| = \frac{|2z_1 - 3z_2|}{|z_1|} = \frac{|2z_1 - 3z_2|}{2}$

Suy ra  $4T^2 = |2z_1 - 3z_2|^2 = (2z_1 - 3z_2)(\overline{2z_1 - 3z_2})$   
 $= (2z_1 - 3z_2)(2\overline{z_1} - 3\overline{z_2}) = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 6(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = 25 - 6(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = 37$

Vậy  $T = \frac{\sqrt{37}}{2}$ .

**BÀI TẬP 5:** Cho hai số phức  $z; w$  thay đổi thỏa mãn  $|z| = 1$ ,  $|w| = 2$  và  $|wz + \overline{w}\overline{z}| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |w^2z^2 - 1 - \sqrt{3}i|$  bằng

**A.** 3.

**B.** 5.

**C.**  $2\sqrt{7} + 2$ .

**D.**  $7\sqrt{2} + 7$ .

**Nhận xét:** Ta có  $1 = 1^2 = |z|^2 = z\overline{z}$ ;  $4 = 2^2 = |w|^2 = w\overline{w}$ . Từ đó ta nghĩ đến  $4 = 1.4 = z.w.\overline{z}.\overline{w}$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

$$\text{Giả thiết} \Rightarrow P = \left| w^2 \cdot z^2 - 1 - \sqrt{3}i \right| = \left| w^2 \cdot z^2 + 4 + (-5 - \sqrt{3}i) \right|.$$

Áp dụng bất đẳng thức môđun :  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , ta có :

$$P = \left| w^2 \cdot z^2 + 4 + (-5 - \sqrt{3}i) \right| \leq \left| w^2 \cdot z^2 + 4 \right| + \left| -5 - \sqrt{3}i \right|.$$

Vì :

$$*) \left| -5 - \sqrt{3}i \right| = 2\sqrt{7}.$$

$$*) \left| w^2 \cdot z^2 + 4 \right| = \left| w^2 \cdot z^2 + 1 \cdot 4 \right| = \left| w^2 \cdot z^2 + z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} \right| = \left| w \cdot z \cdot (wz + \bar{z} \cdot \bar{w}) \right| = |w| \cdot |z| \cdot |wz + \bar{z} \cdot \bar{w}| = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

$$\text{Suy ra } P \leq 2\sqrt{7} + 2.$$

Để thấy khi  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ;  $w = 2i$  (thỏa mãn các giả thiết) thì  $P = 2\sqrt{7} + 2$ .

$$\text{Vậy } \max P = 2\sqrt{7} + 2.$$

**BÀI TẬP 6** (Trích đề thi thử THPT QG –Cụm liên trường, SGD Quảng Nam 2021) : Cho các số phức  $z_1$ ;  $z_2$ ;  $z_3$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = k > 0$  và  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ . Giá trị của biểu thức

$$P = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \text{ bằng}$$

**A.**  $k$ .

**B.**  $k^2$ .

**C.** 1.

**D.**  $k^3$ .

$$\text{Nhận xét : } k^2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_3 \cdot \bar{z}_3.$$

**Lời giải**

**Chọn A.**

$$\text{Từ giả thiết suy ra } k^2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_3 \cdot \bar{z}_3.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \frac{1}{k^2} \left| \frac{z_1 z_2 \cdot k^2 + z_2 z_3 \cdot k^2 + z_3 z_1 \cdot k^2}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \\ &= \frac{1}{k^2} \left| \frac{z_1 z_2 \cdot z_3 \cdot \bar{z}_3 + z_2 z_3 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_3 z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \\ &= \frac{1}{k^2} \left| (z_1 z_2 z_3) \cdot \frac{\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \\ &= \frac{1}{k^2} |z_1 z_2 z_3| \cdot \left| \frac{\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \frac{1}{k^2} |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot \left| \frac{\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \\ &= \frac{1}{k^2} |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot \left| \frac{\overline{z_1 + z_2 + z_3}}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \frac{1}{k^2} |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot \left| \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2} |z_1| \cdot |z_1| \cdot |z_1| = \frac{1}{k^2} .k.k.k = k .$$

Lưu ý : Cách trắc nghiệm nhanh, có thể chọn  $z_1 = z_2 = z_3 = k \Rightarrow P = \left| \frac{k^2 + k^2 + k^2}{k + k + k} \right| = k$  .

.....HẾT.....