

Câu 1 (2,0 điểm)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ với $x \in [2; 4]$.

Câu 2 (1,0 điểm)

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = |1 + 3i|$.
- b) Giải bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 \geq 0$.

Câu 3 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin^2 x) \cos x dx$.

Câu 4 (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(5; -3; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x - y + z - 5 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và (P).

Câu 5 (1,0 điểm)

- a) Giải phương trình $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2$.
- b) Có hai hộp chứa các viên bi. Hộp thứ nhất chứa 8 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ, hộp thứ hai chứa 5 viên bi màu trắng và 6 viên bi màu đỏ. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một viên bi. Tính xác suất sao cho hai viên bi lấy ra cùng màu.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC; Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' , CB' .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD, vuông tại A và B, có đỉnh $C(0; 2)$ và $AD = 3BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường chéo BD. Điểm $M\left(\frac{24}{13}; -\frac{16}{13}\right)$ là điểm thuộc đoạn HD sao cho $2HM = MD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D của hình thang vuông ABCD biết đỉnh A thuộc đường thẳng (d): $x - y - 1 = 0$.

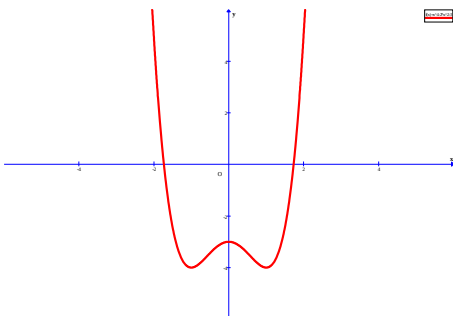
Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(1+4x) = \sqrt{y}\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-y} = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 9 (1,0 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + 1 = c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

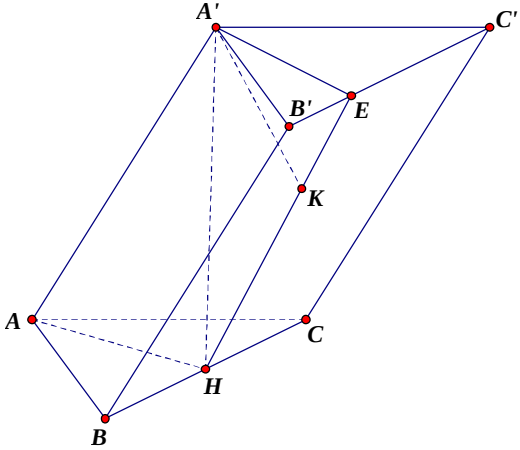
$$P = \frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} + \frac{14}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}}$$

----- Hết -----

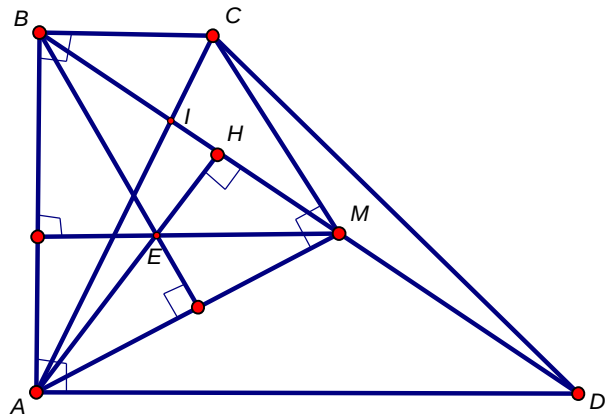
ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM LẦN 3

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM																		
1a (1,0 đ)	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.																			
	TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1, \\ x = 1 \end{cases}$ $y' > 0 \forall x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ và $y' < 0 \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$	0,25																		
	Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0); (1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1); (0; 1)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = -3$, Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}; y_{CT} = y(-1) = y(1) = -4$	0,25																		
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 - 3) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2 - 3) = +\infty$. Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-4</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	0	$+$	y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$														
y'	$-$	0	$+$	0	$+$															
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$															
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$ Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; 0)$ Đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng. 	0,25																			
1b (1,0 đ)	Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ với $x \in [2; 4]$.																			
	$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$	0,25																		
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in (2; 4) \\ x = -1 \notin (2; 4) \end{cases}$	0,25																		
	$f(2) = 4; f(4) = \frac{10}{3}; f(3) = 3$.	0,25																		
	Vậy $\max_{[2;4]} f(x) = f(2) = 4$; $\min_{[2;4]} f(x) = f(3) = 3$	0,25																		

2a (0,5 đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $ z + 2 - i = 1 + 3i $	
	Gọi số phức $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$. $ z + 2 - i = 1 + 3i \Leftrightarrow x + yi + 2 - i = 1 + 3i \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10}$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$, Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(-2;1)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.	0,25
2b (0,5 đ)	Giải bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 \geq 0$.	
	ĐKXD: $x > 0, \log_2^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2 x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x \leq \frac{1}{8} \end{cases}$ Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$	0,25
3 (1,0 đ)	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin^2 x) \cos x dx$.	
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.	0,25
	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.	0,25
	$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{3} (\sin^3 x) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$.	0,25
	Vậy $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$.	0,25
4 (1,0 đ).	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(5; -3; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 5 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và (P) .	
	Gọi R là bán kính mặt cầu, theo điều kiện tiếp xúc $R = d(I; (P)) = 2\sqrt{6}$.	0,25
	Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 24$.	0,25
	Gọi H là tiếp điểm của (S) và (P) , khi đó H là hình chiếu của $I(5; -3; 4)$ trên mặt phẳng (P) , đường thẳng IH có phương trình là $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$	0,25
	Tọa độ điểm H có dạng $H(5+2t; -3-t; 4+t)$, vì $H \in (P)$ nên ta có $2(5+2t) + 3 + t + (4+t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6t = -12 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(1; -1; 2)$.	0,25

5a (0,5 đ)	Giải phương trình $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2$.		
	$\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$.		0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = k2\pi; \quad x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.		0,25
5b (0,5 đ)	Có hai hộp chứa các viên bi. Hộp thứ nhất chứa 8 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ, hộp thứ hai chứa 5 viên bi màu trắng và 6 viên bi màu đỏ.		
	Phép thử: “Chọn từ 2 hộp đã cho, mỗi hộp một viên bi”, $n(\Omega) = C_{15}^1 \cdot C_{11}^1 = 165$. Biến cố A: “Hai viên chọn được cùng màu”.		0,25
	A_1 : “Hai viên chọn được cùng trắng”, $n(A_1) = C_8^1 \cdot C_5^1 = 40$. A_2 : “Hai viên chọn được cùng đỏ”, $n(A_2) = C_7^1 \cdot C_6^1 = 42$. Vậy $n(A) = n(A_1) + n(A_2) = 82$, xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{82}{165}$.		0,25
6 (1,0 đ)	Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC; Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' , CB' .		
	Trong tam giác vuông ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $= a^2 + 3a^2 = 4a^2$ $\Rightarrow BC = 2a; AH = \frac{1}{2} BC = a.$ AH là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'AH}$. Theo giả thiết có $\widehat{A'AH} = 45^\circ$. Trong tam giác $A'AH$ có $A'H = AH = a$		0,25
	Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối lăng $ABC.A_1B_1C_1$ trụ là $V = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.		0,25
	Khoảng cách giữa hai đường $A'A$ và CB' bằng khoảng cách từ $A'A$ đến mặt phẳng $(B'BCC')$ và bằng khoảng cách từ điểm A' đến $(B'BCC')$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của A' cạnh $B'C'$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A' trên $HE \Rightarrow A'K \perp HE$ (1).		0,25

	Mặt khác $\begin{cases} B'C' \perp A'E \\ B'C' \perp A'H (A'H \perp (A'B'C')) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'HE)$ $\Rightarrow B'C' \perp A'K \quad (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'K \perp (BCB'C') \Rightarrow d(A', (BCB'C')) = A'K$. Trong tam giác vuông $A'HE$ có $\frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{A'E^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}$ $\Rightarrow A'K = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ Vậy khoảng cách giữa hai đường AA' và CB' bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.	0,25
7 (1,0 đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và B, có đỉnh $C(0; 2)$ và $AD = 3BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường chéo BD. Điểm $M\left(\frac{24}{13}; -\frac{16}{13}\right)$ là điểm thuộc đoạn HD sao cho $2HM = MD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D của hình thang vuông $ABCD$ biết đỉnh A thuộc đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$.	
	- Gọi E là điểm trên đoạn AH sao cho $2HE = EA$, khi đó $\frac{HM}{HD} = \frac{HE}{HA} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{EM}{AD} = \frac{1}{3}$ và $EM \parallel AD$ Suy ra tứ giác $BCME$ là hình bình hành, Suy ra $CM \parallel BE$ - Dễ thấy E là trực tâm $\triangle BAM$ $\Rightarrow BE \perp AM \Rightarrow CM \perp AM$	0,25
	Vì A thuộc (d) nên tọa độ $A(a; a-1)$, mà $CM \perp AM \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow A(-3; -4)$	0,25
	Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD $\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CA} \Rightarrow I\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ - Đường thẳng BD đi qua I và M, suy ra $BD: 2x + 3y = 0$ - Phương trình $AH: 3x - 2y + 1 = 0$, mà H là giao điểm của hai đường thẳng BD và AH Suy ra $H\left(-\frac{3}{13}; \frac{2}{13}\right)$.	0,25
	Mà $\overrightarrow{HD} = 3\overrightarrow{HM} \Rightarrow D(6; -4)$ $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DA} \Rightarrow B(-3; 2)$.	0,25



8 (1,0 đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(1+4x) = \sqrt{y}\left(\frac{x+y}{2}\right) & (1) \\ 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-y} = y & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ $x^2(1+4x) = \sqrt{y}\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow 2x^2 + 8x^3 = x\sqrt{y} + (\sqrt{y})^3$ $\Leftrightarrow 8x^3 - (\sqrt{y})^3 + x(2x - \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{y})(4x^2 + 2x\sqrt{y} + y + x) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = 4x^2$ (Vì theo điều kiện có $4x^2 + 2x\sqrt{y} + y + x > 0$)	0,25
	Thay vào (2) có phương trình $3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2} = 4x^2$. Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ Xét $x = \frac{1}{2}$, là nghiệm của phương trình. Xét $\frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. $3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2} = 4x^2$ $\Leftrightarrow (4x^2 - 6x + 2) + (6x - 3 - 3\sqrt{2x-1}) + (1 - x\sqrt{5-4x^2}) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(4x-2) + 3\frac{4x^2-6x+2}{2x-1+\sqrt{2x-1}} + \frac{4x^4-5x^2+1}{1+x\sqrt{5-4x^2}} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2(x-1)(2x-1) + \frac{6(x-1)(2x-1)}{2x-1+\sqrt{2x-1}} + \frac{(x-1)(2x-1)(x+1)(2x+1)}{1+x\sqrt{5-4x^2}} = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(2x-1) \left[2 + \frac{6}{2x-1+\sqrt{2x-1}} + \frac{(x+1)(2x+1)}{1+x\sqrt{5-4x^2}} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\text{Vì } \frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (2x-1) \left[2 + \frac{6}{2x-1+\sqrt{2x-1}} + \frac{(x+1)(2x+1)}{1+x\sqrt{5-4x^2}} \right] > 0$ Với $x = 1 \Rightarrow y = 4$. Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$. Đáp số $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$	0,25

Câu 9 (1,0 đ).	Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + 1 = c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} + \frac{14}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}}$.	
	Với các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + 1 = c \Rightarrow (a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 = ab + c$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có $ab + c = (a+1)(b+1) \leq \frac{1}{4}(a+b+2)^2 = \frac{1}{4}(c+1)^2$. Suy ra $\frac{c^3}{c+ab} \geq \frac{4c^3}{(c+1)^2}$ và $\frac{14}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{28}{(c+1)^2}$.	0,25
	Ta có bất đẳng thức $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n}$ luôn đúng với các số dương x, y, m, n . Thật vậy, $\forall x, y, m, n > 0$, $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n} \Leftrightarrow (m+n)\left(\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n}\right) \geq (x+y)^2$ $\Leftrightarrow x^2n^2 + y^2m^2 \geq 2xymn \Leftrightarrow (xn - ym)^2 \geq 0$ Áp dụng bổ đề trên và bất đẳng thức Cô – si ta có: $\frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} = \frac{a^4}{a^2+abc} + \frac{b^4}{b^2+abc} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2+2abc}$ $\geq \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)(c+1)} = \frac{a^2+b^2}{c+1} \geq \frac{(a+b)^2}{2(c+1)} = \frac{(c-1)^2}{2(c+1)}$	0,25
	Từ các bất đẳng thức trên suy ra $P \geq \frac{(c-1)^2}{2(c+1)} + \frac{4c^3}{(c+1)^2} + \frac{28}{(c+1)^2} = f(c), c > 1$. $f'(c) = \frac{(3c-5)(3c^2+14c+23)}{2(c+1)^3}, f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{3}$, $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{53}{8}; 3c^2 + 14c + 23 > 0, \forall c > 1$	0,25
	Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra hàm số $f(c)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{53}{8}$ khi $c = \frac{5}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\frac{53}{8}$ khi $a = b = \frac{1}{3}; c = \frac{5}{3}$.	0,25

Chú ý: Học sinh trình bày cách giải khác, đúng, giám khảo cho điểm tối đa.