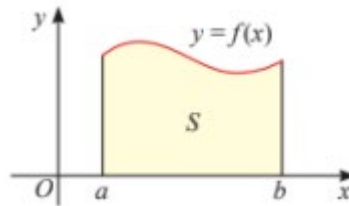


BÀI 2

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x) \Big|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và

$f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

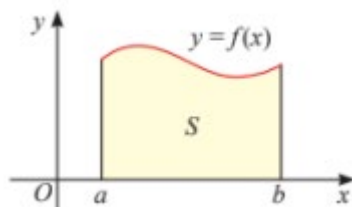
- Quy ước: $\int_a^a f(x) dx; \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

• Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

• Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường

di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

TÍNH TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ**DẠNG 1****TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM SƠ CẤP**

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I = 5$.

B. $I = 6$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Câu 2. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$ bằng

A. 12.

B. 9.

C. 5.

D. 6.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

A. $I = \frac{1}{e}$

B. $I = \frac{1}{e} + 1$

C. $I = 1$

D. $I = e$

Câu 4. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 7$.

B. $S = 5$.

C. $S = 8$.

D. $S = 6$.

Câu 5. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B. $e^3 - e$

C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D. $e^4 - e$

Câu 6. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = 3$

Câu 7. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ bằng

A. $I = 2(e+3)0$.

B. $I = \frac{1}{2}(e+3)$.

C. $I = e - 3$.

D. $I = 2(e-3)$.

Câu 8. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = -2$

Câu 9. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P = e^4 - 1$

B. $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$

C. $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

D. $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$

Câu 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 11. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

A. $P = 45$

B. $P = 60$

C. $P = 65$

D. $P = 70$

Câu 12. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$

B. $P = -4$

C. $P = 4$

D. $P = -6$

Câu 13. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$

B. $P = -4$

C. $P = 4$

D. $P = -6$

Câu 14. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của

$P = a + b + c$ là

A. $P = 17$

B. $P = 16$

C. $P = 32$

D. $P = 49$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$

B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

C. $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) d(2x)$

D. $\int_a^b 2024 f(x) dx = 0$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

B. $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

D. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

B. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

$$\text{C. } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

$$\text{D. } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Câu 18. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\text{A. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$$

$$\text{B. } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{C. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dx$$

$$\text{D. } \int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

Câu 19. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\text{A. } \int_{-2024}^{2024} dx = 4048.$$

$$\text{B. } \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx.$$

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Câu 20. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\text{A. } \int_a^b kf(x) dx = k(F(b) - F(a))$$

$$\text{B. } \int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a)$$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a; x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$

$$\text{D. } \int_a^b f(2x+3) dx = F(2x+3) \Big|_a^b$$

Câu 21. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

$$\text{A. } \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = e - 3$$

$$\text{B. } \int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{2} + 1$$

C. $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 - e - \ln 2$

D. $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = e^4 - 1$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 22. Với a, b là các tham số thực. Tính tích phân $I = \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$.

Trả lời:

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

A. $(-1; 2)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(0; 4)$.

D. $(-3; 1)$.

Trả lời:

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$.

Trả lời:

Câu 25. Tính $I = \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right)^2 dx$.

Trả lời:

Câu 26. Tính $I = \int_1^2 (\sqrt{x} + 1) (\sqrt[3]{x} - 1) dx$.

Trả lời:

Câu 27. Tính $I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$.

Trả lời:

Câu 28. Tính $I = \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$.

Trả lời:

Câu 29. Tính $I = \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$.

Trả lời:

Câu 30. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 31. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 32. Biết $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e} + \frac{1}{e^2}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của $P = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 33. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 34. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$.

Trả lời:

Câu 35. Tính $I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$.

Trả lời:

Câu 36. Tính $I = \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 37. Tính $I = \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Trả lời:

DẠNG 2

TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)|.dx$?

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I = \int_a^b |f(x)|.dx$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 38. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 39. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 2| dx$.

- A. $I = -2$. B. $I = 4$. C. $I = 2$. D. $I = 0$.

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$.

- A. $I = -\frac{1}{2}$. B. $I = 5$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = \frac{5}{2}$.

Câu 41. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$.

- A. $I = -2$. B. $I = 4$. C. $I = 5$. D. $I = -4$.

Câu 42. Cho tích phân $I = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính

$P = a + b$.

- A. $P = \frac{40}{3}$ B. $P = \frac{80}{3}$ C. $P = \frac{17}{3}$ D. $P = \frac{98}{3}$

Câu 43. Tính tích phân $I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx$.

- A. $I = 38$. B. $I = 44$. C. $I = 48$. D. $I = 40$.

Câu 44. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$P = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $P = 15$ B. $P = 10$ C. $P = 5$ D. $P = 18$

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$.

B. $\ln 2$.

C. $2 \ln 2$.

D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 2$.

C. $I = -2$.

D. $I = -3$.

Câu 47. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$.

B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$.

C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$.

D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Câu 48. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (2; 4)$.

C. $m \in (3; 5)$.

D. $m \in (1; 3)$.

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$.

B. $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_{-2}^3 |e^x (x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x+1) dx$.

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Câu 50. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = -2$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$.

Trả lời:

Câu 52. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 |-x^2 - 2x + 3| dx$.

Trả lời:

Câu 53. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$.

Trả lời:

Câu 54. Tính tích phân $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$.

Trả lời:

Câu 55. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$.

Trả lời:

Câu 56. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$.

Trả lời:

Câu 57. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

Trả lời:

Câu 58. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

Trả lời:

Câu 59. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

Trả lời:

Câu 60. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$.

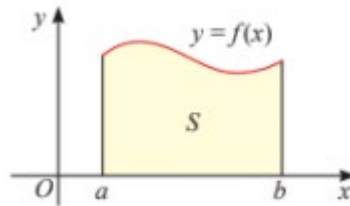
Trả lời:

BÀI 2

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x) \Big|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và

$f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

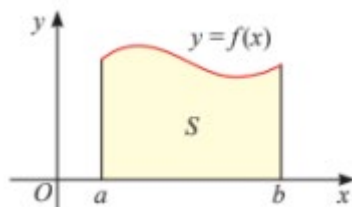
- Quy ước: $\int_a^a f(x) dx; \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

• Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

- Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường

di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

TÍNH TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ**DẠNG 1****TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM SƠ CẤP**

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I = 5$.

B. $I = 6$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $I = \int_0^2 (2x+1)dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Câu 2. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$ bằng

A. 12.

B. 9.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3)dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9$.

Vậy: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = 9$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

A. $I = \frac{1}{e}$

B. $I = \frac{1}{e} + 1$

C. $I = 1$

D. $I = e$

Lời giải

Chọn A.

$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e}$.

Câu 4. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 7$.

B. $S = 5$.

C. $S = 8$.

D. $S = 6$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3$.

Do đó $a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7$.

Câu 5. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B. $e^3 - e$

C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D. $e^4 - e$

Lời giải

Chọn C.

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (e^4 - e).$$

Câu 6. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = 3$

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

Câu 7. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ bằng

A. $I = 2(e+3)0.$

B. $I = \frac{1}{2}(e+3).$

C. $I = e - 3.$

D. $I = 2(e-3).$

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x + 2} dx = \int_0^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_0^1 = e - 3$$

Câu 8. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = -2$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = (e^x - \ln|x|) \Big|_1^2 = e^2 - e - \ln 2$$

Câu 9. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P = e^4 - 1$

B. $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$

C. $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

D. $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1}\right) \Big|_0^1 = \frac{1 - e^4}{e^4} = \frac{1}{e^4} - 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{a+b}{a.b} = \frac{1-e^4}{e^4}$$

Câu 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

+ Tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 11. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

A. $P = 45$ **B. $P = 60$** C. $P = 65$ D. $P = 70$

Lời giải

Chọn B.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \left(-2 \cos x + 3 \sin x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{18}$$

$$\Rightarrow P = a + 2b + 3c = 60$$

Câu 12. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$ **B. $P = -4$** C. $P = 4$ D. $P = -6$

Lời giải

Chọn B.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 3 \left(\tan x - x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - 3 - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 3 - 3 - 4 = -4$$

Câu 13. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$ **B. $P = -4$** **C. $P = 4$** D. $P = -6$

Lời giải

Chọn C.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 5 \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = (3x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1$$

Câu 14. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của

$P = a + b + c$ là

A. $P = 17$

B. $P = 16$

C. $P = 32$

D. $P = 49$

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 32 + 16 = 49$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$

B. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

C. $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) d(2x)$

D. $\int_a^a 2024 f(x) dx = 0.$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Lý thuyết

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a 2024 f(x) dx = 0.$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$ B. $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$

C. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

D. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

Lý thuyết

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

B. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

C. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$

D. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

Lý thuyết

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Câu 18. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$

B. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dx$

D. $\int_a^b (f(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Lý thuyết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Câu 19. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_{-2024}^{2024} dx = 4048.$

B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx.$

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Câu 20. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b kf(x) dx = k(F(b) - F(a))$

B. $\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a; x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$

D. $\int_a^b f(2x+3) dx = F(2x+3) \Big|_a^b$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Câu 21. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = e - 3$

B. $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{2} + 1$

C. $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 - e - \ln 2$

D. $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = e^4 - 1$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x + 2} dx = \int_0^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x)_0^1 = e - 3$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2} \right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2} \right)^x \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

$$\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx = (e^x - \ln|x|)_1^2 = e^2 - e - \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{1 - e^4}{e^4} = e^{-4} - 1$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 22. Với a, b là các tham số thực. Tính tích phân $I = \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = b^3 - b^2a - b$

Ta có $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx = (x^3 - ax^2 - x) \Big|_0^b = b^3 - ab^2 - b$.

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

A. $(-1; 2)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(0; 4)$.

D. $(-3; 1)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

Ta có: $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 1 - \ln 2$

Ta có $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = (x - \ln|x|) \Big|_1^2 = (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2.$

Câu 25. Tính $I = \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right)^2 dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 26. Tính $I = \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 27. Tính $I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 28. Tính $I = \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 29. Tính $I = \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 30. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 31. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 32. Biết $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e} + \frac{1}{e^2}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của $P = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = -1$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx \\ &= \left(\frac{e^{-3x+1}}{-3} + \frac{4e^{-2x+1}}{-2} + \frac{4e^{-x+1}}{-1} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2} = -9e + 4 + \frac{4}{e} + \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

$$P = a + b + c = -1$$

Câu 33. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a + b = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

Câu 34. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \left(\frac{2024^{2x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} \right) e^{3x}$

$$I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx = \int_0^1 \frac{2024^{2x} + 2 \cdot 2024^x + 1}{e^{-3x}} dx = \left[\left(\frac{2024^2}{e^{-3}} \right)^x + 2 \cdot \left(\frac{2024}{e^{-3}} \right)^x + e^{3x} \right]_0^1$$

$$= \frac{\left(\frac{2024^2}{e^{-3}} \right)^x}{\ln \frac{2024^2}{e^{-3}}} + \frac{2 \cdot \left(\frac{2024}{e^{-3}} \right)^x}{\ln \frac{2024}{e^{-3}}} + \frac{1}{3} e^{3x} = \frac{2024^{2x} e^{3x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x} e^{3x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$= \left(\frac{2024^{2x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} \right) e^{3x}$$

Câu 35. Tính $I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2}$

$$I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx = (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) \Big|_0^1$$

$$= \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2}$$

Câu 36. Tính $I = \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 37. Tính $I = \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 2

TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)| dx$?

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I = \int_a^b |f(x)| dx$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 38. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$\text{-Do : } x \in [0; \pi] \rightarrow \sin x > 0. \Rightarrow |\sin x| = \sin x ; x \in [\pi; 2\pi] \rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$$

$$\text{Vậy : } I = \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx \right) = \sqrt{2} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \sqrt{2} (1 + 1 + 1 + 1) = 4\sqrt{2}$$

Câu 39. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 2| dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^2 |x - 2| dx.$$

$$+ \text{Do : } x \in [0; 2] \Rightarrow x - 2 < 0, \Leftrightarrow |x - 2| = 2 - x$$

$$+ \text{Vậy : } I = \int_0^2 (2 - x) dx = \left(2x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 - 2 = 2$$

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$.

A. $I = -\frac{1}{2}$.

B. $I = 5$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^2 |x^3 - x| dx.$$

$$+ \text{Do : } f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1; x = 1$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$+ \text{Vậy : } I = \int_0^1 (x - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2}$$

Câu 41. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 5$.

D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx.$$

$$+ \text{Vi : } f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -3 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 -f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3 - 2x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= \left(3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 = \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) + \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right] = 5$$

Câu 42. Cho tích phân $I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính

$$P = a + b.$$

A. $P = \frac{40}{3}$

B. $P = \frac{80}{3}$

C. $P = \frac{17}{3}$

D. $P = \frac{98}{3}$

Lời giải

Chọn A.

$$I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx.$$

Tính $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$

$$- \text{Vi : } f(x) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$$

$$\begin{aligned}
 - \text{Vậy : } I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\
 &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{40}{3} \sqrt{3} + \frac{40}{3} \sqrt{2}$$

Câu 43. Tính tích phân $I = \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$.

A. $I = 38$.

B. $I = 44$.

C. $I = 48$.

D. $I = 40$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx.$$

- Lập bảng xét dấu : $f(x) = 4 \forall x \in [-2; 2]; f(x) = 2x \forall x \in [2; 5]$

$$- \text{Vậy : } \int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^2 4 dx + \int_2^5 2x dx = 4x \Big|_{-2}^2 + x^2 \Big|_2^5 = 16 + 32 - 4 = 44$$

Câu 44. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

A. $P = 15$

B. $P = 10$

C. $P = 5$

D. $P = 18$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^3 |2^x - 4| dx$$

- Nhận xét : $2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2. \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [2; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 2]$

$$- \text{Vậy : } I = \int_0^2 (4 - 2^x) dx + \int_2^3 (2^x - 4) dx = \left(4x - \frac{1}{\ln 2} 2^x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_2^3$$

$$= \left(8 - \frac{3}{\ln 2} \right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4 \right) = 4 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18$$

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$.

B. $\ln 2$.

C. $2 \ln 2$.

D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx \text{ ta có } 2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx + \int_0^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \left| \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \right|_{-1}^0 + \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 2$.

C. $I = -2$.

D. $I = -3$.

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$$

Cách 1.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx = \int_{-1}^2 |x| dx - \int_{-1}^2 |x-1| dx = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 (x-1) dx - \int_1^2 (x-1) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Cách 2.

Bảng xét dấu

x	-1	0	1	2
x	-	0	+	+
x-1	-	-	0	+

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 (-x + x-1) dx + \int_0^1 (x + x-1) dx + \int_1^2 (x - x+1) dx = -x \Big|_{-1}^0 + (x^2 - x) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 0$$

Câu 47. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$.

B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$.

C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$.

D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $a > 0$ nên $I = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1 + a^2}{2}$

Câu 48. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (2; 4)$.

C. $m \in (3; 5)$.

D. $m \in (1; 3)$.

Lời giải**Chọn D.**

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

$$\text{Vậy } \int_1^m |2mx - 1| dx = \int_1^m (2mx - 1) dx = \left(mx^2 - x \right) \Big|_1^m = m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1.$$

$$\text{Từ đó theo bài ra ta có } m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Do } m > 1 \text{ vậy } m = \sqrt{2}.$$

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|.$

B. $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx.$

C. $\int_{-2}^3 |e^x (x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x+1) dx.$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

Lời giải**Chọn B.**

$$\text{Ta có: } x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó: } \int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx.$$

Câu 50. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$.

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = -\frac{1}{2}.$

C. $I = -2.$

D. $I = \frac{1}{2}.$

Lời giải**Chọn A.**

$$I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx = \int_1^4 |x - 3| dx$$

$$\text{- Ta có: } x - 3 > 0 \forall x \in [3; 4]; x - 3 < 0 \forall x \in [1; 3]$$

$$\text{- Vậy: } I = \int_1^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx = \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_3^4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{40}{3}$

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx -$$

Vì : $f(x) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

Câu 52. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 |-x^2 - 2x + 3| dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 53. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 54. Tính tích phân $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 55. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 56. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:**Câu 57.** Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:**Câu 58.** Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:**Câu 59.** Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:**Câu 60.** Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

CHỦ ĐỀ 2**TÍCH PHÂN CÓ ĐIỀU KIỆN**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

- A. $\ln 2$. B. $1 + \ln 2$ C. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$ D. $\frac{1}{2} \ln 2$

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

- A. $2 \ln 2 + 1$. B. $\ln 2$. C. $2 \ln 3 + 2$. D. $2 \ln 2$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

- A. 1. B. 7. C. -9. D. 9.

Câu 4. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- A. 10. B. 8. C. $\frac{26}{3}$. D. $\frac{32}{3}$.

Câu 5. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng

- A. 20. B. 22. C. 26. D. 28.

Câu 6. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

- A. 5. B. 3. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 7. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

- A. $\frac{23}{4}$. B. 7. C. 9. D. $\frac{15}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$ B. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$
C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$ D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}$.

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}$.

C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

D. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$ bằng:

A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{23}{6}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x(1+x^2) & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t) dt$ bằng:

A. $\frac{40}{3} - \ln 2$.

B. $\frac{95}{6} + \ln 2$.

C. $\frac{189}{4} + \ln 2$.

D. $\frac{189}{4} - \ln 2$.

Câu 13. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

A. $\frac{a}{6} - 1$.

B. $\frac{2a}{3} + 1$.

C. $\frac{a}{6} + 1$.

D. $\frac{2a}{3} - 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_1^{2024} f(x) dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3) dx$

B. $\int_{-2024}^1 f(x) dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3) dx$

C. $\int_{-2024}^{2024} f(x) dx = \int_{-2024}^{2024} (2x^2 + 3) dx + \int_{-2024}^{2024} (2 - x^3) dx$

D. $\int_{-2024}^{2024} f(x) dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3) dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3) dx$

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x+1) dx$

B. $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx$

C. $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{41}{12}$

D. $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t) dt$.

Trả lời:

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t) dt$.

Trả lời:

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt$

Trả lời:

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 8$. Tính $m + n$

Trả lời:

Câu 21. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$. Tính $P = a + b + c$

Trả lời:

Câu 22. Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x-3)dx = 0$. Hãy tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

Trả lời:

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

Trả lời:

Câu 24. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Trả lời:

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x-3)dx \leq 4$?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Trả lời:

Câu 26. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Trả lời:

CHỦ ĐỀ 2**TÍCH PHÂN CÓ ĐIỀU KIỆN**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 2$.**B.** $1 + \ln 2$ C. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$ **D.** $\frac{1}{2} \ln 2$ **Lời giải****Chọn B.**

$$\text{Ta có: } \int_1^4 F'(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_1^4 = \ln 2.$$

$$\text{Lại có: } \int_1^4 F'(x) dx = F(x) \Big|_1^4 = F(4) - F(1).$$

$$\text{Suy ra } F(4) - F(1) = \ln 2.$$

$$\text{Do đó } F(4) = F(1) + \ln 2 = 1 + \ln 2.$$

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $2 \ln 2 + 1$.**B.** $\ln 2$.C. $2 \ln 3 + 2$.**D.** $2 \ln 2$.**Lời giải****Chọn D.**

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^2 f(x) dx = F(x) \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1)$$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| \Big|_{-1}^2 = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2$$

$$\Rightarrow F(2) - F(-1) = 2 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow F(2) = 2 \ln 2 \text{ (do } F(-1) = 0).$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 7.**C.** -9.**D.** 9.**Lời giải****Chọn C.**

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 8 = -9.$$

- Câu 4.** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng
- A. 10. B. 8. C. $\frac{26}{3}$. D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_1^3 [1 + f(x)] dx = (x + F(x)) \Big|_1^3 = (x + x^2) \Big|_1^3 = 12 - 2 = 10.$$

- Câu 5.** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng
- A. 20. B. 22. C. 26. D. 28.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \int_1^3 [1 + f(x)] dx = [x + F(x)] \Big|_1^3 = [x + x^3] \Big|_1^3 = 30 - 2 = 28.$$

- Câu 6.** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng
- A. 5. B. 3. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \int_1^2 [2 + f(x)] dx = (2x + x^2) \Big|_1^2 = 8 - 3 = 5$$

- Câu 7.** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng
- A. $\frac{23}{4}$. B. 7. C. 9. D. $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \int_1^2 (2 + f(x)) dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + F(x) \Big|_1^2 = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9$$

- Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$ B. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$
- C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$ D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) = \int \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \int (2 - \cos x) dx = 2x - \sin x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$$

$$\text{Hay } f(x) = 2x - \sin x + 4.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx$$

$$= \left(x^2 + \cos x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}.$

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$

C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}.$

D. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3 \right) dx = \int \left(2 \cdot \frac{1 + \cos x}{2} + 3 \right) dx = \int (\cos x + 4) dx = \sin x + 4x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x + 4x + C$$

$$\text{do } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \sin x + 4x + 4 \text{ nên } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 4x + 4) dx$$

$$= (-\cos x + 2x^2 + 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{4}{3} + \frac{e^2}{2}.$$

Vậy $a + b + c = 9$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{23}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 - 1) dx \right] = \frac{23}{6}.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x(1+x^2) & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t) dt$ bằng:

- A. $\frac{40}{3} - \ln 2$. B. $\frac{95}{6} + \ln 2$. C. $\frac{189}{4} + \ln 2$. D. $\frac{189}{4} - \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_2^4 f(t) dt = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 x(1+x^2) dx = \int_2^3 \frac{1}{x-4} dx + \int_3^4 x(1+x^2) dx = \frac{189}{4} - \ln 2.$$

Câu 13. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{a}{6} - 1$. B. $\frac{2a}{3} + 1$. C. $\frac{a}{6} + 1$. D. $\frac{2a}{3} - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta thấy, } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x-x^2) dx$$

$$= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\text{A. } \int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx$$

$$\text{B. } \int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$$

$$\text{C. } \int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_{-2024}^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^{2024} (2 - x^3)dx$$

$$\text{D. } \int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Do $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ nên

$$\int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx$$

$$\int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$$

$$\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

$$\text{A. } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x + 1)dx$$

$$\text{B. } \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx$$

$$\text{C. } \int_1^3 \frac{1}{2} f(x)dx = \frac{41}{12}$$

$$\text{D. } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Do $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx$$

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx$$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{1}{2} f(x)dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (x+1)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx \right) = \frac{41}{12}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t)dt$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{25}{12}$

$$I = -3 \int_2^0 t^2 f(t)dt = 3 \int_0^2 x^2 f(x)dx = 3 \left[\int_0^1 x^2 (x+1)dx + \int_1^2 xdx \right] = \frac{25}{12}.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t)dt$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{109}{21}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(t)dt = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(x)dx = \frac{1}{7} \int_{-5}^0 f(x)dx + \frac{1}{7} \int_0^2 f(x)dx + \frac{1}{7} \int_2^9 f(x)dx \\ &= \frac{1}{7} \int_{-5}^0 (2x^2 - 1)dx + \frac{1}{7} \int_0^2 (x - 1)dx + \frac{1}{7} \int_2^9 (5 - 2x)dx = \frac{109}{21}. \end{aligned}$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{10}{3}$

$$I_1 = \int_{-1}^1 f(x)dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^3 (x^2 - x) dx = 4.$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = \frac{10}{3}$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 84$

$$I_1 = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 (-2x + 12) dx = 9.$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} 4x dx = 75.$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = 84$$

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 8$. Tính $m + n$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m + n = 4$

Ta có: $\int f(x) dx = \int (mx + n) dx = \frac{m}{2} x^2 + nx + C.$

Lại có: $\int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m + n = 3 \quad (1).$

$\int_0^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^2 = 8 \Leftrightarrow 2m + 2n = 8 \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{2} m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}.$

$\Rightarrow m + n = 4.$

Câu 21. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}.$ Tính $P = a + b + c$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = a + b + c = -\frac{4}{3}$

Ta có: $\int f(x) dx = \int (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx + C.$

Lại có: $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} b + c = -\frac{7}{2} \quad (1).$

$\int_0^2 f(x) dx = -2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^2 = -2 \Leftrightarrow \frac{8}{3} a + 2b + 2c = -2 \quad (2).$

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^3 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a + \frac{9}{2} b + 3c = \frac{13}{2} \quad (3).$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3} a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2} b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}.$

$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 3 + \left(-\frac{16}{3} \right) = -\frac{4}{3}.$

Câu 22. Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x-3)dx = 0$. Hãy tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 13$

Ta có: $\int_1^a (2x-3)dx = (x^2 - 3x) \Big|_1^a = a^2 - 3a + 2$.

Vì $\int_1^a (2x-3)dx = 0$ nên $a^2 - 3a + 2 = 0$, suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$.

Lại có $0 < a_1 < a_2$ nên $a_1 = 1$; $a_2 = 2$.

Như vậy $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = 3^1 + 3^2 + \log_2 \left(\frac{2}{1} \right) = 13$.

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

Ta có: $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = m^3 - m^2 + m$.

$\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 24. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: có 3 giá trị nguyên của m với $m \in \{-1; 0; 1\}$

Theo định nghĩa tích phân ta có $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx = (2x^2 - 2m^2x) \Big|_0^1 = -2m^2 + 2$.

Khi đó $I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x-3)dx \leq 4$?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** có 4 giá trị của a với : $a \in \{1; 2; 3; 4\}$ Ta có: $\int_0^a (2x-3)dx = (x^2-3x)\Big|_0^a = a^2-3a$.Khi đó: $\int_0^a (2x-3)dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2-3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4$ Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.**Câu 26.** Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4\cos 2x dx = 1$?

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**Ta có: $\int_{\pi}^b 4\cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHỦ ĐỀ 3**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI CƠ BẢN**

$$\bullet \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$ bằng?

- A.** 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 2. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 g(x) dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$ bằng

- A.** -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 3. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 5$ và $\int_1^4 g(x) dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- A.** -1. **B.** -9. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 4. Biết $\int_1^{2022} f(x) dx = -3$ và $\int_{2022}^1 g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^{2022} [f(x) - g(x)] dx$ bằng?

- A.** 6. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 5. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x) dx$ bằng

- A.** 3. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Câu 6. Cho $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2022}$. Tính $I = \int_0^2 2022 f(x) dx$.

- A.** $I = 5$ **B.** $I = \frac{1}{2022}$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = 2022$

Câu 7. Nếu $\int_0^5 f(x) dx = 5$ thì $\int_5^0 5f(x) dx$ bằng

- A.** 1. **B.** -1. **C.** 25. **D.** -25.

Câu 8. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng:

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 12.

Câu 9. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$ bằng

A. 6.

B. 4.

C. 8.

D. 5.

Câu 10. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. -8

B. 1

C. -3

D. 12

Câu 11. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]dx = 5$.

A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

Câu 12. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Câu 13. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 1$, tích phân $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2)dx$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. -1.

Câu 14. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$.

A. $I = \frac{17}{2}$ B. $I = \frac{5}{2}$ C. $I = \frac{7}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Câu 15. Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$, $\int_0^2 g(x)dx = -1$ thì $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]dx$ bằng:

A. 12.

B. 0.

C. 8.

D. 10

Câu 16. Cho $\int_0^5 f(x)dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2]dx$ bằng

A. -140.

B. -130.

C. -120.

D. -133.

Câu 17. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Câu 18. Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y)dy$.

A. $I = 5$.B. $I = -3$.C. $I = 3$.D. $I = -5$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x)dx = 9$; $\int_2^4 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)dx$.

A. $I = 5$.B. $I = 36$.C. $I = \frac{9}{4}$.D. $I = 13$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx = 10$, $\int_3^4 f(x)dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 4.

B. 7.

C. 3.

D. 6.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$; $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

A. $P = 4$ B. $P = 10$ C. $P = 7$ D. $P = -4$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá

trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

A. $P = 4$.B. $P = 16$.C. $P = 8$.D. $P = 10$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 23. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b [f(x) + 2g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + 2 \int_a^b g(x)dx$.

B. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

C. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.

D. $\int_a^b f^2(x)dx = \left[\int_a^b f(x)dx \right]^2$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2 \right]dx = 6$

B. Nếu $\int_2^5 f(x)dx = 3$ và $\int_2^5 g(x)dx = -2$ thì $\int_2^5 [f(x) + g(x)]dx = 1$

C. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 6$ và $\int_1^4 g(x)dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = 1$

D. Nếu $\int_2^3 f(x)dx = 4$ **và** $\int_2^3 g(x)dx = 1$ **thì** $\int_2^3 [f(x) - g(x)]dx = 3$

Câu 25. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ **và** $\int_3^2 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)]dx = 4$

B. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 2022$ **và** $\int_3^1 g(x)dx = 1$. **Khi đó** $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = 2021$

C. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ **và** $\int_1^2 g(x)dx = 2$. **Khi đó** $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = 1$

D. Biết $\int_2^5 f(x)dx = 2$. Khi đó $\int_2^5 3f(x)dx = 2$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ **thì** $\int_0^3 2f(x)dx = 6$.

B. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 2024$ **thì** $\int_4^1 f(x)dx = -2024$

C. Nếu $\int_6^0 f(x)dx = 12$ **thì** $\int_0^6 2022f(x)dx = 24264$

D. Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 4$ **thì** $\int_0^1 2f(x)dx = 8$

Câu 27. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 6$ **thì** $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx = -10$

B. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 4$ **thì** $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx = 6$

C. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ **và** $\int_0^2 g(x)dx = 7$ **thì** $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx = 24$

D. Nếu $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 3$ **thì** $\int_0^1 f(x)dx = 2$

Câu 28. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_{-1}^5 f(x)dx = -3$ **thì** $\int_5^{-1} f(x)dx = 3$

B. Nếu $\int_2^3 f(x)dx = -6$ **thì** $\int_3^2 2f(x)dx = 12$.

C. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 2$ **và** $\int_1^2 g(x)dx = 6$ **thì** $\int_2^1 [f(x) - g(x)]dx = -4$

D. Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$ thì $\int_1^0 [f(x) + g(x)]dx = -1$

Câu 29. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^1 f(x)dx = -1$ và $\int_0^3 f(x)dx = 5$ thì $\int_1^3 f(x)dx = 6$ **đx**

B. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -3$ và $\int_2^3 f(x)dx = 4$ thì $\int_1^3 f(x)dx = -1$

C. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3; \int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_1^3 f(x)dx = -4$

D. Nếu $\int_{-2}^5 f(x)dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x)dx = 3$ thì $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx = -13$

Câu 30. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$. Giá trị của $\int_2^1 3f(x)dx = -6$.

B. Biết $\int_1^2 f(x)dx = -1$ và $\int_1^2 g(x)dx = 3$, khi đó $\int_2^1 [f(x) - g(x)]dx = 5$

C. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -2$ và $\int_2^3 f(x)dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x)dx = -1$.

D. Nếu $\int_0^2 (f(x) + 3x^2)dx = 10$ thì $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Cho $\int_1^4 f(x)dx = 4$ và $\int_1^4 g(x)dx = -3$. Tính $I = \int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$.

Trả lời:

Câu 32. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 3$. Tính $I = \int_1^2 [f(x) + g(x)]dx$.

Trả lời:

Câu 33. Cho $\int_0^3 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^3 3f(x)dx$.

Trả lời:

Câu 34. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x]dx$.

Trả lời:

Câu 35. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx$.

Trả lời:

Câu 36. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$

Trả lời:

Câu 37. Biết $\int_1^3 f(x) dx = 3$. Tính giá trị của $I = \int_3^1 2f(x) dx$.

Trả lời:

Câu 38. Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_1^0 g(x) dx = -3$. Tính $I = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 39. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$ và $\int_1^2 h(x) dx = 2022$. Tính $I = \int_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 40. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^5 f(x) dx = -5$. Tính $I = \int_{-1}^5 f(x) dx$.

Trả lời:

Câu 41. Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$,

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^8 f(x) dx = 9$, $\int_4^{12} f(x) dx = 3$, $\int_4^8 f(x) dx = 5$. Tính

$I = \int_1^{12} f(x) dx$.

Trả lời:

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

Trả lời:

Câu 44. Giả sử $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^5 f(z) dz = 9$. Tổng $I = \int_1^3 f(t) dt + \int_3^5 f(t) dt$ bằng

Trả lời:

CHỦ ĐỀ 3**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI CƠ BẢN**

$$\bullet \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$ bằng?

A. 8 .

B. 5 .

C. 9 .

D. 6 .

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_0^3 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 2 dx = \frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = 8.$$

Câu 2. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 g(x) dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$ bằng

A. -1.

B. -5.

C. 5 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 3 - (-2) = 5.$$

Câu 3. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 5$ và $\int_1^4 g(x) dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

A. -1.

B. -9.

C. 1 .

D. 9.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 5 - (-4) = 9.$$

Câu 4. Biết $\int_1^{2022} f(x) dx = -3$ và $\int_{2022}^1 g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^{2022} [f(x) - g(x)] dx$ bằng?

A. 6 .

B. -5.

C. 5 .

D. -1 .

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_{2022}^1 g(x)dx = 2 \Leftrightarrow \int_1^{2022} g(x)dx = -2$

$$\int_1^{2022} [f(x) - g(x)]dx = \int_1^{2022} f(x)dx - \int_1^{2022} g(x)dx = -3 - (-2) = -1.$$

Câu 5. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)dx$ bằng

- A. 3. **B. 12.** C. 36. D. 4.

Lời giải**Chọn B.**

Ta có $\int_0^3 4f(x)dx = 4 \int_0^3 f(x)dx = 4.3 = 12.$

Câu 6. Cho $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2022}$. Tính $I = \int_0^2 2022f(x)dx$.

- A. $I = 5$ B. $I = \frac{1}{2022}$ **C. $I = 1$** D. $I = 2022$

Lời giải**Chọn C.**

Ta có: $I = \int_0^2 2022f(x)dx = 2022 \int_0^2 f(x)dx = 2022 \cdot \frac{1}{2022} = 1$

Câu 7. Nếu $\int_0^5 f(x)dx = 5$ thì $\int_5^0 5f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 25. **D. -25.**

Lời giải**Chọn D.**

Ta có: $\int_5^0 5f(x)dx = - \int_0^5 5f(x)dx = -5 \int_0^5 f(x)dx = -5.5 = -25$

Câu 8. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$ bằng:

- A. 8.** B. 9. C. 10. D. 12.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx = 2 \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 1dx = 2.5 - 2 = 8$

Câu 9. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$ bằng

- A. 6. **B. 4.** C. 8. D. 5.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 3 - 2 = 4.$

Câu 10. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

A. -8**B.** 1**C.** -3**D.** 12**Lời giải****Chọn A.**

Có $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 - 2 \cdot 5 = -8.$

Câu 11. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5.$

A. $I = 7$ **B.** $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ **C.** $I = 3$ **D.** $I = 5 + \pi$ **Lời giải****Chọn A.**

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7.$$

Câu 12. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

A. 1.**B.** -3.**C.** 3.**D.** -1.**Lời giải****Chọn A.**

$$\begin{aligned} \int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1 &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \int_1^2 x dx = 1 \Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Câu 13. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$, tích phân $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$ bằng

A. 1.**B.** 0.**C.** 3.**D.** -1.**Lời giải****Chọn A.**

$$\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 x^2 dx = 2 - 1 = 1.$$

Câu 14. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

A. $I = \frac{17}{2}$

B. $I = \frac{5}{2}$

C. $I = \frac{7}{2}$

D. $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 - 3(-1) = \frac{17}{2}$.

Câu 15. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 g(x) dx = -1$ thì $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx$ bằng:

A. 12.

B. 0.

C. 8.

D. 10

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx = \int_0^2 f(x) dx - 5 \int_0^2 g(x) dx + \int_0^2 x dx = 3 + 5 + 2 = 10$$

Câu 16. Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

A. -140.

B. -130.

C. -120.

D. -133.

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx = 4 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 3x^2 dx = -8 - x^3 \Big|_0^5 = -8 - 125 = -133.$$

Câu 17. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1 &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \int_1^2 x dx = 1 \Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Câu 18. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y) dy$.

A. $I = 5$.

B. $I = -3$.

C. $I = 3$.

D. $I = -5$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_{-2}^4 f(t) dt = \int_{-2}^4 f(x) dx, \int_2^4 f(y) dy = \int_2^4 f(x) dx.$

Khi đó: $\int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx.$

$\Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx - \int_{-2}^2 f(x) dx = -4 - 1 = -5.$

Vậy $\int_2^4 f(y) dy = -5.$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x) dx = 9; \int_2^4 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = 36$. C. $I = \frac{9}{4}$. D. $I = 13$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 9 + 4 = 13.$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x) dx = 10, \int_3^4 f(x) dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- A. 4. B. 7. C. 3. D. 6.

Lời giải

Chọn D.

Theo tính chất của tích phân, ta có: $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx.$

Suy ra: $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx = 10 - 4 = 6.$

Vậy $\int_0^3 f(x) dx = 6.$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7; \int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$

- A. $P = 4$ B. $P = 10$ C. $P = 7$ D. $P = -4$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$

$$\Rightarrow 7 = P + 3 \Rightarrow P = 4.$$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 f(x) dx = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx$.

A. $P = 4$.

B. $P = 16$.

C. $P = 8$.

D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn A.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 23. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx$.

B. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$.

C. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

D. $\int_a^b f^2(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Theo tính chất tích phân ta có

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx; \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ **thì** $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx = 6$

B. Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ **và** $\int_2^5 g(x) dx = -2$ **thì** $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = 1$

C. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 6$ và $\int_1^4 g(x)dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = 1$

D. Nếu $\int_2^3 f(x)dx = 4$ **và** $\int_2^3 g(x)dx = 1$ **thì** $\int_2^3 [f(x) - g(x)]dx = 3$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Ta có

$$\int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 2 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 6.$$

$$\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_2^5 g(x) dx = 3 + (-2) = 1.$$

$$\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 6 - (-5) = 11.$$

$$\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 g(x) dx = 4 - 1 = 3$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_3^2 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)]dx = 4$

B. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 2022$ **và** $\int_3^1 g(x)dx = 1$. **Khi đó** $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = 2021$

C. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ **và** $\int_1^2 g(x)dx = 2$. **Khi đó** $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = 1$

D. Biết $\int_2^5 f(x)dx = 2$. Khi đó $\int_2^5 3f(x)dx = 2$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Ta có:

$$\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_2^3 g(x) dx = \int_2^3 f(x) dx - \int_3^2 g(x) dx = 2$$

Ta có: $\int_3^1 g(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx = -1$

$$\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 2022 + (-1) = 2021.$$

$$\text{Ta có: } \int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 3 - 2 = 1.$$

$$\text{Ta có } \int_2^5 3f(x) dx = 3 \int_2^5 f(x) dx = 3.2 = 6.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x) dx = 6$.

B. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 2024$ thì $\int_4^1 f(x) dx = -2024$

C. Nếu $\int_6^0 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^6 2022f(x) dx = 24264$

D. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx = 8$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

$$\text{Ta có: } \int_0^3 2f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2.3 = 6.$$

$$\text{Ta có: } \int_4^1 f(x) dx = - \int_1^4 f(x) dx = -2024$$

$$\text{Ta có: } \int_0^6 2022f(x) dx = 2022 \int_0^6 f(x) dx = 2022.(-12) = -24264$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 2f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2.4 = 8.$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = -10$

B. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 6$

C. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = 7$ thì $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx = 24$

D. Nếu $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$ thì $\int_0^1 f(x) dx = 2$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Ta có: $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 6 - 2 = 10$

Ta có: $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = \int_0^2 2f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 4 - 2 = 6.$

Ta có $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx = \int_0^2 f(x) dx + 3 \int_0^2 g(x) dx = 3 + 3 \cdot 7 = 24.$

Ta có $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 x dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 3.$

Suy ra $\int_0^1 f(x) dx = 3 - x^2 \Big|_0^1 = 3 - (1 - 0) = 2.$

Câu 28. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$ thì $\int_5^{-1} f(x) dx = 3$

B. Nếu $\int_2^3 f(x) dx = -6$ thì $\int_3^2 2f(x) dx = 12.$

C. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 6$ thì $\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx = -4$

D. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$ thì $\int_1^0 [f(x) + g(x)] dx = -1$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Ta có: $\int_5^{-1} f(x) dx = - \int_{-1}^5 f(x) dx = -(-3) = 3.$

Ta có: $\int_3^2 2f(x) dx = - \int_2^3 2f(x) dx = -2 \int_2^3 f(x) dx = -2 \cdot (-6) = 12.$

Ta có: $\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx = - \int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = - \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = -2 + 6 = 4.$

Ta có $\int_1^0 [f(x) + g(x)] dx = - \int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = - \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = -3 + 4 = 1.$

Câu 29. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Nếu $\int_0^1 f(x)dx = -1$ **và** $\int_0^3 f(x)dx = 5$ **thì** $\int_1^3 f(x)dx = 6$ **đúng**

B. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -3$ **và** $\int_2^3 f(x)dx = 4$ **thì** $\int_1^3 f(x)dx = -1$

C. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3$; $\int_0^3 f(x)dx = 3$ **thì** $\int_1^3 f(x)dx = -4$

D. Nếu $\int_{-2}^5 f(x)dx = 8$ **và** $\int_5^{-2} g(x)dx = 3$ **thì** $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx = -13$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Ta có

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 5 + 1 = 6$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -3 + 4 = 1.$$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = 3; \int_0^3 f(x)dx = 1; \int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx = 3 + 1 = 4$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx &= \int_{-2}^5 f(x)dx - \int_{-2}^5 4g(x)dx - \int_{-2}^5 1dx = \int_{-2}^5 f(x)dx - 4 \int_{-2}^5 g(x)dx - \int_{-2}^5 1dx \\ &= \int_{-2}^5 f(x)dx + 4 \int_5^{-2} g(x)dx - \int_{-2}^5 1dx = 8 + 4.3 - x \Big|_{-2}^5 = 8 + 4.3 - 7 = 13. \end{aligned}$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$. **Giá trị của** $\int_2^1 3f(x)dx = -6$.

B. Biết $\int_1^2 f(x)dx = -1$ **và** $\int_1^2 g(x)dx = 3$, **khi đó** $\int_2^1 [f(x) - g(x)]dx = 5$

C. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -2$ **và** $\int_2^3 f(x)dx = 1$ **thì** $\int_1^3 f(x)dx = -1$.

D. Nếu $\int_0^2 (f(x) + 3x^2)dx = 10$ **thì** $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

A. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$. **Giá trị của** $\int_2^1 3f(x) dx = -6$.

$$\text{Ta có: } \int_2^1 3f(x) dx = -\int_1^2 3f(x) dx = -3 \int_1^2 f(x) dx = -3 \cdot 2 = -6.$$

B. Biết $\int_1^2 f(x) dx = -1$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$, khi đó $\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx = 5$

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f(x) dx = -1 \Leftrightarrow \int_2^1 f(x) dx = 1; \quad \int_1^2 g(x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_2^1 g(x) dx = -3$$

$$\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_2^1 f(x) dx - \int_2^1 g(x) dx = 1 - (-3) = 4.$$

C. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx = -1$.

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -2 + 1 = -1.$$

D. Nếu $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$ thì $\int_0^2 f(x) dx = 2$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10 &\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 3x^2 dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - \int_0^2 3x^2 dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - x^3 \Big|_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - 8 = 2. \end{aligned}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Cho $\int_1^4 f(x) dx = 4$ và $\int_1^4 g(x) dx = -3$. Tính $I = \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 7$

$$\text{Ta có: } \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 4 - (-3) = 7.$$

Câu 32. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 5$

Ta có: $\int_1^2 [f(x) + g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = 2 + 3 = 5.$

Câu 33. Cho $\int_0^3 f(x)dx = 4.$ Tính $I = \int_0^3 3f(x)dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 12$

Ta có: $\int_0^3 3f(x)dx = 3 \int_0^3 f(x)dx = 12.$

Câu 34. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2.$ Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x]dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 10$

Ta có: $\int_1^3 [f(x) + 2x]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 2xdx = 2 + x^2 \Big|_1^3 = 2 + 3^2 - 1^2 = 10.$

Câu 35. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1.$ Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{5}{2}$

Ta có $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx = \int_{-1}^2 xdx + 2 \int_{-1}^2 f(x)dx + 3 \int_{-1}^2 g(x)dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$

Câu 36. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 1.$ Tính tích phân $I = \int_0^1 (2f(x) - 3x^2)dx$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 1$

$\int_0^1 (2f(x) - 3x^2)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx - 3 \int_0^1 x^2dx = 2 - 1 = 1.$

Câu 37. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3.$ Tính giá trị của $I = \int_3^1 2f(x)dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = -6$

Ta có: $\int_3^1 2f(x)dx = -\int_1^3 2f(x)dx = -2\int_1^3 f(x)dx = -2.3 = -6.$

Câu 38. Biết $\int_0^1 f(x)dx = -2$ và $\int_1^0 g(x)dx = -3$. . Tính $I = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = -5$

$\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = -2 - 3 = -5.$

Câu 39. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 g(x)dx = 2$ và $\int_1^2 h(x)dx = 2022$. Tính $I = \int_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)]dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 2023$

Ta có: $\int_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx + \int_1^2 h(x)dx = 3 - 2 + 2022 = 2023.$

Câu 40. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_2^5 f(x)dx = -5$. Tính $I = \int_{-1}^5 f(x)dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = -3$

Ta có $\int_{-1}^5 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 2 - 5 = -3.$

Câu 41. Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10,$

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6.$ Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)]dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 6$

Đặt $a = \int_1^3 f(x)dx$ và $b = \int_1^3 g(x)dx.$

Khi đó, $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = a + 3b, \int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 2a - b.$

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$

Vậy $I = a + b = 6$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^8 f(x) dx = 9$, $\int_4^{12} f(x) dx = 3$, $\int_4^8 f(x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_1^{12} f(x) dx.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 7$

$$\text{Ta có: } I = \int_1^{12} f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx + \int_8^{12} f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx + \int_4^{12} f(x) dx - \int_4^8 f(x) dx = 9 + 3 - 5 = 7.$$

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $P = 4$

$$\text{Ta có } \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 7 - 3 = 4.$$

Câu 44. Giả sử $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^5 f(z) dz = 9$. Tổng $I = \int_1^3 f(t) dt + \int_3^5 f(t) dt$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 6$

$$\int_0^1 f(x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = 3 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt = -3$$

$$\int_0^5 f(z) dz = 9 \Leftrightarrow \int_0^5 f(t) dt = 9$$

$$\Rightarrow \int_1^0 f(t) dt + \int_0^5 f(t) dt = 6 \Leftrightarrow \int_1^5 f(t) dt = 6$$

$$I = \int_1^3 f(t) dt + \int_3^5 f(t) dt = \int_1^5 f(t) dt = 6$$

CHỦ ĐỀ 4**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP****Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$
- $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$
- $n \cdot f'(x) \cdot f(x) = [f(x)^n]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

- $\frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx$
- $f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x) \cdot h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f'(x)] = \int g(x) \cdot dx$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải:

• $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

• $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$

3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}; x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x)dx$

- A. $I = \frac{7}{6}$. B. $I = \frac{5}{6}$. C. $I = \frac{37}{6}$. D. $I = \frac{1}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(1) = 0$, tính tích phân $I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x)dx$.

- A. 1. B. $\frac{1}{2024}$. C. 2024. D. 0.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$

với $\forall x \in [1;4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x)dx$

- A. $I = \frac{1186}{45}$. B. $I = \frac{1186}{9}$. C. $I = \frac{1186}{5}$. D. $I = \frac{1186}{41}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_1^2 f(x)dx$

- A. $I = e^2 + 1$. B. $I = e - 1$. C. $I = e^2 - e$. D. $I = e$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính $I = \int_2^3 f(x)dx$

- A. $I = \frac{31}{2}$. B. $I = -\frac{31}{2}$. C. $I = \frac{61}{4}$. D. $I = -\frac{61}{4}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Tính $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- A. $I = 2\sqrt{e}$ B. $I = e - \sqrt{e}$ C. $I = 2e - 2\sqrt{e}$ D. $I = 2e + 2\sqrt{e}$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 f^2(x) dx.$$

A. $I = \frac{15}{2}$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{19}{2}$.

D. $I = 15$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 8.

C. 10.

D. 4.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$.

Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{160}{15}$

B. $\frac{268}{15}$

C. $\frac{4}{15}$

D. $\frac{268}{30}$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)**Ý tưởng giải:**

♦ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x).h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$$

♦ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$

Phương pháp giải:

♦ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

♦ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

- A. $I = 2 \ln 2$. B. $I = \ln 2$. C. $I = 1 + \ln 2$. **D. $I = 1 + 2 \ln 2$.**

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Tính } I = \int_1^2 (2x+2)f(x) dx.$$

- A. $I = e^2$. B. $I = 1 + e$. C. $I = 1 + e^2$. **D. $I = e^2 - e$.**

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

- A. $I = 1$.** B. $I = \frac{\pi}{2}$. C. $I = -1$. D. $I = -\pi$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$,

$f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

- A. $\frac{25}{6}$. B. $\frac{25}{3}$. **C. $\frac{17}{6}$.** D. $\frac{17}{3}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$$[2f(x) + 1 - x^2]f'(x) = 2x[1 + f(x)], \quad \forall x \in [0; 1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. 2. **C. $\frac{1}{3}$.** D. $\frac{3}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \quad \forall x \in [0; 1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{1}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$, $\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$.

B. $\frac{1}{2019.2020}$.

C. $\frac{1}{2020.2021}$.

D. $\frac{1}{2019.2021}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn
$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$$

với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Câu 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn
$$\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$$
 với mọi

$x \in [1;4]$. Tính tích phân $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)]dx$.

A. $3\ln 2$.

B. $4\ln 2$.

C. $6\ln 2$.

D. $8\ln 2$.

Câu 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x) + 2017x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1;2].$$

Tính tích phân $I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) \right]dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ đồng thời thỏa } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x)dx$$

A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$.

B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$.

C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$.

D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$

và có $f(2) = 1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. 4

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x+1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Giá}$$

trị của $a-b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$;

$f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x - 1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của

$a + b^2$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

CHỦ ĐỀ 4**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP****Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$
- $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$
- $n \cdot f'(x) \cdot f(x) = [f(x)^n]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

- $\frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx$
- $f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x) \cdot h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f'(x)] = \int g(x) \cdot dx$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải:

• $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

• $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$

3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{f(x)} = -\int (2x+1)dx = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + C}.$$

$$\text{Do } f(0) = -1 \Rightarrow C = -1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

$$\int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx = -\int_0^1 (x^3 - 1)\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)dx = \int_0^1 (1 - x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}; x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$$\forall x \in [1; 2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x)dx$$

- A. $I = \frac{7}{6}$. B. $I = \frac{5}{6}$. C. $I = \frac{37}{6}$. D. $I = \frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 = 1 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

$$\text{Do đó: } I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx = \int_1^2 (2x+1)^2 \frac{x}{2x+1} dx = \int_1^2 (2x^2 + x) dx = \frac{37}{6}$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(1) = 0, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx.$$

- A. 1. B. $\frac{1}{2024}$. C. 2024. D. 0.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x$$

$$\Rightarrow \left(e^{f^3(x)} \right)' = 2x$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = x^2 + C$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = 0 \Rightarrow e^{f^3(1)} = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = x^2 \Rightarrow f^3(x) = \ln x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2 \ln x}$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot \sqrt[3]{2 \ln x} dx = \int_0^{2024} dx = 2024$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$

$$\text{với } \forall x \in [1; 4]. \text{ Biết } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ tính } I = \int_1^4 f(x) dx$$

- A. $I = \frac{1186}{45}$. B. $I = \frac{1186}{9}$. C. $I = \frac{1186}{5}$. D. $I = \frac{1186}{41}$.

Lời giải

Chọn A.

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 4] \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$

Ta có $x + 2x.f(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2.f(x)) = [f'(x)]^2$, do $x \in [1; 4]$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{-1}{2} \text{ và}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1 + 2f(x)})' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \int \sqrt{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c$$

$$\text{Vì } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2f(x) = \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{3} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18} \right) dx = \left(\frac{1}{18} x^4 + \frac{16}{45} x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{18} x \right) \Big|_1^4 = \frac{1186}{45}$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tính } I = \int_1^2 f(x) dx$$

A. $I = e^2 + 1$.

B. $I = e - 1$.

C. $I = e^2 - e$.

D. $I = e$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x$$

$$\text{Do đó: } I = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } I = \int_2^3 f(x) dx$$

A. $I = \frac{31}{2}.$

B. $I = -\frac{31}{2}.$

C. $I = \frac{61}{4}.$

D. $I = -\frac{61}{4}.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 = -27 [f(x) - 1]^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^4} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^3 [f(x) - 1]} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x) - 1) \sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x) - 1) \sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó } \int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Có } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = 1 - x^3.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (1 - x^3) dx = -\frac{61}{4}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

$$\text{Tính } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $I = 2\sqrt{e}$

B. $I = e - \sqrt{e}$

C. $I = 2e - 2\sqrt{e}$

D. $I = 2e + 2\sqrt{e}$

Lời giải

Chọn C.

Có

$$(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = e^x$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = e^x + C$$

$$\text{Từ } f(0) = f'(0) = 1. \text{ Suy ra } C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) \cdot f'(x) = e^x$$

Tiếp đến có:

$$2f(x) \cdot f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = e^x$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f^2(x) = e^x + C$$

$$\text{Từ } f(0) = 1. \text{ Suy ra } C = 0.$$

$$\text{Vậy } f^2(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x} \text{ (do } f(x) > 0)$$

$$I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{e^x} dx = \int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_1^2 = 2e - 2\sqrt{e}$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 f^2(x) dx.$$

A. $I = \frac{15}{2}$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{19}{2}$.

D. $I = 15$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x$.

Suy ra $f(x)f'(x) = x^2 + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 2$ suy ra $C = 1$.

$\Rightarrow f(x)f'(x) = x^2 + 1$

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2(x^2 + 1)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2(x^2 + 1) dx$

$\Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$

cũng vì $f(0) = 2$ suy ra $C = 2$

$\Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2$.

$I = \int_1^2 f^2(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2 \right) dx = \frac{15}{2}$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 8.

C. 10.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Theo giả thiết, $\forall x \in \mathbb{R} : (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \quad (1).$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x).f'(x) dx = \int_0^1 (3x^5 + 6x^2 + 1) dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} f^2(x) \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} x^6 + 2x^3 + x \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1) - 1 = 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8.$$

Vậy $f^2(1) = 8$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in R$ và $f(0) = f'(0) = 2$.

Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{160}{15}$

B. $\frac{268}{15}$

C. $\frac{4}{15}$

D. $\frac{268}{30}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow (f'(x).f(x))' = x^3 - 2x, \forall x \in R$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $\int (f'(x).f(x))' dx = \int (x^3 - 2x) dx \Leftrightarrow f'(x).f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$

Theo đề ra ta có: $f'(0).f(0) = C = 4$

$$\text{Suy ra: } \int_0^2 f'(x).f(x).dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}.$$

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

♦ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x).h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$$

♦ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ Bước 1: Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ Bước 2: Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

♦ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

♦ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

A. $I = 2 \ln 2$.

B. $I = \ln 2$.

C. $I = 1 + \ln 2$.

D. $I = 1 + 2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$$f(x) + f'(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = (x + 2 \ln|x|) \Big|_1^2 = 1 + 2 \ln 2$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

Tính $I = \int_1^2 (2x+2)f(x) dx$.

A. $I = e^2$.

B. $I = 1 + e$.

C. $I = 1 + e^2$.

D. $I = e^2 - e$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)] + [(x+1)f(x)]' = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \left[e^x (x+1) f(x) \right]' = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int \left[e^x (x+1) f(x) \right]' dx = \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow e^x (x+1) f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$$

$$I = \int_1^2 (2x+2) \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1} dx = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in R \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{\pi}{2}$.

C. $I = -1$.

D. $I = -\pi$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Từ giả thiết } f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

$$\text{Mặt khác: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$,

$f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\frac{25}{6}$.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Xét phương trình } 2xf'(x) + f(x) = 2x \text{ (1) trên } (0; +\infty): (1) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{2x} \cdot f(x) = 1 \text{ (2)}.$$

Đặt $g(x) = \frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x) dx = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x + C = \ln \sqrt{x} + C$. Ta chọn $G(x) = \ln \sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \sqrt{x} \quad (3).$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4 (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x)) \Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{17}{6} \quad (\text{vì } f(1) = 1).$$

$$\text{Vậy } f(4) = \frac{17}{6}.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$, $\forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$

$$\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2x + (x^2 - 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f^2(x)]' = [x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)]'$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x) + C \quad (1).$$

Thay $x = 1$ vào (1) ta được: $f^2(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$ (vì $f(1) = 1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 1 = x^2 - 1 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - 1] \cdot [f(x) + 1] = (x^2 - 1) \cdot [f(x) + 1]$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = x^2 - 1 \quad (\text{vì } f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in [0;1])$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{1}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Có } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow -4 \int_0^1 xf'(x) dx = -8 + 4 \int_0^1 f(x) dx. \quad (2)$$

$$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được } \int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.$$

$$\text{Có } f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$,

$\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$.

B. $\frac{1}{2019.2020}$.

C. $\frac{1}{2020.2021}$.

D. $\frac{1}{2019.2021}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) \geq x^{2020} \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow (x^3 f(x))' \geq x^{2020}, \forall x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow x^3 f(x) \geq \int x^{2020} dx, \forall x \in [0;1] \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021} + C, \forall x \in [0;1].$$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021}, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021}, \forall x \in [0;1].$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019.2021} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019.2021}.$$

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn
$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$$

với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$$f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cho } y=0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Do đó } f(x) = x^3 + x + 1.$$

$$\Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 + x-1+1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x-1)dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1)dx = \frac{1}{4}.$$

Câu 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn
$$\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases} \text{ với mọi}$$

$$x \in [1;4]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^4 [f(x) + g(x)]dx.$$

A. $3 \ln 2$.

B. $4 \ln 2$.

C. $6 \ln 2$.

D. $8 \ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Từ giả thiết ta có } f(x) + g(x) = -x.f'(x) - x.g'(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) + x.f'(x)] + [g(x) + x.g'(x)] = 0 \Leftrightarrow [x.f(x)]' + [x.g(x)]' = 0$$

$$\Rightarrow x.f(x) + x.g(x) = C$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{C}{x}$$

$$\text{Mà } f(1) + g(1) = 4 \Rightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = \int_1^4 \frac{4}{x}dx = 8 \ln 2$$

Câu 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2017x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1;2].$$

$$\text{Tính tích phân } I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx.$$

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Lời giải**Chọn A**

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} g(x) - \frac{x+1}{x} f'(x) = -2017 \\ \frac{x}{x+1} g'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 2018 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

Suy ra:

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2} g(x) + \frac{x}{x+1} g'(x) \right] - \left[\frac{x+1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} g(x) \right]' - \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x + C.$$

Mà $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x - 1$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx = \int_1^2 (x - 1) dx = \frac{1}{2}.$$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = x f'(x) - 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ đồng thời thỏa } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx$$

A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$.

B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$.

C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$.

D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Lời giải**Chọn D.**

Ta có
$$x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = x f'(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf(x) + 1)'$$

Do đó

$$\frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} dx = \int 1 dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + c$$

$$\Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+c}$$

Mặt khác $f(1) = -2$ nên $-2 + 1 = -\frac{1}{1+c} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

Vậy $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$

và có $f(2) = 1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x$$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) = 2f^2(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) + f^2(x) = 3f^2(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (x.f^2(x))' dx = 3 \int_0^2 f^2(x)dx - \int_0^2 2x dx$$

$$\Leftrightarrow (x.f^2(x))\Big|_0^2 = 3I - 4$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3I - 4$$

$$\Leftrightarrow I = 2$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Giá}$$

trị của $a - b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f^2(x)}{2} + 6x^3 = (3x^2 + x)f(x)$

$$\Rightarrow f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) + 12x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

TH1: $f(x) = 6x^2$ không thỏa mãn kết quả $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$

TH2: $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$. Suy ra $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}$

Vậy $a - b = 1$

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$;

$f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của

$a + b^2$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Từ $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2.$$

$$\text{Hay } \int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C \quad (2).$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$.

$$\text{Thay vào (2) ta được } \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}.$$

Khi đó: $\int_e^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$, nên $a + b^2 = 0$.

Cách khác

Từ $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)' = (x-1)^2.$$

$$\text{Nên } -\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)' dx = \int (x-1)^2 dx$$

$$\Rightarrow -\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 d\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right) = \int (x-1)^2 dx$$

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = \frac{1}{3} (x-1)^3 + C \quad (2).$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = 0$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=-(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int\limits_e^3\frac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_e^3=-\ln 3+1\Rightarrow a=-1, b=1$, nên $a+b^2=0$.

CHỦ ĐỀ 5**ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN**

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

$\Rightarrow$ từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t \in [a; b]$ là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10\text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.



- A. 55 m . B. 25 m . C. 50 m . D. 16 m .

Câu 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20\text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?



- A. 20 m . B. 30 m . C. 10 m . D. 40 m .

Câu 3. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t\text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 21 (m/s) B. 25 (m/s) C. 36 (m/s) D. 30 (m/s)

Câu 4. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi

quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển

động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 15 (m/s) B. 20 (m/s) C. 16 (m/s) D. 13 (m/s)

Câu 5. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a \text{ (m/s)}$, ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .



- A. $v_0 = 35 \text{ m/s}$. B. $v_0 = 25 \text{ m/s}$. C. $v_0 = 10 \text{ m/s}$. D. $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

Câu 6. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- A. 33. B. 12. C. 31. D. 32.

Câu 7. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A. 70,25 m. B. 68,25 m. C. 67,25 m. D. 69,75 m.

Câu 8. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- A. 136m. B. 126m. C. 276m. D. 216m.

Câu 9. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. $\frac{2500}{3}(m)$. B. $2000(m)$. C. $500(m)$. D. $\frac{4000}{3}(m)$.

Câu 10. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được $5s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 96,25$ (m). B. $S = 87,5$ (m). C. $S = 94$ (m). D. $S = 95,7$ (m).

Câu 11. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12(m/s^2)$. Tính quãng đường $s(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

- A. $s = 168(m)$. B. $s = 166(m)$. C. $s = 144(m)$. D. $s = 152(m)$.

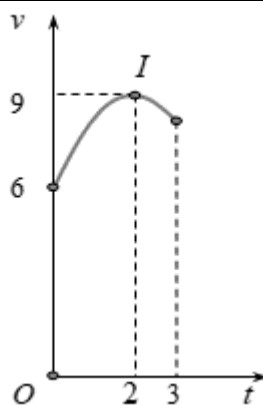
Câu 12. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- A. $18m$. B. $36m$. C. $22,5m$. D. $6,75m$.

Câu 13. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

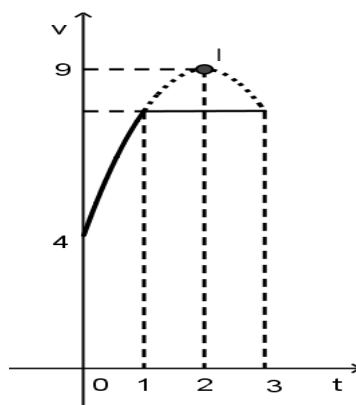
- A. $15(m/s)$ B. $10(m/s)$ C. $7(m/s)$ D. $22(m/s)$

Câu 14. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



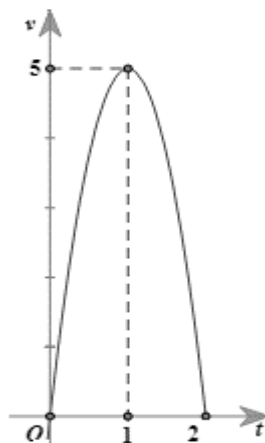
- A. $s = 25,25(\text{km})$ B. $s = 24,25(\text{km})$ **C. $s = 24,75(\text{km})$** D. $s = 26,75(\text{km})$

Câu 15. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km}/\text{h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A. $s = 21,58(\text{km})$** B. $s = 23,25(\text{km})$ C. $s = 13,83(\text{km})$ D. $s = 15,50(\text{km})$

Câu 16. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc $v(\text{km}/\text{h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



- A. 2,11km. B. 6,67km. **C. 5,63 km.** D. 5,63km.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 18. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 19. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

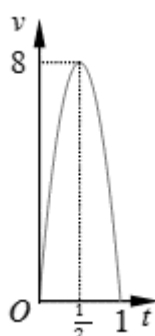
Trả lời:

Câu 20. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



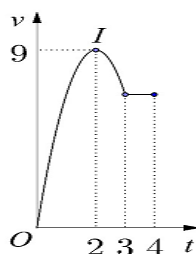
Trả lời:

Câu 21. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



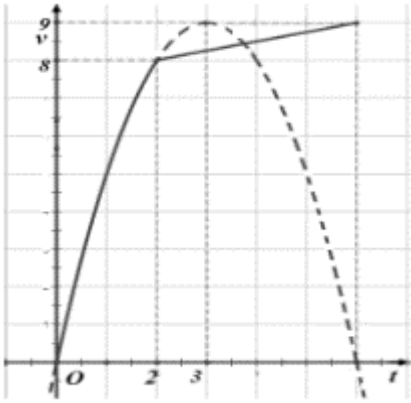
Trả lời:

Câu 22. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



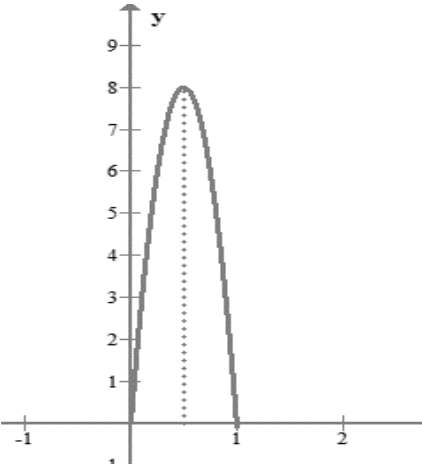
Trả lời:

Câu 23. Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



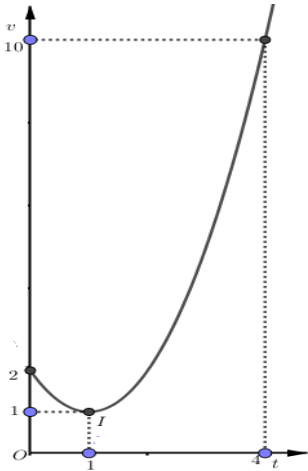
Trả lời:

Câu 24. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



Trả lời:

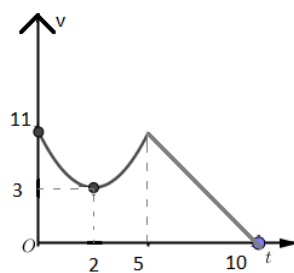
Câu 25. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



Trả lời:

Câu 26. Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi

$0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Cho đỉnh Parabol là $I(2, 3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Trả lời:

CHỦ ĐỀ 5**ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN**

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

$\Rightarrow$ từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t \in [a; b]$ là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

**A.** $55m$.**B.** $25m$.**C.** $50m$.**D.** $16m$.**Lời giải****Chọn A**

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55m$.

Câu 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

**A.** $20m$.**B.** $30m$.**C.** $10m$.**D.** $40m$.**Lời giải****Chọn D**

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40(m)$.

Câu 3. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $21(m/s)$ B. $25(m/s)$ C. $36(m/s)$ D. $30(m/s)$

Lời giải

Chọn D

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30(m/s)$.

Câu 4. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $15(m/s)$ B. $20(m/s)$ C. $16(m/s)$ D. $13(m/s)$

Lời giải

Chọn C

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là $S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a (m)$.

$$\text{Vậy } 72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2).$$

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16 (m/s)$.

Câu 5. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a (m/s)$, ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .



A. $v_0 = 35 m/s$.

B. $v_0 = 25 m/s$.

C. $v_0 = 10 m/s$.

D. $v_0 = 20 m/s$.

Lời giải

Chọn C

- Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$$v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15, \text{ suy ra } v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$$

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80 = 6 \cdot v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15 \right) dt$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0 \cdot t + 15t \right) \Big|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0 \cdot (k - 6) + 15(k - 6)$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \cdot \frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36v_0 - 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_0 = 10$$

Câu 6. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm

phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33 .

B. 12 .

C. 31 .

D. 32 .

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $v_A(0) = 16 \text{ m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m.

Câu 7. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. 70,25 m .

B. 68,25 m .

C. 67,25 m .

D. 69,75 m .

Lời giải**Chọn D**

$$a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Mà } v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15.$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75 \text{ m}.$$

Câu 8. Một vật chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m .

B. 126m .

C. 276m .

D. 216m .

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } v(0) = 10 \text{ m/s và } v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

$$\text{Quãng đường vật đi được là } S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}.$$

Câu 9. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. $\frac{2500}{3}(m)$. B. $2000(m)$. C. $500(m)$. D. $\frac{4000}{3}(m)$.

Lời giải

Chọn A

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ là $v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$s = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t \right) \Big|_0^{10} = \frac{2500}{3}(m).$$

Câu 10. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được $5s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 96,25$ (m). B. $S = 87,5$ (m). C. $S = 94$ (m). D. $S = 95,7$ (m).

Lời giải

Chọn A

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau $5s$ ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35(m/s)$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5s$.

$$\text{Quãng đường ô tô đi được là } S = \int_0^5 7t dt + \int_5^{5,5} [35 - 70(t - 5)] dt = 96,25(m).$$

Câu 11. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12(m/s^2)$. Tính quãng đường $s(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

- A. $s = 168(m)$. B. $s = 166(m)$. C. $s = 144(m)$. D. $s = 152(m)$.

Lời giải

Chọn A

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là:

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144(m).$$

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t) = \int a dt = -12t + c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (m/s)}$.

$$\Rightarrow -12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24.$$

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (-12t + 24) dt = \left(-6t^2 + 24t \right) \Big|_0^2 = 24 \text{ (m)}.$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S = S_1 + S_2 = 168 \text{ (m)}$.

Câu 12. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t \text{ (m/s}^2\text{)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động.

Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. 18m.

B. 36m.

C. 22,5m.

D. 6,75m.

Lời giải

Chọn A

$$a(t) = 6 - 2t \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow v(t) = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2 + C$$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t = 0$ thì $v = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 6t - t^2$.

$$v(t) = 6t - t^2 \text{ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi } t = -\frac{b}{2a} = 3 \text{ (s)}$$

$$\text{Quãng đường xe đi trong 3 giây đầu là: } S = \int_0^3 (6t - t^2) dt = 18 \text{ m}.$$

Câu 13. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15(m/s)

B. 10(m/s)

C. 7(m/s)

D. 22(m/s)

Lời giải

Chọn A

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc

$$\text{đó là } \int_0^{15} v(t)dt = \int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \right) dt = \left(\frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 \right) \Big|_0^{15} = 75(m).$$

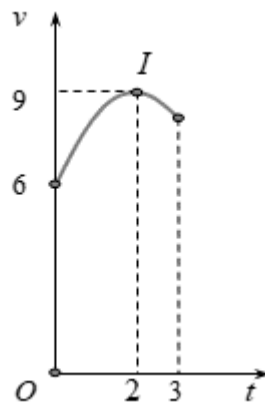
Vận tốc của chất điểm B là $y(t) = \int a \cdot dt = at + C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)dt = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} a \cdot t dt = 75 \Leftrightarrow \frac{a \cdot t^2}{2} \Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y(t) = \frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10) = 15(m/s)$.

Câu 14. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 25,25(\text{km})$

B. $s = 24,25(\text{km})$

C. $s = 24,75(\text{km})$

D. $s = 26,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn C

Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$.

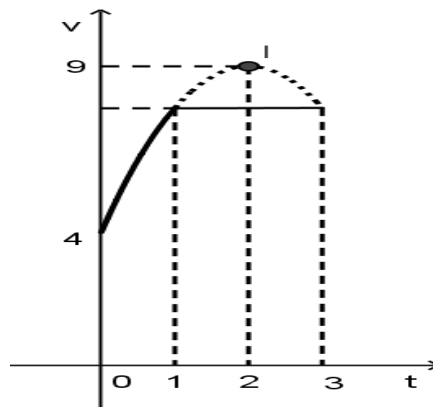
Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases} \text{ . Tìm được } v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = 24,75 (\text{km})$$

Câu 15. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của

đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 21,58(km)$

B. $s = 23,25(km)$

C. $s = 13,83(km)$

D. $s = 15,50(km)$

Lời giải

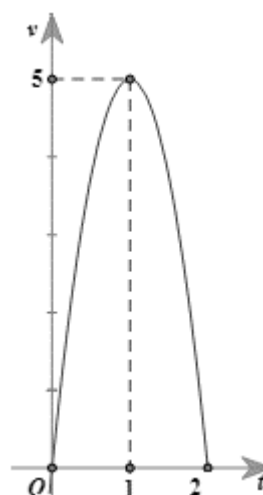
Chọn A

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583$

Câu 16. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. 2,11km.

B. 6,67 km.

C. 5,63 km.

D. 5,63 km.

Lời giải

Chọn C

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S = \int_0^{1,5} v(t) dt$.

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v = v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$

$$S = \int_0^{1,5} (-5t^2 + 10t) dt = \frac{45}{8} \approx 5,63.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 12m

Lấy mốc thời gian ($t = 0$) là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int_0^2 (-6t + 12) dt = \left(-3t^2 + 12t \right) \Big|_0^2 = 12 \text{ (m)}.$$

Câu 18. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 10m

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 19. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 25 (m/s)

Ta có $v_B(t) = \int a \cdot dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at \cdot dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$ (m/s).

Câu 20. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 105 mét.

Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là $s_1 = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t) = 35 - 35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

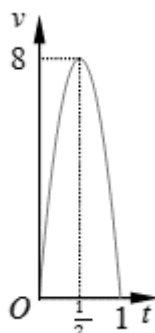
Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$$s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) dt = \left(35t - 35 \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 17,5 \text{ (mét)}.$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

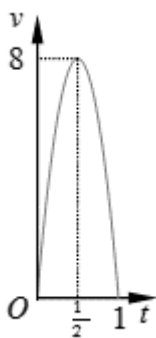
$$s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105 \text{ (mét)}.$$

Câu 21. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $s = 4,5$ (km)

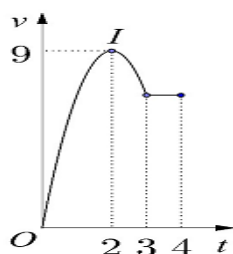
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32x^2 + 32x) dx = 4,5$ (km).

Câu 22. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $s = 28,5$ (km)

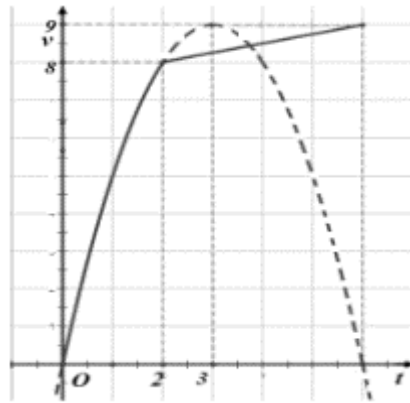
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = -\frac{9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x \right) dx + \int_3^4 \frac{27}{4} dx = 27 \text{ (km)}.$

Câu 23. Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{130}{3}(\text{km})$

+ Vì Parabol đi qua $O(0; 0)$ và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là

$$(P): y = v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0; 2]$$

+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \frac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm

có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \frac{15}{2}$.

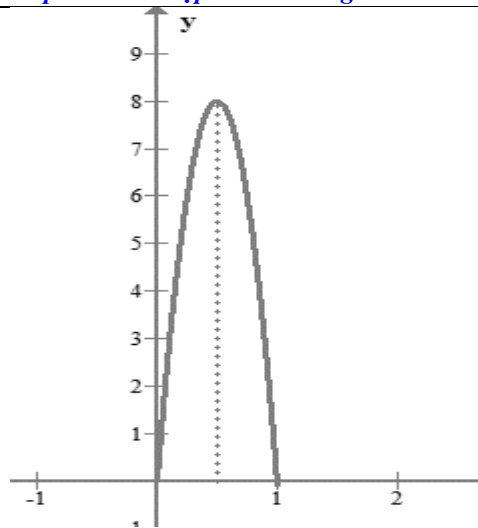
Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}; \forall t \in [2; 6]$

+ Quãng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 (-t^2 + 6t) dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2} \right) dt = \frac{130}{3}(\text{km})$$

Câu 24. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ.

Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4,5 (km).

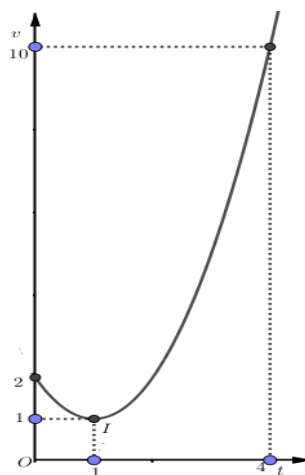
Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c = 8 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là $S = \int_0^{\frac{45}{60}} (32t - 32t^2) dt = 4,5 \text{ (km)}$.

Câu 25. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $s = \frac{40}{3}$ (km).

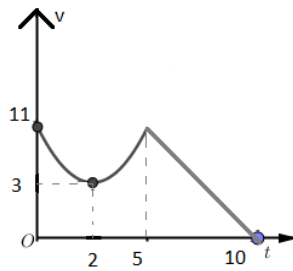
Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c = 2 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2.$$

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

$$\text{Từ đó } s = \int_0^4 (t^2 - 2t + 2) dt = \frac{40}{3} (km).$$

Câu 26. Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t) (m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Cho đỉnh Parapol là $I(2, 3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{545}{6} m$

Gọi Parapol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \leq t \leq 5(s)$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(2; 3); A(0; 11)$ nên

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases}.$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 5(s)$ là

$$S = \int_0^5 (2x^2 - 8x + 11) dx = \frac{115}{3} (m)$$

Ta có $f(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5; 21)$ và $C(10; 0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a + b = 21 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{21}{5} \\ b = 42 \end{cases}.$$

Khi đó quãng đường vật đi chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \leq t \leq 10(s)$ là

$$S = \int_5^{10} \left(-\frac{26}{5}x + 52 \right) dx = \frac{105}{2} (m)$$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là $S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6}$.