

Câu 1. (4,0 điểm) Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{5x+3} \cdot \sqrt{2x-1}}{x-1}$

Câu 2. (4,0 điểm) Một công ty tuyển dụng nhân viên với hợp đồng 10 năm và nhân viên được chọn trả lương theo 1 trong 2 phương án sau:

Phương án 1: Lương khởi điểm 8 triệu đồng /1 tháng và cứ sau 1 quý (1 quý = 3 tháng) lương sẽ tăng thêm 500.000 đồng / 1 tháng so với lương tháng của quý trước đó

Phương án 2: Lương khởi điểm 8 triệu đồng /1 tháng và cứ sau 1 quý (1 quý = 3 tháng) lương sẽ tăng thêm 5% so với lương tháng của quý trước đó.

Hỏi khi kết thúc hợp đồng thì nhân viên nhận tổng tiền lương phương án nào nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu?

Câu 3. (4,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Tính

a) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SC .

b) Gọi α số đo của góc nhị diện $[A, SC, B]$. Tính $\cos \alpha$.

Câu 4. (4,0 điểm) Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh phải và 2 động cơ bên cánh trái. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09; mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,05. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu có ít nhất 2 động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.

Câu 5. (4,0 điểm) Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành 2 đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài theo đơn vị m của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất.

----- HẾT -----

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:Số báo danh:.....

Chữ kí của giám thị 1:Chữ kí của giám thị 2:.....

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG KHỐI 12

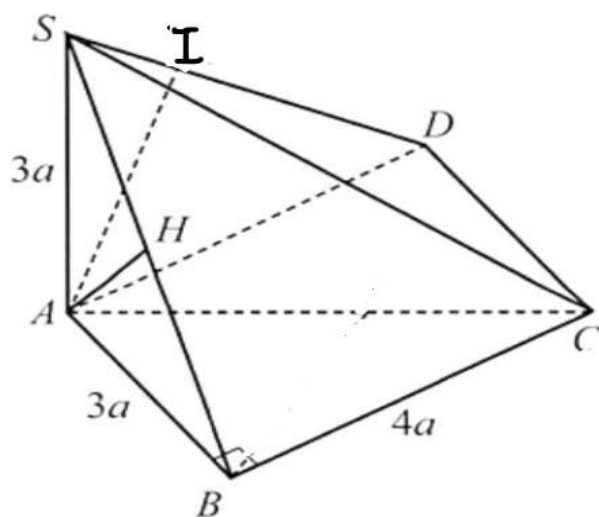
Câu	Đáp án	Điểm
1	Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{5x+3} \cdot \sqrt{2x-1}}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{64 - (5x+3)^2 (2x-1)^3}{(x-1)(32 + 16\sqrt[3]{5x+3}\sqrt{2x-1} + \dots (\sqrt[3]{5x+3}\sqrt{2x-1})^5)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-20^4 - 140x^3 - 2x^2 - 49x - 73}{32 + \sqrt[3]{5x+3}\sqrt{2x-1} + \dots (\sqrt[3]{5x+3}\sqrt{2x-1})^5} = -29/12$	4,0 điểm
2	Một công ty tuyển dụng nhân viên với hợp đồng 10 năm và nhân viên được chọn trả lương theo 1 trong 2 phương án sau: Phương án 1: lương khởi điểm 8 triệu đồng /1 tháng và cứ sau 1 quý (1 quý = 3 tháng) lương sẽ tăng thêm 500000 đồng / 1 tháng so với lương tháng của quý trước đó Phương án 2: lương khởi điểm 8 triệu đồng /1 tháng và cứ sau 1 quý (1 quý = 3 tháng) lương sẽ tăng thêm 5% so với lương tháng của quý trước đó. Hỏi khi kết thúc hợp đồng thì nhân viên nhận tổng tiền lương phương án nào nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu. Đáp án Tổng tiền phương án 1: $S = \frac{40(2.24 + 39.1.5)}{2} = 2130 \text{ triệu}$ Tổng tiền phương án 2: $S = \frac{24(1 - 1.05^{40})}{1 - 1.05} = 2899,194582 \text{ triệu}$ Vậy phương án 2 nhiều hơn $2899,194582 - 2130 = 769,1945818$ triệu	4,0 điểm

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Tính

a) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SC .

b) Gọi α số đo của góc nhị diện $[A, SC, B]$. Tính $\cos \alpha$.

Đáp án



3

a)

Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Gọi I là hình chiếu của A trên $SD \Rightarrow AI \perp SD$.

Vì $AB \perp BC \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CD \perp AD$, mà $CD \perp SA$

Suy ra $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp AI$. Do đó, $AI \perp (SDC)$.

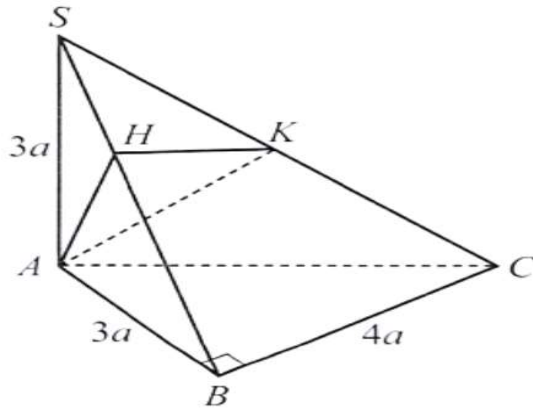
Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AI$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có: $AI = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{3a \cdot 4a}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = 2,4a$.

Vậy $d(AB, SC) = 2,4a$.

b)

4,0
điểm



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC .

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Mà $SC \perp AK$ nên $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK$.

$\Rightarrow$ Góc $\widehat{AKH}$ là góc phẳng nhị diện của $[A, SC, B]$, hay $\widehat{AKH} = \alpha$.

Ta có: ΔSAB vuông tại A có: $AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{3a \cdot 3a}{3a\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

ΔSAC vuông tại A có: $AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{3a \cdot 5a}{\sqrt{(3a)^2 + (5a)^2}} = \frac{15a}{\sqrt{34}}$.

ΔAHK vuông tại H (vì $AH \perp (SBC)$ mà $HK \subset (SBC)$)

$$\Rightarrow HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{15a}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{6a}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \cos \widehat{AKH} = \frac{HK}{AK} = \frac{\frac{6a}{\sqrt{17}}}{\frac{15a}{\sqrt{34}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

4	Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh phải và 2 động cơ bên cánh trái . Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09; mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,05. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu có ít nhất 2 động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn. Đáp án +) Gọi A là biến cố máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn $\Rightarrow \bar{A}$ biến cố máy bay thực hiện được chuyến bay không an toàn, $\bar{A}$ xảy ra các TH sau: +) TH1: Cả 5 động cơ đều bị hỏng $\Rightarrow P_1(\bar{A}) = (0,09)^3 \cdot (0,05)^2$ +) TH2: Có 1 động cơ ở cánh phải hoạt động, các động cơ còn lại đều bị hỏng $\Rightarrow P_2(\bar{A}) = (0,09)^2 \cdot 0,91 \cdot (0,05)^2$ +) TH3: Có 1 động cơ ở cánh trái hoạt động, các động cơ còn lại đều bị hỏng $\Rightarrow P_3(\bar{A}) = (0,09)^3 \cdot (0,05) \cdot 0,95$ $\Rightarrow P(\bar{A}) = P_1(\bar{A}) + P_2(\bar{A}) + P_3(\bar{A}) = (0,09)^3 \cdot (0,05)^2 + (0,09)^2 \cdot 0,91 \cdot (0,05)^2 + (0,09)^3 \cdot (0,05) \cdot 0,95$ Do đó $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,9999451225$	4 điểm
5	Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành 2 đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài theo đơn vị m của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất. Gọi l ($0 < l < 28$) là chiều dài đoạn dây làm thành hình vuông. Khi đó đoạn dây làm hình tròn có chiều dài là $28 - l$ Cạnh của hình vuông là $\frac{l}{4}$, bán kính hình tròn là $\frac{28-l}{2\pi}$ Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn: $S(l) = \frac{l^2}{16} + \frac{1}{4\pi}(28-l)^2 \Rightarrow S'(l) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi}(28-l)$	4 điểm

	$S'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \frac{112}{4 + \pi}$ Lập BBT ta có S đạt GTNN bằng $\frac{196}{4 + \pi}$ khi $l = \frac{112}{4 + \pi}$	
--	--	--