

Đề:

Câu 1: (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng -1.

Câu 2: (1 điểm)

1. Cho góc $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ có $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$.
2. Giải phương trình: $\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) = 1 + \log_3(4-x)$

Câu 3: (0.5 điểm) Cho số phức z thỏa: $(1-i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = z + 2\bar{z}$.

Câu 4: (1 điểm) Tính tích phân sau: $I = \int_1^e 2x(2x^2 + \ln x)dx$.

Câu 5: (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích hình chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ A đến mặt (SBC) .

Câu 6: (1 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 2)$, $C(2; 0; 5)$, $D(0; 2; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa A và B và đi qua trung điểm của đoạn CD .

Câu 7: (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;5)$, trực tâm $H(3;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(4;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Câu 8: (1 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = 4(x+y) \\ (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-y})\sqrt{2xy+18} = 5(x-3) \end{cases}$$

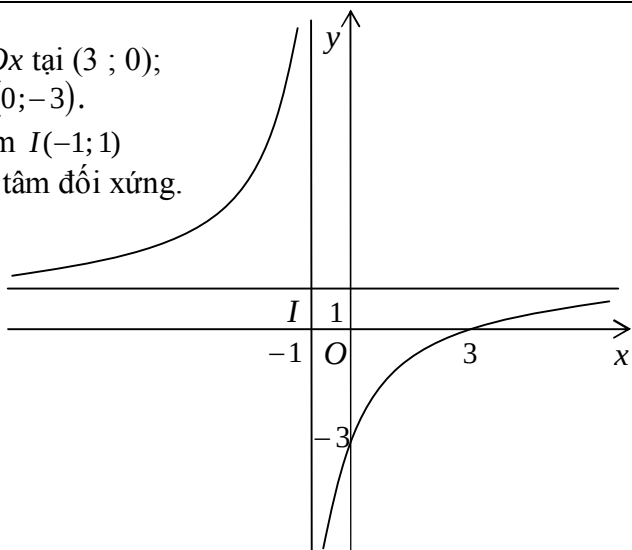
Câu 9: (0.5 điểm) Có 20 thẻ đựng trong 2 hộp khác nhau, mỗi hộp đựng 10 thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp một thẻ). Tính xác suất lấy được 2 thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn.

Câu 10: (1 điểm) Cho ba số thực a, b, c thỏa $0 \leq a < b \leq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} + \frac{a+b+c}{(a+b)c} + 2\sqrt{a+b+c}.$$

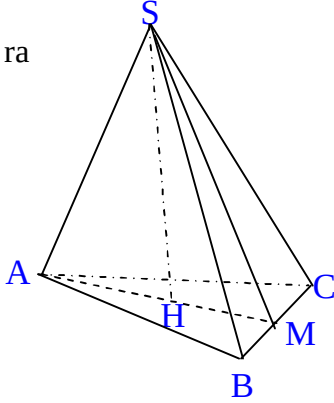
----- **HẾT** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Câu	Đáp án	Điểm																								
Câu 1 (2 đ)	1. (1điểm)																									
	a. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.																									
	b. Sự biến thiên:																									
	* Chiều biến thiên: Ta có $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$.	0,25 đ																								
	Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, hàm số không có cực trị.																									
	* Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$	0,25 đ																								
	Suy ra đồ thị có tiệm cận ngang là $y = 1$ và tiệm cận đứng là $x = -1$.																									
	* Bảng biến thiên																									
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$		-1		$+\infty$	y'		$-$		$-$		y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$						1	0,25 đ
	x	$-\infty$		-1		$+\infty$																				
y'		$-$		$-$																						
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$																					
					1																					
* Đồ thị: Đồ thị cắt Ox tại $(3; 0)$; cắt Oy tại $(0; -3)$. Đồ thị nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.		0,25đ																								
2. (1 điểm)																										
Giả sử $M(a; -1) \in (C)$, ta có: $\frac{a-3}{a+1} = -1 \Leftrightarrow a = 1$		0,25 đ																								
Suy ra $y'(1) = \frac{4}{(1+1)^2} = 1$.		0,25 đ																								
Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là:																										
$y = y'(1)(x - 1) + (-1)$ hay $y = x - 2$.		0,5 đ																								

Câu 2 (1 đ)	1. (0.5 điểm) Vì $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Do đó: $A = \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha - 1 + 2\sin^2 \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - 1 + \frac{2}{9} = -\frac{7 + 4\sqrt{2}}{9}$	0,25 đ
	2. (0.5 điểm) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 4$, ta có : $\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) = 1 + \log_3(4 - x) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3(x - 2) = \log_3[3(4 - x)]$ $\log_3[x(x - 2)] = \log_3[3(4 - x)] \Leftrightarrow x(x - 2) = 3(4 - x) \Leftrightarrow x^2 + x - 12$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$ Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = 3$.	0,25 đ
	Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có: $(1 - i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$ trở thành: $(1 - i)(a + bi) + 2i(a - bi) = 5 + 3i \Leftrightarrow a + 3b + (a + b)i = 5 + 3i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$	0,25đ
	Suy ra $w = z + 2\bar{z} = 2 + i + 4 - 2i = 6 - i$. Vậy số phức w có phần thực bằng 6, phần ảo bằng -1.	0,25đ
Câu 4 (1 đ)	$I = \int_1^e 2x(2x^2 + \ln x)dx = \int_1^e 4x^3 dx + \int_1^e 2x \cdot \ln x dx$	0,25đ
	$\int_1^e 4x^3 dx = x^4 \Big _1^e = e^4 - 1$	0,25đ
	Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 \end{cases}$, ta có: $\int_1^e 2x \cdot \ln x dx = \left[x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e x dx = e^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{2}$	0,25đ
	Vậy $I = e^4 - 1 + \frac{e^2 + 1}{2} = \frac{2e^4 + e^2 - 1}{2}$	0,25đ

Câu 5 (1 đ)	Theo giả thiết $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$, $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a$ $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $S_{SBC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{39}}{6} a = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}$ $d(A, (SBC)) = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$ 	0,25 đ 0,25 đ 0,25đ 0,25đ
Câu 6 (1 đ)	Gọi I là trung điểm của đoạn CD, suy ra I(1;1;3) $\overrightarrow{AI} = (0; 0; 2)$ suy ra (P) nhận $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI} = (2; -2; 0)$ làm vector pháp tuyến Do (P) đi qua A(1;1;1) nên phương trình mp(P) là: $1(x-1)-1(y-1) = 0$ Hay $x-y=0$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
Câu 7 (1 đ)	<u>Cách 1:</u> Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, M là trung điểm BC. Ta có $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ (đường thẳng Ô-le), suy ra $G\left(\frac{11}{3}; \frac{7}{3}\right)$ Vì $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM}$ nên $M(4;1)$. Đường thẳng BC qua M nhận $\overrightarrow{AH} = (0; -2)$ làm VTPT nên có phương trình: $y = 1$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm là I, có bán kính $IA = \sqrt{10}$ nên có phương trình $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$. Tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ y = 1 \end{cases}$. Giải hệ với chú ý $x_B < 3$, ta thu được $B(1;1)$ và $C(7;1)$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

	<u>Cách 2:</u> Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm là I, có bán kính $IA = \sqrt{10}$ nên có phương trình $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$. Phương trình đường cao AH: $x=3$ nên phương trình đường thẳng BC có dạng $y=b$. Tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ y=b \end{cases}$. vì $x_B < 3$ nên giải hệ ta được: $B\left(4 - \sqrt{10 - (b-2)^2}; b\right)$, $C\left(4 + \sqrt{10 - (b-2)^2}; b\right)$ suy ra $\overrightarrow{AC} = \left(1 + \sqrt{10 - (b-2)^2}; b-5\right)$, $\overrightarrow{BH} = \left(-1 + \sqrt{10 - (b-2)^2}; 3-b\right)$ Vì $BH \perp AC$ nên $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 10 - (b-2)^2 - 1 + (b-5)(3-b) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=5 \end{cases}$. * Với $b=1$ ta có B(1;1) và C(7;1) nhận. * Với $b=5$ ta có B(3;5) nên loại.	
Câu 8 (1 đ)	Ta có $\sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} = \sqrt{(3x+y)^2 + (x-y)^2} \geq 3x+y$, dấu bằng xảy ra khi $x=y$ và $3x+y \geq 0$. Tương tự $\sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = \sqrt{(x+3y)^2 + (x-y)^2} \geq x+3y$, dấu bằng xảy ra khi $x=y$ và $x+3y \geq 0$. Do đó $\sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = 4(x+y)$ khi $x=y$ và $x+y \geq 0$	0,25đ
	Thay $y=x$ vào phương trình thứ 2 ta được: $\left(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x}\right)\sqrt{2x^2+18} = 5(x-3) \quad (\text{điều kiện } 0 \leq x \leq 4)$ $\Leftrightarrow (5x-15)\sqrt{2x^2+18} = 5(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x}\right)$ $\Leftrightarrow (5x-15)\left(\sqrt{2x^2+18} - \left(\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x}\right)\right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{2x^2+18} = \sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x} \end{cases} \quad (1)$ Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 18 = 17 - 3x + 4\sqrt{(x+1)(4-x)}$ $\Leftrightarrow (x+1)(2x+1) - 4\sqrt{(x+1)(4-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x+1}(2x+1) - 4\sqrt{4-x} = 0 \end{cases} \quad (2)$ $(2) \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 + 21x - 63 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(4x^2 + 14x + 42) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ Tóm lại hệ có 3 nghiệm: $(-1;-1)$, $(3;3)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.	0,25đ
		0,25đ
Câu 9 (0.5 đ)	Rút 2 thẻ từ hai hộp (mỗi hộp một thẻ), không gian mẫu có số phần tử là: $10 \cdot 10 = 100$ Gọi $\bar{A}$ là biến cố nhận được 2 thẻ có tích hai số ghi trên 2 thẻ là số lẻ, ta có A là biến cố nhận được 2 thẻ có tích hai số ghi trên 2 thẻ là số chẵn. Số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là $5 \cdot 5 = 25$ (vì mỗi hộp có 5 thẻ lẻ). Suy ra xác suất cần tìm là: $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$	0,25đ
Câu 10 (1 đ)	Ta có: $P = \frac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} + \frac{a+b+c}{(a+b)c} + 2\sqrt{a+b+c}$	

$= \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} + 2\sqrt{a+b+c}$ Vì $0 \leq a < b \leq c$ nên: $a^2 + b^2 \leq ab + b^2 \leq \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$ dấu bằng xảy ra khi $a = 0$. Tương tự: $a^2 + c^2 \leq \left(\frac{a}{2} + c\right)^2$ dấu bằng xảy ra khi $a = 0$. Nên: $P \geq \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + b\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + c\right)^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} + 2\sqrt{a+b+c}$ dấu bằng xảy ra khi $a = 0$	0,25đ												
Áp dụng các bất đẳng thức: với $x > 0, y > 0$ ta có: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2}$ dấu bằng xảy ra khi $x = y$. (phải chứng minh) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x = y$. Ta có: $P \geq \frac{8}{(a+b+c)^2} + \frac{4}{a+b+c} + 2\sqrt{a+b+c}$	0,25đ												
Đặt $t = \sqrt{a+b+c}$ với $t > 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{8}{t^4} + \frac{4}{t^2} + 2t$ với $t > 0$. Ta có: $f'(t) = -\frac{32}{t^5} - \frac{8}{t^3} + 2 = \frac{2t^5 - 8t^2 - 32}{t^5}$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^5 - 8t^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow 2(t-2)(t^4 + 2t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2$	0,25đ												
Bảng biến thiên: <table><tr><td>t</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(t)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f(t)</td><td></td><td>$\frac{11}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Suy ra $P \geq \frac{11}{2}$, dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} t = \sqrt{a+b+c} = 2 \\ a = 0, b = c \\ a+b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c = 2 \end{cases}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{11}{2}$.	t	0	2	$+\infty$	f'(t)	-	0	+	f(t)		$\frac{11}{2}$	$+\infty$	0,25đ
t	0	2	$+\infty$										
f'(t)	-	0	+										
f(t)		$\frac{11}{2}$	$+\infty$										

--- HẾT ---