NHÂN TỬ LAGRANGE GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ - ÔN THI THPT QUỐC GIA

Admin Blog Toán học – Kinh nghiệm học toán

*Trong ngành tối ưu hóa, **phương pháp nhân tử Lagrange** (đặt theo tên của nhà toán học Joseph Louis Lagrange) là một phương pháp để tìm cực tiểu hoặc cực đại địa phương của một hàm số chịu các điều kiện giới hạn. Phương pháp này chúng ta sẽ được học trong chương trình toán cao cấp của bậc đại học. Trên Internet đã có một vài bài viết nói về phương pháp này để chứng minh bất đẳng thức nhưng tuy nhiên vẫn còn tương đối nhiều bạn vẫn chưa biết đến phương pháp này. Do đó ở bài viết này mình sẽ đưa ra một ứng dụng khác của nó ngoài việc chứng minh bất đẳng thức ra thì nó còn là một công cụ khá là hữu hiệu giải quyết nhanh một số bài toán cực trị trong đề thi thử THPT Quốc Gia hiện nay đồng thời cũng giúp ích cho một số bạn còn hơi yếu về bất đẳng thức tham khảo!*

I. GIỚI THIỆU VỀ PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Khi gặp một bài toán mà chúng ta gặp điều kiện của hàm $f(x,y)$ với điều kiện ràng buộc là $g(x,y)=0$. Để tìm cực trị của hàm này khi có điều kiện ràng buộc ta sẽ đi thiết lập hàm *Lagrange:*

$$Z_{(x,y,\lambda)}=f(x,y)+\lambda.g(x,y)$$

Trong đó λ là một hằng số chưa xác định, gọi là nhân tử *Lagrange.*

Điều kiện *cần* của cực trị là hệ phương trình sau: $\begin{cases} Z_x'(x,y,\lambda)=f_x'(x,y)+\lambda g_x'(x,y)=0 \\ Z_y'(x,y,\lambda)=f_y'(x,y)+\lambda g_y'(x,y)=0 \\ Z_\lambda'(x,y,\lambda)=g(x,y)=0 \end{cases}$

Khi giải hệ phương trình này ta sẽ được bộ số (x_0,y_0,λ_0) là nghiệm của hệ điểm dừng. Khi đó ta sẽ so sánh $f(x_0,y_0)$ với $f(x_1,y_1)$ - trong đó (x_1,y_1) là một bộ số khác thỏa mãn điều kiện $g(x,y)=0$ mà thông thường sẽ là các giá trị biên – để kiểm tra xem điểm dừng là cực đại hay cực tiểu. Để hiểu rõ hơn ta sẽ đi vào các ví dụ minh họa.

II. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Bài 1: Cho x,y,z không âm thỏa mãn $x+y+z=\frac{1}{9}$. Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2y^2+3z^3$. Khi đó $\frac{M}{n}$ có giá trị là:

A. $\frac{27}{7}$ **B.** $\frac{81}{7}$ **C.** $\frac{27}{14}$ **D.** $\frac{81}{14}$

Hướng dẫn

Đầu tiên ta sẽ đi thiết lập hàm *Lagrange* như phần giới thiệu mình đã nói. Ta có:

$$Z(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^3+\lambda\left(x+y+z-\frac{1}{9}\right)$$

Điểm cực trị sẽ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x-\lambda=0 \\ 4y-\lambda=0 \\ 9z^2-\lambda=0 \\ x+y+z=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{2}{81};\dfrac{1}{81};\dfrac{2}{27};\dfrac{4}{81}\right)$

Khi đó thay vào biểu thức ban đầu ta sẽ được $P=\dfrac{14}{6561}$

Tiếp theo như mình đã nói ta sẽ đi so sánh giá trị này với các giá trị đặc biệt khác cụ thể ở đây sẽ là các giá trị biên. Các giá trị biên ở đây sẽ là $x=0, y=0, z=0, (x,y)=(0,0)$,$(y,z)=(0,0)$,$(z,x)=(0,0)$.

- Trường hợp 1: $z=0 \Rightarrow x+y=\dfrac{1}{9}$. Hàm *Lagrange* lúc này sẽ là:

$$Z(x,y,0)=x^2+2y^2-\lambda\left(x+y-\frac{1}{9}\right)$$

Điểm cực trị sẽ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-\lambda=0 \\ 4y-\lambda=0 \\ x+y=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{27} \\ y=\dfrac{1}{27} \\ z=\dfrac{4}{27} \end{cases}$

Khi đó giá trị của $P=\dfrac{2}{243}$.

Tương tự xét với các trường hợp còn lại ta sẽ được $P\in\left\{\dfrac{1}{81};\dfrac{2}{81};\dfrac{1}{243};\dfrac{11-6\sqrt{3}}{243};\dfrac{46-32\sqrt{2}}{243}\right\}$.

So sánh tất cả ta sẽ được $\begin{cases} \min P=m=\dfrac{14}{6561} \\ \max P=M=\dfrac{2}{81} \end{cases}$. Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{81}{7} \Rightarrow$ Chọn ý **A.**

Nhận xét:

Các bạn có thể nhận thấy rằng với cách làm này ta không hề cần phải tư duy nhiều về việc sử dụng các đánh giá bất đẳng thức như AM – GM hay Cauchy – Schwarz mà chỉ việc lập hệ rồi bấm máy CALC các giá trị đặc biệt từ đó suy ra đáp án, rất ảo diệu và đơn giản phải không nào. Nhưng tuy nhiên bài toán này mình lấy hơi khó một tẹo điểm cực trị đạt tại biên – dễ nhận thấy điều này bằng cách để ý giả thiết không âm – chứ như mình thấy thông thường trong các đề thi thử THPT Quốc gia sẽ ít khi cho đến mức thế này chủ yếu là giải hệ cực trị là đã ra kết quả rồi nên, tuy nhiên không thể biết trước được điều gì cả ☺ ta cứ làm cẩn thận cho chắc ăn ☺ . Để thấy rõ hơn sức mạnh của phương pháp này ta sẽ tìm hiểu tiếp ví dụ sau.

Bài 2 : Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+(z-1)^2=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+11}$

Đề thi thử THPT Quốc gia 2016/2017 THPT Thăng Long – Hà Nội

A. $-3+\sqrt{10}$ **B.** $3-\sqrt{5}$ **C.** $2\sqrt{7}-3$ **D.** $-3+\sqrt{11}$

Phân tích

Với bài toán này ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức trong căn là được.

Thiết lập hàm *Lagrange* ta sẽ được:

$$Z(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+11+\lambda\left(x^2+y^2+(z-1)^2-9\right)$$

Khi đó điểm cực trị là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-6+2x\lambda=0\\2y-2+2y\lambda=0\\2z-2+\lambda(2z-2)=0\\x^2+y^2+(z-1)^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3-x}{x}=\dfrac{1-y}{y}\\z=1\\x^2+y^2+(z-1)^2=9\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3y\\z=1\\x^2+y^2+(z-1)^2=9\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9\sqrt{10}}{10};y=\dfrac{3\sqrt{10}}{10};z=1\\x=\dfrac{-9\sqrt{10}}{10};y=\dfrac{-3\sqrt{10}}{10};z=1\end{array}\right.$$

Sử dụng máy tính cầm tay ta dễ thấy điểm cực tiểu bằng $0,1622776602\approx-3+\sqrt{10}$.

Vậy chọn đáp án **A.**

Nhận xét.

Ở bài này như mình đã nói thì theo kinh nghiệm trong các đề thi thử sẽ không cho đến mức các cực trị đạt tại biên như bài đầu tiên mà chỉ cần giải hệ cực trị là ra kết quả, tuy nhiên để đánh giá biên sẽ là rất khó đối với bài 3 biến này nên ta sẽ coi như cực trị sẽ đạt tại nghiệm của hệ điểm rơi.

Bài 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3$. Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$ là:

Đề thi thử THTT lần 8

A. 3 **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{13}$ **D.** 5

Hướng dẫn

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$

Biến đổi giả thiết ta được $|z^2+1|=3|z|\Leftrightarrow(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2=9(a^2+b^2)$

Đặt $(a^2,b^2)=(x,y)\,(x,y\ge0)$ ta sẽ chuyển bài toán về tìm min, max của $T=x+y$ với x,y thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+2xy-7x-11y+1=0$

Thiết lập hàm *Lagrange* ta được:

$$Z(x,y)=x+y+\lambda\left(x^2+y^2+2xy-7x-11y+1\right)$$

Khi đó điểm cực trị là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}1+\lambda(2x+2y-7)=0\\1+\lambda(2y+2x-11)=0\end{cases}$. Không khó để nhận ra hệ này vô nghiệm. Vậy chắc chắn điểm rơi của bài toán đạt được tại biên.

- Cho $x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}\\y=\dfrac{11-3\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow T\in\left\{\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2};\dfrac{11-3\sqrt{13}}{2}\right\}$
- Cho $y=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow T\in\left\{\dfrac{7+\sqrt{5}}{2};\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Đến đây dễ dàng tìm được $\begin{cases} \min T = \dfrac{11-3\sqrt{13}}{2} \\ \max T = \dfrac{11+3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$.

Vậy $\min|z| + \max|z| = \sqrt{\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}} + \sqrt{\dfrac{11-3\sqrt{13}}{2}} = \sqrt{13} \Rightarrow$ Chọn ý **C**

Bài 4: Trong các nghiệm (x,y) thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$

A. $\dfrac{9}{4}$ **B.** $\dfrac{9}{2}$ **C.** $\dfrac{9}{8}$ **D.** 5

Giải

Bất phương trình tương đương: $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2y^2 \ge 1 \\ 2x+y \ge x^2+2y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2y^2 \le 1 \\ 0 < 2x+y \le x^2+2y^2 \end{cases} \end{array} \right.$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2+2y^2 \le 1 \\ 0 < 2x+y \le x^2+2y^2 \end{cases}$. Ta dễ thấy rằng $2x+y \le x^2+2y^2 \le 1$
- Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2+2y^2 \ge 1 \\ 2x+y \ge x^2+2y^2 \end{cases}$. Ta luôn có đánh giá sau:

$$x^2+2y^2 \le 2x+y \Leftrightarrow x^2-2x+1+\left(\sqrt{2}y\right)^2 - 2.\sqrt{2}y.\frac{1}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \le \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \le \frac{9}{8}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta lại có:

$$2x+y = 2(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{9}{4} \le \left(2^2 + \frac{1}{2}\right)\left((x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right) + \frac{9}{4} \le \frac{9}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x,y) = \left(2;\dfrac{1}{2}\right)$

Nhận xét

Ở bài toán này ta sẽ sử dụng *Lagrange* để giải quyết trường hợp 2. Do chắc chắn đẳng thức sẽ xảy ra nên ta sẽ cố định $2x+y = x^2+2y^2$.

Thiết lập hàm lagrange. Do ta cần tìm cực trị nên có thể cho luôn $2x+y = x^2+2y^2$ để tìm cho dễ. Hàm của ta như sau:

$$f(x,y) = 2x+y-\lambda\left(2x+y-x^2-2y^2\right)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x+y=x^2+2y^2 \\ f'_x=2-2\lambda+2x\lambda=0 \\ f'_y=1-\lambda+4y\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{1-x} \\ \lambda=\dfrac{1}{1-4y} \\ 2x+y=x^2+2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4y \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Thay điểm cực trị vào biểu thức đầu dễ thấy nó bằng $\frac{9}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{9}{2}$

Bài 5 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA=y$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM=x$. Biết rằng $x^2+y^2=a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp S.ABCM

Chuyên Hưng Yên – Lần 2

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn

Độ dài đoạn $MD=a-x$.

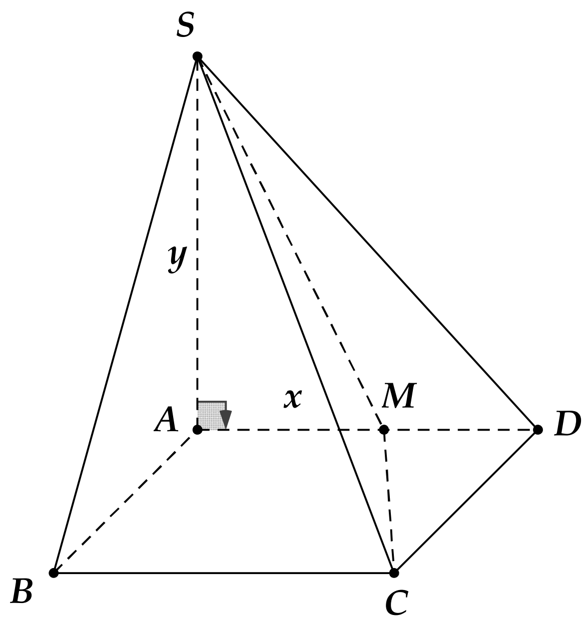
Diện tích tứ giác AMCB là:

$$S=S_{ABCD}-S_{MCD}=a^2-\frac{1}{2}a(a-x)=\frac{1}{2}(a^2+ax)$$

Khi đó thể tích của khối chóp S.ABCM là:

$$V=\frac{1}{3}.SA.S_{AMCB}=\frac{1}{6}y(a^2+ax)$$

Đến đây ta sẽ gặp khó khăn khi đi đánh giá biểu thức trên. Nếu dùng AM – GM thì ta sẽ phải đi cân bằng hệ số, còn nếu dùng *Lagrange* thì mọi chuyện đơn giản hơn rất nhiều!



Thiết lập hàm *Lagrange* – Coi $a=\text{const}$ - ta có:

$$Z(x,y)=a^2y+axy+\lambda(x^2+y^2-a^2)$$

Khi đó điểm cực trị của hàm số sẽ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} ay+2x\lambda=0 \\ a^2+ax+2y\lambda=0 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{a+x}{y} \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=x^2+ax \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-a^2+ax=0 \\ y^2=x^2+ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy $V_{max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow$ Chọn ý **D.**

Bài 6 : Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+5i|=5, |z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1-z_2|$ là

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{5}{2}$

Hướng dẫn

*Đây là một bài toán khá hay được giải bằng phương pháp hình học hóa, nhưng ở đây ta sẽ tiếp cận nó theo hướng sử dụng nhân tử **Lagrange!***

Đặt $z_1=a+bi, z_2=c+di\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} a^2+(b+5)^2=25 \\ (c+1)^2+(d-3)^2=(c-3)^2+(d-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b+5)^2=25 \\ 8c+6d=35 \end{cases}$

Đến đây ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

Thiết lập hàm *Lagrange* ta có:

$$Z(a,b,c,d)=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd+\lambda_1\left(a^2+(b+5)^2-25\right)+\lambda_2(8c+6d-35)$$

Điểm cực trị sẽ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a-2c+2a\lambda_1=0 \\ 2b-2d+(2b+10)\lambda_1=0 \\ 2c-2a+8\lambda_2=0 \\ 2d-2b+6\lambda_2=0 \\ a^2+(b+5)^2=25 \\ 8c+6d=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cb+5c-5a=ad \\ 3c-3a-4d+4b=0 \\ a^2+(b+5)^2=25 \\ 8c+6d=35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{35-6d}{8} \\ (35-6d)b+5(35-6d)-40a=8ad \\ a^2+(b+5)^2=25 \\ 105-24a-50d+32b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-8 \\ c=\dfrac{26}{5} \\ d=-\dfrac{11}{10} \end{cases} \vee \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=\dfrac{26}{5} \\ d=-\dfrac{11}{10} \end{cases}$$

Thay vào biểu thức ban đầu dễ thấy $\min|z_1-z_2|=\frac{3}{2} \Rightarrow$ Chọn ý **B.**

Bài 7: Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi *m,M* lần lượt là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

Đề thi minh họa THPT Quốc Gia 2017 lần 3 – Bộ GD&ĐT

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$ **B.** $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ **C.** $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **D.** $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$

Hướng dẫn

*Thứ gì thì cũng có điểm yếu của nó cả, phương pháp này cũng không ngoại lệ. Bài toán này là điển hình cho thấy nhược điểm của nhân tử **Lagrange** khi áp dụng cho một vài vài bài toán cực trị đạt tại biên, để hiểu rõ ta sẽ cùng tiến hành bắt tay vào làm nó!*

Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có:

$$\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}=6\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow (a+2)^2+(b-1)^2=72-12\sqrt{2}\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}+(a-4)^2+(b-7)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab+6a-6b+9=0(*)$$

Ta có: $|z-1+i|=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2a+2b+2}$

Thiết lập hàm *Lagrange* ta có:

$$Z(a,b)=a^2+b^2-2a+2b+2+\lambda\left(a^2+b^2-2ab+6a-6b+9\right)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2a-2+\lambda(2a-2b+6)=0\\2b+2+\lambda(2b-2a-6)=0\\a^2+b^2-2ab+6a-6b+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a-b+6}{1-a}=\dfrac{b-a-6}{-1-b}\\a^2+b^2-2ab+6a-6b+9=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2+6a+6b=0\\a^2+b^2-2ab+6a-6b+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-b\\a+6=b\end{array}\right.\\a^2+b^2-2ab+6a-6b+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Đến đây ta mới chỉ tìm được một cực trị của bài toán, vậy còn một cực trị nữa chắc chắn sẽ đạt tại biên, vậy tìm giá trị biên như thế nào? Nếu bạn nào tinh ý sẽ nhận ra rằng phương trình $(*)$ có nghiệm kép $a=b-3$ điều này chứng tỏ rằng

$$\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}\ge 6\sqrt{2}.$$

Để chứng minh điều này ta sẽ có nhiều cách có thể là tọa độ hóa hoặc đánh giá đại số hoặc bất đẳng thức, ở bài viết này mình sẽ sử dụng bất đẳng thức *Mincowsky.* Ta có:

$$\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}\ge\sqrt{(a+2+4-a)^2+(b-1+7-b)^2}=6\sqrt{2}$$

Dấu của bất đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{a+2}{b-1}=\dfrac{4-a}{7-b}\\(a+2)(4-a)\ge 0\\(b-1)(7-b)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le a\le 4\\1\le b\le 7\\a=b-3\end{cases}$.

Đến đây đã tìm được giá trị biên của các biến.

Cho $\begin{cases}a=-2\Rightarrow b=1\\a=4\Rightarrow b=7\end{cases}$ và ngược lại. Vậy ta sẽ tính giá trị của biểu thức cần tìm tại các giá trị trên ta sẽ tìm được $\max|z-1+i|=\sqrt{73}$. Vậy từ đó chọn đáp án **B.**

Tóm lại việc sử dụng phương pháp nhân tử *Lagrange* cho bài toán này là không hay, nếu như đã phát hiện ta $\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}\ge 6\sqrt{2}$ thì ta chỉ việc rút thế điểm rơi rồi đạo hàm tìm min, max thì sẽ nhanh hơn rất nhiều chứ không mất thời gian để lập hệ rồi giải nó. Do đó việc nắm chắc một chút kiến thức mở rộng về bất đẳng thức là điều nên làm để có thể linh hoạt hơn trong việc giải các bài toán khó!

LỜI KẾT: Hy vọng qua bài viết này mọi người đã phần nào hiểu được nội dung của phương pháp mà mình muốn nhắc tới trong bài viết để áp dụng giải một số bài toán hay hơn nữa. Bài viết này tuy mình đã bỏ ra một số thời gian chuẩn bị nhưng không thể tránh khỏi những thiếu xót, mong các bạn bỏ qua. Mọi ý kiến thắc mắc vui lòng gửi về fanpage của mình – *Blog Toán học – Kinh nghiệm học toán .* Rất cảm ơn mọi người đã quan tâm tới bài viết!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. *Phương pháp nhân tử Lagrange - Method of Lagrange Multipliers – Trần Trung Kiên, VMF.*

[2]. Lagrange Multipliers.

[3]. A. Salih - Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram – September 2013 - Method of Lagrange Multipliers

[4]. S. Jamshidi - Multivariate Calculus; Fall 2013 - Lagrange Multipliers

[5]. Tiếp cận phương pháp và vận dụng trắc nghiệm trong bài toán thực tế - Trần Công Diêu

[6]. Nâng cao kỹ năng giải toán trắc nghiệm 100% dạng bài Mũ – Logarit, Số phức.