

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A. LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai của một phức

Định nghĩa

Cho số phức w . Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w

Tìm căn bậc hai của số phức w

- w là số thực.
 - Nếu $w < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $i\sqrt{-w}$ và $-i\sqrt{-w}$
 - Nếu $w \geq 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{w}$ và $-\sqrt{w}$
- $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $b \neq 0$

Nếu $z = x + iy$ là căn bậc hai của w thì $(x + iy)^2 = a + bi$

Do đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Mỗi nghiệm của hệ phương trình cho ta một căn bậc hai của w

2. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$)

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm

Nhận xét:

+) Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0

+) Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0)

Chú ý:

Mọi phương trình bậc n :

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt) với n nguyên dương.

phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm

1. Phương pháp giải

Cho phương trình:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

- Giải phương trình bậc hai với hệ số thực
- Áp dụng các phép toán trên tập số phức

để biến đổi biểu thức

Ví dụ: Xét phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

a) Giải phương trình trên tập số phức

b) Tính $|z_1| + |z_2|$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là:

$$z_1 = 2 + 2i; \quad z_2 = 2 - 2i$$

b) Ta có $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\text{Suy ra } |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong các số sau, số nào là nghiệm của phương trình $z^2 + 1 = z \quad (z \in \mathbb{C})$?

A. $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

B. $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1 + \sqrt{2}i}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } z^2 + 1 = z \quad (z \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow z^2 - 2z \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3i^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ z - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

Bài tập 2. Phương trình $z^2 + az + b = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$ có nghiệm phức là $3 + 4i$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 31

B. 5

C. 19

D. 29

Hướng dẫn giải

Chọn C

Chú ý: Nếu z_0 là

Cách 1: Do $z = 3 + 4i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên ta có: $(3 + 4i)^2 + a(3 + 4i) + b = 0 \Leftrightarrow (3a + b - 7) + (4a + 24)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b - 7 = 0 \\ 4a + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 25 \end{cases}$

Do đó $a + b = 19$

ng nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình

Cách 2: Vì $z_1 = 3 + 4i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên $z_2 = 3 - 4i$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Áp dụng hệ thức Vi-ét vào phương trình trên ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 \cdot z_2 = b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3 + 4i) + (3 - 4i) = -a \\ (3 + 4i)(3 - 4i) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 25 \end{cases} \Rightarrow a + b = 19$$

Bài tập 3. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 34 = 0$. Giá trị của $|z_0 + 2 - i|$ là

- A. $\sqrt{17}$ B. 17 C. $2\sqrt{17}$ D. $\sqrt{37}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

ra có $\Delta' = -25 = (5i)^2$. Phương trình có hai nghiệm là $z = -3 + 5i$; $z = -3 - 5i$

Do đó $z_0 = -3 + 5i \Rightarrow |z_0 + 2 - i| = |-1 + 4i| = \sqrt{17}$

Bài tập 4. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

Tọa độ điểm biểu diễn số phức $\frac{7 - 4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức là

- A. $P(3; 2)$ B. $N(1; -2)$ C. $Q(3; -2)$ D. $M(1; 2)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$

Theo yêu cầu của bài toán ta chọn $z_1 = 1 - 2i$. Khi đó:

$$\frac{7 - 4i}{z_1} = \frac{7 - 4i}{1 - 2i} = \frac{(7 - 4i)(1 + 2i)}{1^2 + 2^2} = 3 + 2i$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức là $P(3; 2)$

Bài tập 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009}

B. 2^{1010}

C. 0

D. -2^{1010}

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$

Khi đó ta có: $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019} = (1 + i)^{2019} + (1 - i)^{2019}$

$= (1 + i) \cdot ((1 + i)^2)^{1009} + (1 - i) \cdot ((1 - i)^2)^{1009}$

$= (1 + i) \cdot (2i)^{1009} + (1 - i) \cdot (-2i)^{1009}$

$= (2i)^{1009} ((1 + i) - (1 - i)) = (2i)^{1010} = (i^2)^{505} \cdot 2^{1010} = -2^{1010}$

Dạng 2: Định lí Vi-ét và ứng dụng

1. Phương pháp giải

Định lí Vi-ét: Cho phương trình:

$$az^2 + bz + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

có hai nghiệm phức z_1, z_2 thì $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Ví dụ: Phương trình $z^2 - 4z + 24 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 nên

$$z_1 + z_2 = 4; z_1 \cdot z_2 = 24$$

Chú ý: Học sinh hay nhầm lẫn: $z_1 + z_2 = \frac{b}{a}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 14

B. -9

C. -6

D. 7

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = 5 \end{cases}$

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 2^2 - 2 \cdot 5 = -6$

Bài tập 2: Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm là $1 + 2i$?

Chúng ta có thể giải từng

- A. $z^2 - 2z + 3 = 0$ B. $z^2 + 2z + 5 = 0$
 C. $z^2 - 2z + 5 = 0$ D. $z^2 + 2z + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình bậc hai có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau nên phương trình bậc hai có nghiệm $1 + 2i$ thì nghiệm còn lại là $1 - 2i$

Khi đó tổng và tích của hai nghiệm lần lượt là 2; 5

Vậy số phức $1 + 2i$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

phương trình:

$$+) z^2 - 2z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)^2 = 2i^2$$

$$\Leftrightarrow z - 1 = \pm i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$+) z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + 1)^2 = 4i^2$$

$$\Leftrightarrow z + 1 = \pm 2i$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \pm 2i$$

$$+) z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)^2 = 4i^2$$

$$\Leftrightarrow z - 1 = \pm 2i$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \pm 2i$$

$$+) z^2 + 2z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + 1)^2 = 2i^2$$

$$\Leftrightarrow z + 1 = \pm i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Bài tập 3: Kí hiệu z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = |z_1 z_2 + i(z_1 + z_2)|$$

- A. $P = 1$ B. $P = \frac{7}{2}$ C. $P = \sqrt{3}$ D. $P = \frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } P = |z_1 z_2 + i(z_1 + z_2)| = \left| \frac{3}{2} + i(-2) \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} \right)^2 + (-2)^2} = \frac{5}{2}$$

Bài tập 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình **Cách khác:**

Ta có:

$z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $P = z_1^3 + z_2^3$ bằng

A. -20

B. 20

C. $14\sqrt{7}$

D. $28\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 \cdot z_2 = 7 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2) \\ &= (z_1 + z_2)((z_1 + z_2)^2 - 3z_1 z_2) \\ &= 4.(4^2 - 3.7) = -20 \end{aligned}$$

$$z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2)^2 = 3i^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - \sqrt{3}i \\ z_2 = 2 + \sqrt{3}i \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (2 - \sqrt{3}i)^3 + (2 + \sqrt{3}i)^3 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Bài tập 5: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1|z_2| + z_2|z_1|$ bằng

A. 2

B. 6

C. $3\sqrt{6}$

D. $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = \frac{2}{3}$ và $z_1 \cdot z_2 = 9$

$$\text{Mà } |z_1| = |z_2| = \sqrt{|z_1||z_2|} = \sqrt{|z_1 \cdot z_2|} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Do đó } z_1|z_2| + z_2|z_1| = z_1 \cdot 3 + z_2 \cdot 3 = 3(z_1 + z_2) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

Bài tập 6: Cho số thực $a > 2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + a = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $z_1 + z_2$ là số thực

B. $z_1 - z_2$ là số ảo

C. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số ảo

D. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ là số thực

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 2$. Đáp án A đúng

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm là số phức liên hợp. Gọi $z_1 = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $z_2 = x - yi$

Suy ra $z_1 - z_2 = 2yi$ là số ảo. Đáp án B đúng

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{4 - 2a}{a} \in \mathbb{R}$$

Vậy C là đáp án sai và D đúng

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Nắm vững cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức
- Nắm vững cách giải một số phương trình quy về bậc hai, hệ phương trình đại số bậc cao;...

Ví dụ: Giải phương trình: $z^4 - z^2 - 6 = 0$ trên tập số phức.

Hướng dẫn giải

Đặt $z^2 = t$, ta có phương trình:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$

Với $t = 3$ ta có $z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}$

Với $t = -2$ ta có $z^2 = -2 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $z = \pm\sqrt{3}$; $z = \pm i\sqrt{2}$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ là

A. $3\sqrt{2}$

B. $5\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 2z^4 - 3z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

Khi đó, tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình đã cho bằng

$$|\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 3\sqrt{2}$$

Bài tập 2: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng

A. $2 + 2\sqrt{5}$

B. 12

C. 0

D. $2 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } z^4 + 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \\ z^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{cases}$$

Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là: $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = -i\sqrt{5}, z_4 = i\sqrt{5}$

Do đó: $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1^2 + 1^2 + (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 12$

Bài tập 3: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$.

Giá trị của biểu thức $S = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ là

A. $S = 18$

B. $S = 16$

C. $S = 17$

D. $S = 15$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$

Đặt $t = z^2 + z$, ta có $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} z^2 + z - 2 = 0 \\ z^2 + z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -2 \\ z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{23}}{2} \\ z_4 = \frac{-1 - i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$

Suy ra $S = 1^2 + (-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 = 17$

Bài tập 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = -4$. Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 1

B. 4

C. 8

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $z \neq 0$

Ta có: $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{|z|^2}{z}\right)^2 + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{z\bar{z}}{z}\right)^2 + \bar{z} = -4$

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 + \bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$

Vậy $|z_1 + z_2| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \right| = |-1| = 1$

Bài tập 5: Cho số thực a , biết rằng phương trình $z^4 + az^2 + 1 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 thỏa mãn $(z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4) = 441$. Tìm a

A. $\begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{19}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{19}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{19}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{19}{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Nhận xét: $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z + 2i)(z - 2i)$

Đặt $f(x) = z^4 + az^2 + 1$, ta có:

$$(z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4) = \prod_{k=1}^4 (z_k + 2i) \cdot \prod_{k=1}^4 (z_k - 2i) = f(-2i) \cdot f(2i)$$

$$= (16i^4 + 4ai^2 + 1)(16i^4 + 4ai^2 + 1) = (17 - 4a)^2$$

Theo giả thiết, ta có $(17 - 4a)^2 = 441 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{19}{2} \end{cases}$

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2 \leq |z| < 3$

B. $0 \leq |z| < 1$

C. $1 < |z| < 2$

D. $\frac{1}{2} \leq |z| < \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $z^{2017}(11z + 10i) = 11 - 10iz \Leftrightarrow z^{2017} = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \Rightarrow |z|^{2017} = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right|$

Đặt

$$z = a + bi$$

có

$$\left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right| = \left| \frac{11 - 10i(a + bi)}{11(a + bi) + 10i} \right| = \sqrt{\frac{(10b + 11)^2 + 100a^2}{121a^2 + (11b + 10)^2}} = \sqrt{\frac{100(a^2 + b^2) + 220b + 121}{121(a^2 + b^2) + 220b + 100}}$$

Đặt $t = |z|$ ($t \geq 0$) ta có phương trình $t^{2017} = \sqrt{\frac{100t^2 + 220b + 121}{121t^2 + 220b + 100}}$

Nếu $t \geq 1 \Rightarrow VT \geq 1; VP \leq 1$

Nếu $t \leq 1 \Rightarrow VT \leq 1; VP \geq 1$

Nếu $t = 1 \Rightarrow |z| = 1$