

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 2x^2 - 11y + 32 = 3\sqrt[3]{4y-8} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}$.

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Xét một điểm C trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C . Gọi (O_1) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C ; (O_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại C . Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai là D (D khác C).

a) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng OD tại S . Chứng minh OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS .

b) Chứng minh đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đường tròn (O) (tam giác ABC không cân tại C).

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho k là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh $2^{k-1} + 1$ không chia hết cho k .

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p và q thỏa mãn $2^p + 2^q$ chia hết cho $p \cdot q$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và $x \neq 0$.

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho tập hợp X có 2023 phần tử. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn hai tập hợp con khác nhau của X sao cho giao của hai tập hợp này là một tập hợp có đúng một phần tử?

Câu 7. (3,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $y^2 \geq zx, z^2 \geq xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{z}{z+y} + \frac{y}{y+x} + \frac{2022z^{2023}}{z^{2023} + x^{2023}}.$$