

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 1. LŨY THỪA



I LÝ THUYẾT.

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$a^n = a.a \dots a \text{ (} n \text{ thừa số } a \text{)}.$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0: Cho $a \neq 0$. Khi đó

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^0 = 1.$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2. Căn bậc n .

- Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

- Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

- Khi n lẻ, $b \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$.

- Khi n chẵn và:

+ $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b .

+ $b = 0$: Có một căn bậc n của b là $\sqrt[n]{0} = 0$.

+ $b > 0$: Có hai căn bậc n của b ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khi đó

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Một số tính chất của căn bậc n

Với $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

- $\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$
- $\sqrt[n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \forall ab \geq 0$

- $\sqrt[n+1]{ab} = \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n+1]{b}, \forall a, b$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$
- $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0, n \text{ nguyên dương}, m \text{ nguyên}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m \text{ nguyên dương}$
- Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n \text{ nguyên dương}, p, q \text{ nguyên}$

Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ: Cho số thực $a > 0$, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha. \text{ Khi đó } a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

5. Các tính chất

- Cho hai số dương a, b và các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};$$

$$(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha \cdot \beta}.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.
Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH TOÁN

Câu 1

Tính giá trị biểu thức $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}$.

Câu 2

Tính giá trị biểu thức $81^{-0,75} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

Câu 3

Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt{5}} : \sqrt[5]{\sqrt{5}} \right)^{10}}$.

Câu 4

Tính giá trị biểu thức $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[7]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)$.

Câu 5

Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{125} \right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625} \right)^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Câu 6

Tích $(2017)! \left(1 + \frac{1}{1} \right)^1 \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017} \right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b , khi đó (a, b) là bộ số nào?

Câu 7

Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S = \sqrt{2018} [f(-2017) + f(-2016) + \dots + f(0) + f(1) + \dots + f(2018)].$$

Câu 8

Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện dưới đây

$$2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \text{ và } (xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2.$$

DẠNG 2: RÚT GỌN

Câu 1

Cho số thực dương a . Hãy rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$.

Câu 2

Cho số thực dương x . Rút gọn biểu thức: $T = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$.

Câu 3

Cho các số thực dương a và b . Hãy rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} - \sqrt[3]{ab}$.

Câu 4

Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots\sqrt{x}}}}}$ với n dấu căn và x là số thực dương.

Câu 5

Rút gọn biểu thức sau với $a > 0, b > 0, a \neq b$

$$P = \left[\frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \right] \cdot (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a}.$$

DẠNG 3: SO SÁNH CÁC LŨY THỪA

Câu 1

So sánh các số: a. $(\sqrt{2}-1)^{2019}$ và $(\sqrt{2}-1)^{2020}$ b. π^{1015} và $3,14^{1015}$.

Câu 2

So sánh các số: a. 2^{1200} và 3^{900} b. $(\sqrt{7})^{85}$ và 3^{-150} .

Câu 3

So sánh các số : a. $\sqrt[3]{15}$ và $\sqrt[4]{20}$ b. $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Câu 4

Có thể kết luận gì về số a nếu: a. $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$ b. $(1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}$.

Câu 5

Cho $U = 2.2019^{2020}$, $V = 2019^{2020}$, $W = 2018.2019^{2019}$, $X = 5.2019^{2019}$ và $Y = 2019^{2019}$. Trong các số sau đây, số nào bé nhất $X-Y$; $U-V$; $V-W$; $W-X$?

Câu 6

So sánh hai số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$ và $2^{2^{2^2}}$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN CHO CÁC BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

Câu 1

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x) = (2x - 1)^{-\frac{5}{3}}$ có nghĩa.

Câu 2

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x) = (-x^2 + 6x - 8)^{\sqrt{2}}$ có nghĩa.

Câu 3

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x) = (9x^2 - 1)^{\frac{1}{5}}$ có nghĩa.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x) = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$ có nghĩa.

Câu 5

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x) = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$ có nghĩa.

Câu 6

[Mức độ 2] Tìm điều kiện của x để biểu thức $P(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\sqrt{2}}$ có nghĩa.

Câu 7

[Mức độ 2] Tìm điều kiện của x để biểu thức $P(x) = (x + 3)^{\frac{3}{2}} - \sqrt[4]{5 - x}$ có nghĩa.

Câu 8

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x) = \left(\frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^3$ có nghĩa.

Câu 9

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x) = (\sqrt{x - 1} + 2018)^{\frac{5}{2}}$ có nghĩa.

Câu 10

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{3 - x}} + (2x - 5)^{\sqrt{7} + 1} - 3x - 11$ có nghĩa.

DẠNG 5: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1

[Mức độ 1] Chứng minh rằng $x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt{x}$ với $x > 0$.

Câu 2

[Mức độ 1] Chứng minh rằng $\left(a^{\frac{2}{3}} + 1\right) \left(a^{\frac{4}{9}} + a^{\frac{2}{9}} + 1\right) \left(a^{\frac{2}{9}} - 1\right) = a^{\frac{4}{3}} - 1$ với a là số thực dương

Câu 3

[Mức độ 2] Cho biểu thức $P = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt[k]{x^3}}}$ ($x > 0$). Chứng minh luôn tồn tại số tự nhiên k sao cho biểu thức $P = x^{\frac{23}{24}}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Chứng minh $\frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} - a^5 = 0$ với $a > 0$.

Câu 5

[Mức độ 2] Chứng minh $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào b

$$B = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{b}{a}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (a > 0, b > 0)$$

Câu 7

[Mức độ 2] Chứng minh rằng $a^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} = a^3$ với $a > 0$.

Câu 8

[Mức độ 3] Chứng minh $\frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = -\sqrt[4]{b}$, với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

Câu 9

[Mức độ 3] Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}} \right)}$, với $a > 0, a \neq 1$.

Chứng minh rằng $f(2019^{2020}) = -1 - 2019^{1010}$.

Câu 10

[Mức độ 3] Cho $P = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$ và $Q = 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)^3}$, với x, y , là các số thực khác 0. Chứng minh rằng $P < Q$.

Câu 11

[Mức độ 3] Chứng minh đẳng thức $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = 2$
với $x > 0, y > 0, x \neq y$.

Câu 12

[Mức độ 2] Chứng minh $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{-1} - x = 0$ với $x > 0, y > 0, x \neq y$.

Câu 13

[Mức độ 4] Cho biểu thức $f(x) = 5^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$, (với $x > 0$). Biết rằng: $f(1) \cdot f(2) \dots f(2020) = 5^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản.
Chứng minh rằng $m - n^2 = -1$.

Câu 14

[Mức độ 4] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2$. Chứng minh rằng:

a) $a^m > b^m + c^m$ nếu $m > 2$.

b) $a^m < b^m + c^m$ nếu $m < 2$.

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA

I LÝ THUYẾT.
1. Định nghĩa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tùy ý.

Từ các định nghĩa về lũy thừa ta thấy:

+) Hàm số $y = x^\alpha$, với α nguyên dương, xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) Hàm số $y = x^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, xác định $\forall x \neq 0$.

+) Hàm số $y = x^\alpha$, với α không nguyên, xác định $\forall x > 0$.

Chú ý:

+) Hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

+) Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa:

+) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

+) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên K thì hàm số $y = u^\alpha(x)$ cũng có đạo hàm trên K và $[u^\alpha(x)]' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$.

Chú ý:

+) Đạo hàm của hàm số căn bậc n : $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ($\forall x > 0$ nếu n chẵn và $\forall x \neq 0$ nếu n lẻ).

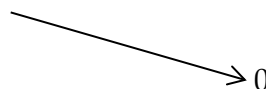
+) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên K và thỏa mãn điều kiện $u(x) > 0, \forall x \in K$ khi n chẵn,

$u(x) \neq 0, \forall x \in K$ khi n lẻ thì $(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$, ($\forall x \in K$).

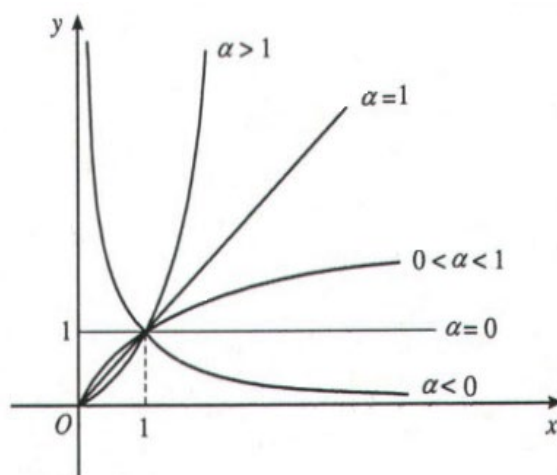
3. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lũy thừa:

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$																		
1. Tập xác định: $(0; +\infty)$. 2. Sự biến thiên $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$ Tiệm cận: không có. 3. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	+		y		$+\infty$	1. Tập xác định: $(0; +\infty)$. 2. Sự biến thiên $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang. Oy là tiệm cận đứng. 3. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	-		y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'	+																		
y		$+\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
y'	-																		
y	$+\infty$	0																	

Đồ thị của hàm số.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

- 1) Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α nguyên dương, xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.
- 2) Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \text{ xác định} \\ u(x) \neq 0 \end{cases}$.
- 3) Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α không nguyên, xác định $\Leftrightarrow u(x) > 0$.

Câu 1

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (2x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Câu 2

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-3}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 + 1)^{2019}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

Câu 5

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (2 - \sqrt{x - 1})^{\sqrt{3}}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2 - x}$.

Câu 7

[Mức độ 2] Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

DẠNG 2: ĐẠO HÀM HÀM LŨY THỪA $y = x^\alpha$.**1. Đạo hàm của hàm số lũy thừa.**

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, (x > 0)$$

2. Đạo hàm của hàm hợp.

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}, (u > 0)$$

Câu 1

[Mức độ 2] Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}}$.

Lời giải

$$+ \text{ Với mọi } x > 0, y = \left(\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}} \right)' = \left(x^{\frac{7}{6}} \right)' = \frac{7}{6} x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{6} \sqrt[6]{x}.$$

Câu 2

[Mức độ 2] Xét dấu y' hàm số $y = x^{e+2}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Tìm x để $y' > 0$ biết $y = (x^2 + 1)^{e+2}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm đạo hàm của hàm số $y = (3 - x^2)^{\frac{4}{3}}$.

Câu 5

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = (4 - x^2)^3$. Tính $y''(1)$.

Câu 6

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = (x-1)^{\frac{3\pi}{2}}$ có đồ thị (C) . Lấy $M \in (C)$ có hoành độ $x_0 = 2$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M .

Câu 7

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{(4x^2 + 3x + 1)^3}$.

Câu 8

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{e \sqrt{e \sqrt{e \sqrt{e \sqrt{x}}}}}, x > 0$.

Câu 9

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = (3x^2 + 2x + 1)^{\frac{4}{3}}$.

Câu 10

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = \sqrt[3]{1 + 2\sin 2x}$. Tìm đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x = 0$.

Câu 11

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = (x + 2)^{-2}$. Tìm hệ thức giữa y và y'' không phụ thuộc vào x .

Câu 12

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[5]{\cos \frac{2x+1}{3}}$.

Câu 13

[Mức độ 2] Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x+1)^2 (x^2-1)^3$.

DẠNG 3: KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$

Khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể ta phải xét hàm số trên toàn tập xác định.

1. Tìm tập xác định.

Tập xác định của hàm lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α .

2. Sự biến thiên.

- Tìm đạo hàm y' . Xét dấu y' và kết luận về chiều biến thiên của hàm số.
- Tìm tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên.

3. Đồ thị.

Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.

Câu 1

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^5$.

Lời giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+ $y' = 5x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$		$+\infty$

Hàm số đồng biến khoảng $(-\infty; +\infty)$.

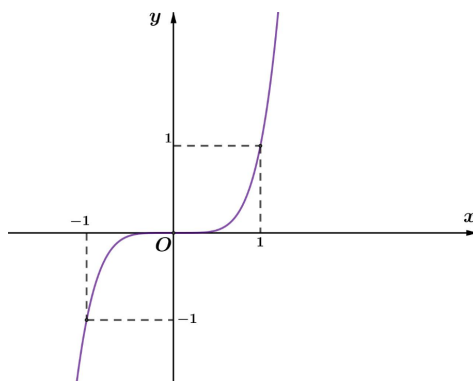
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; -1), (1; 1)$.

Hàm số $y = x^5$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 2

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-1}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm đường tiệm cận ngang, nhận đường thẳng $x = 0$ làm đường tiệm cận đứng.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = -x^{-2} < 0, \forall x \in D.$$

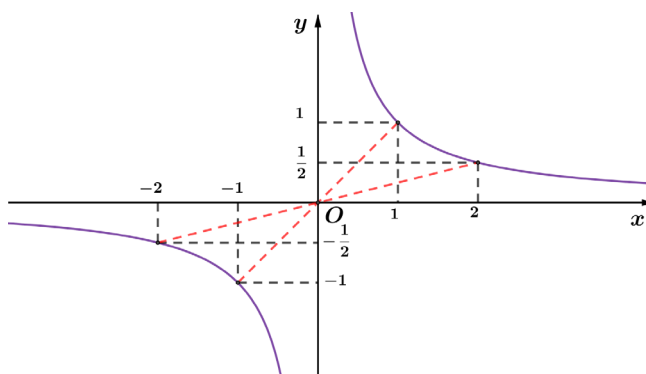
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		-
y	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A\left(-2; -\frac{1}{2}\right), B(-1; 1), C(1; 1), D\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Hàm số $y = x^{-1}$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 3

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-2}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm đường tiệm cận ngang, nhận đường thẳng $x = 0$ làm đường tiệm cận đứng.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = -2x^{-3}.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		-
y	$0 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 0$

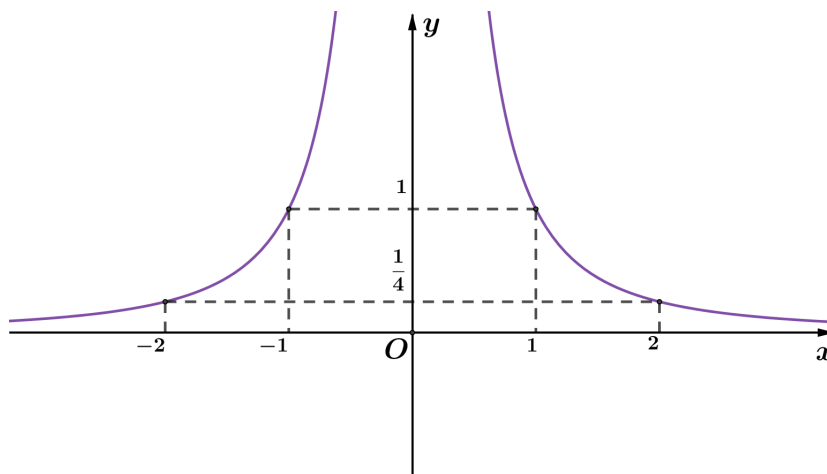
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A\left(-2; \frac{1}{4}\right), B(-1; 1), C(1; 1), D\left(2; \frac{1}{4}\right)$.

Hàm số $y = x^{-2}$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 4

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = (x-2)^{-4}$.

Lời giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

+ Giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} y = +\infty$. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = -4.(x-2)^{-5}.$$

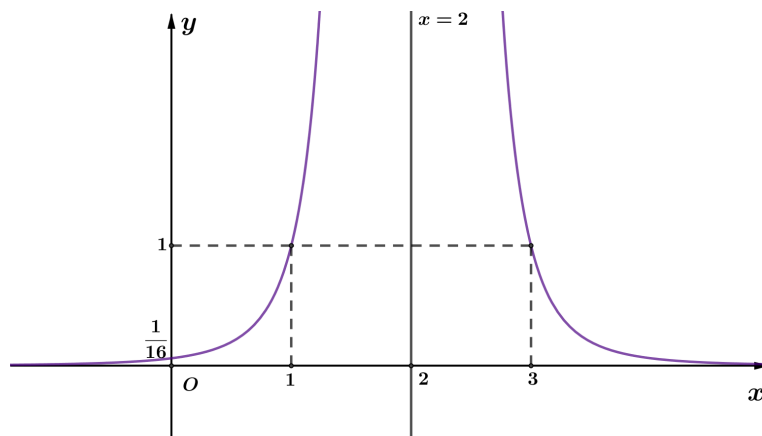
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		-
y	$0 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 0$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A\left(0; \frac{1}{16}\right), B(1;1), C(3;1)$ và nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 5

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = +\infty$.

Đồ thị hàm số nhận trục Oy ($x = 0$) là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = 0.$$

Đồ thị hàm số nhận trục Ox ($y = 0$) là đường tiệm cận ngang.

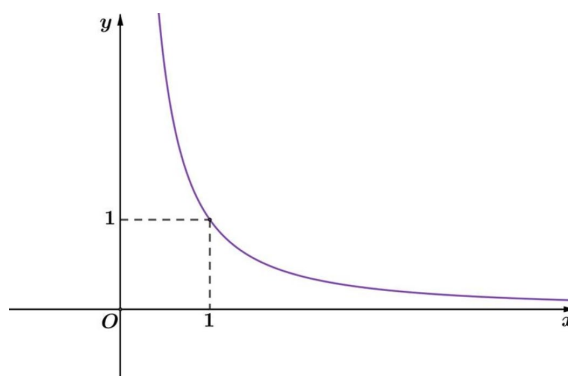
+ $y' = -\sqrt{2} \cdot x^{-\sqrt{2}-1} < 0, \forall x \in D$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

+ Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	0

+ Đồ thị:



+ Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$.

DẠNG 4: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ $y = x^{g(m)}$ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN K

Câu 1

[Mức độ 2] Có bao nhiêu giá trị m nguyên, $m \in (0; 2020]$ sao cho hàm số $y = x^{4m-1}$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$?

Lời giải

+ Hàm số $y = x^{4m-1}$ xác định trên $(-\infty; -2)$, (vì $m \in \mathbb{N}^*$ nên $4m-1 \in \mathbb{N}^*$).

+ $y' = (4m-1) \cdot x^{4m-2}$.

+ Với mọi $x \in (-\infty; -2)$ thì $x^{4m-2} > 0$.

+ Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -2)$ khi và chỉ khi $y' > 0, \forall x \in (-\infty; -2)$.

$$\Leftrightarrow 4m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Vì m nguyên, $m \in (0; 2020]$ nên $m \in \{1; 2; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2

[Mức độ 2] Tìm các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^{m^3-3m^2}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 3

[Mức độ 2] Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^{2019-m^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm điều kiện của m để hàm số $f(x) = x^{|m|-2}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 5

[Mức độ 2] Tìm điều kiện của m để hàm số $f(x) = x^{m^2-|m|}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

TÌM m ĐỂ HÀM SỐ $y = [f(x)]^{g(m)}$ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN K.

Câu 1

[Mức độ 2] Tìm m nguyên dương nhỏ nhất để hàm số $y = (x+1)^{6m-5}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 2

[Mức độ 2] Tìm m nguyên thuộc đoạn $[1;5]$ để hàm số $y = (1-2x)^{-4m+2}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 3

[Mức độ 2] Tìm m nguyên thuộc khoảng $(-3;0)$ để hàm số $y = (1-x)^{\frac{m+3}{m^2+3}}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm m nguyên âm lớn nhất để hàm số $y = (x^2 - 2)^{\pi m^2 - 16}$ đồng biến trên $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 5

[Mức độ 2] Tìm m nguyên dương nhỏ nhất để hàm số $y = (2x-3)^{\frac{m^2-9}{e}}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 6

[Mức độ 2] Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = (x^2 + 1)^{m^2-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 7

[Mức độ 3] Xác định giá trị của tham số $m \in \mathbb{N}^*$ để hàm số $y = \sqrt[2m+1]{x^2 - mx}$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 8

[Mức độ 3] Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = (|x-m|-1)^{\sqrt{2}}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 9

[Mức độ 4] Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = (x^2 - 2mx + m^2)^{1-m^2}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

BÀI 3: LÔGARIT



LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

Như vậy $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

✚ Chú ý:

- Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall \alpha$.
- Cơ số của logarit phải dương và khác 1 ($a \neq 1$)
- Theo định nghĩa của logarit, ta có: $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1; \log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R};$
 $a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0$.

II. CÁC TÍNH CHẤT

1.1 So sánh hai logarit cùng cơ số Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.	1.2 Hệ quả: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$. ◦ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có ◦ $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	3. Logarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có ◦ $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ ◦ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có ◦ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ◦ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$	5. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có ◦ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ◦ Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

 Chú ý:

Logarit thập phân và logarit tự nhiên

- Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Logarit tự nhiên là logarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$

BẢNG TÓM TẮT CÔNG THỨC MŨ-LOGARIT THƯỜNG GẶP

• $a^0 = 1, (a \neq 0)$. • $(a)^1 = a$ • $(a)^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$ • $\frac{(a)^\alpha}{(a)^\beta} = (a)^{\alpha-\beta}$ • $(a)^\alpha \cdot (b)^\beta = (a)^{\alpha+\beta}$ • $(a)^\alpha \cdot (b)^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$ • $\frac{(a)^\alpha}{(b)^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha, (b \neq 0)$ • $(a)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(a)^\alpha}, (\beta \in \mathbb{N}^*)$ • $(a^\alpha)^\beta = (a)^{\alpha\beta}$ • $(a)^\alpha = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$	• $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$ • $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$ • $\log_a a^\alpha = \alpha, (0 < a \neq 1)$ • $\log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha}, (0 < a \neq 1)$ • $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$ • $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$ • $\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \log_a b$ • $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ • $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ • $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
---	--



HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Câu 1

[Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$.

Câu 2

[Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(2e) - \log 100$.

Câu 3

[Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3$.

Câu 4

[Mức độ 1] Tính giá trị biểu thức $P = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$.

Câu 5

[Mức độ 2] Cho a là số thực dương, a khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Tính giá trị của biểu thức $P = \ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 (\ln 2)}$.

Câu 7

[Mức độ 2] Tìm các số thực dương a biết $\log_2 a \cdot \log_{\sqrt{2}} a = 32$.

Câu 8

[Mức độ 2] Biết $\log_2 3 = a$. Tính $\log_{12} 18$ theo a .

Câu 9

[Mức độ 3] Cho các số thực dương a, b, c (với a, c khác 1) thỏa mãn các điều kiện $\log_a (ac^2) = \log_c (b^3 c)$ và $2 \log_a c + \log_c b = 8$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a b + \log_c (ab^2)$.

Câu 10

[Mức độ 4] Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b \geq a^{10}, a > 1, c > 1$ và $\log_a b + 2 \log_b c + 5 \log_c a = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \log_a c + 5 \log_c b + 10 \log_b a$.

DẠNG 2: RÚT GỌN

Câu 1

[Mức độ 1] Với số dương a tùy ý, rút gọn biểu thức $\log(8a) - \log(2a)$.

Câu 2

[Mức độ 1] Rút gọn biểu thức $P = 2^{\log_2 a} + \log_a(a^b)$ ($a > 0, a \neq 1$).

Câu 3

[Mức độ 1] Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Rút gọn biểu thức:

$$P = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{a}{d}.$$

Câu 4

[Mức độ 1] Cho a, b là các số thực dương và a khác 1. Rút gọn biểu thức: $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$.

Câu 5

[Mức độ 2] Cho x là các số thực khác 0. Rút gọn biểu thức: $P = 2^{\log_{16} x^4 + \log_2 x^2}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn: $\ln a + \ln(8b) = 2 \ln(a + 2b)$.

Rút gọn biểu thức: $P = \log_b 2a + \log_{\frac{a}{2}} 2b - \frac{1}{\log_8 b}$.

Câu 7

[Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương và a khác 1. Rút gọn biểu thức:

$$P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2 \ln b}{\ln a} - 1}.$$

Câu 8

[Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương và khác 1. Rút gọn biểu thức:

$$P = \frac{\log_a(a^3 b^2) - \log_b\left(\frac{b^3}{a^2}\right)}{\log_a^2 b + 1}.$$

Câu 9

[Mức độ 3] Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $ab \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$P = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1.$$

Câu 10

[Mức độ 3] Cho a, x là số thực dương khác 1 và n là số tự nhiên khác 0.

Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^4} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{2^n}} x}$.

DẠNG 3: SO SÁNH LÔGARIT

Câu 1

[Mức độ 1] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_3 4$ và $\log_3 5$.

b. $\log_{\frac{1}{2}} 5$ và $\log_{\frac{1}{2}} 6$.

Câu 2

[Mức độ 1] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_2 3$ và $\log_3 \frac{1}{2}$.

b. $3^{\log_{0,1} 5}$ và $5^{\log_{0,1} 2^{-2}}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_2 7$ và $\log_3 7$.

b. $\log_{\frac{2}{3}} 5$ và $\log_{\frac{3}{4}} 5$.

Câu 4

[Mức độ 2] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_2 9$ và $\log_3 7$.

b. $4\log 2 + \log 3$ và $3\ln 5$.

Câu 5

[Mức độ 2] Không dùng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_{\pi} (\log_{0,1} 0,2)$ và $\log_{\pi} (\log_{0,1} 0,3)$.

b. $3^{\log_{0,1} 1,1}$ và $7^{\log_{0,1} 0,99}$.

c. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80}$ và $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15 + \sqrt{2}}$.

d. $\log_3 4$ và $\log_4 5$.

Câu 6

[Mức độ 2] Có thể kết luận gì về giá trị của a nếu biết:

a. $\log_{2019} (4a) \geq \log_{2019} (a^2 + 4)$.

b. $\log_{\frac{1}{\pi}} (2a^2 + 2) > \log_{\frac{1}{\pi}} (5a)$.

Câu 7

[Mức độ 2] Có thể kết luận gì về giá trị của a nếu biết:

a. $\log_{a^2 - 2a + 1} (\pi) \geq \log_{a^2 - 2a + 1} (e)$.

b. $\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{2019} \right) \leq \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{2020} \right)$.

Câu 8

[Mức độ 3] Cho a và b là hai số thực dương tùy ý.

Đặt $x = \ln(a^2 - ab + b^2)^{1000}$, $y = 1000 \ln a - \ln \frac{1}{b^{1000}}$. Hãy so sánh $x; y$.

Câu 9

[Mức độ 3] Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < 2 < c$. Hãy so sánh các số

$A = \log_c(b - a)$ và $B = \log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a)$.

Câu 10

[Mức độ 3] Với n là số nguyên lớn hơn 1. Hãy so sánh các số $A = \log_n(n + 1)$ và

$B = \log_{n+1}(n + 2)$.

DẠNG 4: MAX – MIN CỦA BIỂU THỨC LÔGARIT

Câu 1

[Mức độ 2] Cho số thực $a \in \left[\frac{1}{27}; 3\right]$ và biểu thức $P = 9\log_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Lời giải

Ta có: $P = \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}^3 a + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - 3\log_{\frac{1}{3}} a + 1$.

Đặt $\log_{\frac{1}{3}} a = t$, vì $a \in \left[\frac{1}{27}; 3\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$. Khi đó $P = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 1$.

Xét $f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$, $f'(t) = t^2 + 2t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 3] \\ t = -3 \notin [-1; 3] \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	-1	1	3
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{2}{3}$	10

Vậy $\min_{\left[\frac{1}{27}; 3\right]} P = \min_{[-1; 3]} f(t) = -\frac{2}{3}$ khi $t = 1$ hay $a = \frac{1}{3}$, $\max_{\left[\frac{1}{27}; 3\right]} P = \max_{[-1; 3]} f(t) = 10$ khi $t = 3$ hay $a = \frac{1}{27}$.

Câu 2

[Mức độ 2] Cho x, y là 2 số thực dương thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x + 2y^3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2 x - \log_2 y$.

Câu 3

[Mức độ 3] Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8\log_{\frac{2}{b}}^2 a - 1$.

Câu 4

[Mức độ 3] Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$.

Câu 5

[Mức độ 3] Cho $m = \log_a \left(\sqrt[3]{ab} \right)$ với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6

[Mức độ 3] Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

Câu 7

[Mức độ 4] Cho $a, b > 1$. Tính $S = \log_a \sqrt{ab}$ khi $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 8

[Mức độ 4] Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

Câu 9

[Mức độ 4] Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + \log_2 \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Câu 10

[Mức độ 4] Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}$.

DẠNG 5: TÍNH LOGARIT THEO LOGARIT KHÁC

DẠNG 5.1: TÍNH LOGARIT THEO 1 LOGARIT KHÁC

Câu 1

[Mức độ 1] Cho $\log_3 2 = a$. Tính $\log_3 18$ theo a .

Câu 2

[Mức độ 2] Cho $b = \log_5 3$. Tính $\log_{81} 25$ theo b .

Câu 3

[Mức độ 2] Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Tính $A = \log_m 16m$ theo a .

Câu 4

[Mức độ 2] Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

Câu 5

[Mức độ 2] Cho $\log_3 15 = a$. Tính $A = \log_{25} 15$ theo a .

DẠNG 5.2: TÍNH LOGARIT THEO 2 LOGARIT KHÁC

Câu 1

[Mức độ 1] Cho $\log_2 5 = a; \log_3 5 = b$. Tính $\log_5 6$ tính theo a và b .

Câu 2

[Mức độ 3] Cho các số dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a (bc) = 2; \log_b (ca) = 4$. Tính giá trị của $\log_c (ab)$.

Câu 3

[Mức độ 2] Cho $a = \log_2 2, b = \ln 2$. Hãy biểu diễn $\ln 800$ theo a và b .

Câu 4

[Mức độ 2] Cho $a = \log_{25} 11, b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{625} \frac{121}{16}$ theo a và b .

Câu 5

[Mức độ 2] Cho $a = \log_3 4, b = \log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b .

DẠNG 5.3: TÍNH LOGARIT THEO 3 LOGARIT KHÁC

Phương pháp: Chọn một cơ số chính, sử dụng công thức đổi cơ số để đưa tất cả các lôgarit về cơ số đã chọn.

Câu 1

[Mức độ 2] Cho $a = \log_3 5$; $b = \log_2 7$; $\log_2 3$. Tính $\log_6 1260$ theo a, b, c .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_6 1260 = 2 + \log_6 35 = 2 + \frac{\log_2 35}{\log_2 6} = 2 + \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3}.$$

$$\text{Mà } \log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ac \text{ nên } \log_6 1260 = 2 + \frac{ac + b}{1 + c}.$$

Câu 2

[Mức độ 2] Cho $a = \ln 8e^2$, $b = \ln 81e$, $c = \log_2 5$. Tính $12 \cdot \ln 12000$ theo a, b, c .

Câu 3

[Mức độ 3] Cho $a = \log_3 5$, $b = \log_2 7$, $c = \log_2 3$ và

$$I = \frac{-1}{\log 126} \left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{149}{150} \right). \text{ Tính } I \text{ theo } a, b, c.$$

Câu 4

[Mức độ 3] Cho $\log_9 5 = a$; $\log_2 7 = b$; $\log_4 12 = c$. Tính $\log_{18} 4200$.

Câu 5

[Mức độ 4] Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_a b = \frac{3}{2}$, $\log_c d = \frac{5}{4}$,

$$\log_3 (a - c) = 2. \text{ Tính } \log_3 (b - d).$$

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1. Biết $3 + 2\log_2 x = \log_2 y$. Hãy biểu thị y theo x .

- A. $y = 2x + 3$. B. $y = 8x^2$. C. $y = x^2 + 8$. D. $y = 3x^2$.

Ví dụ 2. Nếu $x = (\log_8 2)^{\log_2 8}$ thì $\log_3 x$ bằng:

- A. -3 . B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

Ví dụ 3. Độ pH của một chất được xác định bởi công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro trong chất đó tính theo mol/lít (mol/L). Xác định nồng độ ion $[H^+]$ của một chất biết rằng độ pH của nó là 2,44.

- A. $1,1 \cdot 10^8$ mol/L. B. $3,2 \cdot 10^{-4}$ mol/L. C. $3,6 \cdot 10^{-3}$ mol/L. D. $3,7 \cdot 10^{-3}$ mol/L..

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $P = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} = \log \frac{ay}{dx}$.

- A. 1. B. $\log \frac{x}{y}$. C. $\log \frac{y}{x}$. D. $\log \frac{a^2 x}{d^2 y}$.

Ví dụ 5. Với mỗi số nguyên $n, n > 1$, đặt $a_n = (\log_n 2002)^{-1}$, $b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ và $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$. Tính $b - c$.

- A. -2 . B. -1 . C. $\frac{1}{2002}$. D. $\frac{1}{1001}$.

Ví dụ 6. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!}$.

- A. 0,01. B. 0,1. C. 1. D. 10.

Ví dụ 7. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_3 5$. Hãy tính biểu thức $P = \log_6 60$ theo a và b .

- A. $P = 1 + \frac{ab}{1+a}$. B. $P = 1 + \frac{ab}{1+b}$. C. $P = \frac{2+b+ab}{1+b}$. D. $P = \frac{2+a+ab}{1+a}$.

Ví dụ 8. Nếu $P = \frac{S}{(1+k)^n}$ thì n bằng:

- A. $\frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1+k)}$. B. $\log \frac{S}{P(1+k)}$. C. $\log \frac{S}{P} + \log(1+k)$. D. $\frac{\log S}{\log[P(1+k)]}$.

Ví dụ 9. Biết $\log(xy^3) = 1$ và $\log(x^2y) = 1$. Tính giá trị của $\log(xy)$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 1. LŨY THỪA



I LÝ THUYẾT.

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$a^n = a.a \dots a \text{ (} n \text{ thừa số } a \text{)}.$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0: Cho $a \neq 0$. Khi đó

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^0 = 1.$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2. Căn bậc n .

- Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.
- Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.
- Khi n lẻ, $b \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$.
- Khi n chẵn và:
 - $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b .
 - $b = 0$: Có một căn bậc n của b là $\sqrt[n]{0} = 0$.
 - $b > 0$: Có hai căn bậc n của b ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khi đó

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Một số tính chất của căn bậc n

Với $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \forall ab \geq 0$
- $\sqrt[n+1]{ab} = \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n+1]{b}, \forall a, b$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$
- $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0, n \text{ nguyên dương}, m \text{ nguyên}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m \text{ nguyên dương}$
- Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n \text{ nguyên dương}, p, q \text{ nguyên}$

Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$

4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ: Cho số thực $a > 0$, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha. \text{ Khi đó } a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

5. Các tính chất

- Cho hai số dương a, b và các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};$$

$$(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha \cdot \beta}.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.
- Nếu $0 < a < b$ thì $a^\alpha > b^\alpha$ khi và chỉ khi $\alpha < 0$.
- Nếu $0 < a < b$ thì $a^\alpha < b^\alpha$ khi và chỉ khi $\alpha > 0$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH TOÁN

Câu 1

[Mức độ 2] Tính giá trị biểu thức $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5} = 5^2 + (0,2)^{-3} = 5^2 + 5^3 = 150.$$

Câu 2

[Mức độ 2] Tính giá trị biểu thức $81^{-0.75} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 81^{-0.75} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} + (5^{-4})^{-\frac{1}{4}} - (2^{-5})^{-\frac{3}{5}} = 3^{-3} + 5 - 2^3 = -\frac{80}{27}.$$

Câu 3

[Mức độ 2] Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt{5}} : \sqrt[5]{\sqrt{5}}\right)^{10}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt{5}} : \sqrt[5]{\sqrt{5}}\right)^{10}} = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{8}} : 5^{\frac{1}{10}}\right)^{10}} = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{40}}\right)^{10}} = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{5^{\frac{3}{4}}} = 5^{\frac{3}{8}}.$$

Câu 4

[Mức độ 2] Tính giá trị biểu thức $\sqrt[3]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[7]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt[3]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[7]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)}} &= \sqrt[3]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[7]{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5} \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}}} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{25}{63}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{88}{63}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{113}{63}}. \end{aligned}$$

Câu 5

[Mức độ 2] Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab} \Leftrightarrow 5^{-3(a^2+4ab)} = 5^{\frac{4}{3}(3a^2-10ab)} \Leftrightarrow 7a^2 - \frac{4}{3}ab = 0$$

$$\Leftrightarrow 7a - \frac{4}{3}b = 0 \text{ (do } a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{21}. \text{ Vậy } \frac{a}{b} = \frac{4}{21}.$$

Câu 6

[Mức độ 3] Tích $(2017)! \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b , khi đó (a, b) là bộ số nào ?

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} (2017)! \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017}\right)^{2017} &= (2017)! \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{2017}{2016}\right)^{2016} \left(\frac{2018}{2017}\right)^{2017} \\ &= (2017)! \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{2016} \cdot \frac{2018^{2017}}{2017} = 2018^{2017} \Rightarrow a = 2018; b = 2017. \end{aligned}$$

Vậy $(a; b) = (2018; 2017)$.

Câu 7

[Mức độ 3] Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S = \sqrt{2018} [f(-2017) + f(-2016) + \dots + f(0) + f(1) + \dots + f(2018)].$$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(1-x) = \frac{1}{2018^{1-x} + \sqrt{2018}} = \frac{2018^x}{2018 + 2018^x \sqrt{2018}} = \frac{2018^x}{\sqrt{2018} (2018^x + \sqrt{2018})}$$

$$\Rightarrow f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2018^x + \sqrt{2018}} + \frac{2018^x}{\sqrt{2018} (2018^x + \sqrt{2018})} = \frac{1}{\sqrt{2018}}.$$

$$\text{Do } 1 - 2018 = -2017 \text{ nên } f(-2017) + f(2018) = \frac{1}{\sqrt{2018}},$$

$$f(-2016) + f(2017) = \frac{1}{\sqrt{2018}},$$

.....

$$f(0) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2018}}.$$

$$\Rightarrow f(-2017) + f(-2016) + \dots + f(0) + f(1) + \dots + f(2018)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2018}} + \frac{1}{\sqrt{2018}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2018}}, \text{ (2018 thừa số)}$$

$$= 2018 \cdot \frac{1}{\sqrt{2018}} = \sqrt{2018}.$$

Vậy $S = 2018$.

Câu 8

[Mức độ 3] Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện dưới đây $2^{\sqrt{x^2}} \cdot 4^{\sqrt{y^2}} \cdot 16^{\sqrt{z^2}} = 128$ và $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^{\sqrt{x^2}} \cdot 4^{\sqrt{y^2}} \cdot 16^{\sqrt{z^2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2} + 2\sqrt{y^2} + 4\sqrt{z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} + 2\sqrt{y^2} + 4\sqrt{z^2} = 7 \quad (1).$$

$$(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \Leftrightarrow xy^2 z^4 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2} \sqrt[3]{z^4} = 1 \text{ và } x > 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{x} > 0 \text{ (theo (2))}, b = \sqrt[3]{y}, c = \sqrt[3]{z} \Rightarrow ab^2 c^4 = 1.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$7 = a^2 + 2b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + c^2 + c^2 \geq 7\sqrt[7]{a^2 b^4 c^8} = 7.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a^2 = b^2 = c^2 \text{ hay } \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2}.$$

Thay vào (1) ta được $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} = 1$. Vì $x > 0$ nên có 4 bộ số thỏa mãn là:

$$(x, y, z) = (1; 1; 1); (x, y, z) = (1; -1; 1); (x, y, z) = (1; 1; -1); (x, y, z) = (1; -1; -1).$$

DẠNG 2: SO SÁNH CÁC LŨY THỪA

Câu 1

[Mức độ 1] So sánh các số:

$$\text{a. } (\sqrt{2} - 1)^{2019} \text{ và } (\sqrt{2} - 1)^{2020} \quad \text{b. } \pi^{1015} \text{ và } 3,14^{1015}.$$

Lời giải

$$\text{a. Vì } 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \text{ và } 2019 < 2020 \text{ nên } (\sqrt{2} - 1)^{2019} > (\sqrt{2} - 1)^{2020}.$$

$$\text{b. Vì } 1015 > 0 \text{ và } \pi > 3,14 \text{ nên } \pi^{1015} > 3,14^{1015}.$$

Câu 2

[Mức độ 2] So sánh các số:

$$\text{a. } 2^{1200} \text{ và } 3^{900} \quad \text{b. } (\sqrt{7})^{85} \text{ và } 3^{-150}.$$

Lời giải

$$\text{a. Ta có } 2^{1200} = 2^{4 \cdot 300} = 16^{300} \text{ và } 3^{900} = 3^{3 \cdot 300} = 27^{300}.$$

$$\text{Vì } 300 > 0 \text{ và } 16 < 27 \text{ nên } 2^{1200} < 3^{900}.$$

$$\text{b. Vì } 85 > 0 \text{ và } \sqrt{7} > 1 \text{ nên } (\sqrt{7})^{85} > (\sqrt{7})^0 = 1 \Rightarrow (\sqrt{7})^{85} > 1 \quad (1).$$

$$\text{Vì } 3 > 1 \text{ và } -150 < 0 \text{ nên } 3^{-150} < 3^0 \Rightarrow 3^{-150} < 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $(\sqrt{7})^{85} > 3^{-150}$.

Câu 3

[Mức độ 2] So sánh các số :

a. $\sqrt[3]{15}$ và $\sqrt[4]{20}$

b. $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Lời giải

a. Vì $\sqrt[3]{15} = \sqrt[12]{15^4} = \sqrt[12]{50625}$ và $\sqrt[4]{20} = \sqrt[12]{20^3} = \sqrt[12]{8000}$.

Mà $50625 > 8000$ nên $\sqrt[3]{15} > \sqrt[4]{20}$.

b. Ta có $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < \sqrt[3]{8} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$, $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28} > \sqrt{9} + \sqrt[3]{27} = 3 + 3 = 6$.

Vậy $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Có thể kết luận gì về số a nếu:

a. $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$

b. $(1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

a. Ta có $\frac{3}{4} < 2$ mà $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$ nên $0 < 2-a < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$.

b. Ta có $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ mà $(1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}}$ nên $1-a > 1 \Leftrightarrow a < 0$.

Câu 5

[Mức độ 3] Cho $U = 2.2019^{2020}$, $V = 2019^{2020}$, $W = 2018.2019^{2019}$, $X = 5.2019^{2019}$ và $Y = 2019^{2019}$. Trong các số sau đây, số nào bé nhất $X - Y$; $U - V$; $V - W$; $W - X$?

Lời giải

Ta có $X - Y = 5.2019^{2019} - 2019^{2019} = 4.2019^{2019}$.

$U - V = 2.2019^{2020} - 2019^{2020} = 2019^{2020} = 2019.2019^{2019}$.

$V - W = 2019.2019^{2019} - 2018.2019^{2019} = 2019^{2019}$.

$W - X = 2018.2019^{2019} - 5.2019^{2019} = 2013.2019^{2019}$.

Vậy trong các số trên số nhỏ nhất là : $V - W$.

Câu 6

[Mức độ 4] So sánh hai số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$ và $2^{2^{2^2}}$.

Lời giải

Ta thấy rằng $2^{2^{2^2}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}}$ mà $2^{10} = 1024 > 1000$, và $2^6 = 64$.

Suy ra $2^{16} = 2^{10}.2^6 > 64000$ nên $2^{2^{2^2}} > 2^{64000}$.

Mặt khác $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000} < 1000 \cdot 1000^{1000} = 1000^{1001} < (2^{10})^{1001} = 2^{10010} < 2^{64000}$.

Từ đó suy ra $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000} < 2^{2^{2^2}}$.

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA



1. Định nghĩa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tùy ý.

Từ các định nghĩa về lũy thừa ta thấy:

+) Hàm số $y = x^\alpha$, với α nguyên dương, xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) Hàm số $y = x^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, xác định $\forall x \neq 0$.

+) Hàm số $y = x^\alpha$, với α không nguyên, xác định $\forall x > 0$.

Chú ý:

+) Hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

+) Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa:

+) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

+) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên K thì hàm số $y = u^\alpha(x)$ cũng có đạo hàm trên K và $[u^\alpha(x)]' = \alpha u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$.

Chú ý:

+) Đạo hàm của hàm số căn bậc n : $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ($\forall x > 0$ nếu n chẵn và $\forall x \neq 0$ nếu n lẻ).

+) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên K và thỏa mãn điều kiện $u(x) > 0, \forall x \in K$ khi n chẵn,

$u(x) \neq 0, \forall x \in K$ khi n lẻ thì $(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$, ($\forall x \in K$).

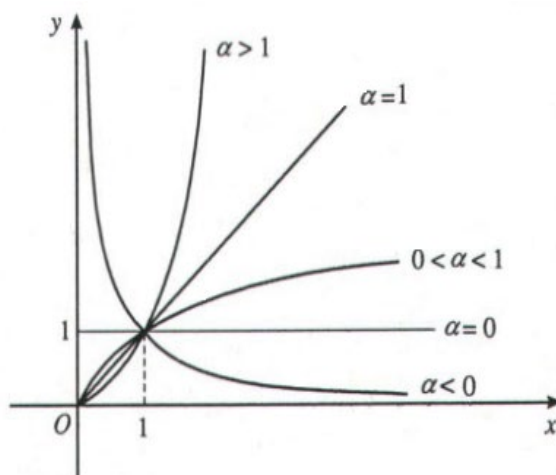
3. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lũy thừa:

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1; 1)$.

$y = x^{\alpha}, \alpha > 0.$	$y = x^{\alpha}, \alpha < 0.$																		
1. Tập xác định: $(0; +\infty).$	1. Tập xác định: $(0; +\infty).$																		
2. Sự biến thiên	2. Sự biến thiên																		
$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$																		
Giới hạn đặc biệt:	Giới hạn đặc biệt:																		
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha} = +\infty.$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha} = 0.$																		
Tiệm cận: không có.	Tiệm cận:																		
3. Bảng biến thiên.	3. Bảng biến thiên.																		
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	+		y	$+\infty$	0	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	-		y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'	+																		
y	$+\infty$	0																	
x	0	$+\infty$																	
y'	-																		
y	$+\infty$	0																	

Đồ thị của hàm số.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

- Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α nguyên dương, xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.
- Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) \neq 0 \end{cases}$.
- Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α không nguyên, xác định $\Leftrightarrow u(x) > 0$.

Câu 1

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (2x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

+ Vì $\alpha = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

+ Vậy tập xác định của hàm số $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 2

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-3}$.

Lời giải

+ Vì $\alpha = -3 \in \mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

+ Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 + 1)^{2019}$.

Lời giải

+ Vì $\alpha = 2019 \in \mathbb{N}^*$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 + 1$ xác định $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

+ Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

+ Do $\alpha = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

+ Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Câu 5

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (2 - \sqrt{x-1})^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

+ Do $\alpha = \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $2 - \sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < 2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 5$.

+ Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1; 5)$.

Câu 6

[Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2-x}$.

Lời giải

+ Hàm số xác định khi $\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 > 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 4 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2$.

+ Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-1; 2]$.

Câu 7

[Mức độ 2] Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

+ Hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4 \Leftrightarrow m \in (-4; 4)$.

DẠNG 2: ĐẠO HÀM HÀM LŨY THỪA $y = x^\alpha$.

1. Đạo hàm của hàm số lũy thừa.

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, (x > 0)$$

2. Đạo hàm của hàm hợp.

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}, (u > 0)$$

Câu 1

[Mức độ 2] Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}}$.

Lời giải

+ Với mọi $x > 0$, $y = \left(\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}} \right)' = \left(x^{\frac{7}{6}} \right)' = \frac{7}{6} x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{6} \sqrt[6]{x}$.

Câu 2

[Mức độ 2] Xét dấu y' hàm số $y = x^{e+2}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

+ $y' = (e+2) \cdot x^{e+1} > 0, \forall x \in D$.

Câu 3

[Mức độ 2] Tìm x để $y' > 0$ biết $y = (x^2 + 1)^{e+2}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$+ y' = (e+2)(x^2 + 1)' (x^2 + 1)^{e+1} = 2x(e+2)(x^2 + 1)^{e+1}.$$

$$+ y' > 0 \Leftrightarrow 2x(e+2)(x^2 + 1)^{e+1} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy $x \in (0; +\infty)$.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm đạo hàm của hàm số $y = (3 - x^2)^{-\frac{4}{3}}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

$$+ y' = \left[(3 - x^2)^{-\frac{4}{3}} \right]' = \left(-\frac{4}{3} \right) (3 - x^2)' (3 - x^2)^{-\frac{4}{3}-1} = \frac{8}{3} x (3 - x^2)^{-\frac{7}{3}}.$$

Câu 5

[Mức độ 2] Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = (\sqrt{x} + 1)^3$ tại điểm có tung độ bằng 27.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = [0; +\infty)$.

$$+ y = (\sqrt{x} + 1)^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$

$$+ y' = 3(\sqrt{x} + 1)' (\sqrt{x} + 1)^2 = \frac{3}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1)^2.$$

$$+ y'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4}} (\sqrt{4} + 1)^2 = \frac{27}{4}.$$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có tung độ bằng 27 là: $k = \frac{27}{4}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = (4 - x^2)^3$. Tính $y''(1)$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$+ y' = 3(4 - x^2)' (4 - x^2)^2 = (-6x)(4 - x^2)^2.$$

$$+ y'' = (-6x)' (4 - x^2)^2 + (-6x) \left[(4 - x^2)^2 \right]'$$

$$= (-6)(4 - x^2)^2 + 12x \cdot 2x(4 - x^2) = 6(4 - x^2)(5x^2 - 4).$$

$$\text{Vậy } y''(1) = 6(4 - 1^2)(5 \cdot 1^2 - 4) = 18.$$

Câu 7

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = (x-1)^{\frac{3\pi}{2}}$ có đồ thị (C) . Lấy $M \in (C)$ có hoành độ $x_0 = 2$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M .

Lời giải

+ Tập xác định : $D = (1; +\infty)$.

+ Ta có hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là $k = y'(2)$.

$$+ y' = \frac{3\pi}{2}(x-1)^{\frac{3\pi}{2}-1}.$$

$$y'(2) = \frac{3\pi}{2} \cdot 1^{\frac{3\pi}{2}-1} = \frac{3\pi}{2}.$$

+ Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là $k = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 8

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{(4x^2 + 3x + 1)^3}$.

Lời giải

+ Vì $4x^2 + 3x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$+ y = (4x^2 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

$$+ \text{Ta có: } y' = \frac{3}{2} \cdot (4x^2 + 3x + 1)' \sqrt{4x^2 + 3x + 1} = \frac{3}{2} \cdot (8x + 3) \cdot \sqrt{4x^2 + 3x + 1}.$$

Câu 9

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}}, x > 0$.

Lời giải

$$+ \text{Ta có } y = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{1}{32}}.$$

$$+ y' = \frac{1}{32} e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{1}{32}-1} = \frac{1}{32} e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{-\frac{31}{32}} = \frac{e^{\frac{15}{16}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}.$$

Câu 10

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = (3x^2 + 2x + 1)^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

+ Ta có $3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+ Khi đó, $y' = \left((3x^2 + 2x + 1)^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{4}{3} \left((3x^2 + 2x + 1)' \right) (3x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} (6x + 2) (3x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{3}}$

Câu 11

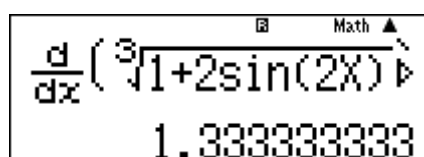
[Mức độ 2] Cho hàm số $y = \sqrt[3]{1 + 2\sin 2x}$. Tìm đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x = 0$.

Lời giải

+ Với $1 + 2\sin 2x \neq 0$ ta có:

Cách 1: $y' = \frac{4\cos 2x}{3\sqrt[3]{(1 + 2\sin 2x)^2}} \Rightarrow y'(0) = \frac{4}{3}$

Cách 2: Bấm máy tính



Câu 12

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[4]{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$.

Lời giải

+ Ta có $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(1 - \frac{1}{x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{4}}$.

Do đó: $y' = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{4} - 1} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 2} \right)' = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 2} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{2x}{(x^2 + 2)^2}$.

$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{4}}(x^2 + 2)^{\frac{5}{4}}} = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^5}}$.

Câu 13

[Mức độ 2] Cho hàm số $y = (x + 2)^{-2}$. Tìm hệ thức giữa y' và y'' không phụ thuộc vào x .

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$+ y' = -2.(x+2)^{-3} .(x+2)' = \frac{-2}{(x+2)^3}.$$

$$+ y'' = 6(x+2)^{-4} .(x+2)' = \frac{6}{(x+2)^4}. \text{ Lại do } y = (x+2)^{-2} = \frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow 6y^2 - y'' = 0.$$

Vậy hệ thức giữa y và y'' không phụ thuộc vào x là $6y^2 - y'' = 0$.

Câu 14

[Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[5]{\cos \frac{2x+1}{3}}$.

Lời giải

$$+ \text{ Với } \cos \frac{2x+1}{3} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{-1}{2} + \frac{3\pi}{4} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \text{ Khi đó: } y' = \frac{\left(\cos \frac{2x+1}{3}\right)'}{5\sqrt[5]{\cos^4 \frac{2x+1}{3}}} = \frac{-2\sin \frac{2x+1}{3}}{15\sqrt[5]{\cos^4 \frac{2x+1}{3}}}.$$

Câu 15

[Mức độ 2] Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x+1)^2 (x^2-1)^3$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} + y' &= \left[(x+1)^2\right]' \cdot (x^2-1)^3 + (x+1)^2 \cdot \left[(x^2-1)^3\right]' = 2(x+1) \cdot (x^2-1)^3 + 6x \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2-1)^2 \\ &= 2(x+1)(x^2-1)^2(4x^2+3x-1). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = 2(x+1)(x^2-1)^2(4x^2+3x-1).$$

DẠNG 3: KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$

Khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể ta phải xét hàm số trên toàn tập xác định.

1. Tìm tập xác định.

Tập xác định của hàm lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α .

2. Sự biến thiên.

- Tìm đạo hàm y' . Xét dấu y' và kết luận về chiều biến thiên của hàm số.
- Tìm tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên.

3. Đồ thị.

Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.

Câu 1

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

Lời giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+ $y' = 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

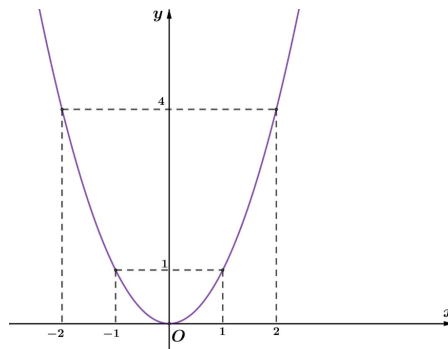
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-1;1)$, $B(1;1)$, $C(2;4)$, $D(-2;4)$.

Hàm số $y = x^2$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 2

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3$.

Lời giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+ $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$		$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

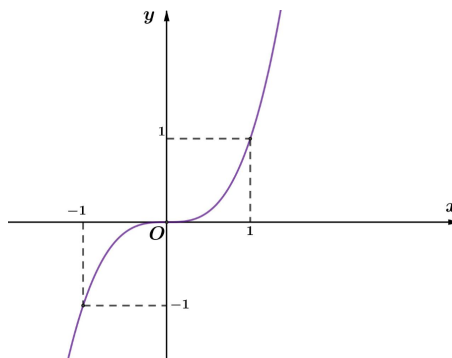
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; -1), (1; 1)$.

Hàm số $y = x^3$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 3

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^5$.

Lời giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+ $y' = 5x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$		$+\infty$

Hàm số đồng biến khoảng $(-\infty; +\infty)$.

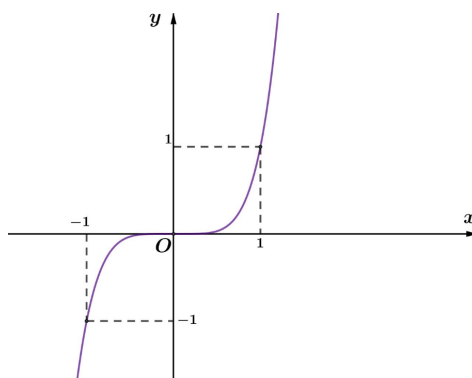
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; -1), (1; 1)$.

Hàm số $y = x^5$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

+ Đồ thị:

**Câu 4**

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-1}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm đường tiệm cận ngang, nhận đường thẳng $x = 0$ làm đường tiệm cận đứng.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = -x^{-2} < 0, \forall x \in D.$$

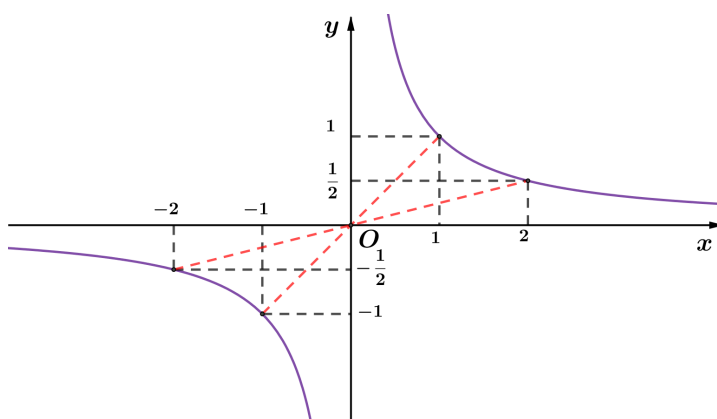
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		
y	$0 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A\left(-2; -\frac{1}{2}\right), B(-1; 1), C(1; 1), D\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Hàm số $y = x^{-1}$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 5

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-2}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm đường tiệm cận ngang, nhận đường thẳng $x = 0$ làm đường tiệm cận đứng.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = -2x^{-3}.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		-
y	$0 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 0$

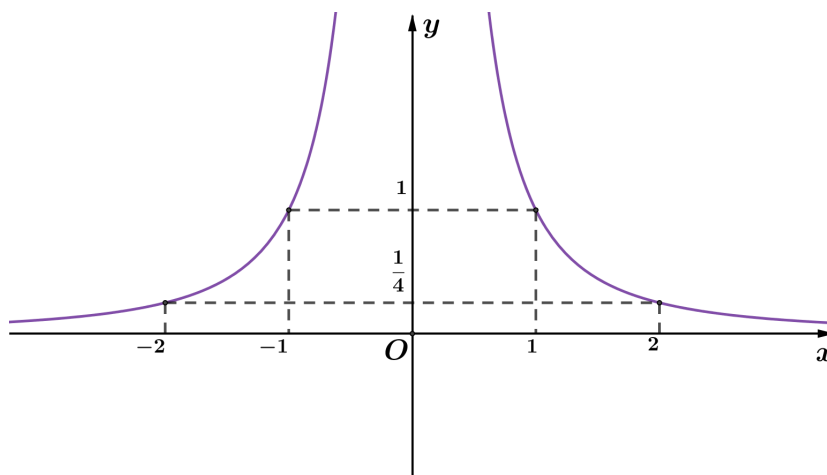
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A\left(-2; \frac{1}{4}\right), B(-1; 1), C(1; 1), D\left(2; \frac{1}{4}\right)$.

Hàm số $y = x^{-2}$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận nhận trục Oy làm trục đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 6

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = (x - 2)^{-4}$.

Lời giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

+ Giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = -4 \cdot (x - 2)^{-5}.$$

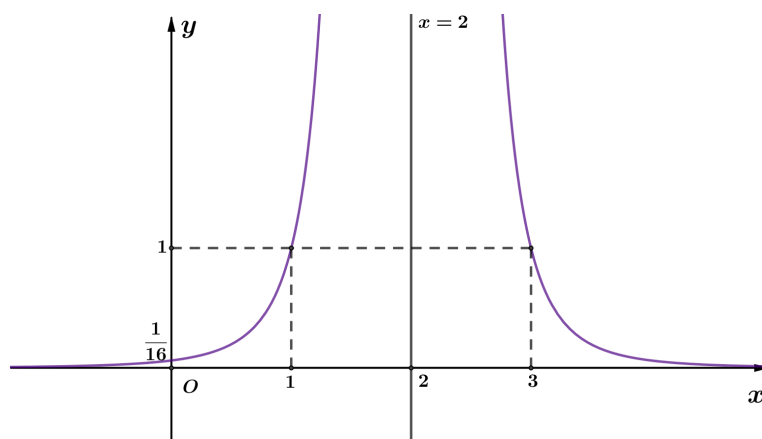
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		-
y	$0 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 0$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A\left(0; \frac{1}{16}\right), B(1; 1), C(3; 1)$ và nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng.

+ Đồ thị:



Câu 7

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

+ Giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

+ Bảng biến thiên:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} > 0, \forall x \in D.$$

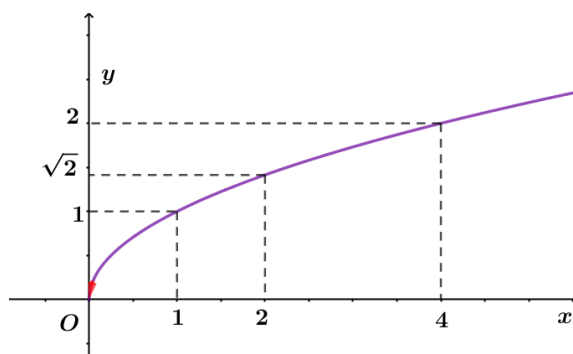
x	0	$+\infty$
y'	+	
y	0	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(1;1), B(2;\sqrt{2}), C(4;2)$.

+ Đồ thị:



Câu 8

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{4}}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 0$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

+ Bảng biến thiên: $y' = \frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{4}} > 0, \forall x \in D$.

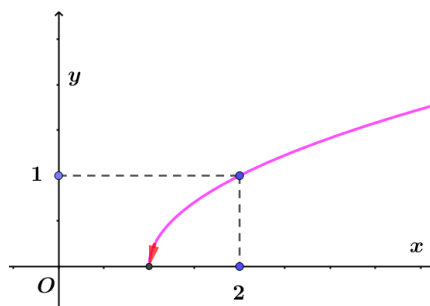
x	1	$+\infty$
y'	+	
y	0	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;1)$.

+ Đồ thị:



Câu 9

[Mức độ 2] Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = +\infty$.

Đồ thị hàm số nhận trục Oy ($x = 0$) là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = 0.$$

Đồ thị hàm số nhận trục Ox ($y = 0$) là đường tiệm cận ngang.

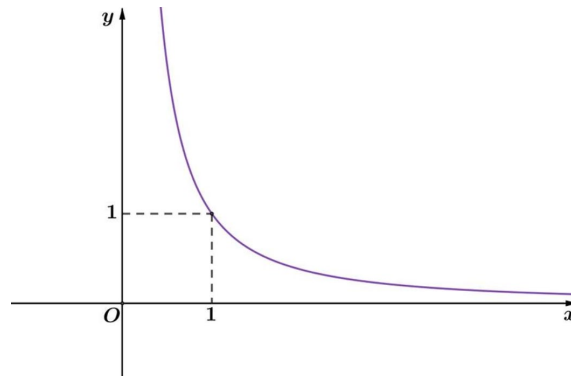
+ $y' = -\sqrt{2} \cdot x^{-\sqrt{2}-1} < 0, \forall x \in D$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

+ Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
y'		–
y	$+\infty$	0

+ Đồ thị:



+ Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$.

BÀI 3: LÔGARIT



I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

Như vậy $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

Chú ý:

- Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall \alpha$.
- Cơ số của logarit phải dương và khác 1 ($a \neq 1$)
- Theo định nghĩa của logarit, ta có:
 - $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$.
 - $\log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R}$.
 - $a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0$.

II. CÁC TÍNH CHẤT

1.1 So sánh hai logarit cùng cơ số Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.	1.2 Hệ quả: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$. ◦ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có ◦ $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	3. Logarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có ◦ $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ ◦ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α , ta có ◦ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ◦ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$	5. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có ◦ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ◦ Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

Chú ý:

Logarit thập phân và logarit tự nhiên

- Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Logarit tự nhiên là logarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$

BẢNG TÓM TẮT CÔNG THỨC MŨ-LOGARIT THƯỜNG GẶP

• $a^0 = 1, (a \neq 0)$. • $(a)^1 = a$ • $(a)^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$ • $\frac{(a)^\alpha}{(a)^\beta} = (a)^{\alpha-\beta}$ • $(a)^\alpha \cdot (b)^\beta = (a)^{\alpha+\beta}$ • $(a)^\alpha \cdot (b)^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$ • $\frac{(a)^\alpha}{(b)^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha, (b \neq 0)$ • $(a)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(a)^\alpha}, (\beta \in \mathbb{N}^*)$ • $(a^\alpha)^\beta = (a)^{\alpha\beta}$ • $(a)^\alpha = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$	• $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$ • $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$ • $\log_a a^\alpha = \alpha, (0 < a \neq 1)$ • $\log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha}, (0 < a \neq 1)$ • $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$ • $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$ • $\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \log_a b$ • $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ • $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ • $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
---	--

HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Câu 1

[Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$.

Lời giải

Ta có: $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3 = \log_2 2^3 + \log_3 3^3 - \log_5 5^3 = 3 + 3 - 3 = 3$.

Câu 2

[Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(2e) - \log 100$.

Lời giải

Ta có: $P = \ln(2e) - \log 100 = \ln 2 + \ln e - \log 10^2 = \ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1$.

Câu 3

[Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3$.

Lời giải

Ta có: $P = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3 = 3 - \log_{\frac{1}{3^2}} 3 = 3 - 2 = 1$.

Câu 4

[Mức độ 1] Tính giá trị biểu thức $P = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$.

Lời giải

Ta có: $P = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4} = \log_2 5 \cdot \log_5 3 - \log_4 9 = \log_2 3 - \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3 - \log_2 3 = 0$.

Câu 5

[Mức độ 2] Cho a là số thực dương, a khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

Lời giải

Ta có $P = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \log_a (\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a}) = \log_a \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} \right) = \log_a a^{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \log_a a^{\frac{7}{8}} = \frac{7}{8}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Tính giá trị của biểu thức $P = \ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 (\ln 2)}$.

Lời giải

Ta có $P = \ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 (\ln 2)} = (2 \ln 2) \cdot \left(\frac{1}{2} \log_2 3 \right) \cdot \log_3 2 - \ln 2$
 $= \ln 2 \cdot (\log_2 3) (\log_3 2) - \ln 2 = \ln 2 - \ln 2 = 0$.

Câu 7

[Mức độ 2] Tìm các số thực dương a biết $\log_2 a \cdot \log_{\sqrt{2}} a = 32$.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a \cdot \log_{\sqrt{2}} a = 32 \Leftrightarrow 2 \log_2 a \cdot \log_2 a = 32 \Leftrightarrow (\log_2 a)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 4 \\ \log_2 a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^4 = 16 \\ a = 2^{-4} = \frac{1}{16} \end{cases}.$$

Câu 8

[Mức độ 2] Biết $\log_2 3 = a$. Tính $\log_{12} 18$ theo a .

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3^2)}{\log_2 (3 \cdot 2^2)} = \frac{1 + 2 \log_2 3}{2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2a}{2 + a}.$$

Câu 9

[Mức độ 3] Cho các số thực dương a, b, c (với a, c khác 1) thỏa mãn các điều kiện $\log_a (ac^2) = \log_c (b^3 c)$ và $2 \log_a c + \log_c b = 8$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a b + \log_c (ab^2)$.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} \log_a (ac^2) = \log_c (b^3 c) \\ 2 \log_a c + \log_c b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \log_a c = 1 + 3 \log_c b \\ 2 \log_a c + \log_c b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a c = 3 \\ \log_c b = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } P = \log_a b + \log_c (ab^2) = \log_a c \log_c b + \log_c a + 2 \log_c b = 2 \cdot 3 + \frac{1}{3} + 2 \cdot 2 = \frac{31}{3}.$$

Câu 10

[Mức độ 4] Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b \geq a^{10}, a > 1, c > 1$ và $\log_a b + 2 \log_b c + 5 \log_c a = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \log_a c + 5 \log_c b + 10 \log_b a$.

Lời giải

Đặt $\log_a b = x, \log_b c = y, \log_c a = z$.

Từ $b \geq a^{10}, a > 1, c > 1$ và $\log_a b + 2 \log_b c + 5 \log_c a = 12$ ta được:

$$y > 0, z > 0, x \geq 10 \text{ và } x + 2y + 5z = 12.$$

$$\text{Từ } x + 2y + 5z = 12 \Rightarrow 12 - x = 2y + 5z > 0 \Rightarrow x < 12.$$

Ta có:

$$P = \frac{10}{x} + \frac{5}{y} + \frac{2}{z} = \frac{10}{x} + 10 \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{5z} \right) \geq \frac{10}{x} + \frac{40}{2y + 5z} = \frac{10}{x} + \frac{40}{12 - x}.$$

Xét $f(x) = \frac{10}{x} + \frac{40}{12-x}$, $x \in [10; 12)$, có

$$f'(x) = -\frac{10}{x^2} + \frac{40}{(12-x)^2} > \frac{40}{2^2} - \frac{10}{x^2} = 10\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) > 0, \forall x \in [10; 12).$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[10; 12)$ nên: $f(x) \geq f(10) = 21, \forall x \in [10; 12)$.

Suy ra $P \geq 21$, đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} x=10 \\ 2y+5z=2 \\ 2y=5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a^{10} \\ c=a^5 \\ a>1 \end{cases}.$$

DẠNG 2: RÚT GỌN

Câu 1

[Mức độ 1] Với số dương a tùy ý, rút gọn biểu thức $\log(8a) - \log(2a)$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, ta có: $\log(8a) - \log(2a) = \log\left(\frac{8a}{2a}\right) = \log 4$.

Câu 2

[Mức độ 1] Rút gọn biểu thức $P = 2^{\log_2 a} + \log_a(a^b)$ ($a > 0, a \neq 1$).

Lời giải

Áp dụng các tính chất của logarit ta được $P = a + b$.

Câu 3

[Mức độ 1] Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Rút gọn biểu thức:

$$P = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{a}{d}.$$

Lời giải

Với a, b, c, d là các số thực dương, ta có:

$$P = \log\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) - \log \frac{a}{d} = \log\left(\frac{a}{d} : \frac{a}{d}\right) = \log 1 = 0.$$

Câu 4

[Mức độ 1] Cho a, b là các số thực dương và a khác 1. Rút gọn biểu thức: $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$.

Lời giải

Với a, b là các số thực dương và a khác 1, ta có:

$$P = 3 \log_a b + 6 \cdot \frac{1}{2} \log_a b = 6 \log_a b.$$

Câu 5

[Mức độ 2] Cho x là các số thực khác 0. Rút gọn biểu thức: $P = 2^{\log_{16} x^4 + \log_2 x^2}$.

Lời giải

Với x là các số thực khác 0, ta có :

$$P = 2^{\log_{2^4} x^4 + \log_2 x^2} = 2^{\frac{4}{4} \log_2 |x| + 2 \log_2 |x|} = 2^{3 \log_2 |x|} = \left(2^{\log_2 |x|}\right)^3 = |x|^3.$$

Câu 6

[Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn: $\ln a + \ln(8b) = 2 \ln(a + 2b)$.

Rút gọn biểu thức: $P = \log_b 2a + \log_{\frac{a}{2}} 2b - \frac{1}{\log_8 b}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với } a, b \text{ là các số thực dương khác 1, ta có: } \ln a + \ln(8b) &= 2 \ln(a + 2b) \Leftrightarrow \ln(8ab) = \ln(a + 2b)^2 \\ &\Leftrightarrow 8ab = (a + 2b)^2 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } P = \log_b 4b + \log_b 2b - \log_b 8 = \log_b \frac{8b^2}{8} = \log_b b^2 = 2.$$

Câu 7

[Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương và a khác 1. Rút gọn biểu thức:

$$P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2 \ln b}{\ln a} - 1}.$$

Lời giải

Với a, b là các số thực dương và a khác 1, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(\log_a a + \log_a b)^2 - 2 \log_a b - 1} \\ &= \sqrt{(1 + \log_a b)^2 - 2 \log_a b - 1} \\ &= \sqrt{1 + 2 \log_a b + \log_a^2 b - 2 \log_a b - 1} = \sqrt{\log_a^2 b} = |\log_a b|. \end{aligned}$$

Câu 8

[Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương và khác 1. Rút gọn biểu thức:

$$P = \frac{\log_a(a^3 b^2) - \log_b\left(\frac{b^3}{a^2}\right)}{\log_a^2 b + 1}.$$

Lời giải

Với a, b là các số thực dương và khác 1, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\log_a a^3 + \log_a b^2 - (\log_b b^3 - \log_b a^2)}{\log_a^2 b + 1} \\ &= \frac{3 + 2\log_a b - 3 + 2\log_b a}{\log_a^2 b + 1} = \frac{2\left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b}\right)}{\log_a^2 b + 1} \\ &= \frac{2\left(\frac{\log_a^2 b + 1}{\log_a b}\right)}{\log_a^2 b + 1} = \frac{2}{\log_a b} = 2\log_b a. \end{aligned}$$

Câu 9

[Mức độ 3] Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $ab \neq 1$. Rút gọn biểu thức $P = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1 = \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 2\right) \left(\log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a(ab)}\right) \log_b a - 1 \\ &= \frac{\log_a^2 b + 2\log_a b + 1}{\log_a b} \cdot \left(\log_a b - \frac{\log_a b}{1 + \log_a b}\right) \log_b a - 1 \\ &= \frac{(\log_a b + 1)^2}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a^2 b}{1 + \log_a b} \cdot \log_b a - 1 = (\log_a b + 1) \cdot \log_a b \cdot \log_b a - 1 = \log_a b. \end{aligned}$$

Câu 10

[Mức độ 3] Cho a, x là số thực dương khác 1 và n là số tự nhiên khác 0.

Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^4} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{2n}} x}$.

Lời giải

$$P = \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^4} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{2n}} x} = \log_x a^2 + \log_x a^4 + \dots + \log_x a^{2n} = \log_x a^{2+4+\dots+2n}.$$

$$\text{Ta có } 2 + 4 + \dots + 2n = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = n(n + 1).$$

$$\text{Do đó } P = \log_x a^{n(n+1)} = n(n + 1) \log_x a.$$

DẠNG 3: SO SÁNH LÔGARIT

Câu 1

[Mức độ 1] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_3 4$ và $\log_3 5$.

b. $\log_{\frac{1}{2}} 5$ và $\log_{\frac{1}{2}} 6$.

Lời giải

a. Ta có $\begin{cases} 4 < 5 \\ 3 > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3 4 < \log_3 5$.

b. Ta có $\begin{cases} 5 < 6 \\ 0 < \frac{1}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 6$.

Câu 2

[Mức độ 1] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_2 3$ và $\log_3 \frac{1}{2}$.

b. $3^{\log_{0,1} 5}$ và $5^{\log_{0,1} 2^{-2}}$.

Lời giải

a. Ta có $\log_2 3 > \log_2 1 \Rightarrow \log_2 3 > 0$; $\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 1 \Rightarrow \log_3 \frac{1}{2} < 0$. Do đó $\log_2 3 > \log_3 \frac{1}{2}$.

b. Ta có $\log_{0,1} 5 < \log_{0,1} 1 \Rightarrow \log_{0,1} 5 < 0 \Rightarrow 3^{\log_{0,1} 5} < 3^0$ hay $3^{\log_{0,1} 5} < 1$.

Mặt khác, $\log_{0,1} 2^{-2} > \log_{0,1} 1 \Rightarrow \log_{0,1} 2^{-2} > 0 \Rightarrow 5^{\log_{0,1} 2^{-2}} > 5^0$ hay $5^{\log_{0,1} 2^{-2}} > 1$.

Do đó $3^{\log_{0,1} 5} < 5^{\log_{0,1} 2^{-2}}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_2 7$ và $\log_3 7$.

b. $\log_{\frac{2}{3}} 5$ và $\log_{\frac{3}{4}} 5$.

Lời giải

a. Ta có $\log_2 7 = \log_2 3 \cdot \log_3 7 \Rightarrow \frac{\log_2 7}{\log_3 7} = \log_2 3$.

Lại có $\begin{cases} 3 > 2 \\ 2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_2 3 > \log_2 2 \Rightarrow \log_2 3 > 1$.

Do đó $\frac{\log_2 7}{\log_3 7} > 1$. Mà $\log_3 7 > \log_3 1 = 0$. Nên $\log_2 7 > \log_3 7$.

b. Ta có $\log_{\frac{2}{3}} 5 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{4} \cdot \log_{\frac{3}{4}} 5 \Rightarrow \frac{\log_{\frac{2}{3}} 5}{\log_{\frac{3}{4}} 5} = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{4}$.

Lại có $\begin{cases} \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1 \\ 0 < \frac{2}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{4} > \log_{\frac{2}{3}} 1$. Hay $1 > \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{4} > 0$.

Do đó $0 < \frac{\log_{\frac{2}{3}} 5}{\log_{\frac{3}{4}} 5} < 1$. Đồng thời $\log_{\frac{3}{4}} 5 < \log_{\frac{3}{4}} 1 = 0$. Nên $\log_{\frac{2}{3}} 5 > \log_{\frac{3}{4}} 5$.

Câu 4

[Mức độ 2] Không sử dụng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_2 9$ và $\log_3 7$.

b. $4 \log 2 + \log 3$ và $3 \ln 5$.

Lời giải

a. Ta có $\log_2 9 > \log_2 7$. Mà $\log_2 7 > \log_3 7$. Do đó $\log_2 9 > \log_3 7$.

b. Ta có $4 \log 2 + \log 3 = \log 2^4 \cdot 3 = \log 48 = \log e \cdot \ln 48$.

Ta có $\frac{\log 48}{\ln 48} = \log e < \log 10 = 1$ và $\ln 48 > \ln 1 = 0$ nên $\log 48 < \ln 48$ (1).

Mặt khác, $3 \ln 5 = \ln 5^3 = \ln 125$ và $\ln 125 > \ln 48$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\log 48 < \ln 125$. Hay $4 \log 2 + \log 3 < 3 \ln 5$.

Câu 5

[Mức độ 2] Không dùng máy tính, hãy so sánh:

a. $\log_{\pi} (\log_{0,1} 0,2)$ và $\log_{\pi} (\log_{0,1} 0,3)$.

b. $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$.

c. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80}$ và $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15 + \sqrt{2}}$.

d. $\log_3 4$ và $\log_4 5$.

Lời giải

a. Ta có: $\begin{cases} 0,2 < 0,3 \\ 0 < 0,1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_{0,1} 0,2 > \log_{0,1} 0,3$.

Lại có: $\begin{cases} \pi > 1 \\ \log_{0,1} 0,2 > \log_{0,1} 0,3 \end{cases} \Rightarrow \log_{\pi} (\log_{0,1} 0,2) > \log_{\pi} (\log_{0,1} 0,3)$.

Vậy $\log_{\pi} (\log_{0,1} 0,2) > \log_{\pi} (\log_{0,1} 0,3)$.

b. Ta có: $\log_6 1,1 > 0$ nên $3^{\log_6 1,1} > 3^0 = 1$ (vì $3 > 1$).

$\log_6 0,99 < 0$ nên $7^{\log_6 0,99} < 7^0 = 1$ (vì $7 > 1$).

Vậy $3^{\log_6 1,1} > 7^{\log_6 0,99}$.

c. Ta có: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 4$ và $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15 + \sqrt{2}} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$.

Vậy $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15 + \sqrt{2}}$.

d. Ta có: $\log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{\ln 3 + \ln \frac{4}{3}}{\ln 3} = 1 + \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 3}$ và $\log_4 5 = \frac{\ln 5}{\ln 4} = \frac{\ln 4 + \ln \frac{5}{4}}{\ln 4} = 1 + \frac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 4}$.

Lại có: $\begin{cases} \frac{5}{4} < \frac{4}{3} \\ 4 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln \frac{5}{4} < \ln \frac{4}{3} \\ \ln 4 > \ln 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 3} > \frac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 4}$.

Vậy $\log_3 4 > \log_4 5$.

Câu 6

[Mức độ 2] Có thể kết luận gì về giá trị của a nếu biết:

a. $\log_{2019}(4a) \geq \log_{2019}(a^2 + 4)$. b. $\log_{\frac{1}{\pi}}(2a^2 + 2) > \log_{\frac{1}{\pi}}(5a)$.

Lời giải

a. Điều kiện: $a > 0$.

Ta có: $\begin{cases} 2019 > 1 \\ \log_{2019}(4a) \geq \log_{2019}(a^2 + 4) \end{cases} \Leftrightarrow 4a \geq a^2 + 4$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$, (thỏa điều kiện).

Vậy $a = 2$.

b. Điều kiện: $a > 0$.

Ta có $\begin{cases} 0 < \frac{1}{\pi} < 1 \\ \log_{\frac{1}{\pi}}(2a^2 + 2) > \log_{\frac{1}{\pi}}(5a) \end{cases} \Leftrightarrow 2a^2 + 2 < 5a$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 5a + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 2$, (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\frac{1}{2} < a < 2$.

Câu 7

[Mức độ 2] Có thể kết luận gì về giá trị của a nếu biết:

a. $\log_{a^2-2a+1}(\pi) \geq \log_{a^2-2a+1}(e)$. b. $\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{2019}\right) \leq \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{2020}\right)$.

Lời giải

a. Điều kiện: $\begin{cases} a^2 - 2a + 1 > 0 \\ a^2 - 2a + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases} (*)$.

Ta có $\begin{cases} \pi > e \\ \log_{a^2-2a+1} \pi \geq \log_{a^2-2a+1} e \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 1$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 2 \end{cases}$, (thỏa điều kiện (*)).

Vậy $a < 0$ hoặc $a > 2$.

b. Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{2019} > \frac{1}{2010} \\ \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{2019}\right) \leq \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{2020}\right) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \frac{1-a}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1, \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $a > 1$.

Câu 8

[Mức độ 3] Cho a và b là hai số thực dương tùy ý.

Đặt $x = \ln(a^2 - ab + b^2)^{1000}$, $y = 1000 \ln a - \ln \frac{1}{b^{1000}}$. Hãy so sánh $x; y$.

Lời giải

Với $a, b > 0$, ta có $x = \ln(a^2 - ab + b^2)^{1000} = 1000 \ln(a^2 - ab + b^2)$.

$$y = 1000 \ln a - \ln \frac{1}{b^{1000}} = 1000 \ln a + 1000 \ln b = 1000 \ln(ab).$$

$$\text{Xét hiệu } x - y = 1000 [\ln(a^2 - ab + b^2) - \ln(ab)] \quad (1).$$

$$\text{Lại có } (a^2 - ab + b^2) - ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab > 0$$

$$\Rightarrow \ln(a^2 - ab + b^2) \geq \ln(ab) \quad (2).$$

Khi đó từ (1) và (2) $\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b > 0$. Vậy $x \geq y$.

Câu 9

[Mức độ 3] Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < 2 < c$. Hãy so sánh các số

$$A = \log_c(b - a) \text{ và } B = \log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a).$$

Lời giải

Ta có $1 < a < b$ nên $\log_a b > 1 \Rightarrow \log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b) > 0$.

Lại có $1 < a < c$ nên $\log_c a < 1$ suy ra $0 > \log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$.

$$\text{Do đó } B = \log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a)$$

$$> \log_b(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_b(\log_c a)$$

$$= \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b(1) = 0 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} 1 < a < b < 2 \\ c > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < b - a < 1 \\ c > 1 \end{cases} \Rightarrow A = \log_c(b - a) < 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $B > A$.

Câu 10

[Mức độ 3] Với n là số nguyên lớn hơn 1. Hãy so sánh các số $A = \log_n(n+1)$ và $B = \log_{n+1}(n+2)$.

Lời giải

Cách 1. Tổng quát hóa ví dụ 1 câu d.

$$A = \log_n(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln \frac{n+1}{n}}{\ln n} = 1 + \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n} \quad (1).$$

$$B = \log_{n+1}(n+2) = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1) + \ln \frac{(n+2)}{(n+1)}}{\ln(n+1)} = 1 + \frac{\ln \frac{(n+2)}{(n+1)}}{\ln(n+1)} \quad (2).$$

Ta có: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ và $n+1 > n \Rightarrow \ln(n+1) > \ln(n)$.

Do đó $\frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n} > \frac{\ln \frac{(n+2)}{(n+1)}}{\ln(n+1)}$ (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow A > B$.

Cách 2.

$$A = \log_n(n+1) = \log_n n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$B = \log_{n+1}(n+2) = \log_{n+1}(n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \log_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Ta có $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ (vì $n > 1$)

và $\log_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \log_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

Do đó $A > B$.

DẠNG 4: MAX – MIN CỦA BIỂU THỨC LÔGARIT

Câu 1

[Mức độ 2] Cho số thực $a \in \left[\frac{1}{27}; 3\right]$ và biểu thức $P = 9\log_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Lời giải

Ta có: $P = \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}^3 a + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - 3\log_{\frac{1}{3}} a + 1$.

Đặt $\log_{\frac{1}{3}} a = t$, vì $a \in \left[\frac{1}{27}; 3\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$. Khi đó $P = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 1$.

Xét $f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$, $f'(t) = t^2 + 2t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 3] \\ t = -3 \notin [-1; 3] \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	-1	1	3
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{2}{3}$	10

Vậy $\min_{\left[\frac{1}{27}; 3\right]} P = \min_{[-1; 3]} f(t) = -\frac{2}{3}$ khi $t = 1$ hay $a = \frac{1}{3}$, $\max_{\left[\frac{1}{27}; 3\right]} P = \max_{[-1; 3]} f(t) = 10$ khi $t = 3$ hay $a = \frac{1}{27}$.

Câu 2

[Mức độ 2] Cho x, y là 2 số thực dương thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x + 2y^3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2 x - \log_2 y$.

Lời giải

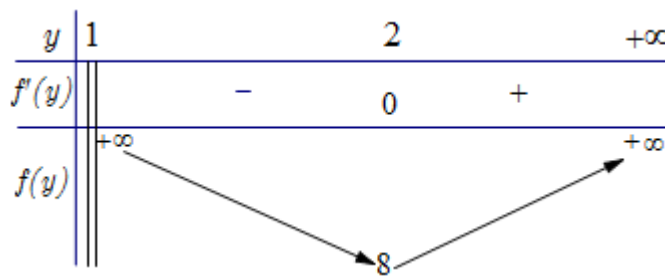
Ta có: $\log x + \log y \geq \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow \log(xy) \geq \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow xy \geq x + 2y^3 \Leftrightarrow x(y - 1) \geq 2y^3$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{2y^3}{y-1} > 0$, (vì $\begin{cases} x > 0 \\ 2y^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow y > 1$).

Khi đó $P = \log_2 x - \log_2 y = \log_2 \frac{x}{y} \geq \log_2 \frac{\frac{2y^3}{y-1}}{y} = \log_2 \left(\frac{2y^2}{y-1} \right)$.

Xét hàm số $f(y) = \frac{2y^2}{y-1}; y > 1$. Ta có: $f'(y) = 2 \cdot \frac{y^2 - 2y}{(y-1)^2}$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên



Suy ra $P \geq \log_2 \frac{2y^2}{y-1} \geq \log_2 8 = 3$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{2y^3}{y-1} = 16 \end{cases}$.

Vậy min $P = 3$ khi $x = 16, y = 2$.

Câu 3

[Mức độ 3] Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1$.

Lời giải

Ta có $(3b-2)^2 = 9b^2 - 12b + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4(3b-1)}{9} \leq b^2$.

Suy ra $P \geq \log_a b^2 + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1 \Leftrightarrow P \geq 2 \log_a b + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 2 \log_a a + 1$

$\Leftrightarrow P \geq 2 \log_a \frac{b}{a} + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a + 1$.

Vì $0 < b < a < 1 \Rightarrow \frac{b}{a} < 1$ suy ra $\log_a \frac{b}{a} > 0; \log_{\frac{b}{a}} a > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương $\log_a \frac{b}{a}; \log_a \frac{b}{a}; 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a$,

Ta có $P \geq 3 \sqrt[3]{\log_a \frac{b}{a} \cdot \log_a \frac{b}{a} \cdot 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a} + 1 = 7$.

Dấu '=' xảy ra khi $\begin{cases} 3b = 2 \\ \log_a \frac{b}{a} = 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ \log_a \frac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1$ bằng 7 khi $\begin{cases} a = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Câu 4

[Mức độ 3] (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$.

Lời giải

Đặt $t = \log_a b$, vì $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$ nên $\frac{1}{2} \leq t < 1$.

Ta có $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{1}{1 - \log_a b} + 4(\log_b a - 1) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4$ trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; 1 \right)$ ta có

$$f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4}{t^2} = \frac{(3t-2)(2-t)}{t^2 \cdot (1-t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \\ t = \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	6	5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min P = \min_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right)} f(t) = 5$ khi $t = \frac{2}{3}$ hay $\log_a b = \frac{2}{3}$.

Vậy $\min P = 5$ khi $b = \sqrt[3]{a^2}$.

Câu 5

[Mức độ 3] Cho $m = \log_a (\sqrt[3]{ab})$ với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $m = \frac{1}{3} \log_a (ab) = \frac{1}{3} (1 + \log_a b) \Rightarrow \log_a b = 3m - 1$.

$$P = \log_a^2 b + \frac{16}{\log_a b} \Leftrightarrow P = (3m-1)^2 + \frac{16}{3m-1} \Leftrightarrow P = (3m-1)^2 + \frac{8}{3m-1} + \frac{8}{3m-1}.$$

Vì $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b = 3m - 1 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho ba số dương $(3m-1)^2; \frac{1}{3m-1}; \frac{1}{3m-1}$ ta có:

$$P = (3m-1)^2 + \frac{8}{3m-1} + \frac{8}{3m-1} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(3m-1)^2 \cdot \frac{64}{(3m-1)^2}} \Leftrightarrow P \geq 12.$$

Dấu bằng xảy ra khi $(3m-1)^2 = \frac{8}{3m-1} \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy với $m = 1$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6

[Mức độ 3] Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x, y \leq 1 \\ \frac{x+y}{1-xy} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x, y \leq 1 \\ x+y > 0; 1-xy > 0 \end{cases}.$

Khi đó $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) - \log_3 (1-xy) + x + y + xy - 1 = 0$$

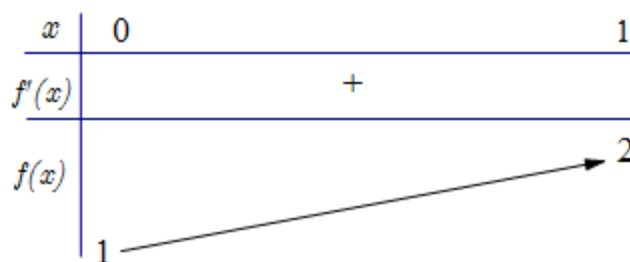
$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) + (x+y) = \log_3 (1-xy) + (1-xy) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$, ta thấy $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $(*) \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Leftrightarrow y(x+1) = 1-x \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{x+1}$. Thay vào $P = 2x + y$ ta được

$$P = 2x + \frac{1-x}{x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{1-x}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$. Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 1] \\ x = -2 \notin [0; 1] \end{cases}.$

Bảng biến thiên



Vậy $\min P = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 1$ khi $x = 0, y = 1$.

Nhận xét: Với bài này sau khi tìm được mối liên hệ giữa x, y : $x + y = 1 - xy$ ta có thể làm tiếp như sau:
 $P = 2x + y = x + x + y = x + 1 - xy = 1 + x(1 - y) \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0, y = 1$ (thỏa các điều kiện của đề bài).

Vậy $P_{\min} = 1$ khi $x = 0, y = 1$.

Câu 7

[Mức độ 4] Cho $a, b > 1$. Tính $S = \log_a \sqrt{ab}$ khi $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Do $a, b > 1$ nên $\log_a b > 0$.

$$\text{Ta có } P = \log_a^2 b + \frac{16}{\log_a b} = \log_a^2 b + \frac{8}{\log_a b} + \frac{8}{\log_a b} \geq 3 \sqrt{\log_a^2 b \cdot \frac{8}{\log_a b} \cdot \frac{8}{\log_a b}} = 12.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \log_a^2 b = \frac{8}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a^3 b = 8 \Leftrightarrow \log_a b = 2.$$

$$\text{Khi đó } S = \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \log_a ab = \frac{1}{2} (1 + \log_a b) = \frac{3}{2}.$$

Câu 8

[Mức độ 4] Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 (1-ab) - \log_2 (a+b) = 2(ab-1) + (a+b) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (1-ab) + 1 + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [2(1-ab)] + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b).$$

$$\text{Xét } f(t) = \log_2 t + t, t > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\Rightarrow f(2(1-ab)) = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow (2a+1)b = 2-a, (0 < a < 2) \Leftrightarrow b = \frac{2-a}{2a+1}.$$

$$\text{Khi đó } P = a + \frac{2(2-a)}{2a+1}. \text{ Ta có } P' = \frac{(2a+1)^2 - 10}{(2a+1)^2}.$$

$$P' = 0 \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \in (0;2) \\ a = \frac{-1-\sqrt{10}}{2} \notin (0;2) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

a	0	$\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$	2
P'	-	0	+
P			
		$\frac{-3+2\sqrt{10}}{2}$	

Vậy $\min P = \frac{-3+2\sqrt{10}}{2}$.

Câu 9

[Mức độ 4] Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 16 \Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 16(\sqrt{y^2 + 1} - y) & (1) \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 16(\sqrt{x^2 + 1} - x) & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) + (2) $\Rightarrow x + y = \frac{15}{17}(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1})$.

Trong hệ trục tọa độ Oxy , xét $\vec{u} = (x; 1), \vec{v} = (y; 1), \vec{u} + \vec{v} = (x + y; 2)$.

Ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \geq \sqrt{(x + y)^2 + 4}$.

Suy ra $x + y = \frac{15}{17}(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}) \geq \frac{15}{17}\sqrt{(x + y)^2 + 4}$, (3).

Đặt $x + y = t, t > 2$, biểu thức (3) trở thành:

$$t \geq \frac{15}{17}\sqrt{t^2 + 4} \Leftrightarrow 17t \geq 15\sqrt{t^2 + 4} \Leftrightarrow 289t^2 \geq 225(t^2 + 4) \Leftrightarrow 64t^2 - 900 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{15}{4} \\ t \leq \frac{-15}{4} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện $t > 2 \Rightarrow t \geq \frac{15}{4} \Rightarrow x + y \geq \frac{15}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ x + y = \frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{15}{8}.$

Vậy $P_{\min} = \frac{15}{4}$ tại $x = y = \frac{15}{8}.$

Câu 10

[Mức độ 4] Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}.$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \ln x \geq 0 \\ 1 + \ln y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 2; \frac{1}{e} \leq y < 2 \quad (1).$

Ta có : $(x-3)(x+8) = ey(ey-11) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = e^2 y^2 - 11ey$

$\Leftrightarrow e^2 y^2 - 11ey - (x^2 + 5x - 24) = 0 \quad (*).$ Có $\Delta = (2x+5)^2 > 0, \forall x \in [1; 2).$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt: $ey = 3 - x, ey = x + 8.$

+) Với $ey = x + 8$, không xảy ra vì: $x + 8 > 8, ey < 8$, (do điều kiện (1)).

+) Với $ey = 3 - x \Rightarrow y = \frac{3-x}{e}, 1 \leq x < 2.$

Cách 1:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1; 2).$

Ta có $P' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}}.$

$P' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}} = 0$

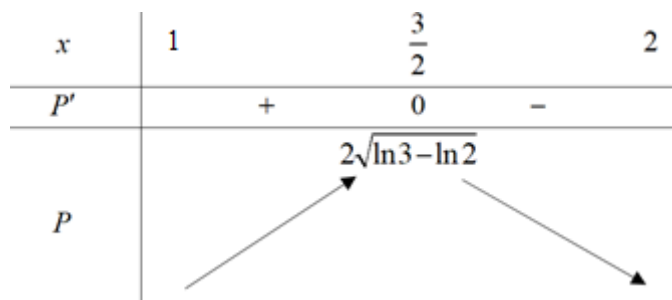
$\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} - x\sqrt{\ln x} = 0$

$\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} = x\sqrt{\ln x} \quad (*)$

Xét hàm $f(t) = t\sqrt{\ln t}$ trên $[1; +\infty)$, có $f'(t) = \sqrt{\ln t} + \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} > 0, \forall t \in (1; +\infty).$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 3-x = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

Bảng biến thiên:



Từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ tại $x = \frac{3}{2}$.

Cách 2:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1; 2]$.

$$\Rightarrow P^2 = \left[\sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)} \right]^2 \leq 2(\ln x + \ln(3-x)) = 2\ln x(3-x), \text{ (BĐT Bunhiacopxki)}$$

$$\leq 2\ln \left(\frac{x+3-x}{2} \right)^2 = 4(\ln 3 - \ln 2) \text{ (BĐT Côsi)}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln(3-x)} \\ x = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $P \leq 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln y}$ bằng $2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$, tại $x = \frac{3}{2}$.

DẠNG 5: TÍNH LOGARIT THEO LOGARIT KHÁC

DẠNG 5.1: TÍNH LOGARIT THEO 1 LOGARIT KHÁC

Câu 1

[Mức độ 1] Cho $\log_3 2 = a$. Tính $\log_3 18$ theo a .

Lời giải

Ta có: $\log_3 18 = \log_3 (2 \cdot 3^2) = \log_3 2 + \log_3 3^2 = \log_3 2 + 2 = a + 2$.

Câu 2

[Mức độ 2] Cho $b = \log_5 3$. Tính $\log_{81} 25$ theo b .

Lời giải

Ta có: $\log_{81} 25 = \log_{3^4} 5^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \log_3 5 = \frac{1}{2 \log_5 3} = \frac{1}{2b}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Tính $A = \log_m 16m$ theo a .

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $A = \log_m 16m = \log_m 16 + 1 = 4 \log_m 2 + 1 = \frac{4}{\log_2 m} + 1 = \frac{4+a}{a}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

Lời giải

$$\text{Ta có } a = \log_{12} 3 = \frac{1}{\log_3 12} = \frac{1}{1 + 2\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{1-a}.$$

$$\text{Khi đó: } \log_{24} 18 = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 2)}{\log_2 (2^3 \cdot 3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{2a}{1-a}}{3 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{1+3a}{3-a}.$$

Câu 5

[Mức độ 2] Cho $\log_3 15 = a$. Tính $A = \log_{25} 15$ theo a .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_3 15 = a \Leftrightarrow \log_3 3 + \log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = a - 1.$$

$$\text{Khi đó: } A = \log_{25} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 25} = \frac{1 + \log_3 5}{2\log_3 5} = \frac{a}{2(a-1)}.$$

DẠNG 5.2: TÍNH LOGARIT THEO 2 LOGARIT KHÁC

Câu 1

[Mức độ 1] Cho $\log_2 5 = a; \log_3 5 = b$. Tính $\log_5 6$ tính theo a và b .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_5 6 = \log_5 2 + \log_5 3 = \frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

Câu 2

[Mức độ 3] Cho các số dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a (bc) = 2; \log_b (ca) = 4$. Tính giá trị của $\log_c (ab)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log_a (bc) = 2 \\ \log_b (ca) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = a^2 \\ ca = b^4 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{a^2}{b} = \frac{b^4}{a} \Rightarrow a^3 = b^5 \Rightarrow a = b^{\frac{5}{3}}.$$

$$\text{Và } \log_a (bc) = 2 \Leftrightarrow \log_a b + \log_a c = 2 \Leftrightarrow \log_{b^{\frac{5}{3}}} b + \log_a c = 2 \Leftrightarrow \log_a c = \frac{7}{5}.$$

$$\log_b (ca) = 4 \Leftrightarrow \log_b c + \log_b a = 4 \Leftrightarrow \log_b c + \log_b b^{\frac{5}{3}} = 4 \Leftrightarrow \log_b c = \frac{7}{3}.$$

$$\Rightarrow \log_c (ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} = \frac{8}{7}.$$

Câu 3

[Mức độ 2] Cho $a = \log 2, b = \ln 2$. Hãy biểu diễn $\ln 800$ theo a và b .

Lời giải

Ta có: $\ln 800 = 3 \ln 2 + 2 \ln 10 = 3 \ln 2 + 2 \ln 2 \cdot \log_2 10$.

$$= 3 \ln 2 + \frac{2 \ln 2}{\log 2} = 3b + \frac{2b}{a}.$$

Câu 4

[Mức độ 2] Cho $a = \log_{25} 11$, $b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{625} \frac{121}{16}$ theo a và b .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{625} \frac{121}{16} = \frac{1}{4} (\log_5 121 - \log_5 16) = \frac{1}{2} \log_5 11 - \log_5 2.$$

$$\text{Mà } a = \log_{25} 11 = \frac{1}{2} \log_5 11; \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{b} \text{ nên } \log_{625} \frac{121}{16} = a - \frac{1}{b}.$$

Câu 5

[Mức độ 2] Cho $a = \log_3 4$, $b = \log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b .

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{12} 80 = \log_{12} (4^2 \cdot 5) = \log_{12} 4^2 + \log_{12} 5 = 2 \log_{12} 4 + \frac{1}{\log_5 12}$$

$$= \frac{2}{\log_4 12} + \frac{1}{\log_5 4 + \log_5 3} = \frac{2}{\log_4 4 + \log_4 3} + \frac{1}{b + \log_5 3}.$$

$$\text{Từ } a = \log_3 4 \Rightarrow \log_4 3 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_5 3 = \log_5 4 \cdot \log_4 3 = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \log_{12} 80 = \frac{2}{1 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{b + \frac{b}{a}} = \frac{2a}{a+1} + \frac{a}{b(a+1)} = \frac{a+2ab}{ab+b}.$$

DẠNG 5.3: TÍNH LOGARIT THEO 3 LOGARIT KHÁC

Phương pháp: Chọn một cơ số chính, sử dụng công thức đổi cơ số để đưa tất cả các lôgarit về cơ số đã chọn.

Câu 1

[Mức độ 2] Cho $a = \log_3 5$; $b = \log_2 7$; $\log_2 3$. Tính $\log_6 1260$ theo a, b, c .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_6 1260 = 2 + \log_6 35 = 2 + \frac{\log_2 35}{\log_2 6} = 2 + \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3}.$$

$$\text{Mà } \log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ac \text{ nên } \log_6 1260 = 2 + \frac{ac + b}{1 + c}.$$

Câu 2

[Mức độ 2] Cho $a = \ln 8e^2$, $b = \ln 81e$, $c = \log_2 5$. Tính $12 \cdot \ln 12000$ theo a, b, c .

Lời giải

Ta có: $12 \ln 12000 = 12(5 \ln 2 + \ln 3 + 3 \ln 5)$.

$$\text{Mà } a = \ln 8e^2 = 3 \ln 2 + 2 \Rightarrow \ln 2 = \frac{a-2}{3};$$

$$b = \ln 81e = 4 \ln 3 + 1 \Rightarrow \ln 3 = \frac{b-1}{4};$$

$$3 \ln 5 = 3 \log_2 5 \cdot \ln 2 = (a-2)c.$$

$$\text{Suy ra } 12 \ln 12000 = 12 \left(\frac{5(a-2)}{3} + \frac{b-1}{4} + (a-2)c \right) = 12ac + 20a + 3b - 24c - 43.$$

Câu 3

[Mức độ 3] Cho $a = \log_3 5$, $b = \log_2 7$, $c = \log_2 3$ và

$$I = \frac{-1}{\log 126} \left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{149}{150} \right). \text{ Tính } I \text{ theo } a, b, c.$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\log_2 5 = \log_2 3 \log_3 5 = ac$.

$$\text{Ta có: } I = \frac{-1}{\log 126} \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{149}{150} \right) = \frac{\log 150}{\log 126}$$

$$= \log_{126} 150 = \frac{\log_2 150}{\log_2 126}$$

$$= \frac{1 + \log_2 3 + 2 \log_2 5}{1 + 2 \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{1 + c + 2ac}{1 + 2c + b}.$$

Câu 4

[Mức độ 3] Cho $\log_9 5 = a$; $\log_2 7 = b$; $\log_4 12 = c$. Tính $\log_{18} 4200$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } c = \log_4 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 4} = \frac{2 + \log_2 3}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 = 2c - 2.$$

$$a = \log_9 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 9} = \frac{\log_2 5}{2 \log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 5 = 2a \log_2 3 = 2a(2c - 2) = 4ac - 4a.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \log_{18} 4200 &= \frac{\log_2 4200}{\log_2 18} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7)}{\log_2 (2 \cdot 3^2)} = \frac{3 + \log_2 3 + 2 \log_2 5 + \log_2 7}{1 + 2 \log_2 3} \\ &= \frac{3 + 2c - 2 + 2(4ac - 4a) + b}{1 + 2(2c - 2)} = \frac{8ac - 8a + b + 2c + 1}{4c - 3}. \end{aligned}$$

Câu 5

[Mức độ 4] Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_a b = \frac{3}{2}$, $\log_c d = \frac{5}{4}$,

$\log_3 (a - c) = 2$. Tính $\log_3 (b - d)$.

Lời giải

Điều kiện: $a \neq 1, c \neq 1$.

Từ giả thiết ta có: $a^3 = b^2$ (1) và $c^5 = d^4$ (2).

Đặt $a = m^2, c = n^4$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Thay vào (1) và (2) ta có: } \begin{cases} m^6 = b^2 \\ n^{20} = d^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^3)^2 = b^2 \\ (n^5)^4 = d^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = m^3 \\ d = n^5 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } a - c = 9 \Leftrightarrow m^2 - n^4 = 9 \Leftrightarrow (m - n^2)(m + n^2) = 9 \quad (3).$$

$$\text{Do } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } m - n^2 < m + n^2 \text{ và } m + n^2 > 0. \text{ Suy ra } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} m - n^2 = 1 \\ m + n^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \log_3(b - d) = \log_3 93.$$

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1. Biết $3 + 2\log_2 x = \log_2 y$. Hãy biểu thị y theo x .

- A. $y = 2x + 3$. B. $y = 8x^2$. C. $y = x^2 + 8$. D. $y = 3x^2$.

Lời giải

$$3 + 2\log_2 x = \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 2^3 + \log_2 x^2 = \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x^2) = \log_2 y = y = 8x^2. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Ví dụ 2. Nếu $x = (\log_8 2)^{\log_2 8}$ thì $\log_3 x$ bằng:

- A. -3 . B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

Lời giải

$$x = (\log_8 2)^{\log_2 8} = (\log_{2^3} 2)^{\log_2 2^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3^{-3} \Rightarrow \log_3 x = -3. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Ví dụ 3. Độ pH của một chất được xác định bởi công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro trong chất đó tính theo mol/lít (mol/L). Xác định nồng độ ion $[H^+]$ của một chất biết rằng độ pH của nó là 2,44.

- A. $1,1 \cdot 10^8$ mol/L. B. $3,2 \cdot 10^{-4}$ mol/L. C. $3,6 \cdot 10^{-3}$ mol/L. D. $3,7 \cdot 10^{-3}$ mol/L..

Lời giải

$$pH = -\log[H^+].$$

$$\Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2,44} \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L. Chọn đáp án C.}$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $P = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} = \log \frac{ay}{dx}$.

- A. 1. B. $\log \frac{x}{y}$. C. $\log \frac{y}{x}$. D. $\log \frac{a^2 x}{d^2 y}$.

Lời giải

$$P = \log a - \log b + \log b - \log c + \log c - \log d - \log a - \log y + \log d + \log x = \log \frac{x}{y}$$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 5. Với mỗi số nguyên $n, n > 1$, đặt $a_n = (\log_n 2002)^{-1}, b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ và $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$. Tính $b - c$.

A. -2.

B. -1.

C. $\frac{1}{2002}$.

D. $\frac{1}{1001}$.

Lời giải

Chọn B.

Viết lại $a_n = \frac{1}{\log_n 2002} = \log_{2002} n, n > 1$.

$$\begin{aligned} b - c &= (\log_{2002} 2 + \log_{2002} 3 + \log_{2002} 4 + \log_{2002} 5) \\ &\quad - (\log_{2002} 10 + \log_{2002} 11 + \log_{2002} 12 + \log_{2002} 13 + \log_{2002} 14) \\ &= \log_{2002} \frac{2.3.4.5}{10.11.12.13.14} = \log_{2002} \frac{1}{11.13.14} = \log_{2002} \frac{1}{2002} = -1. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!}$.

A. 0,01.

B. 0,1.

C. 1.

D. 10.

Lời giải

Chọn C.

Biểu thức đã cho bằng:

$$\log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \log_{100!} 4 + \dots + \log_{100!} 100 = \log_{100!} (2.3.4. \dots 100) = \log_{100!} 100! = 1.$$

Ví dụ 7. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_3 5$. Hãy tính biểu thức $P = \log_6 60$ theo a và b .

A. $P = 1 + \frac{ab}{1+a}$.

B. $P = 1 + \frac{ab}{1+b}$.

C. $P = \frac{2+b+ab}{1+b}$.

D. $P = \frac{2+a+ab}{1+a}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} P &= 1 + \log_6 10 = 1 + \frac{\log_2 10}{\log_2 6} = 1 + \frac{1 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = 1 + \frac{1 + \log_2 3 \cdot \log_3 5}{1 + \log_2 3} \\ &= 1 + \frac{1 + ab}{1 + a} = \frac{2 + a + ab}{1 + a}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Nếu $P = \frac{S}{(1+k)^n}$ thì n bằng:

A. $\frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1+k)}$.

B. $\log \frac{S}{P(1+k)}$.

C. $\log \frac{S}{P} + \log(1+k)$.

D. $\frac{\log S}{\log [P(1+k)]}$.

Lời giải

Chọn A.

$$P = \frac{S}{(1+k)^n} \Rightarrow (1+k)^n = \frac{S}{P} \Rightarrow n = \log_{1+k} \frac{S}{P} = \frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1+k)}.$$

Ví dụ 9. Biết $\log(xy^3) = 1$ và $\log(x^2y) = 1$. Tính giá trị của $\log(xy)$.

A. $\frac{3}{5}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn A.

$$1 = \log(xy^3) = \log x + 3 \log y \text{ và } 1 = \log(x^2y) = 2 \log x + \log y.$$

$$\text{Từ đó tính được } \log x = \frac{2}{5} \text{ và } \log y = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } \log(xy) = \log x + \log y = \frac{3}{5}.$$

Cách khác: Từ hai điều kiện đã cho, có $xy^3 = 10$ và $x^2y = 10$. Từ đó, tính được: $x = 10^{\frac{2}{5}}$ và $y = 10^{\frac{1}{5}} \Rightarrow xy = 10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{3}{5}} \Rightarrow \log(xy) = \frac{3}{5}$.

CHƯƠNG

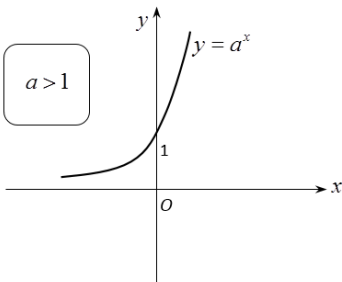
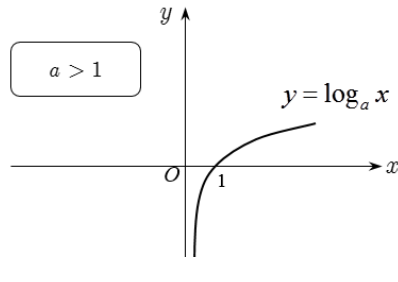
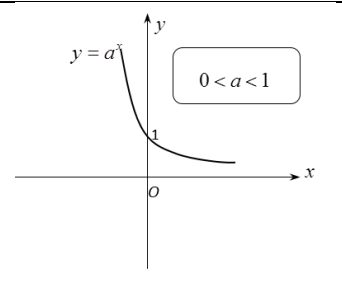
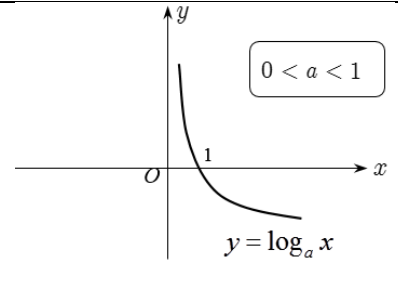
II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

I

LÝ THUYẾT.

	Hàm số mũ	Hàm số logarit
Định nghĩa	Hàm số $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ cơ số a .	Hàm số $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .
Tập xác định	$D = \mathbb{R}$	$D = (0, +\infty)$.
Tập giá trị	$T = (0; +\infty)$	$T = \mathbb{R}$
Tính đơn điệu	$a > 1$: Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. $0 < a < 1$: Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.	$a > 1$: Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D. $0 < a < 1$: Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D.
Đạo hàm	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x > 0) \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Đồ thị		
		
Nhận xét	Đồ thị: - Đi qua điểm $(0; 1)$. - Nằm ở phía trên trục hoành. - Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.	Đồ thị: - Đi qua điểm $(1; 0)$. - Nằm ở bên phải trục tung. - Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT CỦA MŨ VÀ LOGARIT.

$$+) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$+) \text{ Hệ quả: Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) = \ln a.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

CHÚ Ý: Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: GIỚI HẠN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

Câu 1. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}.$

Câu 2. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x}.$

Câu 3. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sqrt{x+1} - 1}.$

Câu 4. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$

Câu 5. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x}.$

Câu 6. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x.$

Câu 7. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$

Câu 8. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}.$

Câu 9. Tìm giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + aa + \dots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n}$.

Câu 10. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{1 - \cos 2x}$.

Câu 11. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1 + 6x) - \ln(1 + 3x)}$.

Câu 12. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\ln(1 + x^2)}$.

Câu 13. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}$.

Câu 14. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1} + 1) - \ln(\sqrt{x+1} + 1)}{x}$.

DẠNG 2: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ MŨ – LOGARIT

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2(2x - x^2)$.

Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2|1 - x^2| + \log_3(x + 2)$.

Câu 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{10}}}$.

Câu 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = 2x + \frac{5}{\log_2 x - 3}$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log(x+3)^2 - \ln(1-2^x) + 5$.

Câu 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right)$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log(\sin 2x + 1)$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_2(x+1) - 2}$.

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2(1 - \sqrt{x+1})$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\ln(x^2 - 9)}{x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16}}$.

Câu 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_3(2x + m)$ xác định với mọi x thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 14. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 16. Ta có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + \log_3 \sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2; 3)$?

Câu 17. Ta có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số

$$y = x + m + \sqrt{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4} + \log_2(x - m + \sqrt{2x^2 + 1})$$
 có tập xác định là $D = \mathbb{R}$?

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

DẠNG 3: ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+2}$.

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^x$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = xe^{-x}$.

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2-2} \cos x$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$.

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x \cdot e^{\tan x}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f'(1)$.

Câu 8. Chứng minh rằng, nếu $y = e^{2x} + 2e^{-x}$ thì $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \ln(\cos x)$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Câu 10. Cho hàm số $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1})$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA HÀM MŨ, HÀM LÔGARÍT

Câu 1. Cho hàm số $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số đã cho trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2; 3]$.

Câu 3. Tính hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = e^x(x^2 - x - 5)$ trên đoạn $[1; 3]$.

Câu 5. Cho $a \geq b > 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_a\left(\frac{a^2}{b}\right) + \log_b\left(\frac{b^3}{a}\right)$.

Câu 6. Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{ab}} b}$.

Câu 7. Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.

Câu 8. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

CHƯƠNG

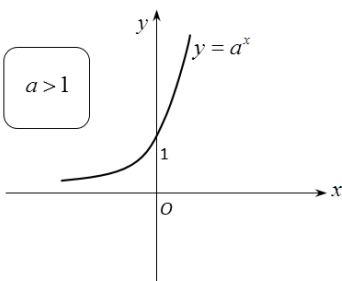
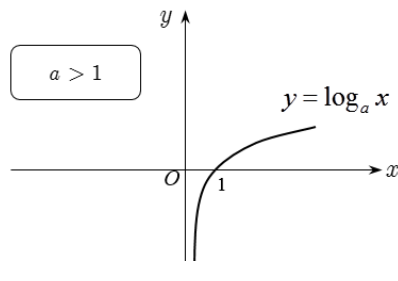
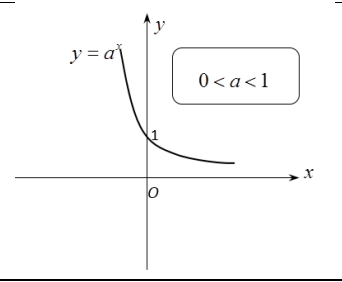
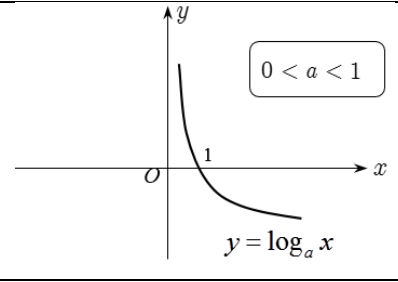
II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT



I LÝ THUYẾT.

	Hàm số mũ	Hàm số logarit
Định nghĩa	Hàm số $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ cơ số a .	Hàm số $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .
Tập xác định	$D = \mathbb{R}$	$D = (0, +\infty)$.
Tập giá trị	$T = (0; +\infty)$	$T = \mathbb{R}$
Tính đơn điệu	$a > 1$: Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. $0 < a < 1$: Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.	$a > 1$: Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D. $0 < a < 1$: Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D.
Đạo hàm	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x > 0) \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Đồ thị		
		
Nhận xét	Đồ thị: - Đi qua điểm $(0; 1)$. - Nằm ở phía trên trục hoành. - Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.	Đồ thị: - Đi qua điểm $(1; 0)$. - Nằm ở bên phải trục tung. - Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT CỦA MŨ VÀ LOGARIT.

$$+) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$+) \text{ Hệ quả: Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) = \ln a.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{CHÚ Ý: Hàm số } y = \log_a f(x) \text{ xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: GIỚI HẠN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

Câu 1. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \frac{e^{ax} - 1}{ax} - b \frac{e^{bx} - 1}{bx} \right) = a - b.$$

Vậy $A = a - b.$

Câu 2. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1}-1}{\sqrt{2x+1}-1} - \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}-1}{\sqrt[3]{1-3x}-1} \right).$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1.$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1}-1}{\sqrt{2x+1}-1} = 1$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x \left[\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \sqrt[3]{1-3x} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{\left[\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \sqrt[3]{1-3x} + 1 \right]} = -1.$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}-1}{\sqrt[3]{1-3x}-1} = -1. \text{ Vậy } A = 2.$$

Câu 3. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sqrt{x+1}-1}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{e^x-1}{x}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} = -\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = -2.$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{e^x-1}{x} = -2. \text{ Vậy } A = -2.$$

Câu 4. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} = \alpha. \text{ Vậy } A = \alpha.$$

Câu 5. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{\sin 2x}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{e^x}+1)} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{1}{4}.$$

Câu 6. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x, \text{ đặt } t = x-1, \text{ khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } t \rightarrow +\infty.$$

$$\Rightarrow A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+2}{t} \right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+2}{t} \left(\frac{t+2}{t} \right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+2}{t} \left[\left(1 + \frac{2}{t} \right)^{\frac{t}{2}} \right]^2 = e^2.$$

Vậy $A = e^2$.

Câu 7. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} \right).$$

$$\Rightarrow A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } A = \frac{3}{2}.$$

Câu 8. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-3) \frac{e^{-3x^2} - 1}{(-3x^2)} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} + \frac{1 - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} \right].$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} (-3) \frac{e^{-3x^2} - 1}{(-3x^2)} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = -3$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+x^2} + \left(\sqrt[3]{1+x^2} \right)^2} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \right] = -\frac{1}{3}.$

Nên $A = -3 - \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$. Vậy $A = -\frac{10}{3}$.

Câu 9. Tìm giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \overbrace{aa + \dots + aa}^{n \text{ số hạng}}}{10^n}$.

Lời giải

$$a + aa + aaa + \dots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ số hạng}} = a \left(1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111 \dots 1}^{n \text{ số hạng}} \right) = \frac{a}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{999 \dots 9}^{n \text{ số hạng}} \right).$$

$$= \frac{a}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \frac{a}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right].$$

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + aa + \dots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{9 \cdot 10^n} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} - \frac{n}{10^n} \right].$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} = \frac{10}{9}.$$

$$\text{Và } n \leq C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \Rightarrow 0 \leq \frac{n}{10^n} \leq \left(\frac{2}{10} \right)^n = \frac{1}{5^n}, \text{ mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10^n} = 0.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{10a}{81}.$$

Câu 10. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{1 - \cos 2x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3 \ln(1 + 3x^2)}{3x^2} : \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right] = \frac{3}{2}.$$

Câu 11. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1 + 6x) - \ln(1 + 3x)}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1 + 6x) - \ln(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) : \left(\frac{\ln(1 + 6x)}{x} - \frac{\ln(1 + 3x)}{x} \right) \\ &= (\ln 6 - \ln 3) : (6 - 3) = \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

Câu 12. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\ln(1 + x^2)}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2x^2} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2} \right) : \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \frac{e^{-2x^2} - 1}{-2x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1 + x^2)^2} + \sqrt[3]{1 + x^2} + 1} \right) : \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Câu 13. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\sin x + \cos x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right] = 1. \end{aligned}$$

Câu 14. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1}+1) - \ln(\sqrt{x+1}+1)}{x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1}+1) - \ln(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1}+1) - \ln 2 - [\ln(\sqrt{x+1}+1) - \ln 2]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{2}\right)}{x} - \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2} + 1\right)}{x} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{2}\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2} \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1}\right)}{\frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1\right) \frac{1}{2} \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2} + 1\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + 1\right)}{2(\sqrt{x+1}+1) \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

DẠNG 2: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ MŨ – LOGARIT**Câu 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2(2x - x^2)$.**Lời giải**Hàm số xác định khi $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (0; 2)$.**Câu 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2|1 - x^2| + \log_3(x + 2)$.**Lời giải**Hàm số xác định khi $\begin{cases} |1 - x^2| > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \neq 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x > -2 \end{cases}$.Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-2; +\infty) \setminus \{\pm 1\}$.**Câu 3.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.**Lời giải**Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$.Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (1; 2)$.**Câu 4.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{10}}}$.**Lời giải**Hàm số xác định khi $e^x - e^{10} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{10}$. Vì $e > 1$ nên ta có $e^x > e^{10} \Leftrightarrow x > 10$.Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (10; +\infty)$.**Câu 5.** Tìm tập xác định của hàm số $y = 2x + \frac{5}{\log_2 x - 3}$.**Lời giải**Hàm số xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 8 \end{cases}$.Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (0; +\infty) \setminus \{8\}$.**Câu 6.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \log(x+3)^2 - \ln(1-2^x) + 5$.**Lời giải**

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} (x+3)^2 > 0 \\ 1-2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \neq 0 \\ 2^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ 2^x < 2^0 \end{cases} \quad (*)$.

Vì $a = 2 > 1$ nên hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} x \neq -3 \\ x < 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; -3) \cup (-3; 0)$.

Câu 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln \left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \right)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \end{cases} \quad (*)$.

Vì $a = \frac{1}{3} < 1$ nên hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Vậy tập xác định $D = (-1; 0)$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log(\sin 2x + 1)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_2(x+1) - 2}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_2(x+1) - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_2(x+1) \geq \log_2 4 \end{cases} \quad (*)$

Vì $a = 2 > 1$ nên hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = [3; +\infty)$.

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2(1 - \sqrt{x+1})$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 1 - \sqrt{x+1} > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = [-1; 0)$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\ln(x^2 - 9)}{x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 8x + 16 \geq 0 \\ x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \\ (x-4)^2 \geq 0, \forall x \\ x - 4 + |x - 4| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \\ |x - 4| \neq 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \\ 4 - x < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \Leftrightarrow x > 4. \\ x > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (4; +\infty)$.

Câu 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2 - 2x - m + 1 > 0$.

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m < 0$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_3(2x + m)$ xác định với mọi x thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 2x + m > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow x > -\frac{m}{2}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -4. \text{ Vậy giá trị } m \text{ cần tìm là } m \geq -4.$$

Câu 14. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$ Ta có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} x^2 - 2x + 3m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \log_3(x^2 - 2x + 3m) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3m > 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m > \frac{2}{3}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ Ta có tập xác định là $D = \mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Đặt $2^x = t, t > 0$. Khi đó, bất phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - t + m > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m > -t^2 + t, \forall t > 0 \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t, t > 0$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = -2t + 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	0
$f(t)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max_{(0;+\infty)} f(t) = \frac{1}{4}$.

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow m > \max_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Câu 16. Ta có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + \log_3 \sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2;3)$?

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2m+1-x > 0 \\ x-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2m+1 \\ x > m \end{cases}.$$

Nếu $2m+1 \leq m \Leftrightarrow m \leq -1$ thì tập xác định của hàm số là $D = \emptyset \Rightarrow m \leq -1$ (loại).

Nếu $2m+1 > m \Leftrightarrow m > -1$ thì tập xác định của hàm số là $D = (m; 2m+1)$.

$$\text{Để hàm số xác định trên } (2;3) \text{ thì } \begin{cases} m \leq 2 \\ 2m+1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2 \text{ (tmđk } m > -1).$$

Do m là số tự nhiên nên $m = 1; m = 2$. Vậy Ta có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Cách 2:

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + \log_3 \sqrt{x-m}$.

Đặt $g(x) = 2m+1-x$ thì $y = g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(2;3)$;

$h(x) = x-m$ thì $y = h(x)$ đồng biến trong khoảng $(2;3)$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $(2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1-x > 0, \forall x \in (2;3) \\ x-m > 0, \forall x \in (2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1-3 \geq 0 \\ 2-m \geq 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{N}$ suy ra $m \in \{1;2\}$. Vậy Ta có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 17. Ta có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số

$y = x + m + \sqrt{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4} + \log_2 \left(x - m + \sqrt{2x^2 + 1} \right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$?

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 \geq 0 \\ x - m + \sqrt{2x^2 + 1} > 0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+) Ta có: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 = [x + (m+1)]^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+) $x - m + \sqrt{2x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 + 1} > m, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ với $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $x + \sqrt{2x^2 + 1} > m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2018, -2017, -2016, \dots, -1, 0\}$.

Kết luận: Ta có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x, t \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_3 x$ luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, khi đó hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ trở thành

$$y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3}, t \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số

$$y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3} \text{ xác định với } \forall t \in \mathbb{R}.$$

+) Với $m = 0$: $y = \frac{1}{-4t + 3}$ xác định trên tập $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\}$. Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

+) Với $m \neq 0$: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 = 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = 4 - m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

DẠNG 3: ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ - LOGARIT**Câu 1.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+2}$.**Lời giải**

$$y = 2^{x^2+2} \Rightarrow y' = (x^2 + 2)' \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 = 2x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{x^2+3} \cdot \ln 2.$$

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^x$.**Lời giải**

$$y = (x^2 + 2x)e^x \Rightarrow y' = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x.$$

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = xe^{-x}$.**Lời giải**

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x}.$$

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2-2} \cos x$.**Lời giải**

$$y = e^{x^2-2} \cos x \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2-2} \cos x - e^{x^2-2} \sin x = (2x \cos x - \sin x) e^{x^2-2}.$$

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$.**Lời giải**

$$\begin{aligned} y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \Rightarrow y' &= \frac{(3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3)(3^x + 3^{-x}) - (3^x - 3^{-x})(3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3)}{(3^x + 3^{-x})^2} \\ &= \frac{(3^x + 3^{-x})^2 - (3^x - 3^{-x})^2}{(3^x + 3^{-x})^2} \ln 3 = \frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}. \end{aligned}$$

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x \cdot e^{\tan x}$.**Lời giải**

$$y = \cos x \cdot e^{\tan x} \Rightarrow y' = -\sin x \cdot e^{\tan x} + \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\tan x} = e^{\tan x} \left(\frac{1}{\cos x} - \sin x \right).$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f'(1)$.**Lời giải**Sử dụng công thức: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ Vậy } f'(1) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Câu 8. Chứng minh rằng, nếu $y = e^{2x} + 2e^{-x}$ thì $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = 2e^{2x} - 2e^{-x}$; $y'' = (y')' = 4e^{2x} + 2e^{-x}$; $y''' = (y'')' = 8e^{2x} - 2e^{-x}$.

Suy ra: $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \ln(\cos x)$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Lời giải

Phân tích: Sử dụng các công thức: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\cos x)' = -\sin x$.

Đạo hàm: $y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Lời giải

Phân tích: Sử dụng các công thức: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})'}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x(2\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}$.

DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA HÀM MŨ, HÀM LÔGARIT

Câu 1. Cho hàm số $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số đã cho trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

$$\text{Đặt } y = f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x} - x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \\ x = -1 \notin \left(\frac{1}{2}; 2\right) \end{cases}.$$

$$f(1) = \frac{1}{2}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \frac{7}{8}; \quad f(2) = \ln 2 - 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là $M = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2; 3]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 2 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = 1 - \ln x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2; 3].$$

$$\text{Khi đó: } y(2) = 4 - 2\ln 2; \quad y(3) = 6 - 3\ln 3; \quad y(e) = e.$$

$$\text{Vậy } \max_{[2;3]} y = e.$$

Câu 3. Tính hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x - \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{e}; e\right) \\ x = -\frac{1}{2} \notin \left(\frac{1}{e}; e\right) \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e^2} + 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2, \quad f(e) = 2e^2 - 1.$$

Suy ra $M = \max_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} f(x) = 2e^2 - 1$, $m = \min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} f(x) = \frac{1}{2} + \ln 2$.

Do đó $M - m = 2e^2 - \ln 2 - \frac{3}{2}$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = e^x(x^2 - x - 5)$ trên đoạn $[1; 3]$.

Lời giải

$$y = f(x) = e^x(x^2 - x - 5) \Rightarrow y' = e^x(x^2 - x - 5) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x - 6).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -3 \notin [1; 3] \end{cases}.$$

Ta có $f(1) = -5e$, $f(2) = -3e^2$, $f(3) = e^3$. Vậy $\max_{[1; 3]} y = e^3$.

Câu 5. Cho $a \geq b > 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_a \left(\frac{a^2}{b} \right) + \log_b \left(\frac{b^3}{a} \right)$.

Lời giải

$$S = 2 - \log_a b + 3 - \log_b a = 5 - (\log_a b + \log_b a).$$

Ta có $a \geq b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$; $\log_b a > 1$. Khi đó áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$S \leq 5 - 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \log_a b = \log_b a \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_a b} \Leftrightarrow (\log_a b)^2 = 1 \Leftrightarrow \log_a b = 1 \text{ (vì } \log_a b > 0)$$

$$\Leftrightarrow a = b > 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là 3 khi $a = b > 1$.

Câu 6. Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b} = \log_a(ab) + \log_b \sqrt[4]{ab} = 1 + \log_a b + \frac{1}{4}(\log_b a + 1) = \log_a b + \frac{1}{4\log_a b} + \frac{5}{4}.$$

Đặt $x = \log_a b$. Do $a, b > 1$ nên $x > 0$.

$$\text{Khi đó } S = x + \frac{1}{4x} + \frac{5}{4} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} \text{ (Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương } x \text{ và } \frac{1}{4}x).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{a} > 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{9}{4}$ đạt được khi $b = \sqrt{a} > 1$.

Câu 7. Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + 4\log_c a + 4\log_c b \\ &= \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \right) + \left(\log_a c + \frac{4}{\log_a c} \right) + \left(\log_b c + \frac{4}{\log_b c} \right) \geq 2 + 4 + 4 = 10. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = \frac{1}{\log_a b} \\ \log_a c = \frac{4}{\log_a c} \\ \log_b c = \frac{4}{\log_b c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 1 \\ \log_a c = 2 \\ \log_b c = 2 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất m của P là 10 đạt được khi $n = \log_b c = 2$.

Do đó $m + n = 12$.

Câu 8. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy. \text{ Tìm giá trị lớn nhất } P_{\max} \text{ của biểu thức } P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}.$$

Lời giải

$$\text{Với } x, y \text{ dương, ta có } \log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) + 2 = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t, t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - xy + 2 = 0 \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2 \quad (2).$$

$$\text{Ta có } x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2} \right)^2 - xy.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ (2), suy ra: $x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.

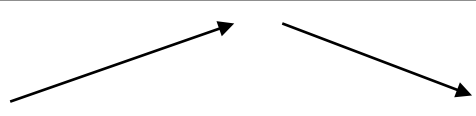
Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

$$\text{Suy ra: } P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (nhận).}$$

Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$				



$$\text{Dựa vào BBT, ta có } P_{\max} = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA – LOGARIT – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1:** (MĐ 103-2022) Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $b < a < c$. **D.** $c < a < b$.
- Câu 2:** (MĐ 104-2022) Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
A. $a < b < c$. **B.** $a < c < b$. **C.** $c < a < b$. **D.** $b < a < c$.
- Câu 3:** (MĐ 101-2022) Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là:
A. $y' = -x^{-4}$. **B.** $y' = -\frac{1}{2}x^{-2}$. **C.** $y' = -\frac{1}{3}x^{-3}$. **D.** $y' = -3x^{-4}$.
- Câu 4:** (MĐ 102-2022) Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là:
A. $y' = -x^{-4}$. **B.** $y' = -3x^{-4}$. **C.** $y' = -\frac{1}{3}x^{-4}$. **D.** $y' = -\frac{1}{2}x^{-2}$.
- Câu 5:** (MĐ 101-2022) Tập xác định của hàm số $\log_3(x-4)$ là
A. $(5; +\infty)$. **B.** $(-\infty; +\infty)$. **C.** $(4; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -4)$.
- Câu 6:** (MĐ 102-2022) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là
A. $(-\infty; 4)$. **B.** $(4; +\infty)$. **C.** $(5; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.
- Câu 7:** (MĐ 103-2022) Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là
A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 1)$.
- Câu 8:** (MĐ 104-2022) Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là
A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 9:** (MĐ 101-2022) Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6-x)(x+2)]$?
A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** Vô số.
- Câu 10:** (MĐ 102-2022) Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6-x)(x+2)]$?
A. 7. **B.** 8. **C.** vô số. **D.** 9.
- Câu 11:** (MĐ 101-2022) Với mọi số thực a dương tùy ý $4\log\sqrt{a}$ bằng
A. $-2\log a$. **B.** $2\log a$. **C.** $-4\log a$. **D.** $8\log a$.
- Câu 12:** (MĐ 102-2022) Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng?

A. $-4\log a$. **B.** $8\log a$. **C.** $2\log a$. **D.** $-2\log a$.

Câu 13: (MĐ 103-2022) Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $1 - \log a$. **B.** $2 + \log a$. **C.** $2 - \log a$. **D.** $1 + \log a$.

Câu 14: (MĐ 103-2022) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3}$ bằng

A. $3\log_a b$. **B.** $\log_a b$. **C.** $-3\log_a b$. **D.** $\frac{1}{3}\log_a b$.

Câu 15: (MĐ 104-2022) Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $2 - \log a$. **B.** $2 + \log a$. **C.** $1 - \log a$. **D.** $1 + \log a$.

Câu 16: (MĐ 104-2022) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3}$ bằng

A. $\log_a b$. **B.** $-3\log_a b$. **C.** $\frac{1}{3}\log_a b$. **D.** $3\log_a b$.

Câu 17: (TK 2020-2021) Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

A. a^6 . **B.** $a^{\frac{3}{2}}$. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Câu 18: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{2}}$ là:

A. $y' = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y' = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. **C.** $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y' = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Câu 19: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{4}}$ là.

A. $y' = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. **B.** $y' = \frac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. **C.** $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. **D.** $y' = \frac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

Câu 20: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{3}}$ là

A. $y' = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$. **B.** $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. **C.** $y' = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. **D.** $y' = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 21: (TK 2020-2021) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

A. $\frac{1}{2} + \log_3 a$. **B.** $2\log_3 a$ **C.** $(\log_3 a)^2$. **D.** $2 + \log_3 a$.

Câu 22: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4 . **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** 4 .

Câu 23: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

A. -3 . **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** 3 .

Câu 24: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

A. 2 . **B.** -2 . **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 25: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[5]{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $-\frac{1}{5}$. **C.** 5 . **D.** -5

- Câu 26: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Với mọi số thực a dương, $\log_4(4a)$ bằng
A. $1 + \log_4 a$. **B.** $1 - \log_4 a$. **C.** $\log_4 a$. **D.** $4\log_4 a$.
- Câu 27: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Với mọi số thực a dương, $\log_3(3a)$ bằng
A. $3\log_3 a$. **B.** $1 - \log_3 a$. **C.** $\log_3 a$. **D.** $1 + \log_3 a$.
- Câu 28: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Với mọi số thực a dương, $\log_2(2a)$ bằng
A. $1 - \log_2 a$. **B.** $1 + \log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\log_2 a$.
- Câu 29: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Với mọi số thực a dương, $\log_5(5a)$ bằng
A. $5\log_5 a$. **B.** $1 - \log_5 a$. **C.** $1 + \log_5 a$. **D.** $\log_5 a$.
- Câu 30:** Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào sau đây đúng?
A. $a^3 b = 64$. **B.** $a^3 b = 36$. **C.** $a^3 + b = 64$. **D.** $a^3 + b = 36$.
- Câu 31: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $a^3 + b = 64$. **B.** $a^3 b = 256$. **C.** $a^3 b = 64$. **D.** $a^3 + b = 256$.
- Câu 32: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 7$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $a^3 + b = 49$. **B.** $a^3 b = 128$. **C.** $a^3 + b = 128$. **D.** $a^3 b = 49$.
- Câu 33: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5$, khẳng định nào dưới đây là đúng?
A. $a^3 b = 32$. **B.** $a^3 b = 25$. **C.** $a^3 + b = 25$. **D.** $a^3 + b = 32$.
- Câu 34:** Với $a > 0$ đặt $\log_2(2a) = b$, khi đó $\log_2(8a^4)$ bằng
A. $4b + 7$. **B.** $4b + 3$. **C.** $4b$. **D.** $4b - 1$.
- Câu 35:** Với $a > 0$, đặt $\log_2(2a) = b$, khi đó $\log_2(4a^3)$ bằng
A. $3b + 5$. **B.** $3b$. **C.** $3b + 2$. **D.** $3b - 1$.
- Câu 36: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Với $a > 0$, đặt $\log_3(3a) = b$, khi đó $\log_3(9a^3)$ bằng
A. $3b$. **B.** $3b - 1$. **C.** $3b + 2$. **D.** $3b + 5$.
- Câu 37: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Với $a > 0$, đặt $\log_3(3a) = b$ khi đó $\log_3(27a^4)$ bằng
A. $4b + 3$. **B.** $4b$. **C.** $4b - 1$. **D.** $4b + 7$.
- Câu 38: (TK 2020-2021)** Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là
A. $y' = 2^x \ln 2$. **B.** $y' = 2^x$. **C.** $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$. **D.** $y' = x2^{x-1}$.
- Câu 39: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là
A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **D.** $(0; +\infty)$.
- Câu 40: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là
A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $[0; +\infty)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.
- Câu 41: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{4}{3}}$ là
A. $y' = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. **B.** $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. **C.** $y' = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$. **D.** $y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$.

- Câu 42: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là
A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(0; +\infty)$.
- Câu 43: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là
A. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. **B.** $y' = 3^x$. **C.** $y' = x3^{x-1}$. **D.** $y' = 3^x \ln 3$.
- Câu 44: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-3)$ là
A. $(-\infty; 3]$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $[3; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 3)$.
- Câu 45: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là
A. $(-\infty; 4]$. **B.** $[4; +\infty)$. **C.** $(4; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 4)$.
- Câu 46: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Đạo hàm của hàm số $y = 4^x$ là:
A. $y' = x \cdot 4^{x-1}$. **B.** $y' = 4^x \ln 4$. **C.** $y' = \frac{4^x}{\ln 4}$. **D.** $y' = 4^x$.
- Câu 47: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-1)$ là
A. $(-\infty; 1]$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 48: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là
A. $y' = 6^x \cdot \ln 6$. **B.** $y' = x \cdot 6^{x-1}$. **C.** $y' = 6^x$. **D.** $y' = \frac{6^x}{\ln 6}$.
- Câu 49: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-2)$ là
A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $[2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 2]$.
- Câu 50: (Mã 105 2017)** Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.
A. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$ **B.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$ **C.** $Q = b^{\frac{5}{9}}$ **D.** $Q = b^2$
- Câu 51: (Mã 110 2017)** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.
A. $P = \sqrt{x}$ **B.** $P = x^{\frac{1}{8}}$ **C.** $P = x^{\frac{2}{9}}$ **D.** $P = x^2$
- Câu 52: (Mã 102 2017)** Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $P = x^{\frac{2}{3}}$ **B.** $P = x^{\frac{1}{2}}$ **C.** $P = x^{\frac{13}{24}}$ **D.** $P = x^{\frac{1}{4}}$
- Câu 53: (Đề Tham Khảo 2017)** Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$
A. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$ **B.** $P = 1$ **C.** $P = 7 - 4\sqrt{3}$ **D.** $P = 7 + 4\sqrt{3}$
- Câu 54: (Mã 123 2017)** Tập xác định D của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:
A. $D = (1; +\infty)$ **B.** $D = \mathbb{R}$ **C.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **D.** $D = (-\infty; 1)$
- Câu 55: (Mã 104 2017)** Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.
A. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$
C. $D = \mathbb{R}$ **D.** $D = (0; +\infty)$

- Câu 56:** (Đề Minh Họa 2017). Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?
- A. $\log_b a < 1 < \log_a b$ B. $1 < \log_a b < \log_b a$ C. $\log_b a < \log_a b < 1$ D. $\log_a b < 1 < \log_b a$
- Câu 57:** (Mã 110 2017) Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương x, y ?
- A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$
 C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$ D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$
- Câu 58:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng:
- A. $5 \log_a b$. B. $\frac{1}{5} + \log_a b$. C. $5 + \log_a b$. D. $\frac{1}{5} \log_a b$.
- Câu 59:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng
- A. $\frac{1}{2} + \log_a b$. B. $\frac{1}{2} \log_a b$. C. $2 + \log_a b$. D. $2 \log_a b$.
- Câu 60:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng
- A. $3 + \log_a b$ B. $3 \log_a b$ C. $\frac{1}{3} + \log_a b$ D. $\frac{1}{3} \log_a b$
- Câu 61:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 (5a)$ bằng
- A. $5 + \log_5 a$. B. $5 - \log_5 a$. C. $1 + \log_5 a$. D. $1 - \log_5 a$.
- Câu 62:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng
- A. $1 + \log_2 a$. B. $1 - \log_2 a$. C. $2 - \log_2 a$. D. $2 + \log_2 a$.
- Câu 63:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:
- A. $2 + \log_2 a$. B. $\frac{1}{2} + \log_2 a$. C. $2 \log_2 a$. D. $\frac{1}{2} \log_2 a$.
- Câu 64:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Với a là hai số thực dương tùy ý, $\log_2 (a^3)$ bằng
- A. $\frac{3}{2} \log_2 a$. B. $\frac{1}{3} \log_2 a$. C. $3 + \log_2 a$. D. $3 \log_2 a$.
- Câu 65:** (Mã 103 2019) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng
- A. $3 + \log_2 a$. B. $3 \log_2 a$. C. $\frac{1}{3} \log_2 a$. D. $\frac{1}{3} + \log_2 a$.
- Câu 66:** (Mã 102 2019) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng
- A. $\frac{1}{3} \log_5 a$. B. $\frac{1}{3} + \log_5 a$. C. $3 + \log_5 a$. D. $3 \log_5 a$.
- Câu 67:** (Mã 104 2017) Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\log_2 a = \log_a 2$ B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$ C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$ D. $\log_2 a = -\log_a 2$
- Câu 68:** (Mã 104 2019) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:
- A. $\frac{1}{2} \log_2 a$. B. $2 + \log_2 a$ C. $2 \log_2 a$. D. $\frac{1}{2} + \log_2 a$.
- Câu 69:** (Đề Tham Khảo 2019) Với a, b là hai số dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

- A.** $2(\log a + \log b)$ **B.** $\log a + \frac{1}{2}\log b$ **C.** $2\log a + \log b$ **D.** $\log a + 2\log b$

Câu 70: (Đề Tham Khảo 2017) Cho a là số thực dương $a \neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $P = \frac{1}{3}$ **B.** $P = 3$ **C.** $P = 1$ **D.** $P = 9$

Câu 71: (Mã 101 2019) Với a là số thực dương tùy ý, bằng $\log_5 a^2$

- A.** $\frac{1}{2}\log_5 a$. **B.** $2 + \log_5 a$. **C.** $\frac{1}{2} + \log_5 a$. **D.** $2\log_5 a$.

Câu 72: (Mã 103 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

- A.** $\frac{\ln 7}{\ln 3}$ **B.** $\ln \frac{7}{3}$ **C.** $\ln(4a)$ **D.** $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$

Câu 73: (Mã 101 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

- A.** $\ln \frac{5}{3}$ **B.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ **C.** $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$ **D.** $\ln(2a)$

Câu 74: (Mã 102 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng:

- A.** $1 - \log_3 a$ **B.** $3\log_3 a$ **C.** $3 + \log_3 a$ **D.** $1 + \log_3 a$

Câu 75: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

- A.** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. **C.** $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Câu 76: (Mã 123 2017) Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

- A.** $I = -2$. **B.** $I = 2$ **C.** $I = \frac{1}{2}$ **D.** $I = 0$

Câu 77: (Mã 104 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

- A.** $1 - \log_3 a$ **B.** $3 - \log_3 a$ **C.** $\frac{1}{\log_3 a}$ **D.** $1 + \log_3 a$

Câu 78: (Mã 110 2017) Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a(b^2 c^3)$.

- A.** $P = 13$ **B.** $P = 31$ **C.** $P = 30$ **D.** $P = 108$

Câu 79: (Mã 102 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3 b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 32.

Câu 80: (Đề Tham Khảo 2017) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$

. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

- A.** $P = -5 + 3\sqrt{3}$ **B.** $P = -1 + \sqrt{3}$ **C.** $P = -1 - \sqrt{3}$ **D.** $P = -5 - 3\sqrt{3}$

Câu 81: (Mã 103 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

- A.** 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 4.

Câu 82: (Mã 104 2017) Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha$, $\log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$

B. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$

C. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$

D. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$

Câu 83: (Mã 101 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4 b = 16$. Giá trị của $4 \log_2 a + \log_2 b$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 16.

D. 8.

Câu 84: (Đề Minh Họa 2017) Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b$

B. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} \log_a b$

D. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2 \log_a b$

Câu 85: (Mã 123 2017) Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 6 \log_a b$

B. $P = 27 \log_a b$

C. $P = 15 \log_a b$

D. $P = 9 \log_a b$

Câu 86: (Đề Tham Khảo 2018) Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$

B. $\log(3a) = 3 \log a$

C. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$

D. $\log a^3 = 3 \log a$

Câu 87: (Mã 105 2017) Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

A. $I = \frac{5}{4}$

B. $I = 0$

C. $I = 4$

D. $I = \frac{3}{2}$

Câu 88: (Mã 105 2017) Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

A. $I = 2$

B. $I = -\frac{1}{2}$

C. $I = -2$

D. $I = \frac{1}{2}$

Câu 89: (Mã 104 2017) Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 5a + 3b$

B. $x = a^5 + b^3$

C. $x = a^5 b^3$

D. $x = 3a + 5b$

Câu 90: (Mã 104 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3 \log_2 b$ bằng

A. 6.

B. 2.

C. 3.

D. 8.

- Câu 91: (Mã 105 2017)** Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ B. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$
 C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$ D. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$
- Câu 92: (Mã 123 2017)** Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.
- A. $P = 12$ B. $P = \frac{12}{7}$ C. $P = \frac{7}{12}$ D. $P = \frac{1}{12}$
- Câu 93: (Mã 110 2017)** Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x+3y)}$.
- A. $M = \frac{1}{2}$ B. $M = \frac{1}{3}$ C. $M = \frac{1}{4}$ D. $M = 1$
- Câu 94: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a = b^2$ B. $a^3 = b$ C. $a = b$ D. $a^2 = b$
- Câu 95: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét số thực a và b thỏa mãn $\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a + 2b = 2$ B. $4a + 2b = 1$ C. $4ab = 1$ D. $2a + 4b = 1$
- Câu 96: (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)} = 3a$. Giá trị của ab^2 bằng
- A. 3 B. 6 C. 2 D. 12
- Câu 97: (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)} = 4a$. Giá trị của ab^2 bằng
- A. 3 B. 6 C. 2 D. 4
- Câu 98: (Mã 102 - 2020 Lần 2)** Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2 \log_9 b = 2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a = 9b^2$ B. $a = 9b$ C. $a = 6b$ D. $a = 9b^2$
- Câu 99: (Mã 103 - 2020 Lần 2)** Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2 \log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a = 27b$ B. $a = 9b$ C. $a = 27b^4$ D. $a = 27b^2$
- Câu 100: (Mã 104 - 2020 Lần 2)** Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2 \log_4 b = 4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a = 16b^2$ B. $a = 8b$ C. $a = 16b$ D. $a = 16b^4$
- Câu 101: (Đề Tham Khảo 2019)** Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng
- A. $\frac{3a}{4}$ B. $\frac{3}{4a}$ C. $\frac{4}{3a}$ D. $\frac{4a}{3}$
- Câu 102: (Đề Minh Họa 2017)** Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .
- A. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$ B. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$ C. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$ D. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$

Câu 103: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 104: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 105: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_6 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 106: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

- A. $(-\infty; 0)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; +\infty)$ D. $[0; +\infty)$

Câu 107: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_4 x$ là

- A. $(-\infty; 0)$. B. y . C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 108: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Tập xác định của hàm số $y = 5^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $[0; +\infty)$.

Câu 109: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Tập xác định của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(0; +\infty)$. C. $[0; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 110: (Mã 123 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

- A. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ B. $D = (-2; 3)$
C. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Câu 111: (Đề Minh Họa 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$

- A. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ B. $D = [-1; 3]$
C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ D. $D = (-1; 3)$

Câu 112: (Mã 104 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3 (x^2 - 4x + 3)$.

- A. $D = (1; 3)$ B. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
C. $D = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$ D. $D = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$

Câu 113: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

- A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$ B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$ C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$ D. $y' = \frac{1}{x}$

Câu 114: (Mã 103 - 2019) Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.

Câu 115: (Mã 104 - 2019) Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$. B. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$. C. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$. D. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Câu 116: (Đề Minh Họa 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$

- A. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$ B. $y' = x \cdot 13^{x-1}$ C. $y' = 13^x \ln 13$ D. $y' = 13^x$

Câu 117: (Mã 110 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

- A. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$ B. $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 2}$ C. $y' = \frac{2}{2x+1}$ D. $y' = \frac{1}{2x+1}$

Câu 118: (Đề Minh Họa 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

- A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$
C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Câu 119: (Đề Tham Khảo 2019) Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

- A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$ B. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$
C. $f'(x) = \frac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$ D. $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$

Câu 120: (Mã 101 - 2019) Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2$. B. $2^{x^2-3x} \ln 2$. C. $(2x-3)2^{x^2-3x}$. D. $(x^2-3x)2^{x^2-3x+1}$.

Câu 121: (Mã 102 - 2019) Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3).3^{x^2-3x}$. B. $3^{x^2-3x}.\ln 3$. C. $(x^2-3x).3^{x^2-3x-1}$. D. $(2x-3).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

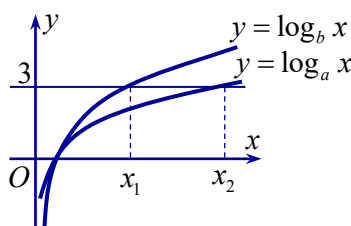
Câu 122: (Mã 105 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq 2$ B. $m > 2$ C. $m \geq 0$ D. $m < 0$

Câu 123: (Mã 104 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $0 < m < 3$ B. $m < -1$ hoặc $m > 0$ C. $m > 0$ D. $m = 0$

Câu 124: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1; x_2$. Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. $\sqrt[3]{2}$.

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA – LOGARIT – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1:** (MĐ 103-2022) Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
 A. $a < c < b$. B. $a < b < c$. C. $b < a < c$. D. $c < a < b$.

Lời giải

Chọn C

Vì $2 < \sqrt{5} < \sqrt{6}$ nên $3^2 < 3^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{6}}$ hay $b < a < c$.

- Câu 2:** (MĐ 104-2022) Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
 A. $a < b < c$. B. $a < c < b$. C. $c < a < b$. D. $b < a < c$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $b = 3^2 = 3^{\sqrt{4}}$. Vì $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6}$ và $3 > 1$ nên $3^{\sqrt{4}} < 3^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{6}}$. Vậy $b < a < c$.

- Câu 3:** (MĐ 101-2022) Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là:
 A. $y' = -x^{-4}$. B. $y' = -\frac{1}{2}x^{-2}$. C. $y' = -\frac{1}{3}x^{-3}$. D. $y' = -3x^{-4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = (x^{-3})' = -3x^{-4}$.

- Câu 4:** (MĐ 102-2022) Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là:
 A. $y' = -x^{-4}$. B. $y' = -3x^{-4}$. C. $y' = -\frac{1}{3}x^{-4}$. D. $y' = -\frac{1}{2}x^{-2}$.

Lời giải

Chọn B

Có: $y' = (x^{-3})' = -3x^{-4}$.

- Câu 5:** (MĐ 101-2022) Tập xác định của hàm số $\log_3(x-4)$ là

- A. $(5; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(4; +\infty)$. D. $(-\infty; -4)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (4; +\infty)$.

Câu 6: (MĐ 102-2022) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x - 4)$ là

- A. $(-\infty; 4)$. B. $(4; +\infty)$. C. $(5; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \Leftrightarrow x \in (4; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_3(x - 4)$ là $D = (4; +\infty)$.

Câu 7: (MĐ 103-2022) Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x - 1)$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2(x - 1)$ là $(1; +\infty)$.

Câu 8: (MĐ 104-2022) Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x - 1)$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy $D = (1; +\infty)$.

Câu 9: (MĐ 101-2022) Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6 - x)(x + 2)]$?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $(6 - x)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6$

$\Rightarrow TXĐ: D = (-2; 6) \xrightarrow{x \in D, x \in \mathbb{Z}} x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của x thỏa mãn bài toán.

Câu 10: (MĐ 102-2022) Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6 - x)(x + 2)]$?

- A. 7. B. 8. C. vô số. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $(6-x)(x+2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$,

Vậy có 7 số nguyên thỏa mãn.

Câu 11: (MĐ 101-2022) Với mọi số thực a dương tùy ý $4\log\sqrt{a}$ bằng

- A. $-2\log a$. B. $2\log a$. C. $-4\log a$. D. $8\log a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4\log\sqrt{a} = 4\log a^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{2}\log a = 2\log a$.

Câu 12: (MĐ 102-2022) Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng?

- A. $-4\log a$. B. $8\log a$. C. $2\log a$. D. $-2\log a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4\log\sqrt{a} = 2\log a$.

Câu 13: (MĐ 103-2022) Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

- A. $1 - \log a$. B. $2 + \log a$. C. $2 - \log a$. D. $1 + \log a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log(100a) = \log 100 + \log a = 2 + \log a$.

Câu 14: (MĐ 103-2022) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3}$ bằng

- A. $3\log_a b$. B. $\log_a b$. C. $-3\log_a b$. D. $\frac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3} = \log_{a^{-1}} b^{-3} = 3\log_a b$.

Câu 15: (MĐ 104-2022) Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

- A. $2 - \log a$. B. $2 + \log a$. C. $1 - \log a$. D. $1 + \log a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log(100a) = \log 100 + \log a = 2 + \log a$.

Câu 16: (MĐ 104-2022) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3}$ bằng

- A. $\log_a b$. B. $-3\log_a b$. C. $\frac{1}{3}\log_a b$. D. $3\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

- Ta có $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b^3} = \log_{a^{-1}} b^{-3} = -1 \cdot (-3) \log_a b = 3 \log_a b$

Câu 17: (TK 2020-2021) Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

- A. a^6 . B. $a^{\frac{3}{2}}$. C. $a^{\frac{2}{3}}$. D. $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ với mọi $a > 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 18: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{2}}$ là:

- A. $y' = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. B. $y' = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. C. $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. D. $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Với $x > 0$, ta có $y' = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Câu 19: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{4}}$ là:

- A. $y' = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. B. $y' = \frac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. C. $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. D. $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

Lời giải

$y' = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

Câu 20: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{3}}$ là

- A. $y' = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$. B. $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. C. $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. D. $y' = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 21: (TK 2020-2021) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_3 a$. B. $2 \log_3 a$. C. $(\log_3 a)^2$. D. $2 + \log_3 a$.

Lời giải

Ta có $\log_3(9a) = \log_3 9 + \log_3 a = 2 + \log_3 a$.

Câu 22: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. 4.

Lời giải

Với $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có: $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_a a = \frac{1}{4}$.

Câu 23: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

- A. -3 . B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. 3 .

Lời giải

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có $\log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_a a = \frac{1}{3}$.

Câu 24: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

- A. 2 . B. -2 . C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có: $\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a a = \frac{1}{2}$.

Câu 25: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[5]{a}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. 5 . D. -5

Lời giải

Ta có $\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$.

Câu 26: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Với mọi số thực a dương, $\log_4 (4a)$ bằng

- A. $1 + \log_4 a$. B. $1 - \log_4 a$. C. $\log_4 a$. D. $4 \log_4 a$.

Lời giải

Với mọi số thực a dương, ta có $\log_4 (4a) = \log_4 4 + \log_4 a = 1 + \log_4 a$.

Câu 27: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Với mọi số thực a dương, $\log_3 (3a)$ bằng

- A. $3 \log_3 a$. B. $1 - \log_3 a$. C. $\log_3 a$. D. $1 + \log_3 a$.

Lời giải

Ta có: $\log_3 (3a) = 1 + \log_3 a$. **Chọn D**

Câu 28: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Với mọi số thực a dương, $\log_2 (2a)$ bằng

- A. $1 - \log_2 a$. B. $1 + \log_2 a$. C. $2 \log_2 a$. D. $\log_2 a$.

Lời giải

Với $a > 0$: $\log_2 (2a) = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$. Vậy **Chọn B**

Câu 29: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Với mọi số thực a dương, $\log_5 (5a)$ bằng

- A. $5 \log_5 a$. B. $1 - \log_5 a$. C. $1 + \log_5 a$. D. $\log_5 a$.

Lời giải

Ta có $\log_5(5a) = \log_5 5 + \log_5 a = 1 + \log_5 a$.

Câu 30: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $a^3b = 64$ **B.** $a^3b = 36$. **C.** $a^3 + b = 64$. **D.** $a^3 + b = 36$.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 6 \Leftrightarrow a^3b = 2^6 = 64$.

Câu 31: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $a^3 + b = 64$. **B.** $a^3b = 256$. **C.** $a^3b = 64$. **D.** $a^3 + b = 256$.

Lời giải

$\log_2 a^3 + \log_2 b = 8 \Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 8 \Leftrightarrow a^3b = 2^8 \Leftrightarrow a^3b = 256$

Câu 32: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 7$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $a^3 + b = 49$. **B.** $a^3b = 128$. **C.** $a^3 + b = 128$. **D.** $a^3b = 49$.

Lời giải

Điều kiện: $a > 0, b > 0$. Ta có: $\log_2 a^3 + \log_2 b = 7 \Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 7 \Leftrightarrow a^3b = 2^7 \Leftrightarrow a^3b = 128$.

Câu 33: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $a^3b = 32$. **B.** $a^3b = 25$. **C.** $a^3 + b = 25$. **D.** $a^3 + b = 32$.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5 \Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 5 \Leftrightarrow a^3b = 32$.

Câu 34: Với $a > 0$ đặt $\log_2(2a) = b$, khi đó $\log_2(8a^4)$ bằng

- A.** $4b + 7$. **B.** $4b + 3$. **C.** $4b$. **D.** $4b - 1$.

Lời giải

Ta có $\log_2(2a) = b \Leftrightarrow 1 + \log_2 a = b \Leftrightarrow \log_2 a = b - 1$.

Khi đó $\log_2(8a^4) = 3 + \log_2 a^4 = 3 + 4\log_2 a = 3 + 4(b - 1) = 4b - 1$.

Vậy $\log_2(8a^4) = 4b - 1$.

Câu 35: Với $a > 0$, đặt $\log_2(2a) = b$, khi đó $\log_2(4a^3)$ bằng

- A.** $3b + 5$. **B.** $3b$. **C.** $3b + 2$. **D.** $3b - 1$.

Lời giải

Ta có: $\log_2(2a) = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$

$\Rightarrow \log_2 a = b - 1$

$\log_2(4a^3) = \log_2[(2a)^2 \cdot a] = \log_2(2a)^2 + \log_2 a = 2b + b - 1 = 3b - 1$.

Câu 36: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Với $a > 0$, đặt $\log_3(3a) = b$, khi đó $\log_3(9a^3)$ bằng

- A. $3b$. B. $3b-1$. C. $3b+2$. D. $3b+5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_3(3a) = b \Rightarrow 1 + \log_3 a = b \Rightarrow \log_3 a = b - 1$$

$$\text{Suy ra } \log_3(9a^3) = 2 + 3\log_3 a = 2 + 3(b-1) = 3b-1.$$

Câu 37: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Với $a > 0$, đặt $\log_3(3a) = b$ khi đó $\log_3(27a^4)$ bằng

- A. $4b+3$. B. $4b$. C. $4b-1$. D. $4b+7$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_3(3a) = b \Leftrightarrow 1 + \log_3 a = b \Rightarrow \log_3 a = b - 1$$

$$\log_3(27a^4) = \log_3 27 + \log_3 a^4 = 3 + 4\log_3 a = 3 + 4(b-1) = 4b-1$$

Câu 38: (TK 2020-2021) Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $y' = 2^x \ln 2$. B. $y' = 2^x$. C. $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$. D. $y' = x2^{x-1}$.

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } (a^x)' = a^x \ln a \text{ với } a > 0, a \neq 1 \Rightarrow (2^x)' = 2^x \ln 2.$$

Câu 39: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $[0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định hàm số $y = 9^x$ là $\mathbb{R}$.

Câu 40: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $[0; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = 7^x$ không có điều kiện xác định nên $D = \mathbb{R}$.

Câu 41: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{4}{3}}$ là

- A. $y' = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. B. $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. C. $y' = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$. D. $y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}.$$

Câu 42: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $[0; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là $\mathbb{R}$

Câu 43: (2020-2021 – ĐỢT 2) Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

- A. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. B. $y' = 3^x$. C. $y' = x3^{x-1}$. **D. $y' = 3^x \ln 3$.**

Lời giải

Ta có $y = 3^x \Rightarrow y' = 3^x \ln 3$.

Câu 44: (2020-2021 – ĐỢT 2) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-3)$ là

- A. $(-\infty; 3]$. **B. $(3; +\infty)$.** C. $[3; +\infty)$. D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là: $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (3; +\infty)$.

Câu 45: (2020-2021 – ĐỢT 2) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là

- A. $(-\infty; 4]$. B. $[4; +\infty)$. **C. $(4; +\infty)$.** D. $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

Tập xác định của hàm số là: $(4; +\infty)$

Câu 46: (2020-2021 – ĐỢT 2) Đạo hàm của hàm số $y = 4^x$ là:

- A. $y' = x.4^{x-1}$. **B. $y' = 4^x \ln 4$.** C. $y' = \frac{4^x}{\ln 4}$. D. $y' = 4^x$.

Lời giải

• Áp dụng công thức đạo hàm $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($0 < a \neq 1$) nên $(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$.

Chọn B

Câu 47: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-1)$ là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $[1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. **D. $(1; +\infty)$.**

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_3(x-1)$ là $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; +\infty)$.

Câu 48: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là

- A. $y' = 6^x \ln 6$.** B. $y' = x.6^{x-1}$. C. $y' = 6^x$. D. $y' = \frac{6^x}{\ln 6}$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là $y' = 6^x \cdot \ln 6$.

Câu 49: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-2)$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Ta có $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Do đó tập xác định của hàm số là: $(2; +\infty)$

Câu 50: (Mã 105 2017) Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

- A. $Q = b^{\frac{4}{3}}$ B. $Q = b^{\frac{4}{3}}$ C. $Q = b^{\frac{5}{9}}$ D. $Q = b^2$

Lời giải

Chọn B

$$Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$$

Câu 51: (Mã 110 2017) Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = \sqrt{x}$ B. $P = x^{\frac{1}{8}}$ C. $P = x^{\frac{2}{9}}$ D. $P = x^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Câu 52: (Mã 102 2017) Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{2}{3}}$ B. $P = x^{\frac{1}{2}}$ C. $P = x^{\frac{13}{24}}$ D. $P = x^{\frac{1}{4}}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có, với } x > 0: P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$$

Câu 53: (Đề Tham Khảo 2017) Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$

- A. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$ B. $P = 1$ C. $P = 7 - 4\sqrt{3}$ D. $P = 7 + 4\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} P &= (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot [(7 + 4\sqrt{3})(4\sqrt{3} - 7)]^{2016} \\ &= (7 + 4\sqrt{3})(-1)^{2016} = 7 + 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 54: (Mã 123 2017) Tập xác định D của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

A. $D = (1; +\infty)$

B. $D = \mathbb{R}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $D = (-\infty; 1)$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $D = (1; +\infty)$.

Câu 55: (Mã 104 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = (0; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Vì $-3 \in \mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; x \neq 2$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Câu 56: (Đề Minh Họa 2017). Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_b a < 1 < \log_a b$

B. $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$

D. $\log_a b < 1 < \log_b a$

Lời giải

Chọn A

Cách 1- Tự luận: Vì $b > a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \\ \log_b b > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > 1 \\ 1 > \log_b a \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$

Cách 2- Casio: Chọn $a = 2; b = 3 \Rightarrow \log_3 2 < 1 < \log_2 3 \Rightarrow$ **Đáp án**

D.

Câu 57: (Mã 110 2017) Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương x, y ?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$

C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$

D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất của logarit.

Câu 58: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng:

A. $5 \log_a b$.

B. $\frac{1}{5} + \log_a b$.

C. $5 + \log_a b$.

D. $\frac{1}{5} \log_a b$.

Lời giải

Chọn D

Câu 59: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

A. $\frac{1}{2} + \log_a b$.

B. $\frac{1}{2} \log_a b$.

C. $2 + \log_a b$.

D. $2 \log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{a^2} b = \frac{1}{2} \log_a b$.

Câu 60: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

- A. $3 + \log_a b$ B. $3 \log_a b$ C. $\frac{1}{3} + \log_a b$ **D. $\frac{1}{3} \log_a b$**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{a^3} b = \frac{1}{3} \log_a b$.

Câu 61: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 (5a)$ bằng

- A. $5 + \log_5 a$. B. $5 - \log_5 a$. **C. $1 + \log_5 a$.** D. $1 - \log_5 a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_5 (5a) = \log_5 5 + \log_5 a = 1 + \log_5 a$.

Câu 62: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

- A. $1 + \log_2 a$.** B. $1 - \log_2 a$. C. $2 - \log_2 a$. D. $2 + \log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

$\log_2 2a = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$.

Câu 63: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

- A. $2 + \log_2 a$. B. $\frac{1}{2} + \log_2 a$. **C. $2 \log_2 a$.** D. $\frac{1}{2} \log_2 a$.

Lời giải

Chọn C

Với $a > 0$; $b > 0$; $a \neq 1$. Với mọi α . Ta có công thức: $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Vậy: $\log_2 a^2 = 2 \log_2 a$.

Câu 64: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Với a là hai số thực dương tùy ý, $\log_2 (a^3)$ bằng

- A. $\frac{3}{2} \log_2 a$. B. $\frac{1}{3} \log_2 a$. C. $3 + \log_2 a$. **D. $3 \log_2 a$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2 (a^3) = 3 \log_2 a$.

Câu 65: (Mã 103 2019) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

A. $3 + \log_2 a$.

B. $3\log_2 a$.

C. $\frac{1}{3}\log_2 a$.

D. $\frac{1}{3} + \log_2 a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$.

Câu 66: (Mã 102 2019) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

A. $\frac{1}{3}\log_5 a$.

B. $\frac{1}{3} + \log_5 a$.

C. $3 + \log_5 a$.

D. $3\log_5 a$.

Lời giải

Chọn D

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$

Câu 67: (Mã 104 2017) Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a = \log_a 2$

B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$

C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$

D. $\log_2 a = -\log_a 2$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức đổi cơ số.

Câu 68: (Mã 104 2019) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

A. $\frac{1}{2}\log_2 a$.

B. $2 + \log_2 a$

C. $2\log_2 a$.

D. $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

Lời giải

Chọn C

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Câu 69: (Đề Tham Khảo 2019) Với a, b là hai số dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A. $2(\log a + \log b)$

B. $\log a + \frac{1}{2}\log b$

C. $2\log a + \log b$

D. $\log a + 2\log b$

Lời giải

Chọn D

Có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.

Câu 70: (Đề Tham Khảo 2017) Cho a là số thực dương $a \neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{1}{3}$

B. $P = 3$

C. $P = 1$

D. $P = 9$

Lời giải

Chọn D

$$\log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = \log_{\frac{1}{a^3}} a^3 = 9.$$

Câu 71: (Mã 101 2019) Với a là số thực dương tùy ý, bằng $\log_5 a^2$

- A. $\frac{1}{2} \log_5 a.$ B. $2 + \log_5 a.$ C. $\frac{1}{2} + \log_5 a.$ **D. $2 \log_5 a.$**

Lời giải

Chọn D

Vì a là số thực dương nên ta có $\log_5 a^2 = 2 \log_5 a.$

Câu 72: (Mã 103 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

- A. $\frac{\ln 7}{\ln 3}$ **B. $\ln \frac{7}{3}$** C. $\ln(4a)$ D. $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$

Lời giải

Chọn B

$$\ln(7a) - \ln(3a) = \ln\left(\frac{7a}{3a}\right) = \ln \frac{7}{3}.$$

Câu 73: (Mã 101 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

- A. $\ln \frac{5}{3}$** B. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ C. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$ D. $\ln(2a)$

Lời giải

Chọn A

$$\ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 74: (Mã 102 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng:

- A. $1 - \log_3 a$ B. $3 \log_3 a$ C. $3 + \log_3 a$ **D. $1 + \log_3 a$**

Lời giải

Chọn D

Câu 75: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

- A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b.$** B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b.$
C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}.$ D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a.$

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất của lôgarit: $\forall a > 0, b > 0: \ln(ab) = \ln a + \ln b$

Câu 76: (Mã 123 2017) Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a.$

- A. $I = -2.$ **B. $I = 2$** C. $I = \frac{1}{2}$ D. $I = 0$

Lời giải

Chọn B

Với a là số thực dương khác 1 ta được: $I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{\frac{1}{a^2}} a = 2 \log_a a = 2$

Câu 77: (Mã 104 2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right)$ bằng:

- A.** $1 - \log_3 a$ **B.** $3 - \log_3 a$ **C.** $\frac{1}{\log_3 a}$ **D.** $1 + \log_3 a$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right) = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a$.

Câu 78: (Mã 110 2017) Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

- A.** $P = 13$ **B.** $P = 31$ **C.** $P = 30$ **D.** $P = 108$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_a (b^2 c^3) = 2 \log_a b + 3 \log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.

Câu 79: (Mã 102 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3 b^2 = 32$. Giá trị của $3 \log_2 a + 2 \log_2 b$ bằng

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2 a^3 b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3 \log_2 a + 2 \log_2 b = 5$

Câu 80: (Đề Tham Khảo 2017) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$.

Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

- A.** $P = -5 + 3\sqrt{3}$ **B.** $P = -1 + \sqrt{3}$ **C.** $P = -1 - \sqrt{3}$ **D.** $P = -5 - 3\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương pháp tự luận.

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm.

Chọn $a = 2$, $b = 2^{\sqrt{3}}$. Bấm máy tính ta được $P = -1 - \sqrt{3}$.

Câu 81: (Mã 103 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 b^3 = 16$. Giá trị của $2 \log_2 a + 3 \log_2 b$ bằng

A. 2.

B. 8.

C. 16.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2 \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 (a^2 b^3) = \log_2 16 = 4$

Câu 82: (Mã 104 2017) Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$ B. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$

C. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$ D. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$

Lời giải

Chọn C

$$\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{3}{2} \log_{27} x - 3 \log_{27} y = \frac{1}{2} \log_3 x - \log_3 y = \frac{\alpha}{2} - \beta.$$

Câu 83: (Mã 101 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4 b = 16$. Giá trị của $4 \log_2 a + \log_2 b$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 16.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$4 \log_2 a + \log_2 b = \log_2 a^4 + \log_2 b = \log_2 (a^4 b) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$$

Câu 84: (Đề Minh Họa 2017) Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{4} \log_a b$ **B. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$**

C. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} \log_a b$ D. $\log_{a^2} (ab) = 2 + 2 \log_a b$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{a^2} (ab) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b = \frac{1}{2} \cdot \log_a a + \frac{1}{2} \cdot \log_a b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b.$$

Câu 85: (Mã 123 2017) Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 6 \log_a b$

B. $P = 27 \log_a b$

C. $P = 15 \log_a b$

D. $P = 9 \log_a b$

Lời giải

Chọn A

$$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3 \log_a b + \frac{6}{2} \log_a b = 6 \log_a b.$$

Câu 86: (Đề Tham Khảo 2018) Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$ B. $\log(3a) = 3 \log a$ C. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$ **D. $\log a^3 = 3 \log a$**

Lời giải

Chọn D

Câu 87: (Mã 105 2017) Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

- A. $I = \frac{5}{4}$ B. $I = 0$ C. $I = 4$ **D. $I = \frac{3}{2}$**

Lời giải

Chọn D

$$I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2 = 2 \log_3 (\log_3 3 + \log_3 a) + 2 \log_{2^{-2}} b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 88: (Mã 105 2017) Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = 2$** B. $I = -\frac{1}{2}$ C. $I = -2$ D. $I = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right) = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = 2$$

Câu 89: (Mã 104 2017) Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x = 5a + 3b$ B. $x = a^5 + b^3$ **C. $x = a^5 b^3$** D. $x = 3a + 5b$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 a^5 b^3 \Leftrightarrow x = a^5 b^3.$$

Câu 90: (Mã 104 2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3 \log_2 b$ bằng

- A. 6. B. 2. **C. 3.** D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2 (ab^3) = \log_2 8 = 3.$$

Câu 91: (Mã 105 2017) Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ B. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$

C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$

D. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$

Lời giải:

Chọn C

Ta có $a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab$.

Lấy log cơ số 10 hai vế ta được:

$$\log(a+b)^2 = \log(10ab) \Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log 10 + \log a + \log b.$$

Hay $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

Câu 92: (Mã 123 2017) Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = 12$

B. $P = \frac{12}{7}$

C. $P = \frac{7}{12}$

D. $P = \frac{1}{12}$

Lời giải

Chọn B

$$P = \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7}$$

Câu 93: (Mã 110 2017) Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính

$$M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x+3y)}.$$

A. $M = \frac{1}{2}$.

B. $M = \frac{1}{3}$.

C. $M = \frac{1}{4}$.

D. $M = 1$

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.

Khi đó $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x+3y)} = \frac{\log_{12} (12xy)}{\log_{12} (x+3y)^2} = \frac{\log_{12} (36y^2)}{\log_{12} (36y^2)} = 1$.

Câu 94: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = b^2$.

B. $a^3 = b$.

C. $a = b$.

D. $a^2 = b$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ta có:

$$\begin{aligned} \log_2 a = \log_8(ab) &\Leftrightarrow \log_2 a = \frac{1}{3} \log_2(ab) \Leftrightarrow 3 \log_2 a = \log_2(ab) \\ &\Leftrightarrow \log_2 a^3 = \log_2(ab) \Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b \end{aligned}$$

Câu 95: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Xét số thực a và b thỏa mãn $\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a + 2b = 2$.

B. $4a + 2b = 1$.

C. $4ab = 1$.

D. $2a + 4b = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3 \Leftrightarrow \log_3(3^a \cdot 3^{2b}) = \log_{3^2} 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{a+2b} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a+2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+4b = 1.$$

Câu 96: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)} = 3a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3.

B. 6.

C. 2.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết ta có : } 4^{\log_2(ab)} = 3a$$

$$\Leftrightarrow \log_2(ab) \cdot \log_2 4 = \log_2(3a)$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_2 a + \log_2 b) = \log_2 a + \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + 2\log_2 b = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(ab^2) = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow ab^2 = 3$$

Câu 97: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)} = 4a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3.

B. 6.

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } 9^{\log_3(ab)} = 4a \Leftrightarrow 2\log_3(ab) = \log_3(4a) \Leftrightarrow \log_3(a^2b^2) = \log_3(4a) \Rightarrow a^2b^2 = 4a$$

$$\Leftrightarrow ab^2 = 4.$$

Câu 98: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 9b^2$.

B. $a = 9b$.

C. $a = 6b$.

D. $a = 9b^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_3 a - 2\log_9 b = 2 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 2 \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{a}{b}\right) = 2 \Leftrightarrow a = 9b$.

Câu 99: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a = 27b$. **B.** $a = 9b$. **C.** $a = 27b^4$. **D.** $a = 27b^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3 a - 2\log_9 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 27 \Leftrightarrow a = 27b$.

Câu 100: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a = 16b^2$. **B.** $a = 8b$. **C.** $a = 16b$. **D.** $a = 16b^4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$
 $\Leftrightarrow \log_2 a - 2\log_{2^2} b = 4$
 $\Leftrightarrow \log_2 a - 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 b = 4$
 $\Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b = 4$
 $\Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{b} = 4$
 $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2^4$
 $\Leftrightarrow a = 16b$

Câu 101: (Đề Tham Khảo 2019) Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

- A.** $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3}{4a}$ **C.** $\frac{4}{3a}$ **D.** $\frac{4a}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{16} 27 = \frac{3}{4} \log_2 3 = \frac{3}{4 \cdot \log_3 2} = \frac{3}{4a}$

Câu 102: (Đề Minh Họa 2017) Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A.** $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$
C. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$ **D.** $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$

Lời giải

Chọn B

$$\log_6 45 = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{2a + \log_2 3 \cdot \log_3 5}{1 + a} = \frac{2a + \frac{\log_2 3}{\log_3 3}}{1 + a} = \frac{2a + \frac{a}{b}}{1 + a} = \frac{a + 2ab}{ab + b}$$

CASIO: Sto\Gán $A = \log_2 3, B = \log_3 5$ bằng cách: Nhập $\log_2 3 \backslash \text{shift} \backslash \text{Sto} \backslash A$ tương tự B

Thử từng đáp án A: $\frac{A + 2AB}{AB} - \log_6 45 \approx 1,34$ (Loại)

Thử đáp án C: $\frac{A + 2AB}{AB} - \log_6 45 = 0$ (chọn).

Câu 103: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. **C. $(0; +\infty)$.** D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là $D = (0; +\infty)$.

Câu 104: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. **C. $(0; +\infty)$.** D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Câu 105: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_6 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. **B. $(0; +\infty)$.** C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (0; +\infty)$.

Câu 106: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

- A. $(-\infty; 0)$ **B. $(0; +\infty)$** C. $(-\infty; +\infty)$ D. $[0; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Câu 107: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Tập xác định của hàm số $y = \log_4 x$ là

- A. $(-\infty; 0)$. B. y . **C. $(0; +\infty)$.** D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

Câu 108: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Tập xác định của hàm số $y = 5^x$ là

- A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **D.** $[0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số $y = 5^x$ là $\mathbb{R}$

Câu 109: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Tập xác định của hàm số $y = 2^x$ là

- A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số mũ $y = 2^x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Câu 110: (Mã 123 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

- A.** $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ **B.** $D = (-2; 3)$
C. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của là tập các số x để $\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \end{cases}$

Suy ra $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 111: (Đề Minh Họa 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$

- A.** $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ **B.** $D = [-1; 3]$
C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ **D.** $D = (-1; 3)$

Lời giải

Chọn C

$y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$. Hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 3$

Vậy tập xác định: $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Câu 112: (Mã 104 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3 (x^2 - 4x + 3)$.

- A.** $D = (1; 3)$ **B.** $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
C. $D = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$ **D.** $D = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}.$$

Câu 113: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$

B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$

C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$

D. $y' = \frac{1}{x}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, ta được $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 114: (Mã 103 - 2019) Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$.

D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (x^2 - x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Câu 115: (Mã 104 - 2019) Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$.

B. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$.

C. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

D. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ nên $(3^{x^2-x})' = (2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Câu 116: (Đề Minh Họa 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$

A. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$

B. $y' = x \cdot 13^{x-1}$

C. $y' = 13^x \ln 13$

D. $y' = 13^x$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 13^x \ln 13$.

Câu 117: (Mã 110 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x+1)$.

A. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$

B. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$

C. $y' = \frac{2}{2x+1}$

D. $y' = \frac{1}{2x+1}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (\log_2 (2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \ln 2} = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

Câu 118: (Đề Minh Họa 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \frac{(x+1)' \cdot 4^x - (x+1) \cdot (4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - (x+1) \cdot 4^x \cdot \ln 4}{(4^x)^2} \\ &= \frac{4^x \cdot (1 - x \cdot \ln 4 - \ln 4)}{(4^x)^2} = \frac{1 - x \cdot 2 \ln 2 - 2 \ln 2}{4^x} = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}. \end{aligned}$$

Câu 119: (Đề Tham Khảo 2019) Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$ **B.** $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$

C. $f'(x) = \frac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$ **D.** $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)\ln 2} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$$

Câu 120: (Mã 101 - 2019) Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x} \ln 2$. **C.** $(2x-3)2^{x^2-3x}$. **D.** $(x^2-3x)2^{x^2-3x+1}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (2^{x^2-3x})' = (2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2.$$

Câu 121: (Mã 102 - 2019) Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3) \cdot 3^{x^2-3x}$. **B.** $3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$. **C.** $(x^2-3x) \cdot 3^{x^2-3x-1}$. **D.** $(2x-3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = (3^{x^2-3x})' = (2x-3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3.$$

Câu 122: (Mã 105 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \leq 2$

B. $m > 2$

C. $m \geq 0$

D. $m < 0$

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 1 \cdot (-m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Câu 123: (Mã 104 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $0 < m < 3$

B. $m < -1$ hoặc $m > 0$

C. $m > 0$

D. $m = 0$

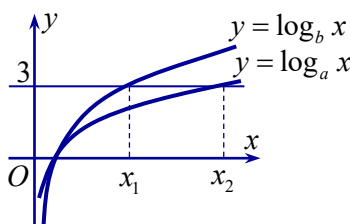
Lời giải

Chọn C

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 (ld) \\ \Delta' = 1 - (1 + m) < 0 \Leftrightarrow m > 0 \end{cases}.$$

Câu 124: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1; x_2$. Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 2.

D. $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

$$\text{Ta có } x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}.$$

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. RÚT GỌN, BIẾN ĐỔI, TÍNH TOÁN BIỂU THỨC LŨY THỪA

Công thức lũy thừa		
Cho các số dương a, b và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
☐ $a^0 = 1$	☐ $\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$	☐ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
☐ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$	☐ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	☐ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
☐ $a^n b^n = (ab)^n$	☐ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	☐ $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} \begin{cases} * \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ * \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \end{cases} (m, n \in \mathbb{N}^*)$

Câu 1: Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^m + a^n = a^{m+n}$. B. $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$. C. $(a^m)^n = (a^n)^m$. D. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

Câu 2: Với $a > 0, b > 0, \alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. B. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. C. $\frac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. D. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Câu 3: Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

- A. $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$. B. $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. C. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. D. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Câu 4: Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. B. $(a^m)^n = a^{m+n}$. C. $(a+b)^m = a^m + b^m$. D. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Câu 5: Với α là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\sqrt{10^\alpha} = (\sqrt{10})^\alpha$. B. $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. C. $(10^\alpha)^2 = (100)^\alpha$. D. $(10^\alpha)^2 = (10)^{\alpha^2}$.

- Câu 6:** Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}$ bằng
- A. $a^{\frac{7}{3}}$. B. $a^{\frac{5}{6}}$. C. $a^{\frac{11}{6}}$. D. $a^{\frac{10}{3}}$.
- Câu 7:** Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $P = x^{\frac{2}{3}}$ B. $P = x^{\frac{1}{2}}$ C. $P = x^{\frac{13}{24}}$ D. $P = x^{\frac{1}{4}}$
- Câu 8:** Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $P = x$ B. $P = x^{\frac{11}{6}}$ C. $P = x^{\frac{7}{6}}$ D. $P = x^{\frac{5}{6}}$
- Câu 9:** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.
- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$ B. $P = \sqrt{x}$ C. $P = x^{\frac{2}{9}}$ D. $P = x^2$
- Câu 10:** Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.
- A. $\frac{2}{1009}$. B. $\frac{1}{1009}$. C. $\frac{3}{1009}$. D. $\frac{3}{2018^2}$.
- Câu 11:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.
- A. $P = a$. B. $P = a^3$. C. $P = a^4$. D. $P = a^5$.
- Câu 12:** Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \sqrt{x}} = x^\alpha$, giá trị của α là
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 13:** Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng
- A. $\sqrt[3]{a^2}$. B. $a^{\frac{8}{3}}$. C. $a^{\frac{3}{8}}$. D. $\sqrt[6]{a}$.
- Câu 14:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$
- A. $P = a$ B. $P = a^3$ C. $P = a^4$ D. $P = a^5$
- Câu 15:** Cho biểu thức $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $P = x^{-2}$ B. $P = x^{-\frac{1}{2}}$ C. $P = x^{\frac{1}{2}}$ D. $P = x^2$
- Câu 16:** Cho biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn P được kết quả:
- A. a^5 . B. a . C. a^3 . D. a^4 .

Câu 17: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot 4 \sqrt{x^3} \sqrt{x}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $P = x^{\frac{1}{2}}$. B. $P = x^{\frac{7}{12}}$. C. $P = x^{\frac{5}{8}}$. D. $P = x^{\frac{7}{24}}$.

Câu 18: Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{18}$

Câu 19: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m^2 - n^2 = 312$. B. $m^2 + n^2 = 543$. C. $m^2 - n^2 = -312$. D. $m^2 + n^2 = 409$.

Câu 20: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{\frac{-1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{-1}{4}} \right)}$.

- A. $P = a(a+1)$. B. $P = a-1$. C. $P = a$. D. $P = a+1$.

Câu 21: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ ta được

- A. $P = ab$. B. $P = a+b$. C. $P = a^4b + ab^4$. D. $P = ab(a+b)$.

Câu 22: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $P \in (330; 340)$. B. $P \in (350; 360)$. C. $P \in (260; 370)$. D. $P \in (340; 350)$.

Câu 23: Cho $a > 0, b > 0$, giá trị của biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 24: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

- A. $P = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{8}}$. B. $P = \left(\frac{2}{3} \right)^{18}$. C. $P = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{18}}$. D. $P = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2016})$

- A. $M = 2017^{1008} - 1$ B. $M = -2017^{1008} - 1$ C. $M = 2017^{2016} - 1$ D. $M = 1 - 2017^{2016}$

Câu 26: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$ là

- A. -9. B. -10. C. 10. D. 9.

Câu 27: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2018})$.

- A. $2017^{2018} + 1$. B. $-2017^{1009} - 1$. C. 2017^{1009} . D. $2017^{1009} + 1$.

Câu 28: Cho biểu thức $f(x) = \sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x^{12}} \sqrt[5]{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2, 7)$ bằng

- A. 0,027. B. 27. C. 2,7. D. 0,27.

Câu 29: Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(4 + 2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1 - \sqrt{3})^{2017}}{(1 + \sqrt{3})^{2019}}$.

- A. $P = -2^{2017}$. B. -1. C. -2^{2019} . D. 2^{2018} .

Câu 30: Giá trị biểu thức $(3 + 2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019}$ bằng

- A. $(\sqrt{2} + 1)^{2019}$. B. $(\sqrt{2} - 1)^{2017}$. C. $(\sqrt{2} - 1)^{2019}$. D. $(\sqrt{2} + 1)^{2017}$.

Câu 31: Cho $a > 0, b > 0$ giá trị của biểu thức $T = 2(a + b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

DẠNG 2. SO SÁNH CÁC BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

- ☐ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$;
- ☐ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.
- ☐ Với mọi $0 < a < b$, ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$$

$$a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Câu 32: Cho $(\sqrt{2} - 1)^m < (\sqrt{2} - 1)^n$. Khi đó

- A. $m = n$. B. $m < n$. C. $m > n$. D. $m \neq n$.

Câu 33: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. **C.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$. **D.** $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$.

Câu 34: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI?

- A.** $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$. **B.** $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.
C. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$. **D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

Câu 35: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$.
C. $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Câu 36: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$.

Câu 37: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$. **B.** $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$.
C. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$. **D.** $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Câu 38: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

- A.** $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a > 1$. **D.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Câu 39: So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,3}$.

- A.** $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$. **B.** $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,3}$.
C. $\sqrt{3}^{0,3} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$. **D.** $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.

Câu 40: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

- A.** $0 < a < 1, 0 < b < 1$. **B.** $0 < a < 1, b > 1$. **C.** $a > 1, 0 < b < 1$. **D.** $a > 1, b > 1$.

Câu 41: So sánh ba số $a = 1000^{1001}$, $b = 2^{2^{64}}$ và $c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$?

- A.** $c < a < b$. **B.** $b < a < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $a < c < b$.

DẠNG 3. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

□ **Dạng:** $\begin{cases} y = x^\alpha \\ y = u^\alpha \end{cases}$ với u là đa thức đại số.

□ **Tập xác định:**

Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{DK} u \in \mathbb{R}$.

Nếu $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ \alpha = 0 \end{cases} \xrightarrow{DK} u \neq 0$.

Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{DK} u > 0$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

- A.** $[1; +\infty)$ **B.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ **C.** $(1; +\infty)$ **D.** $(0; +\infty)$

Câu 43: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x)^{-4}$.

- A.** $(0; 3)$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.
C. $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R}$

Câu 44: Tìm tập xác định của hàm số: $y = (4 - x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

- A.** $D = (-2; 2)$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$ **C.** $D = \mathbb{R}$ **D.** $D = (2; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$. Vậy TXĐ: $D = (-2; 2)$.

Câu 45: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $D = \mathbb{R}$?

- A.** $y = (2 + \sqrt{x})^\pi$ **B.** $y = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^\pi$ **C.** $y = (2 + x^2)^\pi$ **D.** $y = (2 + x)^\pi$

Câu 46: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

- A.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ **B.** $D = \mathbb{R}$
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **D.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

Câu 47: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y = (\sqrt{3})^x$ **D.** $y = (0,5)^x$

Câu 48: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 + 2x - 3)^{\sqrt{2}}$.

- A.** $D = \mathbb{R}$ **B.** $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ **C.** $D = (0; +\infty)$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

Câu 49: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Câu 50: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 4x)^{\frac{2019}{2020}}$ là

- A.** $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ **C.** $(0; 4)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$

Câu 51: Tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 6x - 8)^{\sqrt{2}}$ là

- A.** $D = (2; 4)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(4; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Câu 52: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 7x + 10)^{-3}$

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$. **B.** $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(2; 5)$.

Câu 53: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4x^2 - 1)^{-3}$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 54: Tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{-2019}$ là

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-4; 1]$. **D.** $(-4; 1)$.

Câu 55: Tìm tập xác định của $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{-1}{3}}$

- A.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **C.** $y' = \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 5}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 56: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^\pi$ là

- A.** $(1; 2)$. **B.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **D.** $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

Câu 57: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$. **B.** $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
C. $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 58: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 6x + 9)^{\frac{\pi}{2}}$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $D = (3; +\infty)$. **C.** $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Câu 59: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **B.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
C. $(1; 2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 60: Tập xác định D của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$ là

- A. $D = (3; +\infty)$. B. $D = [3; +\infty)$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 61: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{5}} + (x - 3)^{-2}$ là

- A. $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{3\}$ B. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$.
C. $D = (-\infty; +\infty) \setminus (1; 2)$. D. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

DẠNG 4. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

□ **Đạo hàm:**

$$\begin{cases} y = x^\alpha \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^\alpha \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \end{cases}$$

Câu 62: Tìm đạo hàm của hàm số: $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$

- A. $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$ B. $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ C. $3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ D. $\frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

Câu 63: Hàm số $y = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}$ có đạo hàm là.

- A. $y' = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2 + 1)^3}}$. B. $y' = 2x\sqrt{x^2 + 1}$. C. $y' = 4x\sqrt[5]{x^2 + 1}$. D. $y' = \frac{4}{\sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}}$.

Câu 64: Đạo hàm của hàm số $y = (2x + 1)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là.

- A. $-\frac{1}{3}(2x + 1)^{-\frac{4}{3}}$. B. $2(2x + 1)^{-\frac{1}{3}} \ln(2x + 1)$.
C. $(2x + 1)^{-\frac{1}{3}} \ln(2x + 1)$. D. $-\frac{2}{3}(2x + 1)^{-\frac{4}{3}}$.

Câu 65: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

- A. $y' = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{8}{3}}$. B. $y' = \frac{2x + 1}{2\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$. C. $y' = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$. D. $y' = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{2}{3}}$.

Câu 66: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - \cos 3x)^6$.

- A. $y' = 6 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$. B. $y' = 6 \sin 3x (\cos 3x - 1)^5$.
C. $y' = 18 \sin 3x (\cos 3x - 1)^5$. D. $y' = 18 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$.

Câu 67: Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^{\frac{e}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

- A. $y' = 2x(x^2 + 1)^{\frac{e}{2}-1}$. B. $y' = ex\sqrt{(x^2 + 1)^{e-2}}$.
C. $y' = \frac{e}{2}(x^2 + 1)^{\frac{e}{2}-1}$. D. $y' = (x^2 + 1)^{\frac{e}{2}} \ln(x^2 + 1)$.

Câu 68: Cho hàm số $y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}}$, ($x > 0$). Đạo hàm của y là:

A. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{-\frac{31}{32}}$. B. $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}$. C. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{31}{32}}$. D. $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

Câu 69: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x + 3^x$

A. $y' = 2 \cos 2x + x3^{x-1}$. B. $y' = -\cos 2x + 3^x$.
C. $y' = -2 \cos 2x - 3^x \ln 3$. D. $y' = 2 \cos 2x + 3^x \ln 3$.

Câu 70: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

A. $y' = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$. B. $y' = (2x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \ln |2x-1|$.
C. $y' = \frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{4}{3}}$. D. $y' = \frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 71: Đạo hàm của hàm số $y = x \cdot 2^x$ là

A. $y' = (1+x \ln 2)2^x$. B. $y' = (1-x \ln 2)2^x$. C. $y' = (1+x)2^x$. D. $y' = 2^x + x^2 2^{x-1}$.

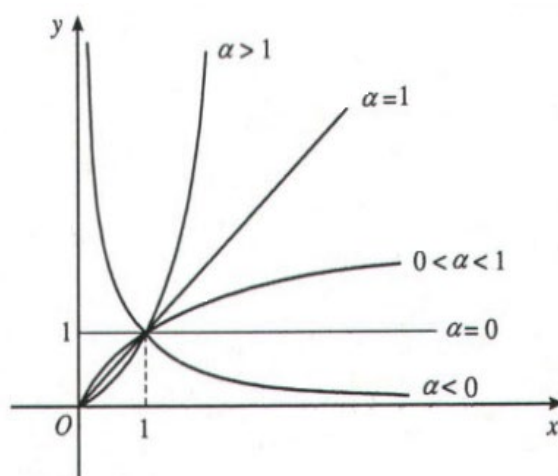
DẠNG 5. KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA

Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$									
Tập xác định: $(0; +\infty).$	Tập xác định: $(0; +\infty).$									
Sự biến thiên	Sự biến thiên									
$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$									
Giới hạn đặc biệt:	Giới hạn đặc biệt:									
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$									
Tiệm cận: không có .	Tiệm cận:									
Bảng biến thiên.	Ox là tiệm cận ngang. Oy là tiệm cận đứng.									
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'		+	y	0	$+\infty$	Bảng biến thiên.
x	0	$+\infty$								
y'		+								
y	0	$+\infty$								
	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'		-	y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$								
y'		-								
y	$+\infty$	0								

Đồ thị của hàm số.



Câu 72: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

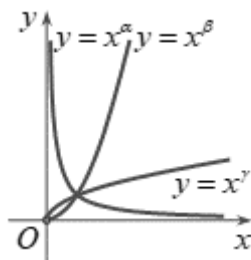
A. $y = 2^x$.

B. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

C. $y = (\sqrt{\pi})^x$.

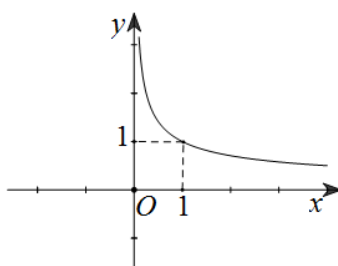
D. $y = e^x$.

Câu 73: Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề đúng là



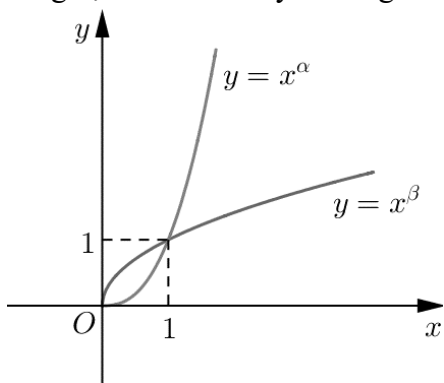
- A. $\alpha > \beta > \gamma$. B. $\beta > \alpha > \gamma$. C. $\beta > \gamma > \alpha$. D. $\gamma > \beta > \alpha$.

Câu 74: Đường cong ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = 2^{1-x}$. B. $y = x^{-\frac{1}{2}}$. C. $y = x^{-1}$. D. $y = \log_2(2x)$.

Câu 75: Cho là các số α , β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $0 < \alpha < 1 < \beta$. B. $\beta < 0 < 1 < \alpha$. C. $0 < \beta < 1 < \alpha$. D. $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

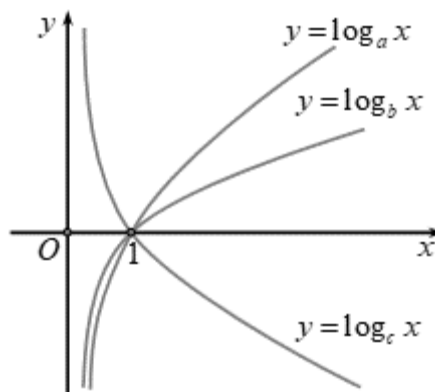
Câu 76: Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$. B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. D. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Câu 77: Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là

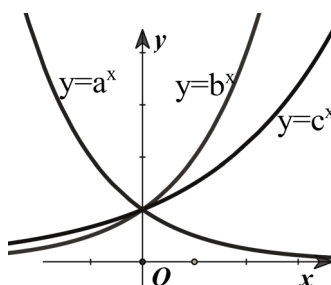
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 78: Cho a, b, c là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



- A. $a < b < c$. B. $c < a < b$. C. $c < b < a$. D. $b < c < a$.

Câu 79: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $1 < a < c < b$. B. $a < 1 < c < b$. C. $a < 1 < b < c$. D. $1 < a < b < c$.

Câu 80: Hàm số $y = x^2 e^{2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-2; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

DẠNG 6. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Công thức logarit:		
Cho các số $a, b > 0$, $a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
☐ $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	☐ $\lg b = \log b = \log_{10} b$	☐ $\ln b = \log_e b$
☐ $\log_a 1 = 0$	☐ $\log_a a = 1$	☐ $\log_a a^n = n$
☐ $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	☐ $\log_a b^n = n \log_a b$	☐ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
☐ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	☐ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	☐ $\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
☐ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, ($b \neq 1$)	☐ $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$, ($b \neq 1$)	☐ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, ($b \neq 1$)

Câu 81: Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$, mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$.

B. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$.

D. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Câu 82: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

B. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

C. $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

D. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ với mọi số a, b, c dương và $a \neq 1$.

Câu 83: Cho a, b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$. Tìm kết luận đúng.

A. $\ln a + \ln b = \ln(a + b)$.

B. $\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$.

C. $\ln a - \ln b = \ln(a - b)$.

D. $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Câu 84: Cho hai số dương a, b ($a \neq 1$). Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

A. $\log_a a = 2a$.

B. $\log_a a^\alpha = \alpha$.

C. $\log_a 1 = 0$.

D. $a^{\log_a b} = b$.

Câu 85: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.

B. $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$.

C. $\log(ab) = \log a + \log b$.

D. $\log \frac{a}{b} = \log b - \log a$.

Câu 86: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

B. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln a}{\ln b}$

C. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$

D. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln b - \ln a$

Câu 87: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.

B. $\log \frac{a}{b} = \log b - \log a$.

C. $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$.

D. $\log(ab) = \log a + \log b$.

Câu 88: Cho $a, b, c > 0$, $a \neq 1$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_a a^c = c$

B. $\log_a a = 1$

C. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

D. $\log_a |b - c| = \log_a b - \log_a c$

Câu 89: Cho a, b, c là các số dương ($a, b \neq 1$). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $\log_a \left(\frac{b}{a^3}\right) = \frac{1}{3} \log_a b$.

B. $a^{\log_b a} = b$.

C. $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$ ($\alpha \neq 0$).

D. $\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b$.

DẠNG 7. TÍNH, RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA LOGARIT

Công thức logarit:

Cho các số $a, b > 0, a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
☐ $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	☐ $\lg b = \log b = \log_{10} b$	☐ $\ln b = \log_e b$
☐ $\log_a 1 = 0$	☐ $\log_a a = 1$	☐ $\log_a a^n = n$
☐ $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	☐ $\log_a b^n = n \log_a b$	☐ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
☐ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	☐ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	☐ $\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
☐ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, (b \neq 1)$	☐ $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c, (b \neq 1)$	☐ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$

Câu 90: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a + \log_2 b.$
B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b.$
- C.** $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a - \log_2 b.$
D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - \log_2 b.$

Câu 91: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln a = x; \ln b = y$. Tính $\ln(a^3 b^2)$

- A.** $P = x^2 y^3$
B. $P = 6xy$
C. $P = 3x + 2y$
D. $P = x^2 + y^2$

Câu 92: Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256$ bằng

- A.** 48
 B. 56
 C. 36
 D. $8 \log_2 256$

Câu 93: Cho $\log_8 c = m$ và $\log_{c^3} 2 = n$. Khẳng định **đúng** là

- A.** $mn = \frac{1}{9} \log_2 c.$
B. $mn = 9.$
C. $mn = 9 \log_2 c.$
D. $mn = \frac{1}{9}.$

Câu 94: Cho $a > 0, a \neq 1$ và $\log_a x = -1, \log_a y = 4$. Tính $P = \log_a (x^2 y^3)$

- A.** $P = 18.$
B. $P = 6.$
C. $P = 14.$
D. $P = 10.$

Câu 95: Với a và b là hai số thực dương tùy ý; $\log_2 (a^3 b^4)$ bằng

- A.** $\frac{1}{3} \log_2 a + \frac{1}{4} \log_2 b$
B. $3 \log_2 a + 4 \log_2 b$
C. $2(\log_2 a + \log_4 b)$
D. $4 \log_2 a + 3 \log_2 b$

Câu 96: Cho $P = \sqrt[20]{3^7 \sqrt[7]{27^4 \sqrt[4]{243}}}$. Tính $\log_3 P$?

- A.** $\frac{45}{28}.$
B. $\frac{9}{112}.$
C. $\frac{45}{56}.$
D. Đáp án khác.

Câu 106: Cho hai số thực dương a, b . Nếu viết $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab} = 1 + x \log_2 a + y \log_4 b$ ($x, y \in \mathbb{Q}$) thì biểu thức $P = xy$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{1}{3}$ B. $P = \frac{2}{3}$ C. $P = -\frac{1}{12}$ D. $P = \frac{1}{12}$

Câu 107: Cho $\log_{700} 490 = a + \frac{b}{c + \log 7}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $T = a + b + c$.

- A. $T = 7$. B. $T = 3$. C. $T = 2$. D. $T = 1$.

Câu 108: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $2 \log_2 (a + b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$. B. $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$.
C. $2 \log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$. D. $2 \log_4 (a + b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$.

Câu 109: Cho x, y là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

- A. $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = \frac{1}{3} a - b$. B. $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = \frac{1}{3} a + b$.
C. $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = -\frac{1}{3} a - b$. D. $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = -\frac{1}{3} a + b$.

Câu 110: Cho $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_b x$. Khi đó $\log_{ab^2} x^2$ bằng.

- A. $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. B. $\frac{2\alpha\beta}{2\alpha+\beta}$. C. $\frac{2}{2\alpha+\beta}$. D. $\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}$.

Câu 111: Tính giá trị biểu thức $P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} (b^{-2})$

- A. $\sqrt{3}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 112: Đặt $M = \log_6 56$, $N = a + \frac{\log_3 7 - b}{\log_3 2 + c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bộ số a, b, c nào dưới đây để có $M = N$?

- A. $a = 3, b = 3, c = 1$. B. $a = 3, b = \sqrt{2}, c = 1$.
C. $a = 1, b = 2, c = 3$. D. $a = 1, b = -3, c = 2$.

Câu 113: Tính $T = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{98}{99} + \log \frac{99}{100}$.

- A. $\frac{1}{10}$. B. -2. C. $\frac{1}{100}$. D. 2.

Câu 114: Cho $a, b, x > 0$; $a > b$ và $b, x \neq 1$ thỏa mãn $\log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a} + \frac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P = \frac{2a^2 + 3ab + b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

- A. $P = \frac{5}{4}$. B. $P = \frac{2}{3}$. C. $P = \frac{16}{15}$. D. $P = \frac{4}{5}$.

DẠNG 8. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH

Hàm số mũ

□ **Dạng:** $\begin{cases} y = a^x \\ y = a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

□ **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

Hàm số logarit

□ **Dạng:** $\begin{cases} y = \log_a x \\ y = \log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

□ **Đặc biệt:** $a = e \longrightarrow y = \ln x$; $a = 10 \longrightarrow y = \log x = \lg x$.

□ **Điều kiện xác định:** $u > 0$.

Câu 115: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{2018}(3x - x^2)$.

- A. $D = \mathbb{R}$ B. $D = (0; +\infty)$ C. $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ D. $D = (0; 3)$

Câu 116: Tập xác định của $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ là

- A. $[2; 3]$ B. $(2; 3)$ C. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$ D. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Câu 117: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6-x}$.

- A. $(-\infty; 6)$ B. $\mathbb{R}$ C. $(0; +\infty)$ D. $(6; +\infty)$

Câu 118: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - 2x - x^2)$ là

- A. $D = (-1; 1)$. B. $D = (-1; 3)$. C. $D = (-3; 1)$. D. $D = (0; 1)$.

Câu 119: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ là

- A. $(-1; 3)$. B. $[-1; 3]$.
C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 120: Tìm tập xác định của hàm số: $y = 2^{\sqrt{x}} + \log(3 - x)$

- A. $[0; +\infty)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $[0; 3)$.

Câu 121: Tập xác định của hàm số $y = [\ln(x - 2)]^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(3; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 122: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{2019}(4 - x^2) + (2x - 3)^{-2019}$.

- A. $D = \left[-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right]$. B. $D = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
C. $D = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $D = (-2; 2)$.

Câu 123: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(x - 2)^0} + \log_2(9 - x^2)$ là

- A. $D = (2; 3)$. B. $D = (-3; 3) \setminus \{2\}$. C. $D = (3; +\infty)$. D. $D = (-3; 3)$.

DẠNG 9. TÌM ĐẠO HÀM

□ **Đạo hàm hàm số mũ**

$$\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a \cdot [u'] \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u \cdot \boxed{u'} \end{cases}$ với $e \approx 2,71828\dots$

□ Đạo hàm hàm số logarit

$$\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{\boxed{u'}}{u \ln a} \end{cases}.$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln u)' = \frac{\boxed{u'}}{u} \end{cases}.$

Câu 124: Đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$ là

- A. $y' = 2e^{1-2x}$ B. $y' = -2e^{1-2x}$ C. $y' = -\frac{e^{1-2x}}{2}$ D. $y' = e^{1-2x}$

Câu 125: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x^2 + x + 1)$ là:

- A. $y' = \frac{(2x+1)\ln 3}{x^2 + x + 1}$ B. $y' = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)\ln 3}$ C. $y' = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$ D. $y' = \frac{1}{(x^2 + x + 1)\ln 3}$

Câu 126: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$.

- A. $(2x+1)e^x$ B. $(2x+1)e^{x^2+x}$ C. $(2x+1)e^{2x+1}$ D. $(x^2+x)e^{2x+1}$

Câu 127: Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$

- A. $f'(1) = 1$. B. $f'(1) = \frac{1}{2\ln 2}$. C. $f'(1) = \frac{1}{2}$. D. $f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 128: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + e^{2x})$.

- A. $y' = \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$. B. $y' = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$. C. $y' = \frac{1}{e^{2x} + 1}$. D. $y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$.

Câu 129: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1-x}{2^x}$

- A. $y' = \frac{2-x}{2^x}$. B. $y' = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{(2^x)^2}$.
C. $y' = \frac{x-2}{2^x}$. D. $y' = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$.

Câu 130: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_9(x^2 + 1)$.

- A. $y' = \frac{1}{(x^2 + 1)\ln 9}$. B. $y' = \frac{x}{(x^2 + 1)\ln 3}$. C. $y' = \frac{2x \ln 9}{x^2 + 1}$. D. $y' = \frac{2 \ln 3}{x^2 + 1}$.

Câu 131: Tính đạo hàm hàm số $y = e^x \cdot \sin 2x$

- A. $e^x (\sin 2x - \cos 2x)$. B. $e^x \cdot \cos 2x$.
C. $e^x (\sin 2x + \cos 2x)$. D. $e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$.

Câu 132: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$ là

- A. $\frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ B. $\frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ C. $\frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ D. $\frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Câu 133: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1+\ln x}$ với $x > 0$. Khi đó $-\frac{y'}{y^2}$ bằng

- A. $\frac{x}{x+1}$. B. $1 + \frac{1}{x}$. C. $\frac{x}{1+x+\ln x}$. D. $\frac{x+1}{1+x+\ln x}$.

Câu 134: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x \ln x - \frac{1}{e^x}$.

- A. $y' = 2^x \left(\frac{1}{x} + (\ln 2)(\ln x) \right) + \frac{1}{e^x}$. B. $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} + e^{-x}$.
C. $y' = 2^x \frac{1}{x} \ln 2 + \frac{1}{e^x}$. D. $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} - e^x$.

Câu 135: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_2 |x^2 - 2x|$ là

- A. $\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$ B. $\frac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$ C. $\frac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ D. $\frac{2x-2}{|x^2-2x|\ln 2}$

Câu 136: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là:

- A. $f'(x) = \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$. B. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$
C. $f'(x) = \frac{1}{2x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$. D. $f'(x) = \frac{1}{\ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$.

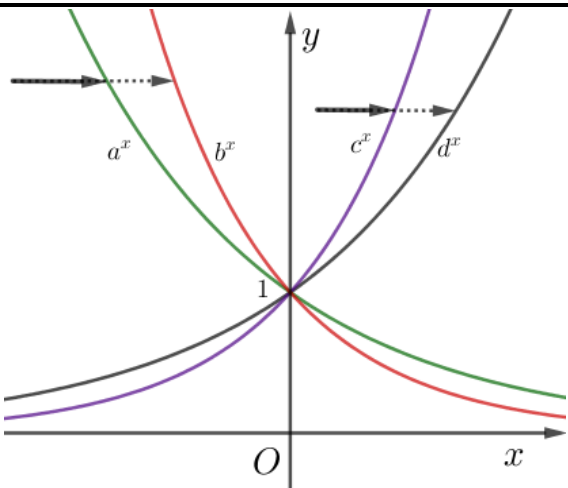
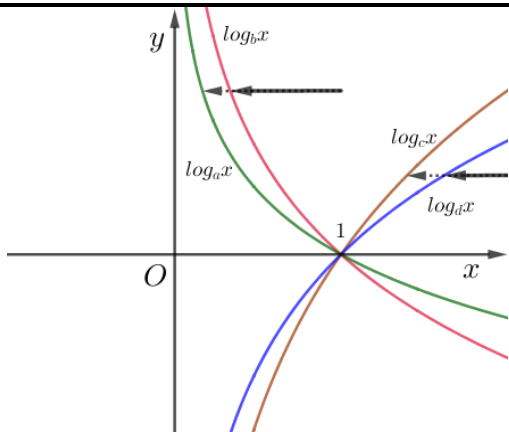
DẠNG 10. KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ, LOGARIT

□ **Sự biến thiên hàm số mũ:** $y = a^x$.

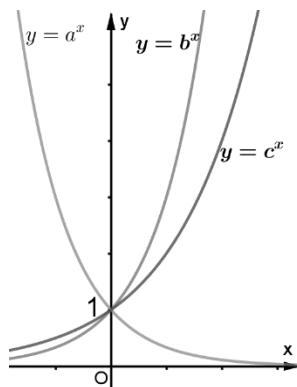
Nếu $a > 1$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $0 < a < 1$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□ **Sự biến thiên hàm số logarit:** $y = \log_a x$. Nếu $a > 1$: hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nếu

$0 < a < 1$: hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số mũ và logarit	
ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ	ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT
 □ Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. □ Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$. □ So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng a^x trước nên $a > b$. □ So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng c^x trước nên $c > d$. □ Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.	 □ Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. □ Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$. □ So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$. □ So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$. □ Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

Câu 137: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b < c < a$

B. $c < a < b$

C. $a < b < c$

D. $a < c < b$

Câu 138: Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $\log_3 x^2$ B. $y = \log(x^3)$ C. $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$ D. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

Câu 139: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ B. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $y = (\sqrt{3})^x$ D. $y = (0,5)^x$

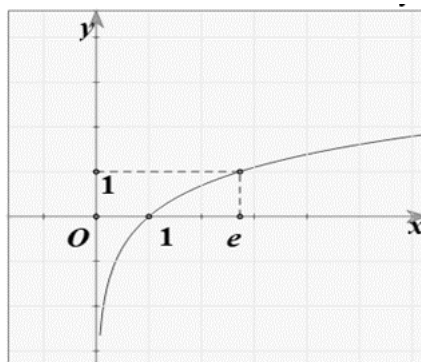
Câu 140: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{1}{x \ln 2}$
 B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng
 C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty; +\infty)$
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 141: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{2015}{2016}\right)^x$ B. $y = \left(\frac{3}{\sqrt{2016} - \sqrt{2}}\right)^x$ C. $y = (0,1)^{2x}$ D. $y = (2016)^{2x}$

Câu 142: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = -e^x$. B. $y = |\ln x|$. C. $y = \ln x$. D. $y = e^x$.

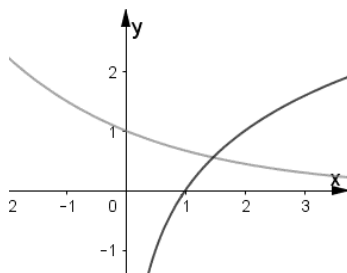
Câu 143: Tìm hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $f(x) = 3^x$. B. $f(x) = 3^{-x}$. C. $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. D. $f(x) = \frac{3}{3^x}$.

Câu 144: Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.
 B. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.
 D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 145: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $0 < a < \frac{1}{2} < b$. B. $0 < a < 1 < b$. C. $0 < b < 1 < a$. D. $0 < a < 1, 0 < b < \frac{1}{2}$.

Câu 146: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

- A. $y = \ln x$. B. $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ C. $y = \log_{\pi} x$. D. $y = \log_{4-\sqrt{5}} x$.

Câu 147: Đồ thị hàm số $y = \ln x$ đi qua điểm

- A. $(1; 0)$. B. $(2; e^2)$. C. $(2e; 2)$. D. $(0; 1)$.

Câu 148: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. B. $y = \log x$. C. $y = 2^x$. D. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Câu 149: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.
 C. Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

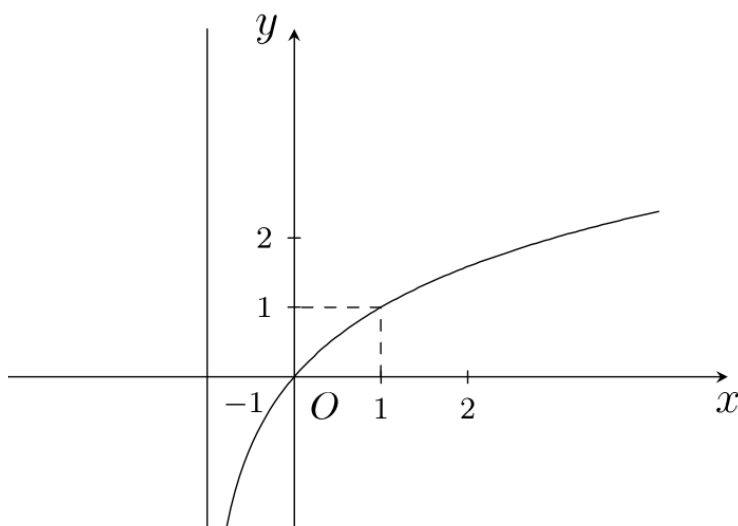
Câu 150: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$. B. $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$. C. $y = \log_{\frac{e}{3}} x$. D. $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Câu 151: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$.
 B. Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.
 C. Đồ thị của hai hàm số $y = 2^x$ và hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.
 D. Đồ thị của hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = \log_2 \frac{1}{x}$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Câu 152: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



- A. $y = \log_3 x$. B. $y = \log_2 x + 1$. C. $y = \log_2 (x+1)$. D. $y = \log_3 (x+1)$

Câu 153: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực R .

- A. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ B. $y = \log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2 + 1)$ C. $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ D. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$

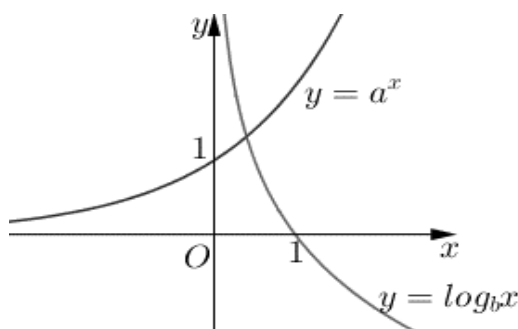
Câu 154: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$ B. $y = \log_2(\sqrt{x} + 1)$ C. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ D. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

Câu 155: Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

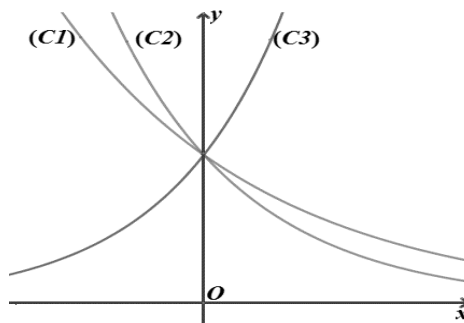
- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 156: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng



- A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$. B. $a > 1, b > 1$.
C. $0 < b < 1 < a$. D. $0 < a < 1 < b$.

Câu 157: Hình vẽ bên thể hiện đồ thị của ba trong bốn hàm số $y = 6^x$, $y = 8^x$, $y = \frac{1}{5^x}$ và $y = \frac{1}{\sqrt{7}^x}$.



Hỏi là đồ thị hàm số nào?

- A. $y = 6^x$. B. $y = \frac{1}{\sqrt{7}^x}$. C. $y = \frac{1}{5^x}$. D. $y = 8^x$

Câu 158: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

- A. $\frac{\ln 2}{2}$. B. $\frac{\ln 3}{3}$. C. $\frac{3}{e^2}$. D. $\frac{1}{e}$.

Câu 159: Cho hàm số $f(x) = \ln x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 160: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

- A. $2e^4$ B. $-e^2$ C. $2e^2$ D. $-2e^2$

Câu 161: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{x+1} - \frac{4}{3} \cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ bằng

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. RÚT GỌN, BIẾN ĐỔI, TÍNH TOÁN BIỂU THỨC LŨY THỪA

Công thức lũy thừa		
Cho các số dương a, b và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
☐ $a^0 = 1$	☐ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$	☐ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
☐ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$	☐ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	☐ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
☐ $a^n b^n = (ab)^n$	☐ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	☐ $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} \begin{cases} * \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ * \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \end{cases} (m, n \in \mathbb{N}^*)$

Câu 1: Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^m + a^n = a^{m+n}$. B. $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$. C. $(a^m)^n = (a^n)^m$. D. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

Lời giải

Chọn C

Tính chất lũy thừa

Câu 2: Với $a > 0, b > 0, \alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. B. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. C. $\frac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. D. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3: Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

- A. $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$. B. $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. C. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. D. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của lũy thừa thì đẳng thức $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$ Sai.

Câu 4: Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. **B.** $(a^m)^n = a^{m+n}$. **C.** $(a+b)^m = a^m + b^m$. **D.** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Lời giải

Chon D

Ta có: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow$ Loại A

$$(a^m)^n = a^{m.n} \Rightarrow \text{Loại B}$$

$$(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2 \Rightarrow \text{Loại C}$$

$$a^m . a^n = a^{m+n} \Rightarrow \text{Chon D}$$

Câu 5: Với α là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\sqrt{10^\alpha} = (\sqrt{10})^\alpha$. **B.** $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. **C.** $(10^\alpha)^2 = (100)^\alpha$. **D.** $(10^\alpha)^2 = (10)^{\alpha^2}$.

Lời giải

Theo định nghĩa và các tính chất của lũy thừa, ta thấy A, B, C là các mệnh đề đúng.

Xét mệnh đề D: với $\alpha = 1$, ta có: $(10^1)^2 = 100 \neq (10)^{1^2} = 10$ nên mệnh đề D sai.

Câu 6: Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{a}$ bằng

A. $a^{\frac{7}{3}}$. **B.** $a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}$.

Câu 7: Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{2}{3}}$ **B.** $P = x^{\frac{1}{2}}$ **C.** $P = x^{\frac{13}{24}}$ **D.** $P = x^{\frac{1}{4}}$

Lời giải

Chon C

Ta có, với $x > 0$: $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$.

Câu 8: Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x$ **B.** $P = x^{\frac{11}{6}}$ **C.** $P = x^{\frac{7}{6}}$ **D.** $P = x^{\frac{5}{6}}$

Lời giải

Chọn A

$$P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = x^{\frac{1}{8}}$

B. $P = \sqrt{x}$

C. $P = x^{\frac{2}{9}}$

D. $P = x^2$

Lời giải

Chọn B

Với $x > 0$; $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Câu 10: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\frac{2}{1009}$.

B. $\frac{1}{1009}$.

C. $\frac{3}{1009}$.

D. $\frac{3}{2018^2}$.

Lời giải

Chọn A

$a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a} = a^{\frac{3}{2018}} \cdot a^{\frac{1}{2018}} = a^{\frac{4}{2018}} = a^{\frac{2}{1009}}$. Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\frac{2}{1009}$.

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

A. $P = a$.

B. $P = a^3$.

C. $P = a^4$.

D. $P = a^5$.

Lời giải

$$P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$$

Câu 12: Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \sqrt{x}} = x^\alpha$, giá trị của α là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x \cdot \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Câu 13: Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

A. $\sqrt[3]{a^2}$.

B. $a^{\frac{8}{3}}$.

C. $a^{\frac{3}{8}}$.

D. $\sqrt[6]{a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

Câu 14: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$

A. $P = a$

B. $P = a^3$

C. $P = a^4$

D. $P = a^5$

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^3}{a^{2-4}} = a^5$

Câu 15: Cho biểu thức $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P = x^{-2}$

B. $P = x^{\frac{1}{2}}$

C. $P = x^{\frac{1}{2}}$

D. $P = x^2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$.

Câu 16: Cho biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn P được kết quả:

A. a^5 .

B. a .

C. a^3 .

D. a^4 .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

Câu 17: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^3} \sqrt{x}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $P = x^{\frac{1}{2}}$.

B. $P = x^{\frac{7}{12}}$.

C. $P = x^{\frac{5}{8}}$.

D. $P = x^{\frac{7}{24}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^3} \sqrt{x}} = x^{\frac{5}{8}}$

Câu 18: Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{21}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{18}$

Lời giải

Chọn C

$$A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} \Rightarrow m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow m.n = \frac{1}{9}.$$

Câu 19: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 312$. B. $m^2 + n^2 = 543$. C. $m^2 - n^2 = -312$. D. $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{\frac{-5}{7}}} = \frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$$

Mà $A = a^{\frac{m}{n}}, m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản

$$\Rightarrow m = 19, n = 7$$

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = 312$$

Câu 20: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

A. $P = a(a+1)$.

B. $P = a - 1$.

C. $P = a$.

D. $P = a + 1$.

Lời giải

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{-1}{4}}\right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{-1}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{-1}{4}}} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a.$$

Câu 21: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ ta được

A. $P = ab$.

B. $P = a + b$.

C. $P = a^4b + ab^4$.

D. $P = ab(a+b)$.

Lời giải

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{a.a^{\frac{1}{3}}b + ab.b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$$

Câu 22: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** $P \in (330; 340)$. **B.** $P \in (350; 360)$. **C.** $P \in (260; 370)$. **D.** $P \in (340; 350)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{2^3\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{30}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}} = 2^{\frac{11}{15}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{11}{15} \Rightarrow \begin{cases} m=11 \\ n=15 \end{cases} \Rightarrow P = m^2 + n^2 = 11^2 + 15^2 = 346.$$

Câu 23: Cho $a > 0$, $b > 0$, giá trị của biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

- A.** 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Cách 2:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{(a+b)^2}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{1}{a+b} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(a+b)}{2(ab)^{\frac{1}{2}}} = 1. \end{aligned}$$

Câu 24: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

- A.** $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$. **C.** $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. **D.** $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Câu 25: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2016})$

- A.** $M = 2017^{1008} - 1$ **B.** $M = -2017^{1008} - 1$ **C.** $M = 2017^{2016} - 1$ **D.** $M = 1 - 2017^{2016}$

Lời giải

Chọn B

$$f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})} = \frac{1-a}{\sqrt{a}-1} = -1 - \sqrt{a} \text{ nên}$$

$$M = f(2017^{2016}) = -1 - \sqrt{2017^{2016}} = -1 - 2017^{1008}$$

Câu 26: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$ là

- A.** -9. **B.** -10. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0} = \frac{2^{3-1} + 5^{-3+4}}{10^{-3+2} - 1} = \frac{4+5}{10^{-1} - 1} = \frac{9}{\frac{1}{10} - 1} = -10..$$

Câu 27: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2018})$.

- A.** $2017^{2018} + 1$. **B.** $-2017^{1009} - 1$. **C.** 2017^{1009} . **D.** $2017^{1009} + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}} - a^{-\frac{1}{8}}\right)} = \frac{1-a}{a^{\frac{1}{2}} - 1} = -1 - a^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Do đó } M = f(2017^{2018}) = -1 - (2017^{2018})^{\frac{1}{2}} = -1 - 2017^{1009}.$$

Câu 28: Cho biểu thức $f(x) = \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} \sqrt[12]{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2,7)$ bằng

- A.** 0,027. **B.** 27. **C.** 2,7. **D.** 0,27.

Lời giải

Chọn C

$$f(x=2,7) = \sqrt[3]{2,7} \cdot \sqrt[4]{2,7} \cdot \sqrt[12]{2,7^5} = 2,7.$$

Câu 29: Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(4+2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}}.$

A. $P = -2^{2017}.$

B. $-1.$

C. $-2^{2019}.$

D. $2^{2018}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P = \frac{(1+\sqrt{3})^{2 \cdot 2018} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}} = \left[(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) \right]^{2017} = -2^{2017}.$

Câu 30: Giá trị biểu thức $(3+2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2019}$ bằng

A. $(\sqrt{2}+1)^{2019}.$

B. $(\sqrt{2}-1)^{2017}.$

C. $(\sqrt{2}-1)^{2019}.$

D. $(\sqrt{2}+1)^{2017}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(3+2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2019} = \left[(\sqrt{2}+1)^2 \right]^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2019}$
 $= (\sqrt{2}+1)^{2018} \cdot (\sqrt{2}+1)^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2018} \cdot (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1)^{2017} \cdot \left[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) \right]^{2019}$
 $= (\sqrt{2}+1)^{2017}.$

Câu 31: Cho $a > 0, b > 0$ giá trị của biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. $1.$

B. $\frac{1}{3}.$

C. $\frac{2}{3}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$T = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{4b} + \frac{b}{4a} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4ab} \right]^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{-1} (ab)^{\frac{1}{2}} \frac{(a+b)}{2(ab)^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

DẠNG 2. SO SÁNH CÁC BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

☐ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$;

☐ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

□ Với mọi $0 < a < b$, ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$$

$$a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Câu 32: Cho $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n$. Khi đó

A. $m = n$.

B. $m < n$.

C. $m > n$.

D. $m \neq n$.

Lời giải

Chọn C

Do $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ nên $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n \Leftrightarrow m > n$.

Câu 33: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

B. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$.

C. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$.

D. $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $a > 1$; $-\sqrt{3} > -\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 34: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI?

A. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$.

B. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

C. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$.

D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

Lời giải

Chọn A

A. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$. Cùng cơ số, $0 < \sqrt{3}-1 < 1$, hàm nghịch biến, số mũ lớn hơn nên bé hơn. **Sai**

B. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. Cùng cơ số, $2 > 1$, hàm đồng biến, số mũ $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} > (\sqrt{3})^2 = 3$ nên lớn hơn. **Đúng**

C. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$. Cùng cơ số, $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, hàm nghịch biến, số mũ bé hơn nên lớn hơn. **Đúng.**

D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$. Cùng cơ số, $0 < 1-\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, hàm nghịch biến, số mũ lớn hơn nên bé hơn. **Đúng**

Câu 35: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$.

B. $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

D. $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{-2017} > (\sqrt{5} + 2)^{-2018} \Rightarrow A \text{ sai}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{2018} < (\sqrt{5} + 2)^{2019} \Rightarrow B \text{ sai}$$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Câu 36: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$.

Lời giải

Ta có:

$$\left(\frac{3}{7}\right) < \left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}. \text{ Phương án A Sai.}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}. \text{ Phương án B Đúng.}$$

$$3 < 5 \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}. \text{ Phương án C Sai.}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100} \Rightarrow (2^{-2})^{-50} < (2)^{100} \Rightarrow 2^{100} < 2^{100}. \text{ Phương án D Sai.}$$

Câu 37: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$. **B.** $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$.
C. $(\sqrt{3} - 1)^{2018} > (\sqrt{3} - 1)^{2017}$. **D.** $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$+) \begin{cases} 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \\ 2017 < 2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018} \text{ nên A đúng.}$$

$$+) \begin{cases} 0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)^{2018} < (\sqrt{3} - 1)^{2017} \text{ nên B sai.}$$

$$+) \begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{2} + 1 > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}} \text{ nên C đúng.}$$

$$+) \begin{cases} 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017} \text{ nên D đúng.}$$

Câu 38: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

A. $a > 0$.

B. $0 < a < 1$.

C. $a > 1$.

D. $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[21]{a^6}.$$

Ta có $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[21]{a^5} > \sqrt[21]{a^6}$ mà $5 < 6$ vậy $0 < a < 1$.

Câu 39: So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,3}$.

A. $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$.

B. $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,3}$.

C. $\sqrt{3}^{0,3} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.

D. $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $0,2 < \sqrt{3} \Rightarrow (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$ nên loại đáp án

Câu 40: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

B. $0 < a < 1, b > 1$.

C. $a > 1, 0 < b < 1$.

D. $a > 1, b > 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln a > \frac{1}{3} \ln a \Leftrightarrow \frac{1}{6} \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

$$b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \ln b > \frac{3}{4} \ln b \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{12} \ln b \Leftrightarrow 0 < b < 1$$

Lưu ý: Ta có thể sử dụng máy tính Casio để thử các đáp án bằng cách cho a, b các giá trị cụ thể.

Câu 41: So sánh ba số $a = 1000^{1001}$, $b = 2^{2^{64}}$ và $c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$?

A. $c < a < b$.

B. $b < a < c$.

C. $c < b < a$.

D. $a < c < b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $1^1 < 1000^{1000}$; $2^2 < 1000^{1000}$... $999^{999} < 1000^{1000}$

$$\Rightarrow c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000} < 1000 \cdot 1000^{1000} \Leftrightarrow c < a$$

Mặt khác: $2^{10} > 1000$

$$\Rightarrow 2^{64} \cdot \ln 2 = \frac{2^4}{10} \cdot (2^{10})^6 \cdot \ln 2^{10} > 1000^6 \cdot \ln 1000 > 1001 \cdot \ln 1000 \Rightarrow 2^{2^{64}} > 1000^{1001} \Leftrightarrow a < b$$

Vậy $c < a < b$.

DẠNG 3. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

□ **Dạng:** $\begin{cases} y = x^\alpha \\ y = u^\alpha \end{cases}$ với u là đa thức đại số.

□ **Tập xác định:**

Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{DK} u \in \mathbb{R}$.

Nếu $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ \alpha = 0 \end{cases} \xrightarrow{DK} u \neq 0$.

Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{DK} u > 0$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $[1; +\infty)$

B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

C. $(1; +\infty)$

D. $(0; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Vì $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy tập xác định của hàm số $D = (1; +\infty)$

Câu 43: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x)^{-4}$.

A. $(0; 3)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

C. $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = (x^2 - 3x)^{-2}$ xác định khi $x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

Câu 44: Tìm tập xác định của hàm số: $y = (4 - x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D = (-2; 2)$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = (2; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$. Vậy TXĐ: $D = (-2; 2)$.

Câu 45: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $D = \mathbb{R}$?

- A.** $y = (2 + \sqrt{x})^\pi$ **B.** $y = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^\pi$ **C.** $y = (2 + x^2)^\pi$ **D.** $y = (2 + x)^\pi$

Lời giải

Chọn C

Đáp án A: Điều kiện $x \geq 0$. Tập xác định $D = [0; +\infty)$.

Đáp án B: Điều kiện $x \neq 0$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đáp án C: Điều kiện $2 + x^2 > 0$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đáp án D: Điều kiện $2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Tập xác định $D = (-2; +\infty)$.

Câu 46: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

- A.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ **B.** $D = \mathbb{R}$
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **D.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định: } 3x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định } D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$$

Câu 47: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y = (\sqrt{3})^x$ **D.** $y = (0,5)^x$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Thấy các số $\frac{1}{\pi}$; $\frac{2}{3}$; 0,5 nhỏ hơn 1, còn $\sqrt{3}$ lớn hơn 1 nên chọn C.

Câu 48: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 + 2x - 3)^{\sqrt{2}}$.

- A.** $D = \mathbb{R}$ **B.** $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ **C.** $D = (0; +\infty)$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases}$.

Vậy $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Câu 49: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện để hàm số xác định: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Câu 50: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 4x)^{\frac{2019}{2020}}$ là

- A.** $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ **C.** $(0; 4)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$

Lời giải

Điều kiện $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 4 \end{cases}$.

Câu 51: Tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 6x - 8)^{\sqrt{2}}$ là

- A.** $D = (2; 4)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(4; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi: $-x^2 + 6x - 8 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (2; 4)$.

Câu 52: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 7x + 10)^{-3}$

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$. **B.** $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(2; 5)$.

Lời giải

Chọn A

ĐKXD: $x^2 - 7x + 10 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$.

Câu 53: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4x^2 - 1)^{-3}$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}$.

Câu 54: Tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{-2019}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $[-4; 1]$.

D. $(-4; 1)$.

Lời giải

Vì $y = (4 - 3x - x^2)^{-2019}$ là hàm số lũy thừa có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định là

$$4 - 3x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

Câu 55: Tìm tập xác định của $y = (x^2 - 3x + 2)^{-\frac{1}{3}}$

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

C. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 5}$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Vì $-\frac{1}{3}$ không nguyên nên $y = (x^2 - 3x + 2)^{-\frac{1}{3}}$ xác định khi

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

Câu 56: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^\pi$ là

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

D. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^\pi$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

Tập xác định $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Câu 57: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$.

B. $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 4 \end{cases}$.

Vậy tập xác định D của hàm số là: $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 58: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 6x + 9)^{\frac{\pi}{2}}$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $D = (3; +\infty)$. **C.** $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Do $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên ta có điều kiện: $x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Câu 59: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **B.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
C. $(1; 2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định là $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 60: Tập xác định D của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$ là

- A.** $D = (3; +\infty)$. **B.** $D = [3; +\infty)$. **C.** $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số: $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Do đó tập xác định của hàm số là $D = (3; +\infty)$.

Câu 61: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{5}} + (x-3)^{-2}$ là

- A.** $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{3\}$ **B.** $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$.
C. $D = (-\infty; +\infty) \setminus (1; 2)$. **D.** $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$.

DẠNG 4. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

□ **Đạo hàm:**

$$\begin{cases} y = x^\alpha \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^\alpha \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot [u'] \end{cases}$$

Câu 62: Tìm đạo hàm của hàm số: $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$

A. $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$

B. $\frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}$

C. $3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

D. $\frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức đạo hàm hợp hàm số lũy thừa : $\left([u(x)]^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot [u(x)]'$

Ta có : $y' = \left((x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 3x \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

Câu 63: Hàm số $y = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}$ có đạo hàm là.

A. $y' = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2 + 1)^3}}$

B. $y' = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

C. $y' = 4x\sqrt[5]{x^2 + 1}$

D. $y' = \frac{4}{\sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}}$

Lời giải

Chọn A

Vì Áp dụng công thức $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

Câu 64: Đạo hàm của hàm số $y = (2x + 1)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là.

A. $-\frac{1}{3}(2x + 1)^{-\frac{4}{3}}$

B. $2(2x + 1)^{-\frac{1}{3}} \ln(2x + 1)$

C. $(2x + 1)^{-\frac{1}{3}} \ln(2x + 1)$

D. $-\frac{2}{3}(2x + 1)^{-\frac{4}{3}}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \left[(2x + 1)^{-\frac{1}{3}}\right]' = \frac{-1}{3}(2x + 1)'(2x + 1)^{-\frac{1}{3}-1} = \frac{-2}{3}(2x + 1)^{-\frac{4}{3}}$

Câu 65: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y' = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{8}{3}}$

B. $y' = \frac{2x + 1}{2\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

C. $y' = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$

D. $y' = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{2}{3}}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2 + x + 1)' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$.

Câu 66: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - \cos 3x)^6$.

A. $y' = 6 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$.

B. $y' = 6 \sin 3x (\cos 3x - 1)^5$.

C. $y' = 18 \sin 3x (\cos 3x - 1)^5$.

D. $y' = 18 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = (1 - \cos 3x)^6 \Rightarrow y = 6(1 - \cos 3x)^5 \cdot (1 - \cos 3x)'$.

$= 6(1 - \cos 3x)^5 \cdot 3 \sin 3x = 18 \sin 3x (1 - \cos 3x)^5$.

Câu 67: Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^{\frac{e}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

A. $y' = 2x(x^2 + 1)^{\frac{e}{2}-1}$.

B. $y' = ex\sqrt{(x^2 + 1)^{e-2}}$.

C. $y' = \frac{e}{2}(x^2 + 1)^{\frac{e}{2}-1}$.

D. $y' = (x^2 + 1)^{\frac{e}{2}} \ln(x^2 + 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \left((x^2 + 1)^{\frac{e}{2}} \right)' = \frac{e}{2} \cdot 2x(x^2 + 1)^{\frac{e}{2}-1} = ex(x^2 + 1)^{\frac{e}{2}-1} = ex\sqrt{(x^2 + 1)^{e-2}}$.

Câu 68: Cho hàm số $y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}}$, ($x > 0$). Đạo hàm của y là:

A. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{31}{32}}$.

B. $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}$.

C. $y' = e^{\frac{15}{16}} \cdot x^{\frac{31}{32}}$.

D. $y' = \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

Ta có: $y = \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}} \cdot x^{\frac{1}{32}} \Rightarrow y' = \frac{1}{32} \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{\frac{1}{32}-1} = \frac{1}{32} \sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}} \cdot x^{\frac{31}{32}}$

$= \frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32 \cdot \sqrt[32]{x^{31}}}$.

Câu 69: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x + 3^x$

A. $y' = 2 \cos 2x + x3^{x-1}$.

B. $y' = -\cos 2x + 3^x$.

C. $y' = -2 \cos 2x - 3^x \ln 3$.

D. $y' = 2 \cos 2x + 3^x \ln 3$.

Lời giải

Hàm số $y = \sin 2x + 3^x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm: $y' = 2 \cos 2x + 3^x \ln 3$.

Câu 70: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

A. $y' = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

B. $y' = (2x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \ln|2x-1|$.

C. $y' = \frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{4}{3}}$.

D. $y' = \frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x-1)' = \frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 71: Đạo hàm của hàm số $y = x \cdot 2^x$ là

A. $y' = (1+x \ln 2)2^x$. **B.** $y' = (1-x \ln 2)2^x$. **C.** $y' = (1+x)2^x$. **D.** $y' = 2^x + x^2 2^{x-1}$.

Lời giải

$$y' = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = (1+x \ln 2)2^x.$$

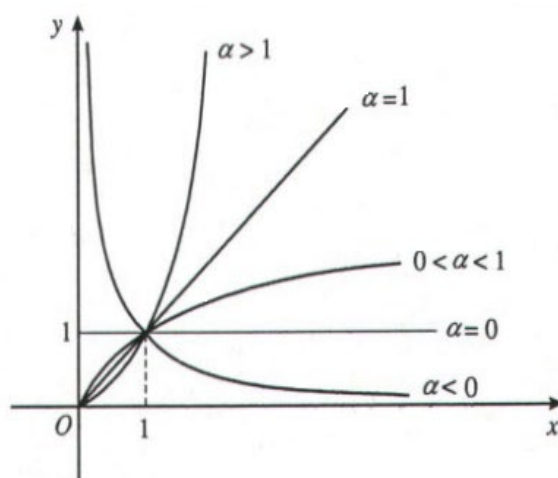
DẠNG 5. KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA

Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$																		
Tập xác định: $(0; +\infty)$. Sự biến thiên $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$ Tiệm cận: không có. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'		+	y	0	$+\infty$	Tập xác định: $(0; +\infty)$. Sự biến thiên $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang. Oy là tiệm cận đứng. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'		-	y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'		+																	
y	0	$+\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
y'		-																	
y	$+\infty$	0																	

Đồ thị của hàm số.



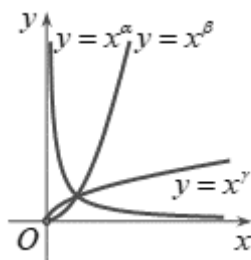
Câu 72: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = 2^x$. **B.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **C.** $y = (\sqrt{\pi})^x$. **D.** $y = e^x$.

Lời giải

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.

Câu 73: Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề đúng là



A. $\alpha > \beta > \gamma$.

B. $\beta > \alpha > \gamma$.

C. $\beta > \gamma > \alpha$.

D. $\gamma > \beta > \alpha$.

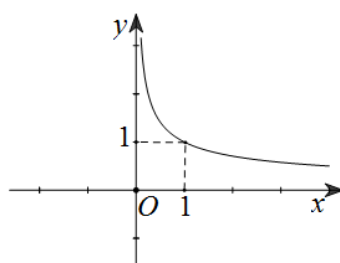
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta có $\alpha < 0$, $\beta > 1$; $0 < \gamma < 1$.

Vậy $\beta > \gamma > \alpha$.

Câu 74: Đường cong ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = 2^{1-x}$.

B. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

C. $y = x^{-1}$.

D. $y = \log_2(2x)$.

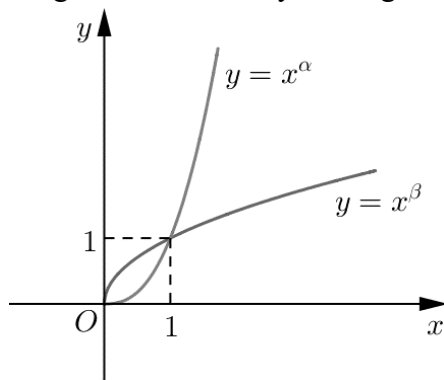
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy TXĐ của hàm số là $D = (0; +\infty) \Rightarrow$ loại A, C.

Hàm số nghịch biến trên TXĐ của nó mà hàm số $y = \log_2(2x)$ đồng biến trên TXĐ của nó nên ta loại đáp án D. $\Rightarrow$ **Chọn B**

Câu 75: Cho là các số α , β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $0 < \alpha < 1 < \beta$.

B. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

C. $0 < \beta < 1 < \alpha$.

D. $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

Lời giải

Chọn C

Với $x_0 > 1$ ta có: $x_0^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$; $x_0^\beta > 1 \Rightarrow \beta > 0$.

$$x_0^\alpha > x_0^\beta \Rightarrow \alpha > \beta.$$

Câu 76: Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$. **B.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. **D.** Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$, suy ra C đúng.

Do $x > 0$ nên $x^{-\sqrt{2}} > 0$, suy ra A đúng.

Ta có: $y' = -\sqrt{2} \cdot x^{-\sqrt{2}-1} < 0; \forall x > 0$, suy ra B đúng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\sqrt{2}} = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận Oy làm tiệm cận đứng, đáp án D đúng.

Câu 77: Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}$. Xét $y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - 1$

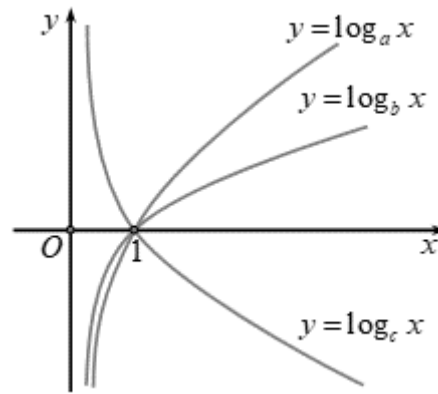
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}; y' \text{ không xác định khi } x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$		$+\infty$
y'		-		+	0	-	

y' đổi dấu khi qua $x = 0$ và $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$ nên hàm số có 2 cực trị.

Câu 78: Cho a, b, c là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $a < b < c$.

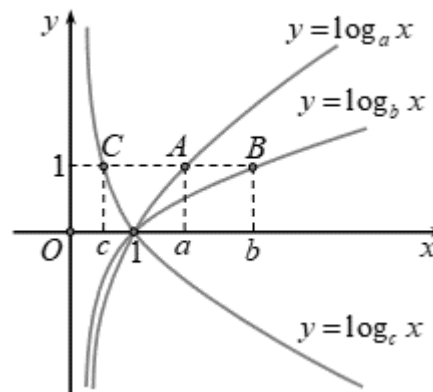
B. $c < a < b$.

C. $c < b < a$.

D. $b < c < a$.

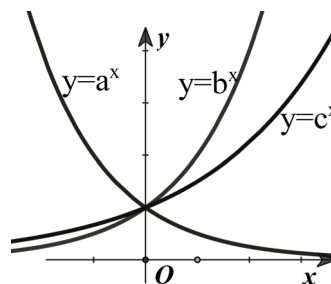
Lời giải

* Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ lần lượt đi qua các điểm $A(a; 1)$, $B(b; 1)$, $C(c; 1)$.



* Từ hình vẽ ta có: $c < a < b$.

Câu 79: Cho ba số thực dương a , b , c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



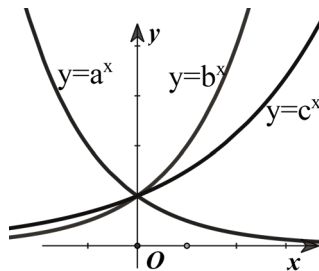
A. $1 < a < c < b$.

B. $a < 1 < c < b$.

C. $a < 1 < b < c$.

D. $1 < a < b < c$.

Lời giải



Đồ thị của hàm số $y = a^x$ có hướng đi xuống nên $a < 1$.

Đồ thị của các hàm số $y = b^x$ và $y = c^x$ có hướng đi lên nên $b > 1$ và $c > 1$. Hơn nữa đồ thị hàm số $y = b^x$ ở phía trên đồ thị hàm số $y = c^x$ nên $b > c$.

Vậy $a < 1 < c < b$.

Câu 80: Hàm số $y = x^2 e^{2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Ta có $y' = 2xe^{2x}(x+1)$; giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

Do $y' < 0$ với $\forall x \in (-1; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

DẠNG 6. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Công thức logarit:		
Cho các số $a, b > 0$, $a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
☐ $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	☐ $\lg b = \log b = \log_{10} b$	☐ $\ln b = \log_e b$
☐ $\log_a 1 = 0$	☐ $\log_a a = 1$	☐ $\log_a a^n = n$
☐ $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	☐ $\log_a b^n = n \log_a b$	☐ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
☐ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	☐ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	☐ $\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
☐ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, ($b \neq 1$)	☐ $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$, ($b \neq 1$)	☐ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, ($b \neq 1$)

Câu 81: Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$, mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$.

B. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$.

D. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Lời giải

Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$. Ta có: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} \neq \frac{1}{\log_a x}$. Vậy A sai.

Theo các tính chất logarit thì các phương án B, C và D đều đúng.

Câu 82: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

B. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

C. $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

D. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ với mọi số a, b, c dương và $a \neq 1$.

Lời giải

Chọn A

Câu 83: Cho a, b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$. Tìm kết luận đúng.

A. $\ln a + \ln b = \ln(a + b)$.

B. $\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$.

C. $\ln a - \ln b = \ln(a - b)$.

D. $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Theo tính chất làm Mũ-Log.

Câu 84: Cho hai số dương a, b ($a \neq 1$). Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

A. $\log_a a = 2a$.

B. $\log_a a^\alpha = \alpha$.

C. $\log_a 1 = 0$.

D. $a^{\log_a b} = b$.

Lời giải

Chọn A

Câu 85: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.

B. $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$.

C. $\log(ab) = \log a + \log b$.

D. $\log \frac{a}{b} = \log b - \log a$.

Lời giải

Ta có $\log(ab) = \log a + \log b$.

Câu 86: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ **B.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln a}{\ln b}$

C. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$ **D.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln b - \ln a$

Lời giải

Chọn A

Câu 87: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.

B. $\log \frac{a}{b} = \log b - \log a$.

C. $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$.

D. $\log(ab) = \log a + \log b$.

Lời giải

Với các số thực dương a, b bất kì ta có:

+) $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ nên **B, C** sai.

+) $\log(ab) = \log a + \log b$ nên **A** sai, **D** đúng.

Vậy **Chọn D**

Câu 88: Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_a a^c = c$

B. $\log_a a = 1$

C. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

D. $\log_a |b - c| = \log_a b - \log_a c$

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của logarit, mệnh đề sai là $\log_a |b - c| = \log_a b - \log_a c$.

Câu 89: Cho a, b, c là các số dương ($a, b \neq 1$). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $\log_a \left(\frac{b}{a^3} \right) = \frac{1}{3} \log_a b$.

B. $a^{\log_b a} = b$.

C. $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b (\alpha \neq 0)$.

D. $\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b$.

Lời giải

DẠNG 7. TÍNH, RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA LOGARIT

Công thức logarit:		
Cho các số $a, b > 0, a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
☐ $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	☐ $\lg b = \log b = \log_{10} b$	☐ $\ln b = \log_e b$
☐ $\log_a 1 = 0$	☐ $\log_a a = 1$	☐ $\log_a a^n = n$
☐ $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	☐ $\log_a b^n = n \log_a b$	☐ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
☐ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	☐ $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$	☐ $\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
☐ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, (b \neq 1)$	☐ $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c, (b \neq 1)$	☐ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$

Câu 90: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a + \log_2 b$.

B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b$.

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$

D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = \log_2 (2a^3) - \log_2 (b) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$

Câu 91: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln a = x; \ln b = y$. Tính $\ln(a^3 b^2)$

A. $P = x^2 y^3$

B. $P = 6xy$

C. $P = 3x + 2y$

D. $P = x^2 + y^2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln(a^3 b^2) = \ln a^3 + \ln b^2 = 3\ln a + 2\ln b = 3x + 2y$

Câu 92: Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256$ bằng

A. 48

B. 56

C. 36

D. $8\log_2 256$

Lời giải

Chọn C

Ta có $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256 = \log_2 (2 \cdot 4 \cdot 8 \dots 256) = \log_2 (2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^8)$
 $= \log_2 (2^{1+2+3+\dots+8}) = (1+2+3+\dots+8)\log_2 2 = 1+2+3+\dots+8 = 36.$

Câu 93: Cho $\log_8 c = m$ và $\log_{c^3} 2 = n$. Khẳng định **đúng** là

A. $mn = \frac{1}{9}\log_2 c.$

B. $mn = 9.$

C. $mn = 9\log_2 c.$

D. $mn = \frac{1}{9}.$

Lời giải

$mn = \log_8 c \cdot \log_{c^3} 2 = \left(\frac{1}{3}\log_2 c \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\log_c 2 \right) = \frac{1}{9}.$

Câu 94: Cho $a > 0, a \neq 1$ và $\log_a x = -1, \log_a y = 4$. Tính $P = \log_a (x^2 y^3)$

A. $P = 18.$

B. $P = 6.$

C. $P = 14.$

D. $P = 10.$

Lời giải

Ta có $\log_a (x^2 \cdot y^3) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2\log_a x + 3\log_a y = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10.$

Câu 95: Với a và b là hai số thực dương tùy ý; $\log_2 (a^3 b^4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\log_2 a + \frac{1}{4}\log_2 b$

B. $3\log_2 a + 4\log_2 b$

C. $2(\log_2 a + \log_4 b)$

D. $4\log_2 a + 3\log_2 b$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2 (a^3 b^4) = \log_2 a^3 + \log_2 b^4 = 3\log_2 a + 4\log_2 b$ nên **B** đúng.

Câu 96: Cho $P = \sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}}$. Tính $\log_3 P$?

- A.** $\frac{45}{28}$. **B.** $\frac{9}{112}$. **C.** $\frac{45}{56}$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}} \Rightarrow P = 3^{\frac{1}{20}} \cdot 27^{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{7}} \cdot 243^{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4}} = 3^{\frac{9}{112}} \Rightarrow \log_3 P = \log_3 3^{\frac{9}{112}} = \frac{9}{112}.$$

Câu 97: Cho các số dương a, b, c, d . Biểu thức $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ bằng

- A.** 1. **B.** 0. **C.** $\ln \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right)$. **D.** $\ln(abcd)$.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có } S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} \right) = \ln 1 = 0.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln a - \ln b + \ln b - \ln c + \ln c - \ln d + \ln d - \ln a = 0.$$

Câu 98: Cho x, y là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

- A.** $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = \frac{1}{3}a - b$. **B.** $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = \frac{1}{3}a + b$.
C. $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = -\frac{1}{3}a - b$. **D.** $\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) = -\frac{1}{3}a + b$.

Lời giải

Do x, y là các số thực dương nên ta có:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{y^3} \right) &= -\frac{1}{3} \log_3 \left(\frac{x}{y^3} \right) = -\frac{1}{3} (\log_3 x - \log_3 y^3) = -\frac{1}{3} (\log_3 x - 3 \log_3 y) \\ &= -\frac{1}{3} \log_3 x + \log_3 y = -\frac{1}{3}a + b. \end{aligned}$$

Câu 99: Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $P = 27 \log_a b$. **B.** $P = 15 \log_a b$. **C.** $P = 9 \log_a b$. **D.** $P = 6 \log_a b$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3 \log_a b + 6 \cdot \frac{1}{2} \log_a b = 6 \log_a b.$$

Câu 100: Với các số thực dương a, b bất kỳ $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \frac{1}{3} - 2\log_a b.$

B. $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = 3 - \frac{1}{2}\log_a b.$

C. $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log_a b.$

D. $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = 3 - 2\log_a b.$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} &= \log_a \sqrt[3]{a} - \log_a b^2 \\ &= \log_a a^{\frac{1}{3}} - 2\log_a b \\ &= \frac{1}{3}\log_a a - 2\log_a b = \frac{1}{3} - 2\log_a b\end{aligned}$$

Câu 101: Cho các số thực dương a, b, c với a và b khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = \log_a c.$

B. $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = \frac{1}{4}\log_a c.$

C. $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = 4\log_a c.$

D. $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a c.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a b \cdot \log_{\frac{1}{b^2}} c = 2\log_a b \cdot 2\log_b c = 4\log_a b \cdot \log_b c = 4\log_a c.$

Câu 102: Giả sử a, b là các số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log(10ab)^2 = 2 + \log(ab)^2$

B. $\log(10ab)^2 = (1 + \log a + \log b)^2$

C. $\log(10ab)^2 = 2 + 2\log(ab)$

D. $\log(10ab)^2 = 2(1 + \log a + \log b)$

Lời giải

Chọn B

$\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + \log(ab)^2 \Rightarrow A$ đúng

$1 + \log a + \log b = \log(10ab) \Rightarrow (1 + \log a + \log b)^2 = \log^2(10ab) \neq \log(10ab)^2 \Rightarrow B$ sai

$\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + 2\log(ab) \Rightarrow C$ đúng

$\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + 2\log(ab) = 2(1 + \log a + \log b) \Rightarrow D$ đúng

Câu 103: Cho $\log_a b = 3, \log_a c = -2$. Khi đó $\log_a(a^3 b^2 \sqrt{c})$ bằng bao nhiêu?

A. 13

B. 5

C. 8

D. 10

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_a(a^3 b^2 \sqrt{c}) = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c} = 3 + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 - \frac{1}{2}.2 = 8.$

Câu 104: Rút gọn biểu thức $M = 3\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} - 6\log_9 (3x) + \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}$.

- A.** $M = -\log_3 (3x)$ **B.** $M = 2 + \log_3 \left(\frac{x}{3}\right)$ **C.** $M = -\log_3 \left(\frac{x}{3}\right)$ **D.** $M = 1 + \log_3 x$

Lời giải

Chọn A

ĐK: $x > 0$.

$$M = 3\log_3 x - 3(1 + \log_3 x) - \log_3 x + 2 = -1 - \log_3 x = -(1 + \log_3 x) = -\log_3 (3x).$$

Câu 105: Cho $\log_8 |x| + \log_4 y^2 = 5$ và $\log_8 |y| + \log_4 x^2 = 7$. Tìm giá trị của biểu thức $P = |x| - |y|$.

- A.** $P = 56$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 64$.

Lời giải

Điều kiện: $x, y \neq 0$

Cộng vế với vế của hai phương trình, ta được:

$$\log_8 |xy| + \log_4 x^2 y^2 = 12 \Leftrightarrow \log_2 |xy| = 9 \Leftrightarrow |xy| = 512$$

Trừ vế với vế của hai phương trình, ta được:

$$\log_8 \left| \frac{x}{y} \right| + \log_4 \frac{y^2}{x^2} = -2 \Leftrightarrow \log_2 \left| \frac{x}{y} \right| = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = 8 \Leftrightarrow |x| = 8|y|.$$

Từ và suy ra $|y| = 8 \Rightarrow |x| = 64 \Leftrightarrow P = 56$.

Câu 106: Cho hai số thực dương a, b . Nếu viết $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab} = 1 + x\log_2 a + y\log_4 b$ ($x, y \in \mathbb{Q}$) thì biểu thức $P = xy$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A.** $P = \frac{1}{3}$ **B.** $P = \frac{2}{3}$ **C.** $P = -\frac{1}{12}$ **D.** $P = \frac{1}{12}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_2 \frac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab} &= \log_2 64^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b - \log_2 a - \log_2 b \\ &= 1 - \frac{1}{2}\log_2 a - \frac{4}{3}\log_4 b. \text{ Khi đó } x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{4}{3} \Rightarrow P = xy = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Câu 107: Cho $\log_{700} 490 = a + \frac{b}{c + \log 7}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $T = a + b + c$.

- A.** $T = 7$. **B.** $T = 3$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{700} 490 = \frac{\log 490}{\log 700} = \frac{\log 10 + \log 49}{\log 100 + \log 7} = \frac{1 + 2\log 7}{2 + \log 7} = \frac{4 + 2\log 7 - 3}{2 + \log 7} = 2 + \frac{-3}{2 + \log 7}$$

Suy ra $a = 2, b = -3, c = 2$

Vậy $T = 1$.

Câu 108: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$. **B.** $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$.
- C.** $2\log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$. **D.** $2\log_4(a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab$.

Suy ra $\log_4(a+b)^2 = \log_4(16ab) \Leftrightarrow 2\log_4(a+b) = 2 + \log_4 a + \log_4 b$.

Câu 109: Cho x, y là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

- A.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \frac{1}{3}a - b$. **B.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \frac{1}{3}a + b$.
- C.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}a - b$. **D.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}a + b$.

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \log_{3^{-3}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}(\log_3 x - \log_3 y^3) = -\frac{1}{3}\log_3 x + \log_3 y = -\frac{1}{3}a + b.$$

Câu 110: Cho $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_b x$. Khi đó $\log_{ab^2} x^2$ bằng.

- A.** $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. **B.** $\frac{2\alpha\beta}{2\alpha+\beta}$. **C.** $\frac{2}{2\alpha+\beta}$. **D.** $\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \log_{ab^2} x^2 &= 2\log_{ab^2} x = 2 \cdot \frac{1}{\log_x ab^2} = \frac{2}{\log_x a + \log_x b^2} = \frac{2}{\frac{1}{\log_a x} + 2 \cdot \frac{1}{\log_b x}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}} = \frac{2\alpha\beta}{\beta + 2\alpha}. \end{aligned}$$

Câu 111: Tính giá trị biểu thức $P = \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}(b^{-2})$.

- A.** $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}(b^{-2}) = 5 + \log_a b + 2 - \log_a b - 6 = 1.$$

Câu 112: Đặt $M = \log_6 56, N = a + \frac{\log_3 7 - b}{\log_3 2 + c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bộ số a, b, c nào dưới đây để có $M = N$?

A. $a = 3, b = 3, c = 1$.

B. $a = 3, b = \sqrt{2}, c = 1$.

C. $a = 1, b = 2, c = 3$.

D. $a = 1, b = -3, c = 2$.

Lời giải

Ta có:

$$M = \log_6 56 = \frac{\log_3 56}{\log_3 6} = \frac{\log_3 2^3 \cdot 7}{1 + \log_3 2} = \frac{3\log_3 2 + \log_3 7}{1 + \log_3 2} = \frac{3(1 + \log_3 2) + \log_3 7 - 3}{1 + \log_3 2} = 3 + \frac{\log_3 7 - 3}{\log_3 2 + 1}$$

$$\text{Vậy } M = N \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Câu 113: Tính $T = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{98}{99} + \log \frac{99}{100}$.

A. $\frac{1}{10}$.

B. -2 .

C. $\frac{1}{100}$.

D. 2 .

Lời giải

$$T = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{98}{99} + \log \frac{99}{100} = \log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} \right) = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$

Câu 114: Cho $a, b, x > 0$; $a > b$ và $b, x \neq 1$ thỏa mãn $\log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a} + \frac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P = \frac{2a^2 + 3ab + b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

A. $P = \frac{5}{4}$.

B. $P = \frac{2}{3}$.

C. $P = \frac{16}{15}$.

D. $P = \frac{4}{5}$.

Lời giải

$$\log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a} + \frac{1}{\log_b x^2} \Leftrightarrow \log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a} + \log_x \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow a+2b = 3\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-4b) = 0 \Leftrightarrow a = 4b$$

$$P = \frac{2a^2 + 3ab + b^2}{(a+2b)^2} = \frac{32b^2 + 12b^2 + b^2}{36b^2} = \frac{5}{4}$$

DẠNG 8. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH

Hàm số mũ

□ **Dạng:** $\begin{cases} y = a^x \\ y = a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

□ **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

Hàm số logarit

□ **Dạng:** $\begin{cases} y = \log_a x \\ y = \log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

□ **Đặc biệt:** $a = e \longrightarrow y = \ln x$; $a = 10 \longrightarrow y = \log x = \lg x$.

□ **Điều kiện xác định:** $u > 0$.

Câu 115: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{2018}(3x - x^2)$.

A. $D = \mathbb{R}$

B. $D = (0; +\infty)$

C. $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

D. $D = (0; 3)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi: $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$

Vậy $D = (0; 3)$

Câu 116: Tập xác định của $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ là

A. $[2; 3]$

B. $(2; 3)$

C. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$

D. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = (2; 3)$.

Câu 117: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6-x}$.

A. $(-\infty; 6)$

B. $\mathbb{R}$

C. $(0; +\infty)$

D. $(6; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\frac{1}{6-x} > 0 \Leftrightarrow 6-x > 0 \Leftrightarrow x < 6$. Do đó tập xác định của hàm số là $(-\infty; 6)$.

Câu 118: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - 2x - x^2)$ là

A. $D = (-1; 1)$.

B. $D = (-1; 3)$.

C. $D = (-3; 1)$.

D. $D = (0; 1)$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_2(3 - 2x - x^2)$ xác định khi: $3 - 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D = (-3; 1)$.

Câu 119: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ là

A. $(-1; 3)$.

B. $[-1; 3]$.

C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$.

Vậy $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 120: Tìm tập xác định của hàm số: $y = 2^{\sqrt{x}} + \log(3-x)$

- A. $[0; +\infty)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $[0; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow D = [0; 3)$$

Câu 121: Tập xác định của hàm số $y = [\ln(x-2)]^\pi$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(3; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} \ln(x-2) > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2 > 1 \Leftrightarrow x > 3.$$

$$\text{TXĐ: } D = (3; +\infty).$$

Câu 122: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{2019}(4-x^2) + (2x-3)^{-2019}$.

- A. $D = \left[-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right]$. B. $D = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
C. $D = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $D = (-2; 2)$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện có nghĩa của hàm số là } \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$$

Câu 123: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(x-2)^0} + \log_2(9-x^2)$ là

- A. $D = (2; 3)$. B. $D = (-3; 3) \setminus \{2\}$. C. $D = (3; +\infty)$. D. $D = (-3; 3)$.

Lời giải

$$+ \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 9-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -3 < x < 3 \end{cases}$$

+ Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-3; 3) \setminus \{2\}$.

DẠNG 9. TÌM ĐẠO HÀM

□ Đạo hàm hàm số mũ

$$\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a \cdot [u'] \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u \cdot [u'] \end{cases}$ với $e \approx 2,71828\dots$

□ Đạo hàm hàm số logarit

$$\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{[u']}{u \ln a} \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln u)' = \frac{[u']}{u} \end{cases}$

Câu 124: Đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$ là

A. $y' = 2e^{1-2x}$

B. $y' = -2e^{1-2x}$

C. $y' = -\frac{e^{1-2x}}{2}$

D. $y' = e^{1-2x}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = e^{1-2x} \cdot (1-2x)' = -2 \cdot e^{1-2x}$$

Câu 125: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x^2 + x + 1)$ là:

A. $y' = \frac{(2x+1) \ln 3}{x^2 + x + 1}$

B. $y' = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1) \ln 3}$

C. $y' = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$

D. $y' = \frac{1}{(x^2 + x + 1) \ln 3}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1) \ln 3} = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1) \ln 3}$$

Câu 126: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$.

A. $(2x+1)e^x$

B. $(2x+1)e^{x^2+x}$

C. $(2x+1)e^{2x+1}$

D. $(x^2 + x)e^{2x+1}$

Lời giải

Chọn B

$$(e^{x^2+x})' = e^{x^2+x} \cdot (x^2 + x)' = (2x+1)e^{x^2+x}$$

Câu 127: Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$

A. $f'(1) = 1$. B. $f'(1) = \frac{1}{2 \ln 2}$. C. $f'(1) = \frac{1}{2}$. D. $f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 128: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + e^{2x})$.

A. $y' = \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$. B. $y' = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$. C. $y' = \frac{1}{e^{2x} + 1}$. D. $y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$.

Lời giải

Ta có: $y' = [\ln(1 + e^{2x})]' = \frac{(1 + e^{2x})'}{1 + e^{2x}} = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

Câu 129: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1-x}{2^x}$

A. $y' = \frac{2-x}{2^x}$. B. $y' = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{(2^x)^2}$.
C. $y' = \frac{x-2}{2^x}$. D. $y' = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{(1-x)' \cdot 2^x - (2^x)' \cdot (1-x)}{(2^x)^2} = \frac{-1 \cdot 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot (1-x)}{(2^x)^2} = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$

Câu 130: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_9(x^2 + 1)$.

A. $y' = \frac{1}{(x^2 + 1) \ln 9}$. B. $y' = \frac{x}{(x^2 + 1) \ln 3}$. C. $y' = \frac{2x \ln 9}{x^2 + 1}$. D. $y' = \frac{2 \ln 3}{x^2 + 1}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1) \ln 9} = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 3^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1) 2 \ln 3} = \frac{x}{(x^2 + 1) \ln 3}$.

Câu 131: Tính đạo hàm hàm số $y = e^x \cdot \sin 2x$

A. $e^x (\sin 2x - \cos 2x)$. B. $e^x \cdot \cos 2x$.
C. $e^x (\sin 2x + \cos 2x)$. D. $e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = (e^x \cdot \sin 2x)' = (e^x)' \cdot \sin 2x + e^x \cdot (\sin 2x)' = e^x \cdot \sin 2x + 2e^x \cdot \cos 2x = e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

Câu 132: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$ là

- A.** $\frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $\frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **C.** $\frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $\frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)' 4^x - (x+1)(4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$$

Câu 133: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1+\ln x}$ với $x > 0$. Khi đó $-\frac{y'}{y^2}$ bằng

- A.** $\frac{x}{x+1}$ **B.** $1+\frac{1}{x}$ **C.** $\frac{x}{1+x+\ln x}$ **D.** $\frac{x+1}{1+x+\ln x}$

Lời giải

$$y = \frac{1}{x+1+\ln x} \Rightarrow \frac{1}{y} = x+1+\ln x \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' = (x+1+\ln x)' \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = 1+\frac{1}{x}.$$

Câu 134: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x \ln x - \frac{1}{e^x}$.

- A.** $y' = 2^x \left(\frac{1}{x} + (\ln 2)(\ln x) \right) + \frac{1}{e^x}$ **B.** $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} + e^{-x}$
C. $y' = 2^x \frac{1}{x} \ln 2 + \frac{1}{e^x}$ **D.** $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} - e^x$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 2^x (\ln 2)(\ln x) + \frac{2^x}{x} + \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{x} + (\ln 2)(\ln x) \right) + \frac{1}{e^x}.$$

Câu 135: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_2 |x^2 - 2x|$ là

- A.** $\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$ **B.** $\frac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$ **C.** $\frac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ **D.** $\frac{2x-2}{|x^2-2x|\ln 2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2} = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$$

Câu 136: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là:

- A.** $f'(x) = \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$ **B.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$
C. $f'(x) = \frac{1}{2x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$ **D.** $f'(x) = \frac{1}{\ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$

Lời giải

Áp dụng các công thức $(\ln u)' = \frac{u'}{\ln u}$ và $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ta có $f'(x) = \frac{1}{2x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$.

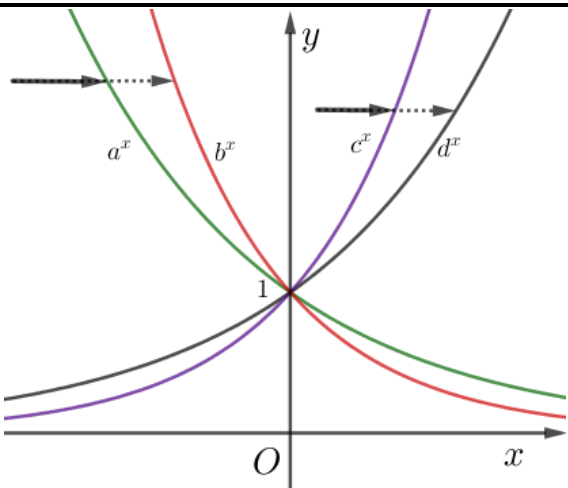
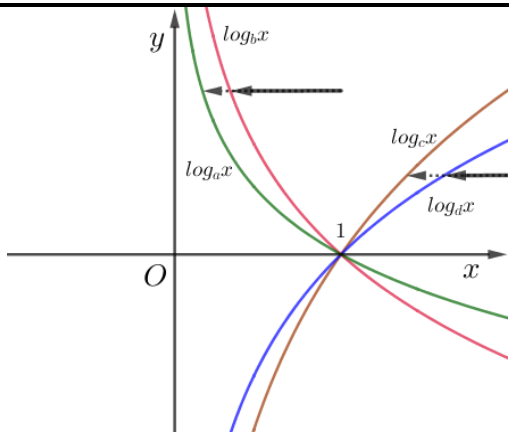
DẠNG 10. KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ, LOGARIT

□ **Sự biến thiên hàm số mũ:** $y = a^x$.

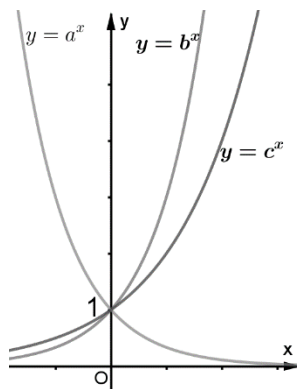
Nếu $a > 1$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $0 < a < 1$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□ **Sự biến thiên hàm số logarit:** $y = \log_a x$. Nếu $a > 1$: hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nếu

$0 < a < 1$: hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số mũ và logarit	
ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ	ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT
 □ Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. □ Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$. □ So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng a^x trước nên $a > b$. □ So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng c^x trước nên $c > d$. □ Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.	 □ Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. □ Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$. □ So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$. □ So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$. □ Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

Câu 137: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b < c < a$

B. $c < a < b$

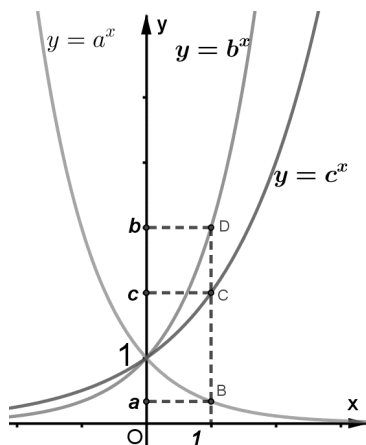
C. $a < b < c$

D. $a < c < b$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $x=1$ đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=a, y=b, y=c$ như hình vẽ:



Từ đồ thị kết luận $a < c < b$

Câu 138: Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $\log_3 x^2$ B. $y = \log(x^3)$ C. $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$ D. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số mũ $y = a^x$ với $0 < a < 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $0 < \frac{e}{4} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 139: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ B. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $y = (\sqrt{3})^x$ D. $y = (0,5)^x$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Thấy các số $\frac{1}{\pi}$; $\frac{2}{3}$; 0,5 nhỏ hơn 1, còn $\sqrt{3}$ lớn hơn 1 nên chọn C.

Câu 140: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{1}{x \ln 2}$
 B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng
 C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty; +\infty)$
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

Câu 141: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = \left(\frac{2015}{2016}\right)^x$ **B.** $y = \left(\frac{3}{\sqrt{2016} - \sqrt{2}}\right)^x$ **C.** $y = (0,1)^{2x}$ **D.** $y = (2016)^{2x}$

Lời giải

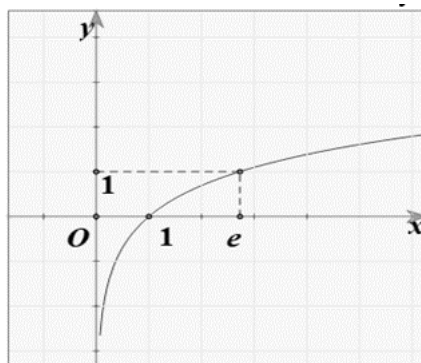
Chọn D

$$y = (0,1)^{2x} = (0,01)^x, \quad y = (2016)^{2x} = 4064256^x$$

Ta có các cơ số $\frac{2015}{2016}$; $\frac{3}{\sqrt{2016} - \sqrt{2}}$; $0,01$ đều nhỏ hơn 1 nên các hàm số ở A, B, C nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cơ số $4064256 > 1$ nên hàm số $y = (2016)^{2x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 142: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = -e^x$. **B.** $y = |\ln x|$. **C.** $y = \ln x$. **D.** $y = e^x$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(e; 1)$ và nằm cả trên và dưới trục hoành nên chỉ có hàm số $y = \ln x$ thỏa mãn.

Câu 143: Tìm hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $f(x) = 3^x$. **B.** $f(x) = 3^{-x}$. **C.** $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. **D.** $f(x) = \frac{3}{3^x}$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

Vậy hàm số $f(x) = 3^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

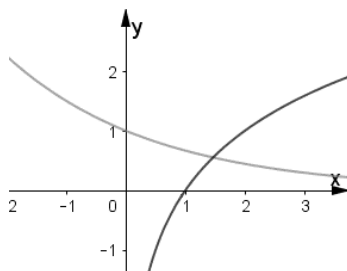
Câu 144: Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

- A.** Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.
B. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.
D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ là $D = (0; +\infty)$. Do đó đáp án B sai.

Câu 145: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $0 < a < \frac{1}{2} < b$. **B.** $0 < a < 1 < b$. **C.** $0 < b < 1 < a$. **D.** $0 < a < 1, 0 < b < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = a^x$ đi qua $(0; 1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đồ thị của hàm nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Xét đồ thị hàm số $y = \log_b x$ đi qua $(1; 0)$ suy ra đồ thị của hàm số (2) là đồ thị của hàm đồng biến suy ra $b > 1$.

Vậy $0 < a < 1 < b$.

Câu 146: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

- A.** $y = \ln x$. **B.** $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ **C.** $y = \log_{\pi} x$. **D.** $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$.

Lời giải

+) $y = \ln x$; TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$e > 1$ suy ra hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên D .

+) $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$; TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$0 < \sqrt{\frac{2018}{2019}} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \sqrt{\frac{2018}{2019}} < 1$ suy ra hàm số $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ là hàm nghịch biến

D .

+) $y = \log_{\pi} x$; TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$\pi > 1$ suy ra hàm số $y = \log_{\pi} x$ đồng biến trên D .

+) $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$; TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$4 - \sqrt{3} > 1$ suy ra hàm số $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$ đồng biến trên D .

Câu 147: Đồ thị hàm số $y = \ln x$ đi qua điểm

A. $(1;0)$.

B. $(2;e^2)$.

C. $(2e;2)$.

D. $(0;1)$.

Lời giải

Với $x = 1 \Rightarrow y = \ln x = \ln 1 = 0$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = \ln x = \ln 2$.

Với $x = 2e \Rightarrow y = \ln x = \ln 2e = \ln 2 + 1$.

Với $x = 0$, hàm số không xác định.

Câu 148: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

B. $y = \log x$.

C. $y = 2^x$.

D. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Lời giải

Ta thấy hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ là hàm số mũ có cơ số $a = \frac{2}{3} < 1$ nên nghịch biến trên tập xác định của nó.

Ngoài ra ta có thể loại các đáp án khác bằng cách giải thích cụ thể đặc điểm các hàm đó như sau:

Đáp án A loại vì: Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm hằng nên không nghịch biến cũng không đồng biến.

Đáp án B loại vì: Hàm số $y = \log x$ là hàm số logarit có tập xác định là $D = (0; +\infty)$ có cơ số $a = 10 > 1$ nên luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

Đáp án C loại vì: hàm số $y = 2^x$ là hàm số mũ có tập xác định là $\mathbb{R}$ có cơ số $a = 2 > 1$

Câu 149: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

C. Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 150: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

B. $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$.

C. $y = \log_{\frac{e}{3}} x$.

D. $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow a > 1 \Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 151: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

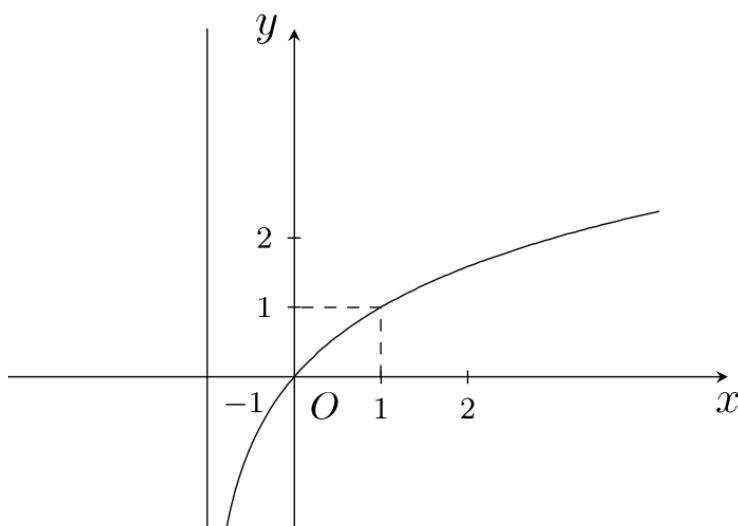
- A.** Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$.
B. Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.
C. Đồ thị của hai hàm số $y = 2^x$ và hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.
D. Đồ thị của hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = \log_2 \frac{1}{x}$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất ($y = x$), suy ra **Chọn B**

Câu 152: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



- A.** $y = \log_3 x$. **B.** $y = \log_2 x + 1$. **C.** $y = \log_2 (x + 1)$. **D.** $y = \log_3 (x + 1)$

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 0)$ nên loại đáp án **A** và **B**.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$ nên loại **D**.

Vậy đáp án **C** thỏa mãn.

Câu 153: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực R .

- A.** $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y = \log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2 + 1)$ **C.** $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ **D.** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$

Lời giải

Vì $\frac{2}{e} < 1$ nên $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến trên R .

Câu 154: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$ B. $y = \log_2 (\sqrt{x} + 1)$ C. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ D. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

Lời giải

Xét hàm số $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ có tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Nhận thấy cơ số $\frac{\pi}{4} < 1$ nên $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ nghịch biến trên tập xác định.

Câu 155: Hàm số $y = \log_3 (x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_3 (x^2 - 2x)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

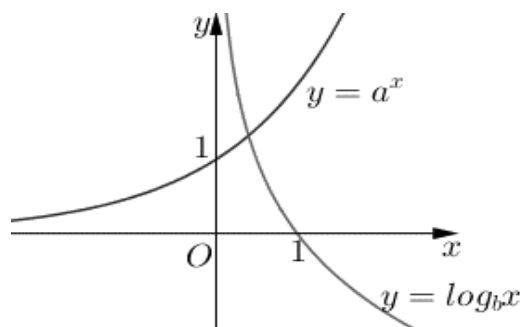
Ta có $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-	+	
y	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số y nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 156: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng



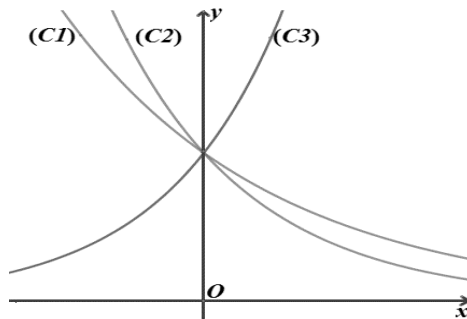
- A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$. B. $a > 1, b > 1$.
C. $0 < b < 1 < a$. D. $0 < a < 1 < b$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$ do đó đồ thị hàm số $y = a^x$ có $a > 1$. Nên ta loại đáp án A và. **D.**

Ở đồ thị hàm số $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$ ta thấy khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$ do đó ta có $0 < b < 1$.

Câu 157: Hình vẽ bên thể hiện đồ thị của ba trong bốn hàm số $y = 6^x$, $y = 8^x$, $y = \frac{1}{5^x}$ và $y = \frac{1}{\sqrt{7}^x}$.



Hỏi là đồ thị hàm số nào?

- A.** $y = 6^x$. **B.** $y = \frac{1}{\sqrt{7}^x}$. **C.** $y = \frac{1}{5^x}$. **D.** $y = 8^x$

Lời giải

Hàm số có đồ thị là hàm số nghịch biến, do đó loại đáp án A, D. Cho $x = 1$ suy ra $\frac{1}{\sqrt{7}} > \frac{1}{5}$

Do đó đồ thị hàm số là $y = \frac{1}{5^x}$.

Câu 158: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

- A.** $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{3}{e^2}$. **D.** $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2; 3]$$

$$\text{Có } f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3466; f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,3679; f(3) = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366,$$

$$\text{Suy ra } \min_{x \in [2; 3]} f(x) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

Câu 159: Cho hàm số $f(x) = \ln x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
- B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $f(x): D=(0;+\infty)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
		-	

Câu 160: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

- A.** $2e^4$
- B.** $-e^2$
- C.** $2e^2$
- D.** $-2e^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2(x^2 - 2)e^{2x} + 2xe^{2x} = 2(x^2 + x - 2)e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1;2] \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{cases}$$

$$\text{Và } f(-1) = -e^{-2}; f(2) = 2e^4; f(1) = -e^2$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $-e^2$ tại $x = 1$.

Câu 161: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{x+1} - \frac{4}{3} \cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ bằng

- A.** $\frac{4}{9}$.
- B.** $\frac{5}{6}$.
- C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 2^{x+1} \ln 2 - \frac{4}{3} \cdot 8^x \ln 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2 \cdot (2^x)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 0 \\ 2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1/2 \end{cases}$$

$$\text{Xét } y(-1) = 5/6; y(-1/2) = 0,9428; y(0) = 2/3. \text{ Ta có: } y_{\min} = \frac{2}{3}.$$

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Công thức logarit:		
Cho các số $a, b > 0$, $a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:		
$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	$\lg b = \log b = \log_{10} b$	$\ln b = \log_e b$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a a^n = n$
$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	$\log_a b^n = n \log_a b$	$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$	$\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, (b \neq 1)$	$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c, (b \neq 1)$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$

DẠNG 1. BIỂU DIỄN BIỂU THỨC LOGARIT NÀY THEO LOGARIT KHÁC

Câu 1: Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

- A. $\frac{3a-1}{a-1}$ B. $\frac{3a+1}{a+1}$ C. $\frac{4a-1}{a-1}$ D. $\frac{4a+1}{a+1}$

Câu 2: Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right)$ theo a, b, c ?

- A. $P = 2a - b + c$. B. $P = 2a + b + c$. C. $P = 2a + b - c$. D. $P = a + 2b - c$.

Câu 3: Với $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

- A. $\frac{(3a+b)c}{1+c}$ B. $\frac{(3a+b)c}{1+b}$ C. $\frac{(3a+b)c}{1+a}$ D. $\frac{(3b+a)c}{1+c}$

Câu 4: Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45 = \frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m+n+p$ bằng

- A. 3 B. 4 C. 6 D. -3

Câu 5: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 a = x$, $\log_3 b = y$. Tính $P = \log_3 (3a^4b^5)$.

- A. $P = 3x^4y^5$ B. $P = 3 + x^4 + y^5$ C. $P = 60xy$ D. $P = 1 + 4x + 5y$

Câu 6: Biết $\log_6 3 = a, \log_6 5 = b$. Tính $\log_3 5$ theo a, b

- A. $\frac{b}{a}$ B. $\frac{b}{1+a}$ C. $\frac{b}{1-a}$ D. $\frac{b}{a-1}$

Câu 7: Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

- A. $\frac{3a-1}{3-a}$. B. $\frac{3a+1}{3-a}$. C. $\frac{3a+1}{3+a}$. D. $\frac{3a-1}{3+a}$.

Câu 8: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$. B. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$.
C. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$. D. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$.

Câu 9: Đặt $a = \ln 2, b = \ln 5$, hãy biểu diễn $I = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$ theo a và b .

- A. $-2(a+b)$ B. $-2(a-b)$ C. $2(a+b)$ D. $2(a-b)$

Câu 10: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_3 5$ Biểu diễn đúng của $\log_{20} 12$ theo a, b là

- A. $\frac{ab+1}{b-2}$. B. $\frac{a+b}{b+2}$. C. $\frac{a+1}{b-2}$. D. $\frac{a+2}{ab+2}$.

Câu 11: Cho $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

- A. $\frac{a+b}{3}$ B. $\frac{1}{3(a+b)}$ C. $3(a+b)$ D. $\frac{3}{a+b}$

Câu 12: Giả sử $\log_{27} 5 = a; \log_8 7 = b; \log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 35$ theo a, b, c ?

- A. $\frac{3b+3ac}{c+2}$. B. $\frac{3b+3ac}{c+1}$. C. $\frac{3b+2ac}{c+3}$. D. $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

Câu 13: Cho $\log_3 5 = a, \log_3 6 = b, \log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right)$ theo a, b, c .

- A. $P = 2a + b - c$. B. $P = a + 2b - c$. C. $P = 2a + b + c$. D. $P = 2a - b + c$.

Câu 14: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo a, b .

- A. $\log_{20} 12 = \frac{a+b}{b+2}$. B. $\log_{20} 12 = \frac{ab+1}{b-2}$. C. $\log_{20} 12 = \frac{a+1}{b-2}$. D. $\log_{20} 12 = \frac{a+2}{ab+2}$.

Câu 15: Nếu $\log_2 3 = a$ thì $\log_{72} 108$ bằng

- A. $\frac{2+a}{3+a}$. B. $\frac{2+3a}{3+2a}$. C. $\frac{3+2a}{2+3a}$. D. $\frac{2+3a}{2+2a}$.

Câu 16: Cho $\log_{30} 3 = a; \log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo $a, b; \log_{30} 1350$ bằng

- A. $2a + b$ B. $2a + b + 1$ C. $2a + b - 1$ D. $2a + b - 2$

Câu 17: Đặt $m = \log 2$ và $n = \log 7$. Hãy biểu diễn $\log 6125\sqrt{7}$ theo m và n .

- A. $\frac{6+6m+5n}{2}$. B. $\frac{1}{2}(6-6n+5m)$. C. $5m+6n-6$. D. $\frac{6+5n-6m}{2}$.

Câu 18: Cho $\log_{27} 5 = a, \log_3 7 = b, \log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a, b và c .

- A. $\frac{(3a+b)c}{1+c}$. B. $\frac{(3a+b)c}{1+b}$. C. $\frac{(3a+b)c}{1+a}$. D. $\frac{(3b+a)c}{1+c}$.

Câu 19: Cho $a = \log_2 m$ và $A = \log_m 16m$, với $0 < m \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $A = \frac{4-a}{a}$. **B.** $A = \frac{4+a}{a}$. **C.** $A = (4+a)a$. **D.** $A = (4-a)a$.

Câu 20: Biết $\log_3 15 = a$, tính $P = \log_{25} 81$ theo a ta được

- A.** $P = 2(a+1)$ **B.** $P = 2(a-1)$ **C.** $P = \frac{2}{a+1}$ **D.** $\frac{2}{a-1}$

Câu 21: Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \frac{90}{11}$ theo a, b, c .

- A.** $P = 2a + b - c$ **B.** $P = a + 2b - c$ **C.** $P = 2a + b + c$ **D.** $P = 2a - b + c$

Câu 22: Nếu $\log_3 5 = a$ thì $\log_{45} 75$ bằng

- A.** $\frac{2+a}{1+2a}$. **B.** $\frac{1+a}{2+a}$. **C.** $\frac{1+2a}{2+a}$. **D.** $\frac{1+2a}{1+a}$.

Câu 23: Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right)$ theo a, b, c .

- A.** $P = 2a + b - c$. **B.** $P = a + 2b - c$. **C.** $P = 2a + b + c$. **D.** $P = 2a - b + c$.

Câu 24: Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

- A.** $\frac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3-a}$.

Câu 25: Đặt $\log_a b = m$, $\log_b c = n$. Khi đó $\log_a (ab^2c^3)$ bằng

- A.** $1 + 6mn$. **B.** $1 + 2m + 3n$. **C.** $6mn$. **D.** $1 + 2m + 3mn$.

Câu 26: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

- A.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$ **B.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$ **C.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$ **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Câu 27: Cho $\log_9 5 = a$; $\log_4 7 = b$; $\log_2 3 = c$. Biết $\log_{24} 175 = \frac{mb+nac}{pc+q}$. Tính $A = m + 2n + 3p + 4q$.

- A.** 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

Câu 28: Với các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 6ab$, biểu thức $\log_2 (a+b)$ bằng

- A.** $\frac{1}{2}(3 + \log_2 a + \log_2 b)$. **B.** $\frac{1}{2}(1 + \log_2 a + \log_2 b)$.
C. $1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. **D.** $2 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

DẠNG 2. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

Hàm số mũ

Dạng: $\begin{cases} y = a^x \\ y = a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Hàm số logarit

Dạng: $\begin{cases} y = \log_a x \\ y = \log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Đặc biệt: $a = e \longrightarrow y = \ln x$; $a = 10 \longrightarrow y = \log x = \lg x$.

Điều kiện xác định: $u > 0$.

Câu 29: Hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ xác định với mọi giá trị của x khi.

- A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $m > 2$. C. $-2 < m < 2$. D. $m < 2$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$

- A. $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$.
C. $m \in (-4; 1)$. D. $m \in (1; +\infty)$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \ln(-x^2 + mx + 2m + 1)$ xác định với mọi $x \in (1; 2)$.

- A. $m \geq -\frac{1}{3}$. B. $m \geq \frac{3}{4}$. C. $m > \frac{3}{4}$. D. $m < -\frac{1}{3}$.

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m > -4$. B. $m < 0$. C. $m < -4$. D. $m < -3$.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. 2019 B. 2017 C. 2018 D. 1009

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $-2 \leq m \leq 2$. B. $m = 2$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 35: Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log(mx - m + 2)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

- A. 4 B. 5 C. Vô số D. 3

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \log_{2018}\left(2018^x - x - \frac{x^2}{2} - m\right)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $[0; +\infty)$

- A. $m > 9$ B. $m < 1$ C. $0 < m < 1$ D. $m < 2$

Câu 37: Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m > 0$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Câu 38: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3x+5}{\log_{2018}(x^2-2x+m^2-4m+5)}$ xác định

với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

- A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $(1; 3) \setminus \{2\}$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[1; 3] \setminus \{2\}$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log_{2018} \left(2017^x - x - \frac{x^2}{2} - m + 1 \right)$ xác định với mọi x thuộc $[0; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 2018. D. Vô số.

Câu 40: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + \log_3 \sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2; 3)$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2020}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y = \log_{2020}(\log_{2019}(\log_{2018}(\log_{2017} x)))$ là $D = (a; +\infty)$. Giá trị của a bằng

- A. 2018^{2019} . B. 2019^{2020} . C. 2017^{2018} . D. 0.

DẠNG 3. TÍNH ĐẠO HÀM MŨ – LOGARIT

□ Đạo hàm hàm số mũ

$$\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a \cdot u' \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u \cdot u' \end{cases}$ với $e \approx 2,71828...$

□ Đạo hàm hàm số logarit

$$\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a} \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln u)' = \frac{u'}{u} \end{cases}$

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \ln 2018 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$. Tính $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2017)$.

- A. $S = \frac{4035}{2018}$ B. $S = \frac{2017}{2018}$ C. $S = \frac{2016}{2017}$ D. $S = 2017$

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$.

- A. $\ln 2018$. B. 1. C. 2018. D. $\frac{2018}{2019}$.

Câu 45: Cho hàm $y = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x^2 y'' + xy' - 2y + 4 = 0$. B. $x^2 y'' - xy' - 2xy = 0$.
C. $2x^2 y' + xy'' + 2y - 5 = 0$. D. $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2019} |x|, \forall x \neq 0$.

- A. $y' = \frac{1}{|x| \ln 2019}$. B. $y' = \frac{1}{|x|}$. C. $y' = \frac{1}{x \ln 2019}$. D. $y' = x \ln 2019$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 \cdot x_2$.

- A. $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}$ B. $x_1 \cdot x_2 = 1$ C. $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$ D. $x_1 \cdot x_2 = 0$

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021)$ bằng

- A. $\frac{4035}{2021}$. B. $\frac{2021}{2022}$. C. 2021.. D. $\frac{2022}{2023}$.

Câu 49: Phương trình $f'(x) = 0$ với $f(x) = \ln\left(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0 nghiệm. B. 1 nghiệm. C. 2 nghiệm. D. 3 nghiệm.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \dots + f'(2019).$$

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{2024}{2023}$. C. $\frac{2022}{2023}$. D. $\frac{2020}{2023}$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x) = (2m-1)e^x + 3$. Giá trị của m để $f'(-\ln 3) = \frac{5}{3}$ là

- A. $m = \frac{7}{9}$. B. $m = \frac{2}{9}$. C. $m = 3$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

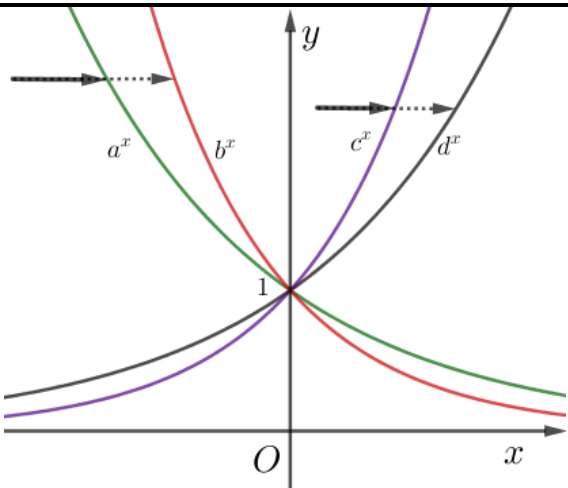
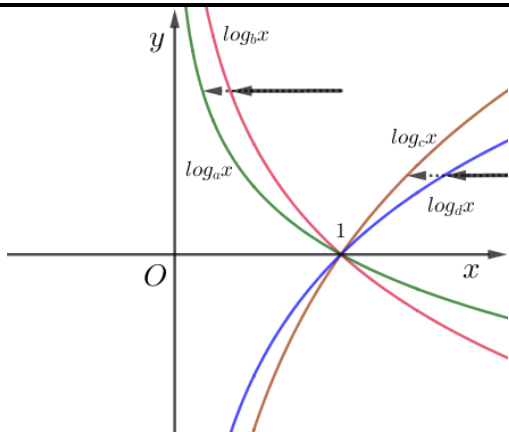
DẠNG 4. KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ, LOGARIT

Sự biến thiên hàm số mũ: $y = a^x$.

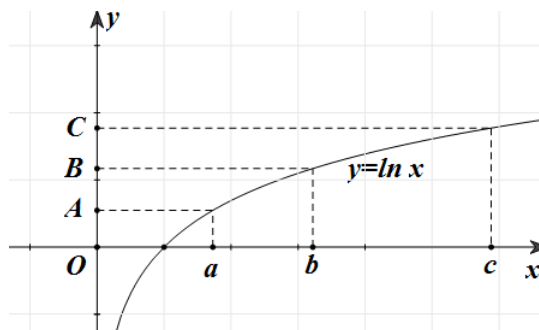
Nếu $a > 1$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $0 < a < 1$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên hàm số logarit: $y = \log_a x$. Nếu $a > 1$: hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nếu

$0 < a < 1$: hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số mũ và logarit	
ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ	ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT
 Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$. So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng a^x trước nên $a > b$. So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng c^x trước nên $c > d$. Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.	 Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$. So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$. So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$. Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

Câu 52: Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC . Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a + c = 2b$.

B. $ac = b^2$.

C. $ac = 2b^2$.

D. $ac = b$.

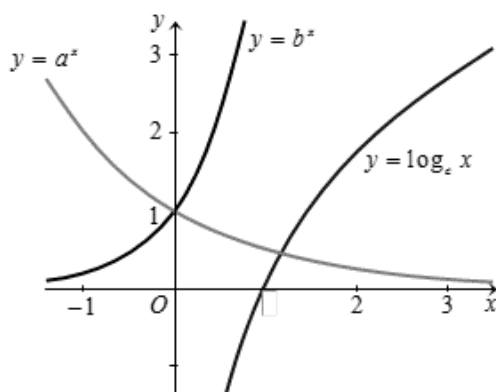
Câu 53: Cho các số thực a, b sao cho $0 < a, b \neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a > 1, b > 1$ **B.** $a > 1, 0 < b < 1$ **C.** $0 < a < 1, b > 1$ **D.** $0 < a < 1, 0 < b < 1$

Câu 54: Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

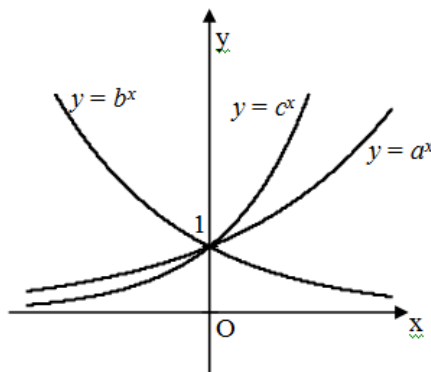
- A.** $[-1; 1]$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(-\infty; -1]$.

Câu 55: Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



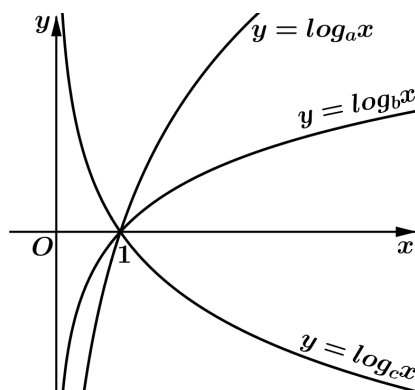
- A.** $a < c < b$. **B.** $c < a < b$. **C.** $a < b < c$. **D.** $b < c < a$.

Câu 56: Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A.** $b > a > c$. **B.** $a > c > b$. **C.** $c > a > b$. **D.** $c > b > a$.

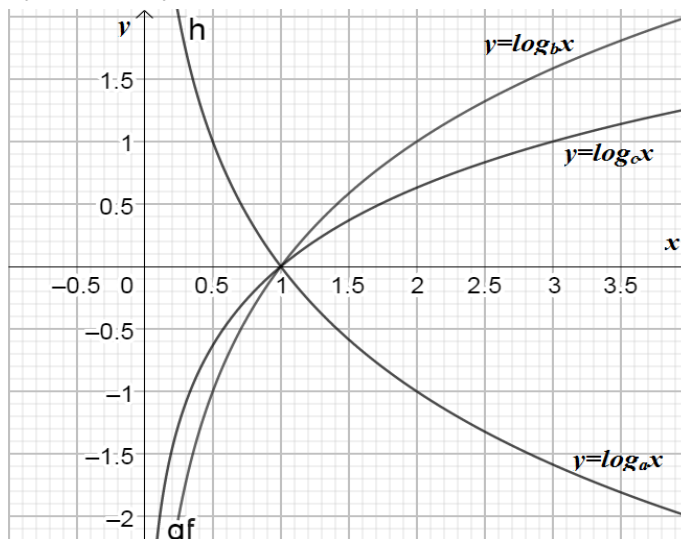
Câu 57: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $c < a < b$.

Câu 58: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \log_a x, y = y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A.** $a < b < c$. **B.** $a < c < b$. **C.** $b < a < c$. **D.** $b > a > c$.

Câu 59: Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

- A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

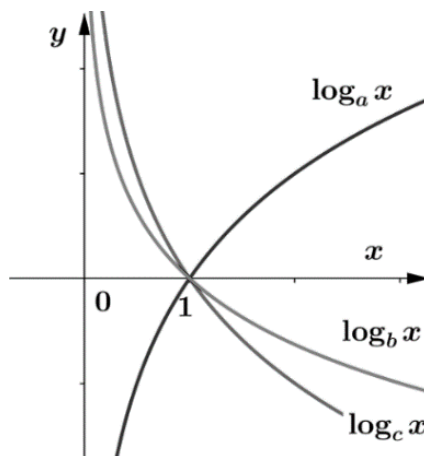
Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên $(4; +\infty)$

- A.** $m < -2$ hoặc $m > 1$. **B.** $m \leq -2$ hoặc $m = 1$.
C. $m < -2$ hoặc $m = 1$. **D.** $m < -2$.

Câu 61: Cho $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e)) = 2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

- A.** 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 62: Cho a, b, c dương và khác 1. Các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



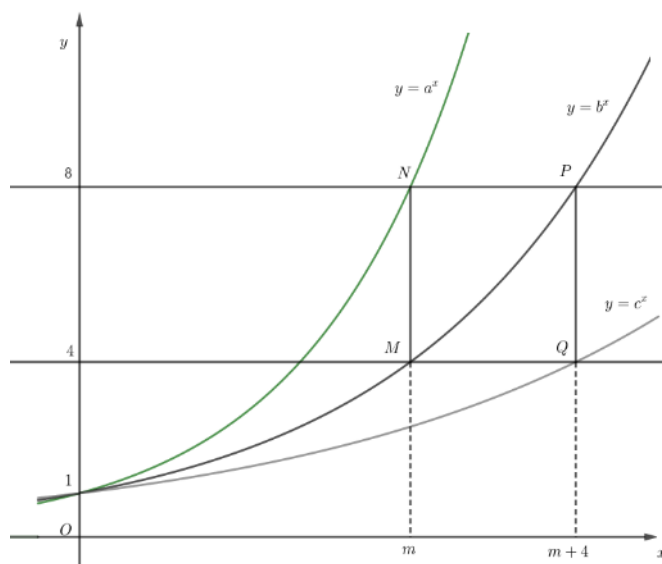
Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $a > c > b$. **B.** $a > b > c$. **C.** $c > b > a$. **D.** $b > c > a$.

Câu 63: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

- A. 2016. B. -2016. C. 2020. D. -2020.

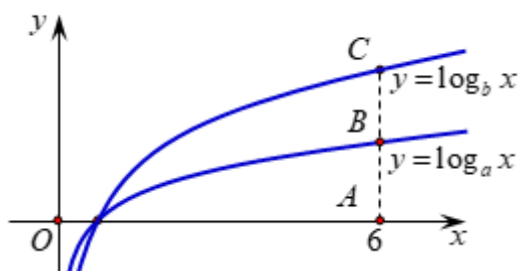
Câu 64: Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y = a^x, (C_2): y = b^x, (C_3): y = c^x$ và đường thẳng $y = 4; y = 8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng

- A. 34. B. 5. C. 43. D. 19.

Câu 65: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đường thẳng $x = 6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Nếu $AC = AB \log_2 3$ thì

- A. $b^3 = a^2$. B. $b^2 = a^3$. C. $\log_3 b = \log_2 a$. D. $\log_2 b = \log_3 a$.

Câu 66: Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Khẳng định nào sau đây là đúng?

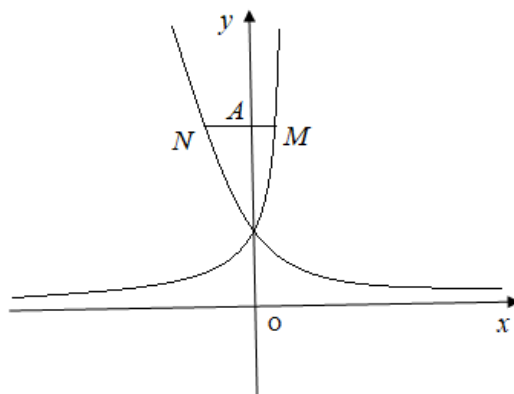
- A. $a + c = 2b$. B. $ac = b^2$.
C. $ac = 2b^2$. D. $ac = b$

Câu 67: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$.

Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

- A. -2016 . B. -2020 . C. 2016 . D. 2020 .

Câu 68: Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = 4^x, y = a^x$, trục tung lần lượt tại M, N và A thì $AN = 2AM$. Giá trị của a bằng



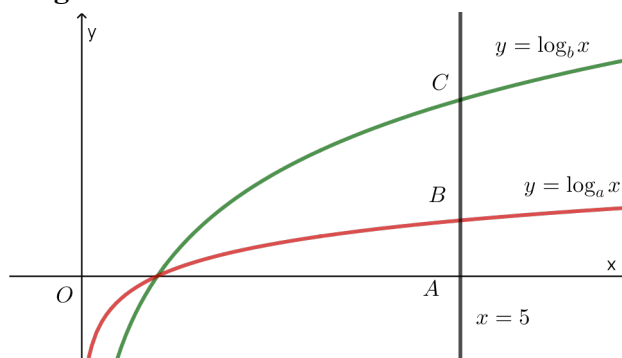
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 69: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$ qua điểm $I(2;1)$.

Giá trị của biểu thức $f(4 - a^{2019})$ bằng

- A. 2023 . B. -2023 . C. 2017 . D. -2017 .

Câu 70: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a = 5b$. B. $a = b^2$. C. $a = b^3$. D. $a^3 = b$.

- Câu 71:** Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính giá trị biểu thức $A = f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \dots + f\left(\frac{100}{100}\right)$?
- A.** 50. **B.** 49. **C.** $\frac{149}{3}$. **D.** $\frac{301}{6}$.

DẠNG 5. BÀI TOÁN THỰC TẾ

BÀI TOÁN NGÂN HÀNG	
1. Công thức tính lãi đơn	Nếu ta gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu , đây gọi là hình thức lãi đơn . Ta có: $T = A(1 + nr)$ với A : tiền gửi ban đầu; r : lãi suất; n : kỳ hạn gửi; T : tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n . Lưu ý: r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A , muốn tính số tiền lời ta lấy $T - A$.
2. Công thức lãi kép	Nếu ta gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức: hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức lãi kép . Ta có: $T = A(1 + r)^n$ với A : tiền gửi ban đầu; r : lãi suất; n : kỳ hạn gửi; T : tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n . Lưu ý: r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A , muốn tính số tiền lời ta lấy $T - A$.
3. Mỗi tháng gửi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép	Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng là: $T = \frac{A}{r} \left[(1 + r)^n - 1 \right] (1 + r)$.
4. Gửi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định	Nếu khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra X đồng. Số tiền thu được sau n tháng là: $T = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$
5. Vay vốn và trả góp	Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền X đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau n tháng là: $T = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$

Câu 72: Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

- A.** 0,8 % **B.** 0,6 % **C.** 0,7 % **D.** 0,5 %

Câu 73: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,6%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng, biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

- A.** 18 tháng **B.** 16 tháng **C.** 17 tháng **D.** 15 tháng

Câu 74: Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là:

- A.** 62255910 đồng. **B.** 59895767 đồng. **C.** 59993756 đồng. **D.** 63545193 đồng.

- Câu 75:** Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi
- A.** $800.(1,005)^{11} - 72$ **B.** $1200 - 400.(1,005)^{12}$
C. $800.(1,005)^{12} - 72$ **D.** $1200 - 400.(1,005)^{11}$
- Câu 76:** Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10%/1 năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?
- A.** 10 năm **B.** 17 năm **C.** 15 năm **D.** 20 năm
- Câu 77:** Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng B với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 231 525 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng B là bao nhiêu?
- A.** 8%/năm. **B.** 7%/năm. **C.** 6%/năm. **D.** 5%/năm.
- Câu 78:** Ông Anh gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? .
- A.** 231,815. **B.** 197,201. **C.** 217,695. **D.** 190,271.
- Câu 79:** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.
- A.** 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng
- Câu 80:** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi sau 1 năm số tiền anh Nam nhận được là bao nhiêu? .
- A.** 218,64 triệu đồng. **B.** 208,25 triệu đồng. **C.** 210,45 triệu đồng. **D.** 209,25 triệu đồng.
- Câu 81:** Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi, lãi suất ngân hàng không đổi và ông A không rút tiền ra.
- A.** 36 tháng. **B.** 38 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 40 tháng.
- Câu 82:** Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
- A.** 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.
- Câu 83:** Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất 1,85% một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?
- A.** 16 quý. **B.** 20 quý. **C.** 19 quý. **D.** 15 quý.

- Câu 84:** Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra .
A. 169.871.000 đồng. **B.** 171.761.000 đồng. **C.** 173.807.000 đồng. **D.** 169.675.000 đồng.
- Câu 85:** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu ?
A. 810.000.000. **B.** 813.529.000. **C.** 797.258.000. **D.** 830.131.000.
- Câu 86:** Một ngân hàng X , quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1 + 8\%)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng ?
A. 675 triệu đồng. **B.** 676 triệu đồng. **C.** 677 triệu đồng. **D.** 674 triệu đồng.
- Câu 87:** Ông Tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông Tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?
A. 46,933 triệu. **B.** 34,480 triệu. **C.** 81,413 triệu. **D.** 107,946 triệu.
- Câu 88:** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?
A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2022.
- Câu 89:** Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = Ae^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tính đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?
A. 242. **B.** 16. **C.** 90. **D.** 422.
- Câu 90:** Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là 0,9% / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?
A. 65 tháng. **B.** 66 tháng. **C.** 67 tháng. **D.** 68 tháng.
- Câu 91:** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là 95,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là 1,14%. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?
A. 94,4 triệu người. **B.** 85,2 triệu người. **C.** 86,2 triệu người. **D.** 83,9 triệu người.

- Câu 92:** Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.
A. 200. **B.** 190. **C.** 250. **D.** 150.
- Câu 93:** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93.671.600 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người?
A. 109.256.100. **B.** 108.374.700. **C.** 107.500.500. **D.** 108.311.100.
- Câu 94:** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?
A. 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.
- Câu 95:** Cường độ ánh sáng đi qua môi trường nước biển giảm dần theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$, với I_0 là cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào môi trường nước biển và x là độ dày của môi trường đó. Biết rằng môi trường nước biển có hằng số hấp thụ là $\mu = 1,4$. Hỏi ở độ sâu 30 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào nước biển?
A. e^{-21} lần. **B.** e^{42} lần. **C.** e^{21} lần. **D.** e^{-42} lần.
- Câu 96:** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.
A. 9,1 giờ. **B.** 9,7 giờ. **C.** 10,9 giờ. **D.** 11,3 giờ.
- Câu 97:** Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$. Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?
A. (1.281.600;1.281.700). **B.** (1.281.700;1.281.800).
C. (1.281.800;1.281.900). **D.** (1.281.900;1.282.000).
- Câu 98:** Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất 0,25% một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416.780.000 đồng. Tính x .
A. 1,2. **B.** 0,8. **C.** 0,9. **D.** 1,5.
- Câu 99:** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu?
A. 9,1 giờ. **B.** 9,7 giờ. **C.** 10,9 giờ. **D.** 11,3 giờ.
- Câu 100:** Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x lần quảng cáo được phát thì số % người

xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số lần quảng cáo được phát tối thiểu để số % người xem mua sản phẩm đạt hơn 75%.

- A. 323. B. 343. C. 330. D. 333.

Câu 101: Áp suất không khí P suy giảm mũ so với độ cao x theo công thức $P = P_0 \cdot e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760 \text{ mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí là 672,71mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3343m là bao nhiêu?

- A. 505,45 mmHg. B. 530,23 mmHg. C. 485,36 mmHg. D. 495,34 mmHg.

Câu 102: Số lượng loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con.

- A. 7 phút. B. 12 phút. C. 48 phút. D. 8 phút.

Câu 103: Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7% / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?

- A. 43.730.000 đồng. B. 43.720.000 đồng.
C. 43.750.000 đồng. D. 43.740.000 đồng.

Câu 104: Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi.

- A. 11.487.000 đồng. B. 14.517.000 đồng. C. 55.033.000 đồng. D. 21.776.000 đồng.

Câu 105: Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7% / tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

- A. 21. B. 22. C. 23. D. 24.

Câu 106: COVID19 là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona bắt nguồn từ Trung Quốc gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh. Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên. Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh?

- A. 77760 người. B. 16384 người. C. 62500 người. D. 78125 người.

Câu 107: Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng?

- A. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.
B. Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.
C. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.
D. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

Câu 108: Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng?

A. 1.018.500 đồng. **B.** 1.320.800 đồng. **C.** 1.320.500 đồng. **D.** 1.771.300 đồng.

Câu 109: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? .

A. 68 **B.** 66 **C.** 65 **D.** 67

Câu 110: Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ 2 trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra .

A. 1.686.898.000 VNĐ. **B.** 743.585.000 VNĐ.
C. 739.163.000 VNĐ. **D.** 1.335.967.000 VNĐ.

Câu 111: Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất 6,9% / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

A. 105370000 đồng **B.** 111680000 đồng **C.** 107667000 đồng **D.** 116570000 đồng

Câu 112: Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng, người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

A. 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

Câu 113: Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu ?

A. 130 650 280 . **B.** 130 650 000 . **C.** 139 795 799 . **D.** 139 795 800 .

Câu 114: Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ . Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A. 22 . **B.** 23 . **C.** 24 . **D.** 21 .

Câu 115: Vào ngày 15 hàng tháng ông An đều đặn gửi tiết kiệm tại ngân hàng *SHB* số tiền 5 triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn một tháng, lãi suất tiết kiệm không đổi trong suốt quá trình gửi là 7,2% / năm. Hỏi sau đúng 3 năm kể từ ngày bắt đầu gửi ông An thu được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu ?.

A. 195251000 **B.** 201453000 **C.** 195252000 **D.** 201452000

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Công thức logarit:

Cho các số $a, b > 0$, $a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:

$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	$\lg b = \log b = \log_{10} b$	$\ln b = \log_e b$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a a^n = n$
$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	$\log_a b^n = n \log_a b$	$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$	$\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, (b \neq 1)$	$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c, (b \neq 1)$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$

DẠNG. BIỂU DIỄN BIỂU THỨC LOGARIT NÀY THEO LOGARIT KHÁC

Câu 1: Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

A. $\frac{3a-1}{a-1}$

B. $\frac{3a+1}{a+1}$

C. $\frac{4a-1}{a-1}$

D. $\frac{4a+1}{a+1}$

Lời giải**Chọn D****Cách 1:** Giải trực tiếp

$$\begin{aligned} \log_6 48 &= \log_6 6.8 = \log_6 6 + \log_6 8 = 1 + \frac{1}{\log_8 6} = 1 + \frac{1}{\log_{2^3} 2.3} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}(1 + \log_2 3)} \\ &= \frac{1 + \log_2 3 + 3}{(1 + \log_2 3)} = \frac{4 + \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{4a + 1}{a + 1}. \text{ Chọn đáp án D} \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng máy tính Casio

Ta có $\log_6 48 = 2.1605584217$. Thay $a = \log_3 2 = 0.63092975375$ vào 4 đáp án thì ta chọn đáp án D vì $\frac{4a+1}{a+1} = 2.1605584217$

Câu 2: Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right)$ theo a, b, c ?

- A.** $P = 2a - b + c$. **B.** $P = 2a + b + c$. **C.** $P = 2a + b - c$. **D.** $P = a + 2b - c$.

Lời giải

Ta có $\log_3 6 = b \Leftrightarrow \log_3 2 + 1 = b \Leftrightarrow \log_3 2 = b - 1$, $\log_3 22 = c \Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3 11 = c$
 $\Leftrightarrow \log_3 11 = c - \log_3 2 = c - b + 1$.

Khi đó $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right) = \log_3 90 - \log_3 11 = 2 + \log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 11 = 2b + a - c$.

Câu 3: Với $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

- A.** $\frac{(3a+b)c}{1+c}$ **B.** $\frac{(3a+b)c}{1+b}$ **C.** $\frac{(3a+b)c}{1+a}$ **D.** $\frac{(3b+a)c}{1+c}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{3a}$

$\log_3 7 = b \Rightarrow \log_7 3 = \frac{1}{b}$; $bc = \log_2 3 \cdot \log_3 7 = \log_2 7 \Rightarrow \log_7 2 = \frac{1}{bc}$;

$3ac = \log_3 5 \cdot \log_2 3 = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{3ac}$

$\log_6 35 = \log_6 5 + \log_6 7 = \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} + \frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2}$
 $= \frac{1}{\frac{1}{3ac} + \frac{1}{3a}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{bc}} = \frac{(3a+b)c}{c+1}$

Câu 4: Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45 = \frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m+n+p$ bằng

- A.** 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** -3

Lời giải

Chọn B

$\log_6 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 9 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a(2b+1)}{b(1+a)}$

Suy ra $m=1, n=2, p=1 \Rightarrow m+n+p=4$

Câu 5: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 a = x$, $\log_3 b = y$. Tính $P = \log_3 (3a^4b^5)$.

A. $P = 3x^4y^5$

B. $P = 3 + x^4 + y^5$

C. $P = 60xy$

D. $P = 1 + 4x + 5y$

Lời giải

Chọn D

$$P = \log_3 (3a^4b^5) = \log_3 3 + \log_3 a^4 + \log_3 b^5 = 1 + 4\log_3 a + 5\log_3 b = 1 + 4x + 5y.$$

Câu 6: Biết $\log_6 3 = a, \log_6 5 = b$. Tính $\log_3 5$ theo a, b

A. $\frac{b}{a}$

B. $\frac{b}{1+a}$

C. $\frac{b}{1-a}$

D. $\frac{b}{a-1}$

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 3 = a \Leftrightarrow 3 = 6^a, \log_6 5 = b \Leftrightarrow 5 = 6^b \Rightarrow \log_3 5 = \log_{6^a} 6^b = \frac{b}{a}$$

Câu 7: Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

A. $\frac{3a-1}{3-a}$

B. $\frac{3a+1}{3-a}$

C. $\frac{3a+1}{3+a}$

D. $\frac{3a-1}{3+a}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } a = \log_{12} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} = \frac{\log_2 3}{\log_2 (2^2) + \log_2 3} = \frac{\log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{1-a}.$$

$$\text{Ta có: } \log_{24} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 24} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3^2)}{\log_2 (2^3 \cdot 3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{2a}{1-a}}{3 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{3a+1}{3-a}.$$

$$\text{Vậy } \log_{24} 18 = \frac{3a+1}{3-a}.$$

Câu 8: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

A. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$

C. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$ **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \log_6 45 &= \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 3^2 \cdot 5}{\log_3 2 \cdot 3} = \frac{\log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{\log_5 3}}{\frac{1}{\log_2 3} + 1} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{\left(\frac{2b+1}{b}\right)}{\left(\frac{a+1}{a}\right)} = \frac{(2b+1)a}{b(a+1)} = \frac{a + 2ab}{b + ab} \end{aligned}$$

- Câu 9:** Đặt $a = \ln 2, b = \ln 5$, hãy biểu diễn $I = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$ theo a và b .
- A.** $-2(a+b)$ **B.** $-2(a-b)$ **C.** $2(a+b)$ **D.** $2(a-b)$

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100} \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} \right) = \ln \frac{1}{100} = \ln 10^{-2} \\ &= -2 \ln 10 = -2(\ln 2 + \ln 5) = -2(a+b). \end{aligned}$$

- Câu 10:** Đặt $a = \log_2 3; b = \log_3 5$ Biểu diễn đúng của $\log_{20} 12$ theo a, b là

- A.** $\frac{ab+1}{b-2}$ **B.** $\frac{a+b}{b+2}$ **C.** $\frac{a+1}{b-2}$ **D.** $\frac{a+2}{ab+2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{20} 12 = \log_{20} 3 + 2 \log_{20} 2 = \frac{1}{2 \log_3 2 + \log_3 5} + \frac{2}{\log_2 5 + 2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{a} + b} + \frac{2}{ab + 2} = \frac{a+2}{ab+2}.$$

- Câu 11:** Cho $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

- A.** $\frac{a+b}{3}$ **B.** $\frac{1}{3(a+b)}$ **C.** $3(a+b)$ **D.** $\frac{3}{a+b}$

Lời giải

Chọn D

$$\log_{15} 8 = 3 \log_{15} 2 = \frac{3}{\log_2 15} = \frac{3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3}{a+b}$$

- Câu 12:** Giả sử $\log_{27} 5 = a; \log_8 7 = b; \log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 35$ theo a, b, c ?

- A.** $\frac{3b+3ac}{c+2}$ **B.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$ **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$ **D.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$

Lời giải

$$\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_3 5 = a \Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = 3a \Leftrightarrow \log_2 5 = 3ac.$$

$$\log_8 7 = b \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b.$$

$$\text{Xét } \log_{12} 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (5 \cdot 7)}{\log_2 (3 \cdot 2^2)} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + 2} = \frac{3ac + 3b}{c+2}.$$

- Câu 13:** Cho $\log_3 5 = a, \log_3 6 = b, \log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right)$ theo a, b, c .

- A.** $P = 2a + b - c$ **B.** $P = a + 2b - c$ **C.** $P = 2a + b + c$ **D.** $P = 2a - b + c$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \log_3 \left(\frac{90}{11} \right) = \log_3 \left(\frac{180}{22} \right) = \log_3 180 - \log_3 22 = \log_3 (36 \cdot 5) - \log_3 22 \\ &= \log_3 36 + \log_3 5 - \log_3 22 = \log_3 (6^2) + \log_3 5 - \log_3 22 = 2 \log_3 6 + \log_3 5 - \log_3 22 = a + 2b - c. \end{aligned}$$

Vậy $P = a + 2b - c$.

Câu 14: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo a, b .

A. $\log_{20} 12 = \frac{a+b}{b+2}$. **B.** $\log_{20} 12 = \frac{ab+1}{b-2}$. **C.** $\log_{20} 12 = \frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\log_{20} 12 = \frac{a+2}{ab+2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{20} 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 20} = \frac{\log_2 4 \cdot 3}{\log_2 4 \cdot 5} = \frac{2 + \log_2 3}{2 + \log_2 5} = \frac{2 + \log_2 3}{2 + \log_2 3 \cdot \log_3 5} = \frac{a+2}{ab+2}.$$

Câu 15: Nếu $\log_2 3 = a$ thì $\log_{72} 108$ bằng

A. $\frac{2+a}{3+a}$. **B.** $\frac{2+3a}{3+2a}$. **C.** $\frac{3+2a}{2+3a}$. **D.** $\frac{2+3a}{2+2a}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{72} 108 = \frac{\log_2 108}{\log_2 72} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 3^3)}{\log_2 (2^3 \cdot 3^2)} = \frac{2 + 3 \log_2 3}{3 + 2 \log_2 3} = \frac{2+3a}{3+2a}.$$

Câu 16: Cho $\log_{30} 3 = a; \log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a, b ; $\log_{30} 1350$ bằng

A. $2a + b$ **B.** $2a + b + 1$ **C.** $2a + b - 1$ **D.** $2a + b - 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1350 = 30 \cdot 45 = 30 \cdot 9 \cdot 5 = 30 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Nên } \log_{30} 1350 = \log_{30} 30 \cdot 3^2 \cdot 5 = \log_{30} 30 + \log_{30} 3^2 + \log_{30} 5 = 1 + 2 \log_{30} 3 + \log_{30} 5 = 1 + 2a + b$$

Câu 17: Đặt $m = \log 2$ và $n = \log 7$. Hãy biểu diễn $\log 6125\sqrt{7}$ theo m và n .

A. $\frac{6+6m+5n}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}(6-6n+5m)$. **C.** $5m+6n-6$. **D.** $\frac{6+5n-6m}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log 6125\sqrt{7} = \log 5^3 7^{\frac{5}{2}} = 3 \log 5 + \frac{5}{2} \log 7 = 3 \log \frac{10}{2} + \frac{5}{2} \log 7$$

$$= 3(1 - \log 2) + \frac{5}{2} \log 7 = 3(1 - m) + \frac{5}{2} n = \frac{6+5n-6m}{2}.$$

$$\text{Vậy } \log 6125\sqrt{7} = \frac{6+5n-6m}{2}.$$

Câu 18: Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a, b và c .

A. $\frac{(3a+b)c}{1+c}$. **B.** $\frac{(3a+b)c}{1+b}$. **C.** $\frac{(3a+b)c}{1+a}$. **D.** $\frac{(3b+a)c}{1+c}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$.

Ta có $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = 3ac$ và $\log_2 7 = \log_2 3 \cdot \log_3 7 = bc$.

$$\text{Vậy } \log_6 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 6} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{3ac + bc}{1 + c} = \frac{(3a + b)c}{1 + c}.$$

Câu 19: Cho $a = \log_2 m$ và $A = \log_m 16m$, với $0 < m \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $A = \frac{4-a}{a}$. **B.** $A = \frac{4+a}{a}$. **C.** $A = (4+a)a$. **D.** $A = (4-a)a$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \log_m 16m = \frac{\log_2 16m}{\log_2 m} = \frac{\log_2 16 + \log_2 m}{\log_2 m} = \frac{4+a}{a}.$$

Câu 20: Biết $\log_3 15 = a$, tính $P = \log_{25} 81$ theo a ta được

- A.** $P = 2(a+1)$ **B.** $P = 2(a-1)$ **C.** $P = \frac{2}{a+1}$ **D.** $\frac{2}{a-1}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3 15 = a \Rightarrow 1 + \log_3 5 = a \Rightarrow \log_3 5 = a - 1$

$$P = \log_{25} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 25} = \frac{4}{2 \log_3 5} = \frac{4}{2(a-1)} = \frac{2}{a-1}$$

Câu 21: Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \frac{90}{11}$ theo a, b, c .

- A.** $P = 2a + b - c$ **B.** $P = a + 2b - c$ **C.** $P = 2a + b + c$ **D.** $P = 2a - b + c$

Lời giải

Ta có: $P = \log_3 90 - \log_3 11 = \log_3 90 + \log_3 2 - \log_3 11 - \log_3 2$

$$= \log_3 180 - \log_3 2 = \log_3 (5 \cdot 36) - \log_3 2 = \log_3 5 + 2 \log_3 6 - \log_3 2 = a + b - 2c$$

Câu 22: Nếu $\log_3 5 = a$ thì $\log_{45} 75$ bằng

- A.** $\frac{2+a}{1+2a}$. **B.** $\frac{1+a}{2+a}$. **C.** $\frac{1+2a}{2+a}$. **D.** $\frac{1+2a}{1+a}$.

Lời giải

Ta có $\log_{45} 75 = 2 \cdot \log_{45} 5 + \log_{45} 3$.

$$\text{Và } \log_{45} 5 = \frac{1}{\log_5 45} = \frac{1}{2 \log_5 3 + 1} = \frac{1}{\frac{2}{a} + 1} = \frac{a}{a+2}; \log_{45} 3 = \frac{1}{\log_3 45} = \frac{1}{2 + \log_3 5} = \frac{1}{a+2}.$$

$$\text{Do đó } \log_{45} 75 = \frac{2a}{a+2} + \frac{1}{a+2} = \frac{1+2a}{2+a}.$$

Câu 23: Cho $\log_3 5 = a, \log_3 6 = b, \log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right)$ theo a, b, c .

- A.** $P = 2a + b - c$. **B.** $P = a + 2b - c$. **C.** $P = 2a + b + c$. **D.** $P = 2a - b + c$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log_3 \left(\frac{90}{11} \right) = \log_3 \left(\frac{180}{22} \right) = \log_3 \left(\frac{5 \cdot 6^2}{22} \right) = \log_3 5 + 2\log_3 6 - \log_3 22 = a + 2b - c.$$

Câu 24: Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

- A.** $\frac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3-a}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } a = \log_{12} 3 = \frac{1}{\log_3 12} = \frac{1}{1 + 2\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{1-a}.$$

$$\text{Khi đó: } \log_{24} 18 = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 2)}{\log_2 (2^3 \cdot 3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{2a}{1-a}}{3 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{1+3a}{3-a}.$$

Câu 25: Đặt $\log_a b = m, \log_b c = n$. Khi đó $\log_a (ab^2c^3)$ bằng

- A.** $1 + 6mn$. **B.** $1 + 2m + 3n$. **C.** $6mn$. **D.** $1 + 2m + 3mn$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \log_a (ab^2c^3) &= \log_a a + 2\log_a b + 3\log_a c \\ &= 1 + 2m + 3 \frac{\log_b c}{\log_b a} = 1 + 2m + 3\log_a b \cdot \log_b c = 1 + 2m + 3mn. \end{aligned}$$

Câu 26: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

- A.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$ **B.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$ **C.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$ **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 45 = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 3 \cdot \log_3 5}{1 + \log_2 3} = \frac{2a + \frac{a}{b}}{1+a} = \frac{2ab+a}{ab+b}$$

Câu 27: Cho $\log_9 5 = a; \log_4 7 = b; \log_2 3 = c$. Biết $\log_{24} 175 = \frac{mb+nac}{pc+q}$. Tính $A = m + 2n + 3p + 4q$.

- A.** 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_{24} 175 = \log_{24} 7 \cdot 5^2 = \log_{24} 7 + 2\log_{24} 5^2 = \frac{1}{\log_7 24} + \frac{2}{\log_5 24} =$$

$$\frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2^3} + \frac{2}{\log_5 3 + \log_5 2^3} = \frac{1}{\frac{1}{\log_3 7} + \frac{3}{\log_2 7}} + \frac{2}{\frac{1}{\log_3 5} + \frac{3}{\log_2 5}} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_2 7 \cdot \log_3 2} + \frac{3}{\log_2 7}} + \frac{2}{\frac{1}{\log_3 5} + \frac{3}{\log_2 3 \cdot \log_3 5}} = \frac{1}{\frac{1}{2b \cdot \frac{1}{c}} + \frac{3}{2b}} + \frac{2}{\frac{1}{2a} + \frac{3}{c \cdot 2a}} =$$

$$\frac{1}{\frac{c}{2b} + \frac{3}{2b}} + \frac{2}{\frac{c}{2ac} + \frac{3}{2ac}} = \frac{2b}{c+3} + \frac{4ac}{c+3} = \frac{2b+4ac}{c+3}.$$

$$A = m + 2n + 3p + 4q = 2 + 8 + 3 + 12 = 25$$

Câu 28: Với các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(3 + \log_2 a + \log_2 b).$

B. $\frac{1}{2}(1 + \log_2 a + \log_2 b).$

C. $1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$

D. $2 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 = 6ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 6ab + 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 8ab \quad (*).$$

$$\text{Do } a, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a+b > 0 \end{cases}, \text{ lấy logarit cơ số 2 hai vế của } (*) \text{ ta được:}$$

$$\log_2 (a+b)^2 = \log_2 (8ab) \Leftrightarrow 2\log_2 (a+b) = 3 + \log_2 a + \log_2 b$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (a+b) = \frac{1}{2}(3 + \log_2 a + \log_2 b).$$

DẠNG 2. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

Hàm số mũ

Dạng: $\begin{cases} y = a^x \\ y = a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$

Hàm số logarit

Dạng: $\begin{cases} y = \log_a x \\ y = \log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$

Đặc biệt: $a = e \longrightarrow y = \ln x ; a = 10 \longrightarrow y = \log x = \lg x.$

Điều kiện xác định: $u > 0.$

Câu 29: Hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ xác định với mọi giá trị của x khi.

A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

B. $m > 2$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 + mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$

A. $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in (-4; 1)$.

D. $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải

Cách 1

Điều kiện: $x > 0$.

Hàm số xác định khi:

$$m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m(\log_3^2 x + 1) \neq 4 \log_3 x - 3 \Leftrightarrow m \neq \frac{4 \log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}, \forall x \in (0; +\infty).$$

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì phương trình $m = \frac{4 \log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$ vô nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

Xét hàm số $y = \frac{4 \log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$.

Đặt $\log_3 x = t$ khi đó ta có $y = \frac{4t - 3}{t^2 + 1}, y' = \frac{-4t^2 + 6t + 4}{(t^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$.

Ta có BBT:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
y'		0	+	0
y	0		1	0

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Cách 2:

Để hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thì phương trình $m \cdot \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

TH1: $m = 0$ thì PT trở thành $-4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{3}{4}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0$ thì để PT vô nghiệm $\Delta = (-4)^2 - 4m(m+3) < 0$

$$\Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \ln(-x^2 + mx + 2m + 1)$ xác định với mọi $x \in (1; 2)$.

- A.** $m \geq -\frac{1}{3}$. **B.** $m \geq \frac{3}{4}$. **C.** $m > \frac{3}{4}$. **D.** $m < -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in (1; 2)$ khi $-x^2 + mx + 2m + 1 > 0, \forall x \in (1; 2)$.

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - mx - 2m - 1 < 0, \forall x \in (1; 2).$$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m \leq 0 \\ -4m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}.$$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A.** $m > -4$. **B.** $m < 0$. **C.** $m < -4$. **D.** $m < -3$.

Lời giải

Hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 4x - m + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A.** 2019 **B.** 2017 **C.** 2018 **D.** 1009

Lời giải

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$x^2 - 2x - m + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 + m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên thuộc $[-2018; 2018]$ ta có 2018 giá trị của m .

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A.** $-2 \leq m \leq 2$. **B.** $m = 2$. **C.** $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. **D.** $-2 < m < 2$.

Lời giải

$$y = \log(x^2 - 2mx + 4)$$

Điều kiện xác định của hàm số trên: $x^2 - 2mx + 4 > 0$.

Để tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0, \forall m \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Vậy đáp án đúng là đáp án **D**.

Câu 35: Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log(mx - m + 2)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

A. 4

B. 5

C. Vô số

D. 3

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định

$$mx - m + 2 > 0 \Leftrightarrow mx > m - 2 \quad (1)$$

Trường hợp 1. $m = 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2 > 0.$$

Trường hợp 2. $m > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x > \frac{m-2}{m}$$

Để hàm số $y = \log(mx - m + 2)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì

$$\frac{m-2}{m} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp 3. $m < 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x < \frac{m-2}{m}.$$

Suy ra tập xác định của hàm số $y = \log(mx - m + 2)$ là $D = \left(-\infty; \frac{m-2}{m}\right)$.

Do đó $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \not\subset D$ suy ra không có giá trị $m < 0$ nào thỏa yêu cầu bài toán.

Từ 3 trường hợp trên ta được $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \log_{2018} \left(2018^x - x - \frac{x^2}{2} - m \right)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $[0; +\infty)$

A. $m > 9$

B. $m < 1$

C. $0 < m < 1$

D. $m < 2$

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định $\forall x \in [0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 2018^x - x - \frac{x^2}{2} - m > 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2018^x - x - \frac{x^2}{2} > m, \forall x \in [0; +\infty).$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow m < \min_{x \in [0; +\infty)} f(x).$$

$$\text{Đặt } f(x) = 2018^x - x - \frac{x^2}{2}, x \in [0; +\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2018^x \ln(2018) - 1 - x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2018^x (\ln 2018)^2 - 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

Khi đó $f'(x)$ đồng biến trên $x \in [0; +\infty)$ và $f'(0) = \ln(2018) - 1 > 0$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $x \in [0; +\infty)$ và $f(0) = 1$

Vậy $m < 1$ thì thỏa YCBT.

Câu 37: Hàm số $y = \log_2 (4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m \geq \frac{1}{4}$.

B. $m > 0$.

C. $m < \frac{1}{4}$.

D. $m > \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $4^x - 2^x + m > 0$

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -4^x + 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$

Khi đó trở thành $m > -t^2 + t, \forall t > 0 \Leftrightarrow m > \max_{(0; +\infty)} f(t)$ với $f(t) = -t^2 + t, t > 0$

Ta có: $f'(t) = -2t + 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = -t^2 + t, t > 0$:

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$	

Từ BBT ta thấy $\max_{(0;+\infty)} f(t) = \frac{1}{4}$ đạt được khi $t = \frac{1}{2}$

Vậy $m > \max_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

Câu 38: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3x+5}{\log_{2018}(x^2-2x+m^2-4m+5)}$ xác định

với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $(1; 3) \setminus \{2\}$. **C.** $(-\infty; 1]$. **D.** $[1; 3] \setminus \{2\}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{3x+5}{\log_{2018}(x^2-2x+m^2-4m+5)}$

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 > 0 \\ \log_{2018}(x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 > 0 \\ x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 \neq 1 \end{cases}$$

Nên điều kiện để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là $\begin{cases} x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 > 0 \\ x^2 - 2x + m^2 - 4m + 4 \neq 0 \end{cases}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta'_1 = 1 - (m^2 - 4m + 5) < 0 \\ \Delta'_2 = 1 - (m^2 - 4m + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m - 4 < 0 \\ -m^2 + 4m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log_{2018}\left(2017^x - x - \frac{x^2}{2} - m + 1\right)$ xác

định với mọi x thuộc $[0; +\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 2018. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $2017^x - x - \frac{x^2}{2} - m + 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow 2017^x - x - \frac{x^2}{2} > m - 1, \forall x \in [0; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 2017^x - x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0; +\infty)$ liên tục có

$$f'(x) = 2017^x \ln 2017 - 1 - x, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$f''(x) = 2017^x \ln^2 2017 - 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

Vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra $f'(x) \geq f'(0) = \ln 2017 - 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$

Vậy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra $\min_{[0; +\infty)} f(x) = f(0) = 1$.

Mặt khác $m - 1 < \min_{[0; +\infty)} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy có vô số giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 40: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + \log_3 \sqrt{x-m} \text{ xác định trên khoảng } (2; 3)?$$

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1-x > 0 \\ x-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2m+1 \\ x > m \end{cases} \Rightarrow D = (m; 2m+1).$$

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; 3)$ nên $(2; 3) \subset D = (m; 2m+1) \Leftrightarrow m \leq 2 < 3 \leq 2m+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 2m+1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2020}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Điều kiện: } mx - m + 2 > 0 \Leftrightarrow mx > m - 2 \quad (1)$$

• Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow (1)$ trở thành $0 > -1$.

• Trường hợp 2: $m > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x > \frac{m-2}{m} \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D = \left(\frac{m-2}{m}; +\infty\right)$.

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành $\frac{m-2}{m} < 1 \Leftrightarrow m-2 < m \Leftrightarrow -2 < 0$.

• Trường hợp 3: $m < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x < \frac{m-2}{m} \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{m-2}{m}\right)$.

Do đó không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $m \geq 0$.

Cách 2:

$$\text{Điều kiện: } mx - m + 2 > 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m(x-1) > -2, \forall x \in [1; +\infty) \quad (1).$$

• Với $x = 1$, ta được $0m > -2$, đúng với mọi m .

- Với $x > 1$, ta được $(1) \Leftrightarrow m > \frac{-2}{x-1}, \forall x \in (1; +\infty)$ (2).

Xét hàm số $g(x) = \frac{-2}{x-1}$ với $x > 1$, ta có: $g'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$.

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	0

Từ bảng biến thiên, ta được $(2) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy, tất cả các giá trị cần tìm của m là $m \geq 0$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y = \log_{2020}(\log_{2019}(\log_{2018}(\log_{2017} x)))$ là $D = (a; +\infty)$. Giá trị của a bằng

A. 2018^{2019} .

B. 2019^{2020} .

C. 2017^{2018} .

D. 0.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}(\log_{2017} x) > 0 \\ \log_{2019}(\log_{2018}(\log_{2017} x)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}(\log_{2017} x) > 0 \\ \log_{2018}(\log_{2017} x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}(\log_{2017} x) > 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2017} x > 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2017^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2017^{2018}. \end{aligned}$$

DẠNG 3. TÍNH ĐẠO HÀM MŨ – LOGARIT

□ Đạo hàm hàm số mũ

$$\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a \cdot u' \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u \cdot u' \end{cases}$ với $e \approx 2,71828...$

□ Đạo hàm hàm số logarit

$$\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a} \end{cases}$$

Đặc biệt: $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln u)' = \frac{u'}{u} \end{cases}$

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \ln 2018 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Tính $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2017)$.

A. $S = \frac{4035}{2018}$

B. $S = \frac{2017}{2018}$

C. $S = \frac{2016}{2017}$

D. $S = 2017$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \ln 2018 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Do đó $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = 1 - \frac{1}{2018} = \frac{2017}{2018}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$.

A. $\ln 2018$.

B. 1.

C. 2018.

D. $\frac{2018}{2019}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \left(\ln \frac{2018x}{x+1}\right)' = \frac{1}{\frac{2018x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2018x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{2018x} \cdot \frac{2018}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$

Vậy $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$$
$$= 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}.$$

Câu 45: Cho hàm $y = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x^2 y'' + xy' - 2y + 4 = 0$.

B. $x^2 y'' - xy' - 2xy = 0$.

C. $2x^2 y' + xy'' + 2y - 5 = 0$.

D. $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$

$y' = \cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x)$

$y'' = -\frac{2}{x}\sin(\ln x)$

Từ đó kiểm tra thấy đáp án **D** đúng vì :

$x^2 y'' - xy' + 2y = y'' = -2x\sin(\ln x) - 2x\cos(\ln x) + 2x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] = 0.$

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2019} |x|, \forall x \neq 0$.

A. $y' = \frac{1}{|x| \ln 2019}$. **B.** $y' = \frac{1}{|x|}$. **C.** $y' = \frac{1}{x \ln 2019}$. **D.** $y' = x \ln 2019$.

Lời giải

$$y = \log_{2019} |x| = \begin{cases} \log_{2019} x & , khi x > 0 \\ \log_{2019} (-x) & , khi x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x \ln 2019} & , khi x > 0 \\ \frac{-1}{(-x) \ln 2019} & , khi x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln 2019}.$$

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1.x_2$.

A. $x_1.x_2 = -\frac{1}{4}$ **B.** $x_1.x_2 = 1$ **C.** $x_1.x_2 = \frac{3}{4}$ **D.** $x_1.x_2 = 0$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = (1-2x)e^{x-x^2}$.

$$f''(x) = -2e^{x-x^2} + (1-2x)(1-2x)e^{x-x^2} = (-1-4x+4x^2)e^{x-x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-1-4x+4x^2)e^{x-x^2} = 0 \Leftrightarrow -1-4x+4x^2 = 0 \text{ khi đó } x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021)$ bằng

A. $\frac{4035}{2021}$. **B.** $\frac{2021}{2022}$. **C.** 2021 . **D.** $\frac{2022}{2023}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

Vậy

$$\begin{aligned} f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021) &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \\ &= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Câu 49: Phương trình $f'(x) = 0$ với $f(x) = \ln\left(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2} > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{4x^3 - 12x^2 + 8x}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đổi chiều điều kiện ta được $x = 1$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \dots + f'(2019).$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{2024}{2023}$.

C. $\frac{2022}{2023}$.

D. $\frac{2020}{2023}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x \in [0; +\infty)$ ta có $x+1 > 0$ và $x+4 > 0$ nên $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+4} = \ln(x+1) - \ln(x+4)$.

Từ đó $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}$.

Do đó $P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \dots + f'(2019)$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2023}\right) = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}.$$

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x) = (2m-1)e^x + 3$. Giá trị của m để $f'(-\ln 3) = \frac{5}{3}$ là

A. $m = \frac{7}{9}$.

B. $m = \frac{2}{9}$.

C. $m = 3$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = (2m-1)e^x.$$

$$\Rightarrow f'(-\ln 3) = (2m-1)e^{-\ln 3} = \frac{2m-1}{e^{\ln 3}} = \frac{2m-1}{3}.$$

$$f'(-\ln 3) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{3} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m = 3.$$

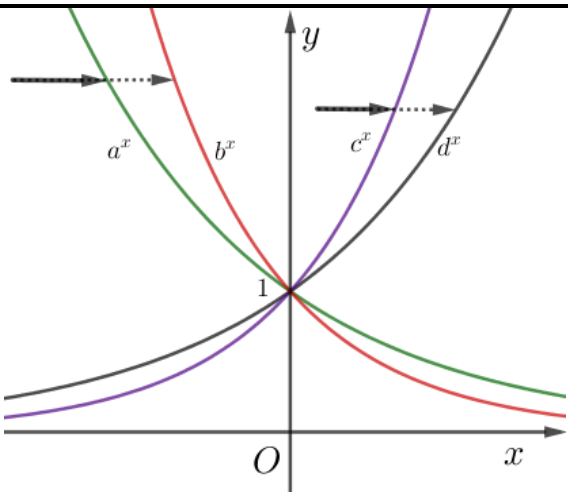
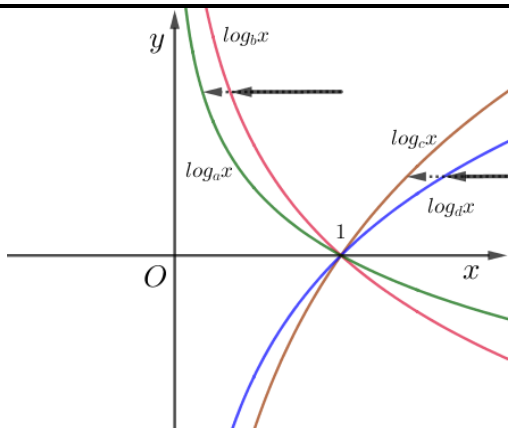
DẠNG 4. KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ, LOGARIT

Sự biến thiên hàm số mũ: $y = a^x$.

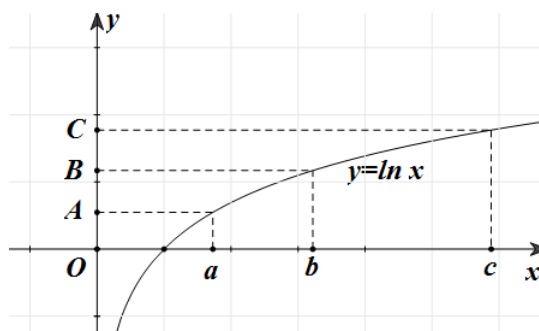
Nếu $a > 1$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $0 < a < 1$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên hàm số logarit: $y = \log_a x$. Nếu $a > 1$: hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nếu

$0 < a < 1$: hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số mũ và logarit	
ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ	ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT
 Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$. So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng a^x trước nên $a > b$. So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng c^x trước nên $c > d$. Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.	 Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$. So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$. So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$. Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

Câu 52: Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC . Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a + c = 2b$.

B. $ac = b^2$.

C. $ac = 2b^2$.

D. $ac = b$.

Lời giải

Ta có $A(0; \ln a)$, $B(0; \ln b)$, $C(0; \ln c)$ và B là trung điểm của AC nên

$$\ln a + \ln c = 2 \ln b \Leftrightarrow \ln(ac) = \ln b^2 \Leftrightarrow ac = b^2.$$

Vậy $ac = b^2$.

Câu 53: Cho các số thực a, b sao cho $0 < a, b \neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $M(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 1, b > 1$

B. $a > 1, 0 < b < 1$

C. $0 < a < 1, b > 1$

D. $0 < a < 1, 0 < b < 1$

Lời giải

Chọn C

$M(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}})$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ nên ta có:

$$a^{\sqrt{2018}} = \sqrt[5]{2019^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2019}} < 1 = a^0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

$M(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}})$ thuộc đồ thị hàm số $y = \log_b x$ nên ta có:

$$\log_b \sqrt{2018} = \sqrt[5]{2019^{-1}} \Rightarrow b^{\frac{1}{\sqrt[5]{2019}}} = \sqrt{2018} > 1 = b^0 \Rightarrow b > 1$$

Vậy $0 < a < 1, b > 1$.

Câu 54: Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-1; 1]$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(-\infty; -1]$.

Lời giải

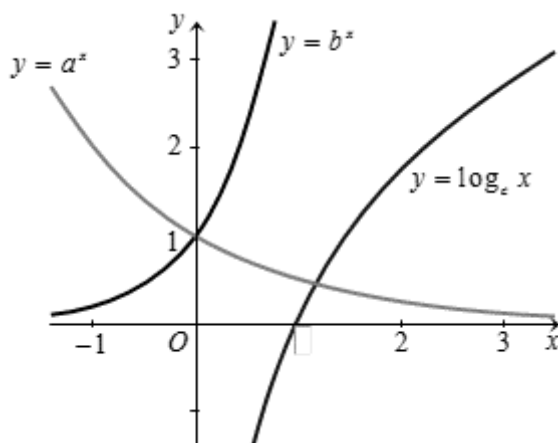
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} - m = \frac{-mx^2 + 2x - m}{x^2 + 1}$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là

$$y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -mx^2 + 2x - m \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1]$$

Câu 55: Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



A. $a < c < b$.

B. $c < a < b$.

C. $a < b = c$.

D. $b < c < a$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$, ta có:

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $0 < a < 1$.

Các hàm số $y = b^x$, $y = \log_c x$ đồng biến trên tập xác định của nó nên ta có: $\begin{cases} b > 1 \\ c > 1 \end{cases}$.

Từ $\Rightarrow \begin{cases} a < b \\ a < c \end{cases}$. Do đó loại hai phương án **B**, **D**.

Nếu $b = c$ thì ta có đồ thị hai hàm số $y = b^x$, $y = \log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Tuy nhiên nhìn hình dáng hai đồ thị hàm số $y = b^x$, $y = \log_b x$ không có tính chất đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Do đó phương án đúng là **A**.

Cách khác:

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $0 < a < 1$.

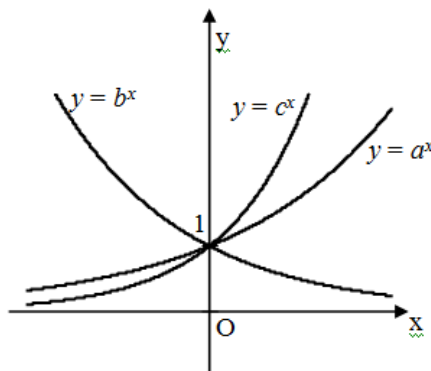
Các hàm số $y = b^x$, $y = \log_c x$ đồng biến trên tập xác định của nó nên ta có: $\begin{cases} b > 1 \\ c > 1 \end{cases}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \log_c x$, ta có: $\log_c 2 > 1 \Leftrightarrow c < 2$.

Xét đồ thị hàm số $y = b^x$, ta có: $b^1 > 2 \Leftrightarrow b > 2$.

Do đó: $0 < a < c < b$.

Câu 56: Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $b > a > c$.

B. $a > c > b$.

C. $c > a > b$.

D. $c > b > a$.

Lời giải

Chọn C

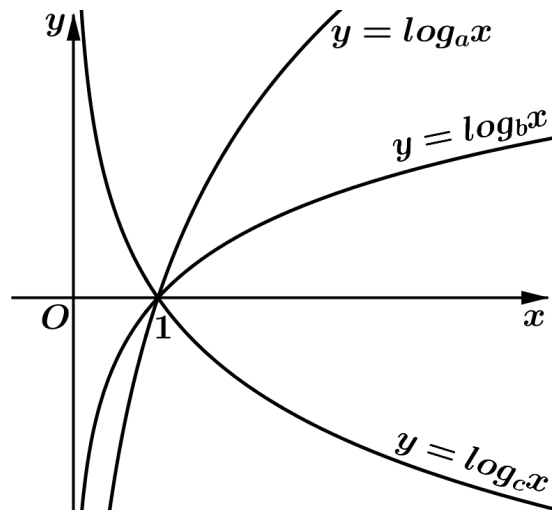
Xét hàm số $y = b^x$: Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$, do đó $0 < b < 1$.

Xét hàm số $y = a^x$: Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, do đó $a > 1$.

Từ đó suy ra: $a > b$. Loại đáp án A, **D**.

Xét tại $x = 1$ đồ thị hàm số $y = c^x$ có tung độ lớn hơn tung độ của đồ thị hàm số $y = a^x$ nên $c > a$. Vậy $c > a > 1 > b$.

Câu 57: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < c < b$.

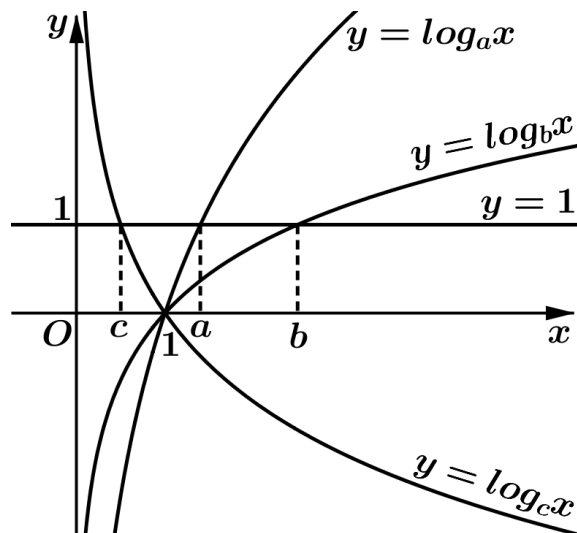
B. $a < b < c$.

C. $c < b < a$.

D. $c < a < b$.

Lời giải

Chọn D

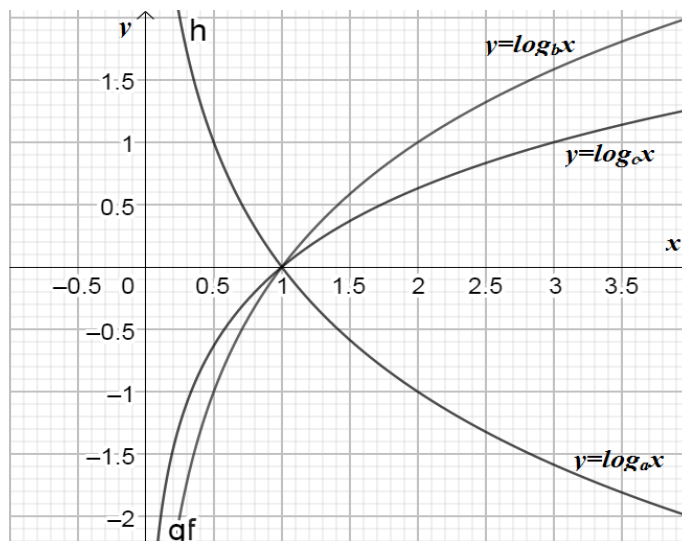


Theo hình dạng của đồ thị ta có $\begin{cases} a, b > 1 \\ 0 < c < 1 \end{cases}$.

Vẽ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hai hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ lần lượt tại 2 điểm $M(a;1)$, $N(b;1)$. Ta thấy điểm N bên phải điểm M nên $b > a$.

Vậy $c < a < b$.

Câu 58: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \log_a x, y = y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a < b < c$.

B. $a < c < b$.

C. $b < a < c$.

D. $b > a > c$.

Lời giải

Do $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ là hai hàm đồng biến nên $b, c > 1$.

Do $y = \log_a x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$. Vậy a bé nhất.

Mặt khác: Lấy $y = m$, khi đó tồn tại $x_1, x_2 > 0$ để $\begin{cases} \log_b x_1 = m \\ \log_c x_2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^m = x_1 \\ c^m = x_2 \end{cases}$.

Dễ thấy $x_1 < x_2 \Rightarrow b^m < c^m \Rightarrow b < c$. Vậy $a < b < c$.

Câu 59: Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\ln x \neq 2m \Leftrightarrow x \neq e^{2m}$. Có $y' = \frac{6-2m}{x(\ln x - 2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1; e) \Leftrightarrow y' > 0 \forall x \in (1; e) \Leftrightarrow \frac{6-2m}{x(\ln x - 2m)^2} > 0 \forall x \in (1; e)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2m > 0 \\ e^{2m} \notin (1; e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2m > 0 \\ e^{2m} \leq 1 \\ e^{2m} \geq e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m < 3 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy tập S có 2 phần tử.

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên $(4; +\infty)$

A. $m < -2$ hoặc $m > 1$. B. $m \leq -2$ hoặc $m = 1$.

C. $m < -2$ hoặc $m = 1$. D. $m < -2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_2 x$.

Ta có $x \in (4; +\infty) \Leftrightarrow t \in (2; +\infty)$.

Hàm số được viết lại $y = \frac{mt - 2}{t - m - 1}$.

Vì $t = \log_2 x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1) + 2 < 0 \\ m+1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Câu 61: Cho $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e)) = 2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

A. 10.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Ta có $\log(\log e) + \log(\ln 10) = \log 1 = 0$.

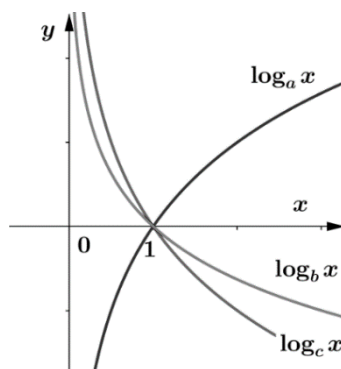
Mặt khác $f(x) + f(-x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6 + a \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin(-x) + 6$

$$= a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x - b \sin x + 12$$

$$= a \ln 1 + 12 = 12 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó suy ra $f(\log(\log e)) + f(\log(\ln 10)) = 12 \Rightarrow f(\log(\ln 10)) = 10$.

Câu 62: Cho a, b, c dương và khác 1. Các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào dưới đây đúng?

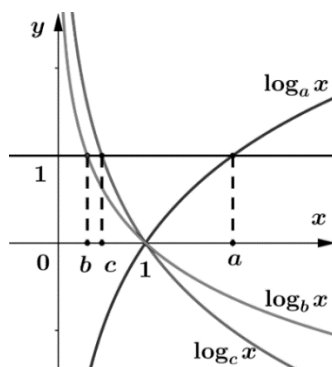
A. $a > c > b$.

B. $a > b > c$.

C. $c > b > a$.

D. $b > c > a$.

Lời giải



Kẻ đường thẳng $(d): y=1$. Hoành độ giao điểm của (d) với các đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt là a, b, c . Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $a > c > b$.

Câu 63: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$) qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016.

B. -2016.

C. 2020.

D. -2020.

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$$M\left(2+\log_a \frac{1}{2018}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right).$$

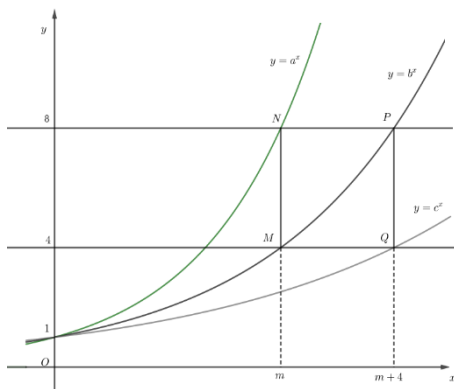
$$\text{Gọi } N \text{ đối xứng với } M \text{ qua } I(1;1) \Rightarrow N\left(-\log_a \frac{1}{2018}; 2-y_M\right).$$

$$\text{Do đồ thị } (C_1) \text{ đối xứng } (C) \text{ qua } I(1;1) \text{ nên } N\left(-\log_a \frac{1}{2018}; 2-y_M\right) \in (C).$$

$$N \in (C) \Leftrightarrow 2-y_M = a^{-\log_a \frac{1}{2018}} \Leftrightarrow 2-y_M = a^{\log_a 2018} \Leftrightarrow 2-y_M = 2018 \Leftrightarrow y_M = -2016.$$

$$\text{Vậy } f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right) = -2016.$$

Câu 64: Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y=a^x, (C_2): y=b^x, (C_3): y=c^x$ và đường thẳng $y=4; y=8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng

A. 34.

B. 5.

C. 43.

D. 19.

Lời giải

Chọn C

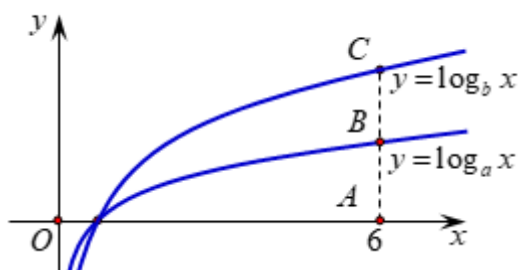
Giả sử hoành độ điểm M là m , ta suy ra $M(m; 4); N(m; 8); P(m+4; 8); Q(m+4; 4)$.

$$\text{Từ giả thiết ta có } M, P \text{ thuộc đường cong } y = b^x \text{ nên } \begin{cases} b^m = 4 \\ b^{m+4} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^m = 4 \\ b^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ b = 2^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$N, Q \text{ lần lượt thuộc đường cong } y = a^x; y = c^x \text{ nên } \begin{cases} a^8 = 8 \\ c^{12} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^8 = 2^3 \\ c^{12} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{3}{8}} \\ c = 2^{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } abc = 2^{\frac{3}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{19}{24}}. \text{ Vậy } x = 19; y = 24 \Rightarrow x + y = 43.$$

Câu 65: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đường thẳng $x = 6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Nếu $AC = AB \log_2 3$ thì

A. $b^3 = a^2$.

B. $b^2 = a^3$.

C. $\log_3 b = \log_2 a$.

D. $\log_2 b = \log_3 a$.

Lời giải

Chọn D

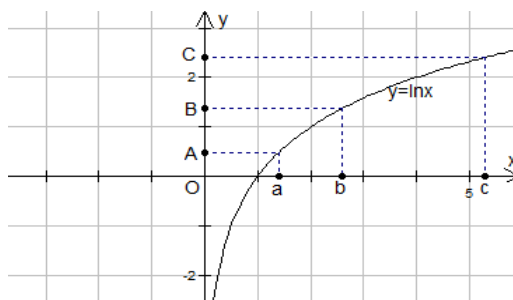
Từ các đồ thị hàm số đã cho trên hình ta có $A(6; 0), B(6; \log_a 6), C(6; \log_b 6)$,

$$AC = y_C - y_A = \log_b 6, AB = y_B - y_A = \log_a 6.$$

Vậy $AC = AB \log_2 3 \Leftrightarrow \log_b 6 = \log_a 6 \cdot \log_2 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6 b} = \frac{1}{\log_6 a} \cdot \frac{\log_6 3}{\log_6 2} \Leftrightarrow \frac{\log_6 2}{\log_6 b} = \frac{\log_6 3}{\log_6 a} \Leftrightarrow \log_2 b = \log_3 a.$$

Câu 66: Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC .



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a + c = 2b$.

B. $ac = b^2$.

C. $ac = 2b^2$.

D. $ac = b$

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy tọa độ điểm $A(0; \ln a)$, $B(0; \ln b)$, $C(0; \ln c)$

Theo bài ra B là trung điểm của đoạn thẳng AC nên ta có:

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{0 + 0}{2} = 0 \\ y_B = \frac{\ln a + \ln c}{2} = \ln b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ 2y_B = \ln ac = \ln b^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ (2) $\Rightarrow ac = b^2$.

Vậy chọn. **B.**

Câu 67: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$.

Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

A. -2016 .

B. -2020 .

C. 2016 .

D. 2020 .

Lời giải

Chọn A

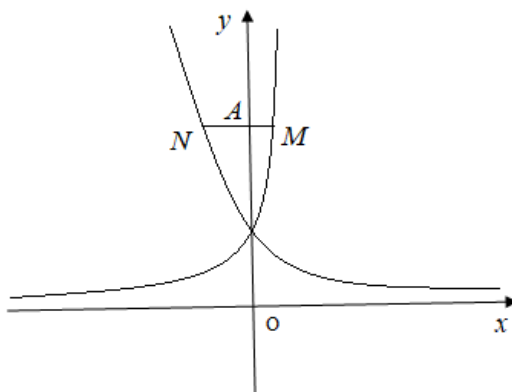
Xét $M\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}; f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Điểm $N\left(-\log_a \frac{1}{2018}; 2 - f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)\right)$ đối xứng với M qua $I(1;1)$ thuộc đồ thị hàm số

$y = a^x$ nên ta có:

$$2 - f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = a^{-\log_a \frac{1}{2018}} \Rightarrow f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = 2 - a^{\log_a 2018} = 2 - 2018 = -2016.$$

Câu 68: Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = 4^x, y = a^x$, trục tung lần lượt tại M, N và A thì $AN = 2AM$. Giá trị của a bằng



A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào ĐTHS ta thấy hàm số $y = a^x$ nghịch biến nên $0 < a < \frac{1}{2}$.

Mọi đường thẳng $y = m$ ($m > 0$) đều cắt các đường $y = 4^x, y = a^x$, trục tung lần lượt tại $M(\log_4 m; m), N(\log_a m; m)$ và $A(0; m)$, theo bài ra

$$AN = 2AM \Leftrightarrow |\log_a m| = 2|\log_4 m| \Leftrightarrow |\log_a m| = |\log_2 m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a m = \log_2 m \\ \log_a m = -\log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_m a = \log_m 2 \\ \log_m a = \log_m \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $a = \frac{1}{2}$.

Câu 69: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) qua điểm $I(2;1)$.

Giá trị của biểu thức $f(4 - a^{2019})$ bằng

A. 2023.

B. -2023.

C. 2017.

D. -2017.

Lời giải

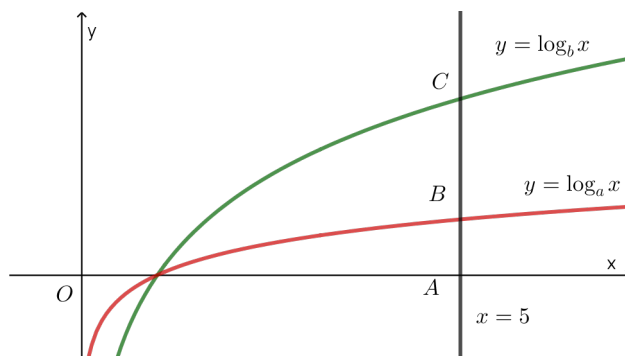
Chọn D

Lấy điểm $A(4 - a^{2019}; f(4 - a^{2019}))$ thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và điểm $B(x; \log_a x)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \log_a x$.

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua điểm I khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4 - a^{2019} + x = 2.2 \\ f(4 - a^{2019}) + \log_a x = 2.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^{2019} \\ f(4 - a^{2019}) + \log_a a^{2019} = 2 \end{cases} \Rightarrow f(4 - a^{2019}) = -2017.$$

Câu 70: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $a = 5b$.

B. $a = b^2$.

C. $a = b^3$.

D. $a^3 = b$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $A(5;0)$, $B(5; \log_a 5)$, $C(5; \log_b 5)$ và $\log_b 5 > \log_a 5 > 0$.

Do $CB = 2AB$ nên ta có $\log_b 5 - \log_a 5 = 2(\log_a 5 - 0)$.

$$\Leftrightarrow \log_b 5 = 3 \log_a 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 b} = \frac{3}{\log_5 a}$$

$$\Leftrightarrow \log_5 a = 3 \log_5 b$$

$$\Leftrightarrow \log_5 a = \log_5 b^3$$

$$\Leftrightarrow a = b^3.$$

Câu 71: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính giá trị biểu thức $A = f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \dots + f\left(\frac{100}{100}\right)$?

A. 50.

B. 49.

C. $\frac{149}{3}$.

D. $\frac{301}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hai số dương a và b sao cho $a + b = 1$, ta có

$$f(a) + f(b) = \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a(4^b + 2) + 4^b(4^a + 2)}{(4^a + 2)(4^b + 2)}$$

$$= \frac{2(4^{a+b} + 4^a + 4^b)}{4^{a+b} + 2(4^a + 4^b) + 4} = \frac{2(4 + 4^a + 4^b)}{2(4 + 4^a + 4^b)} = 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} A &= \left[f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{100}\right) + f\left(\frac{98}{100}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{49}{100}\right) + f\left(\frac{51}{100}\right) \right] + f\left(\frac{50}{100}\right) + f\left(\frac{100}{100}\right) \\ &= 49 + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = 49 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{301}{6}. \text{ Vậy } A = \frac{301}{6}. \end{aligned}$$

DẠNG 5. BÀI TOÁN THỰC TẾ

BÀI TOÁN NGÂN HÀNG	
1. Công thức tính lãi đơn	Nếu ta gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu , đây gọi là hình thức lãi đơn . Ta có: $T = A(1 + nr)$ với A : tiền gửi ban đầu; r : lãi suất; n : kỳ hạn gửi; T : tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n . Lưu ý: r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A , muốn tính số tiền lời ta lấy $T - A$.
2. Công thức lãi kép	Nếu ta gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức: hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức lãi kép . Ta có: $T = A(1 + r)^n$ với A : tiền gửi ban đầu; r : lãi suất; n : kỳ hạn gửi; T : tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n . Lưu ý: r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A , muốn tính số tiền lời ta lấy $T - A$.
3. Mỗi tháng gửi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép	Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng là: $T = \frac{A}{r} \left[(1 + r)^n - 1 \right] (1 + r)$.
4. Gửi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định	Nếu khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra X đồng. Số tiền thu được sau n tháng là: $T = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$
5. Vay vốn và trả góp	Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền X đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau n tháng là: $T = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$

Câu 72: Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

- A.** 0,8 % **B.** 0,6 % **C.** 0,7 % **D.** 0,5 %

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $A_n = A_0(1 + r)^n$ với n là số kỳ hạn, A_0 là số tiền ban đầu, A_n là số tiền có được sau n kỳ hạn, r là lãi suất.

$$\text{Suy ra } A_9 = A_0(1 + r)^9 \Rightarrow r = \sqrt[9]{\frac{A_9}{A_0}} - 1 = 0,7\%.$$

Câu 73: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,6% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn

110 triệu đồng, biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

- A.** 18 tháng **B.** 16 tháng **C.** 17 tháng **D.** 15 tháng

Lời giải

Chọn B

Sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền là: $100.(1+0,6\%)^n$.

Sau n tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng

$$\Rightarrow 100.(1+0,6\%)^n \geq 110 \Leftrightarrow n \geq \log_{1+0,6\%} \frac{11}{10} \approx 15,9.$$

Câu 74: Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là:

- A.** 62255910 đồng. **B.** 59895767 đồng. **C.** 59993756 đồng. **C.** 63545193 đồng.

Lời giải

Chọn B

Đợt I, ông An gửi số tiền $P_0 = 50$ triệu, lãi suất 8,4% một năm tức là 2,1% mỗi kỳ hạn. Số tiền cả gốc và lãi ông thu được sau 3 kỳ hạn là: $P_3 = 50000000.(1.021)^3$.

Đợt II, do ông không rút ra nên số tiền P_3 được xem là số tiền gửi ban đầu của đợt II, lãi suất đợt II là 3% mỗi kỳ hạn. Ông gửi tiếp 12 tháng bằng 4 kỳ hạn nên số tiền thu được cuối cùng là:

$$P = P_3 (1.03)^4 = 50000000.(1.021)^3 .(1.03)^4 \approx 59895767 \text{ đồng.}$$

Câu 75: Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

- A.** $800.(1,005)^{11} - 72$ **B.** $1200 - 400.(1,005)^{12}$
C. $800.(1,005)^{12} - 72$ **D.** $1200 - 400.(1,005)^{11}$

Lời giải

Chọn B

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Số tiền còn lại sau n tháng được tính theo công thức:

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 800(1,005)^{12} - 6. \frac{(1,005)^{12} - 1}{0,5\%} = 775.3288753 = 1200 - 400.(1,005)^{12}$$

Câu 76: Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10% / 1 năm. Tết năm nay do

ông kệt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

- A.** 10 năm **B.** 17 năm **C.** 15 năm **D.** 20 năm

Lời giải

Chọn A

Số tiền ông An tích lũy được gồm cả vốn và lãi là 260 triệu

Công thức tính lãi kép $A_n = A(1+r)^n$

$$\Leftrightarrow 260.10^6 = 100.10^6 (1+10\%)^n$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

Câu 77: Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng B với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 231 525 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng B là bao nhiêu?

- A.** 8% / năm. **B.** 7% / năm. **C.** 6% / năm. **D.** 5% / năm.

Lời giải

Ta có: số tiền nhận được của gốc và lãi là: $200\,000\,000(1+r)^3 = 231\,525\,000$

$$\Leftrightarrow r = 5\%/\text{năm}$$

Câu 78: Ông Anh gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? .

- A.** 231,815. **B.** 197,201.
C. 217,695. **D.** 190,271.

Lời giải

Số tiền ông An nhận được sau 5 năm đầu là: $60(1+8\%)^5 = 88,160$

Số tiền ông An nhận được sau 10 năm là:

$$(88,16 + 60)(1+8\%)^5 = 217,695 .$$

Câu 79: Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

- A.** 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

Lời giải

Ta có: Số tiền cả lãi lẫn gốc sau 15 tháng gửi: $S_{15} = \frac{T}{r}(1+r)\left[(1+r)^{15} - 1\right]$

$$\text{Vậy: } 10.000.000 = \frac{T}{0,006}(1+0,006)\left[(1+0,006)^{15} - 1\right] \Leftrightarrow T \approx 635.301$$

Câu 80: Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi sau 1 năm số tiền anh Nam nhận được là bao nhiêu? .

- A.** 218,64 triệu đồng. **B.** 208,25 triệu đồng.
C. 210,45 triệu đồng. **D.** 209,25 triệu đồng.

Lời giải

- Số tiền anh Nam nhận được sau 6 tháng là:

$$T_1 = 100(1 + 3\%)^2 = 106,09 \text{ triệu đồng.}$$

- Số tiền anh Nam nhận được sau một năm là:

$$T_2 = (106,09 + 100)(1 + 3\%)^2 \approx 218,64 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 81: Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,5% / tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi, lãi suất ngân hàng không đổi và ông A không rút tiền ra.

- A.** 36 tháng. **B.** 38 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 40 tháng.

Lời giải

Gọi A là số tiền gửi vào ngân hàng, r là lãi suất, T là số tiền cả gốc lẫn lãi thu được sau n tháng. Ta có $T = A(1 + r)^n$.

$$\text{Theo đề } T = 50.(1,005)^n > 60 \Leftrightarrow n > \log_{1,005} \frac{6}{5} \approx 36,6.$$

Vậy sau ít nhất 37 tháng thì ông A thu được số tiền cả gốc lẫn lãi hơn 60 triệu.

Câu 82: Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A.** 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A , lãi suất một kì hạn là m thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $A.(1 + m)^n$.

Do đó, số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là $300.1,07^n$ triệu đồng.

$$\begin{aligned} \text{Số tiền cả gốc và lãi nhận được nhiều hơn 600 triệu đồng} &\Leftrightarrow 300.1,07^n > 600 \\ &\Leftrightarrow n > \log_{1,07} 2 \approx 10,245. \end{aligned}$$

Vậy sau ít nhất 11 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

Câu 83: Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất 1,85% một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

- A.** 16 quý. **B.** 20 quý. **C.** 19 quý. **D.** 15 quý.

Lời giải

Bài toán lãi kép:

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A , lãi suất một kì hạn là $r\%$ thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $S_n = A.(1+r\%)^n$.

Anh Bảo nhận được số tiền ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn và lãi nên ta có:

$$27(1+1,85\%)^n \geq 36 \Leftrightarrow n \geq 15.693.$$

Vậy thời gian tối thiểu để anh Bảo nhận được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi là 16 quý.

Câu 84: Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra .

- A.** 169.871.000 đồng. **B.** 171.761.000 đồng. **C.** 173.807.000 đồng. **D.** 169.675.000 đồng.

Lời giải

Với 100 triệu ban đầu số tiền cả lãi và gốc thu được sau hai năm là

$$T_1 = 100.(1+0,8\%)^{24} .10^6 = 121074524$$

Mỗi tháng tiếp theo gửi 2 triệu thì tổng số tiền cả lãi và gốc là

$$T_2 = \frac{2}{0,008} . \left[(1+0,008)^{23} - 1 \right] . (1+0,008)10^6 = 50686310$$

Vậy tổng số tiền là $T = T_1 + T_2 = 171.761.000$

Câu 85: Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu ?

- A.** 810.000.000. **B.** 813.529.000. **C.** 797.258.000. **D.** 830.131.000.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A = 900.000.000, r = \frac{2}{100}$

Năm 2021 giá xe niêm yết là: $T_1 = A - Ar$

Năm 2022 giá xe niêm yết là $T_2 = A - Ar - (A - Ar)r = A(1-r)^2$

.

Năm 2025 giá xe niêm yết là: $T_5 = T_4 - T_4r = A(1-r)^5$

$$T_5 = 900.000.000 \left(1 - \frac{2}{100}\right)^5 \approx 813.529.000$$

Câu 86: Một ngân hàng X , quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1 + 8\%)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng ?.

- A.** 675 triệu đồng. **B.** 676 triệu đồng.
C. 677 triệu đồng. **D.** 674 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P(n) = A(1 + 8\%)^n$.

Sau 3 năm số tiền khách hàng rút về lớn hơn 850 triệu đồng là:

$$850 < A(1 + 8\%)^3 \Leftrightarrow A > \frac{850}{(1 + 8\%)^3} \approx 674,8.$$

Vậy số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là 675 triệu đồng.

Câu 87: Ông Tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông Tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A.** 46,933 triệu. **B.** 34,480 triệu. **C.** 81,413 triệu. **D.** 107,946 triệu.

Lời giải

Chọn C

Năm năm đầu ông Tuấn có số tiền cả gốc và lãi là $T_1 = 100 \cdot (1 + 0.08)^5 = 146,933$

Sau khi sửa nhà số tiền còn lại gửi vào ngân hàng trong 5 năm thì số tiền cả gốc và lãi là

$$T_2 = \frac{146,932}{2} (1 + 0.08)^5 = 107,946.$$

Số tiền lãi trong 10 năm là $L = (146,933 - 100) + (107,946 - 73,466) = 81,413$.

Câu 88: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?

- A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Lấy năm 2005 làm mốc, khi đó $A = 202.300$.

Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người, tức là ta có

$$255.000 = 202.300 \cdot e^{\frac{1,47n}{100}} \Leftrightarrow n = 100 \cdot \ln \frac{255000}{202300} \approx 15,75 \text{ năm.}$$

Vậy đến năm 2021 thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người.

- Câu 89:** Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = A.e^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tỉnh đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?
- A.** 242. **B.** 16. **C.** 90. **D.** 422.

Lời giải

Chọn A

* Giai đoạn 1:

$$\text{Ta có: } 180 = 9.e^{r \cdot 6} \Rightarrow r = \frac{1}{6} \ln 20$$

* Giai đoạn 2:

$$\text{Đến ngày thứ 6 số ca mắc bệnh của tỉnh là } f(x) = 180.e^{\frac{r}{10} \cdot 6} = 242$$

- Câu 90:** Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là 0,9% / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?
- A.** 65 tháng. **B.** 66 tháng. **C.** 67 tháng. **D.** 68 tháng.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là số tiền vay ngân hàng; r là lãi suất hàng tháng cho số tiền còn nợ; m là số tiền trả nợ hàng tháng; n là thời gian trả hết nợ.

$$\text{Để trả hết nợ thì } A(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 500(1+0,9\%)^n - \frac{10}{0,9\%}[(1+0,9\%)^n - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+0,9\%)^n = \frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{(1+0,9\%)} \frac{20}{11} \approx 66,72$$

Vậy sau 67 tháng anh Việt trả hết nợ.

- Câu 91:** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là

95,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hàng năm từ 2009 đến nay là 1,14%. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

- A.** 94,4 triệu người. **B.** 85,2 triệu người. **C.** 86,2 triệu người. **D.** 83,9 triệu người.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S = A.e^{ni}$ trong đó: $S = 95,5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1,14\%$

Ta có số dân Việt Nam năm 2009 là: $A = \frac{S}{e^{ni}} = \frac{95,5}{e^{10.1,14\%}} \approx 85,2$ triệu người

Câu 92: Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

- A.** 200. **B.** 190. **C.** 250. **D.** 150.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $P = P_0(1+r)^n$.

Số tiền ông An có được sau 3 năm là: $P = x(1+0,07)^3$.

Tiền lãi ông An có được sau 3 năm là: $P - x = x(1+0,07)^3 - x = x((1+0,07)^3 - 1)$.

Số tiền lãi trên là 45 triệu đồng nên: $x((1+0,07)^3 - 1) = 45 \Leftrightarrow x \approx 199,96$

Câu 93: Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93.671.600 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người?

- A.** 109.256.100. **B.** 108.374.700. **C.** 107.500.500. **D.** 108.311.100.

Lời giải

Chọn B

Lấy năm 2017 làm mốc, ta có $A = 93.671.600$; $n = 2035 - 2017 = 18$

$\Rightarrow$ Dân số Việt Nam vào năm 2035 là $S = 93.671.600.e^{18.\frac{0,81}{100}} \approx 108.374.700$

Câu 94: Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

- A.** 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra ta có $\frac{1}{1+49e^{-0,015n}} > 0,3$

$$\Leftrightarrow 1+49e^{-0,015n} < \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,015n} < \frac{7}{147}$$

$$\Leftrightarrow -0,015n < \ln \frac{7}{147}$$

$$\Leftrightarrow n > -\frac{1}{0,015} \ln \frac{7}{147} \approx 202,97.$$

Vậy ít nhất 203 lần quảng cáo.

Câu 95: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường nước biển giảm dần theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$, với I_0 là cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào môi trường nước biển và x là độ dày của môi trường đó. Biết rằng môi trường nước biển có hằng số hấp thụ là $\mu = 1,4$. Hỏi ở độ sâu 30 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào nước biển?

A. e^{-21} lần.

B. e^{42} lần.

C. e^{21} lần.

D. e^{-42} lần.

Lời giải:

Khi mới bắt đầu đi vào môi trường nước biển thì $x = 0 \Rightarrow I_1 = I_0 \cdot e^0$

Ở độ sâu 30 mét thì $I_2 = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot 30}$

Vậy ta có: $\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0 \cdot e^{-\mu \cdot 30}}{I_0 \cdot e^0} \Rightarrow I_2 = e^{-42} \cdot I_1$, vậy I_2 tăng e^{-42} lần so với I_1 , nói cách khác, I_2 giảm e^{42} lần so với I_1

Câu 96: Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

A. 9,1 giờ.

B. 9,7 giờ.

C. 10,9 giờ.

D. 11,3 giờ.

Lời giải

Gọi S là diện tích lá bèo thả ban đầu.

Vì sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó nên sau 12 giờ, tổng diện tích các lá bèo trong chậu là $10^{12} S$.

Theo đề bài: Sau 12 giờ, bèo phủ kín mặt nước trong chậu nên diện tích mặt nước trong chậu là

$10^{12} S$. Giả sử sau x giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Ta có: $10^x S = \frac{1}{5} \cdot 10^{12} S \Leftrightarrow 10^{12-x} = 5 \Leftrightarrow x = 12 - \log 5 \approx 11,3$.

Vậy sau 11,3 giờ thì bè phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Câu 97: Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$. Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- A.** (1.281.600;1.281.700). **B.** (1.281.700;1.281.800).
C. (1.281.800;1.281.900). **D.** (1.281.900;1.282.000).

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S = Ae^{Nr}$ từ đầu năm 2010 đến đầu năm 2015 ta có:

$$1153600 = 1038229 \cdot e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{5} \ln \frac{1153600}{1038229}.$$

Đầu năm 2020 dân số của tỉnh Bắc Ninh là $S = 1038229 \cdot e^{\frac{10,1}{5} \ln \frac{1153600}{1038229}} \approx 1281792$ người.

Vậy **Chọn B**

Câu 98: Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất $0,25\%$ một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416.780.000 đồng. Tính x .

- A.** 1,2. **B.** 0,8. **C.** 0,9. **D.** 1,5.

Lời giải

Chọn A

+ Xét bài toán ông B gửi tiết kiệm số tiền A đồng với lãi suất r cho 1 kỳ hạn. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Hỏi sau n kỳ hạn số tiền cả gốc và lãi của ông B là bao nhiêu nếu trong thời gian gửi lãi suất không thay đổi?

- Sau 1 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_1 = A + A.r = A(1+r)$.

- Sau 2 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_2 = T_1 + T_1.r = T_1(1+r) = A(1+r)^2$.

- Tổng quát ông B có số tiền cả gốc và lãi sau n kì hạn là $T_n = A(1+r)^n$ (1).

+ Áp dụng công thức (1) cho bài toán đề cho, gọi S là số tiền cả gốc và lãi anh Dũng có sau một năm gửi, ta có : $S = 250(1 + x\%)^4 + 150(1 + 0,25\%)^{12}$.

$$S = 416,78 \Leftrightarrow 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12} = 416,78 \Leftrightarrow x \approx 1,2.$$

Vậy $x \approx 1,2$.

Câu 99: Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu ?

A. 9,1 giờ.

B. 9,7 giờ.

C. 10,9 giờ.

D. 11,3 giờ.

Lời giải

Chọn D

Sau mỗi giờ, lượng lá bèo phủ trên mặt nước là: 10^n ($1 \leq n \leq 12$).

$\Rightarrow$ Lượng lá bèo phủ kín mặt nước trong chậu là:

$$S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{12} = \frac{10^{13} - 1}{9}$$

Do đó, lượng lá bèo cần để phủ $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu là $\frac{10^{13} - 1}{45}$.

Giả sử sau t giờ, lá bèo phủ kín được $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu, ta có

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^t = \frac{10^{t+1} - 1}{9} = \frac{10^{13} - 1}{45}$$

$$10^{t+1} = \frac{10^{13} + 4}{5} \Leftrightarrow t \approx 11,3.$$

Câu 100: Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x lần quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số lần quảng cáo được phát tối thiểu để số % người xem mua sản phẩm đạt hơn 75%.

A. 323.

B. 343.

C. 330.

D. 333.

Lời giải

Chọn D

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}} > 75 \Leftrightarrow 1 + 49e^{-0.015x} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow e^{-0.015x} < \frac{1}{147}$$

$$\Leftrightarrow -0.015x < \ln\left(\frac{1}{147}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{1}{147}\right)}{-0.015} \approx 332.7$$

Vậy số lần quảng cáo tối thiểu là 333 lần.

Câu 101: Áp suất không khí P suy giảm mũ so với độ cao x theo công thức $P = P_0 \cdot e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760 \text{ mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao

1000m thì áp suất của không khí là 672,71mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3343m là bao nhiêu?

- A.** 505,45 mmHg. **B.** 530,23 mmHg. **C.** 485,36 mmHg. **D.** 495,34 mmHg.

Lời giải

Chọn A

Ở độ cao $x_1 = 1000$ m thì áp suất không khí $P_1 = 672,71$ mmHg. Suy ra $P_1 = P_0 \cdot e^{x_1 i}$

$$\Leftrightarrow x_1 i = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \Leftrightarrow i = \frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{x_1} = -1,22 \cdot 10^{-4}.$$

Áp suất không khí P_2 ở độ cao $x_2 = 3343$ m là: $P_2 = P_0 \cdot e^{x_2 i} = 760 \cdot e^{3343 \cdot (-1,22 \cdot 10^{-4})} = 505,46$ mmHg.

Câu 102: Số lượng loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con.

- A.** 7 phút. **B.** 12 phút. **C.** 48 phút. **D.** 8 phút.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $s(3) = 625000 \Leftrightarrow s(0) \cdot 2^3 = 625000 \Leftrightarrow s(0) = 78125$.

Số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con khi

$$s(t) = 20000000 \Leftrightarrow s(0) \cdot 2^t = 20000000 \Leftrightarrow 2^t = \frac{20000000}{s(0)} = \frac{20000000}{78125} = 256 \Leftrightarrow t = 8.$$

Vậy, sau 8 phút thì số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.

Câu 103: Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7% / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?

- A.** 43.730.000 đồng. **B.** 43.720.000 đồng.
C. 43.750.000 đồng. **D.** 43.740.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là số tiền vay ban đầu.

Gọi A là số tiền mà hàng tháng người đó trả cho ngân hàng.

Sau tháng 1 dư nợ còn lại là: $M \cdot 1,007 - A$

Sau tháng 2 dư nợ còn lại là: $(M \cdot 1,007 - A) \cdot 1,007 - A = M \cdot 1,007^2 - A \cdot 1,007 - A$

Sau tháng 3 dư nợ còn lại là:

$$(M.1,007^2 - A.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^3 - A.[(1,007)^2 + 1,007 + 1].$$

$$\text{Sau tháng thứ } n \text{ dư nợ còn lại là: } M.1,007^n - A.[(1,007)^{n-1} + 1,007^{n-2} + \dots + 1,007 + 1].$$

Vì đúng 25 tháng thì trả hết nợ nên:

$$1.1,007^{25} - A.[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + \dots + 1,007 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1,007^{25} = A.[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + \dots + 1,007 + 1] \Leftrightarrow 1,007^{25} = A. \frac{1,007^{25} - 1}{0,007}.$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1,007^{25} \cdot 0,007}{1,007^{25} - 1} \approx 0,04374151341 \text{ tỉ đồng} \approx 43.741.513 \text{ đồng} \approx 43.740.000 \text{ đồng}.$$

Câu 104: Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi.

A. 11.487.000 đồng. **B.** 14.517.000 đồng. **C.** 55.033.000 đồng. **D.** 21.776.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $P = P_0(1+r)^n$.

Ta được giá trị ngôi nhà sau 10 năm là: $P = 10^9(1+0,05)^5 = 10^9 \cdot (1,05)^5$.

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền Người sinh viên còn lại của mỗi tháng là 60% lương.

Trong hai năm 2020 - 2021, Người sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a$.

Trong hai năm 2022 - 2023, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)$.

Trong hai năm 2024 - 2025, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)^2$.

Trong hai năm 2026 - 2027, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)^3$.

Trong hai năm 2028 - 2029, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0,6a(1+0,1)^4$.

Tổng số tiền anh sinh viên có được sau 10 năm là:

$$\begin{aligned} & 24 \times 0,6a + 24 \times 0,6a(1+0,1) + 24 \times 0,6a(1+0,1)^2 + 24 \times 0,6a(1+0,1)^3 + 24 \times 0,6a(1+0,1)^4 \\ &= 24 \times 0,6a [1 + (1+0,1) + (1+0,1)^2 + (1+0,1)^3 + (1+0,1)^4] \\ &= 24 \times 0,6a \times \frac{1-(1+0,1)^5}{1-(1+0,1)} = 24 \times 0,6a \frac{0,61051}{0,1} = 87,91344 \times a \end{aligned}$$

Số tiền trên bằng giá trị của ngôi nhà sau 10 năm:

$$10^9 \cdot (1,05)^5 = 87,91344 \times a \Leftrightarrow a \approx 14.517.000$$

Câu 105: Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7% / tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tháng là n ($n \in \mathbb{N}^*$). Đặt $a = 5$, $q = 1,007$. Đến lần nộp tiền thứ n :

Khoản tiền a đầu tiên trở thành $a \cdot q^{n-1}$. Khoản tiền a thứ hai trở thành $a \cdot q^{n-2}$ Giả sử khoản tiền cuối cùng vẫn là a thì tổng số tiền đã trả cả vốn lẫn lãi là $a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 5 \cdot \frac{1,007^n - 1}{0,007}$.

Số tiền 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7% / tháng, sau n tháng, sẽ trở thành $100 \cdot 1,007^n$.

Ta có phương trình $5 \cdot \frac{1,007^n - 1}{0,007} = 100 \cdot 1,007^n \Leftrightarrow n \approx 21,6$.

Theo đề bài, tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu đồng nên số tháng phải làm tròn là 22 tháng.

Câu 106: COVID19 là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona bắt nguồn từ Trung Quốc gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh. Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên. Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh?

A. 77760 người. **B.** 16384 người. **C.** 62500 người. **D.** 78125 người.

Lời giải

Chọn D

Sau 1 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $1 + 4 = 5$ người.

Sau 2 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1 + 4) + (1 + 4) \cdot 4 = (1 + 4)^2$ người.

Sau 3 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1 + 4)^2 + (1 + 4)^2 \cdot 4 = (1 + 4)^3$ người.

$\Rightarrow$ Sau 7 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1 + 4)^7 = 78125$ người.

Ngoài ra chúng ta có thể áp dụng công thức lãi kép để tính nhanh:

$$S_n = A(1 + r)^n = 1 \cdot (1 + 4)^7 = 78125, \text{ với } A = 1, r = 4, n = 7.$$

Câu 107: Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng?

A. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.
B. Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.
C. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.
D. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

Lời giải

Chọn C

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 12 tháng là:

$$T_1 = T_0 \cdot (1 + r_1)^{n_1} = 10^8 \cdot 1,12^{10} \approx 310585000 .$$

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 1 tháng là

$$T_2 = T_0 \cdot (1 + r_2)^{n_2} = 10^8 \cdot 1,01^{120} \approx 330039000 .$$

Như vậy, sau 10 năm, gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là:

$$T = T_2 - T_1 = 330039000 - 310585000 = 19454000 .$$

Câu 108: Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng ?

A. 1.018.500 đồng. **B.** 1.320.800 đồng. **C.** 1.320.500 đồng. **D.** 1.771.300 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi N là số tiền vay ban đầu, r là lãi suất theo tháng, A là số tiền phải trả hàng tháng, ta có:

+ Số dư nợ sau 1 tháng là: $N + Nr - A = N(1 + r) - A$.

+ Số dư nợ sau 2 tháng là: $N(1 + r) - A + [N(1 + r) - A]r - A = N(1 + r)^2 - \frac{A}{r}[(1 + r)^2 - 1]$.

+ Số dư nợ sau 3 tháng là: $N(1 + r)^3 - \frac{A}{r}[(1 + r)^3 - 1]$.

...

+ Số dư nợ sau n tháng là: $N(1 + r)^n - \frac{A}{r}[(1 + r)^n - 1]$.

Giả sử sau n tháng thì dư nợ bằng 0, ta có $N(1 + r)^n - \frac{A}{r}[(1 + r)^n - 1] = 0 \Leftrightarrow A = \frac{N(1 + r)^n \cdot r}{(1 + r)^n - 1}$.

Áp dụng với $N = 50.000.000$ đồng, $r = 1,15\%$ và $n = 50$ tháng ta có: $A \approx 1.320.500$ đồng.

Câu 109: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? .

A. 68 **B.** 66 **C.** 65 **D.** 67

Lời giải

Chọn B

Giả sử anh An vay số tiền là A với lãi suất r trên tháng và trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là x . Anh An sau các tháng còn nợ ngân hàng với số tiền là:

Tháng thứ 1: $A(1+r) - x$

Tháng thứ 2: $[A(1+r) - x](1+r) - x = A(1+r)^2 - [1 + (1+r)]x = A(1+r)^2 - x \cdot \frac{(1+r)^2 - 1}{r}$

Tháng thứ 3: $A(1+r)^3 - x \cdot \frac{(1+r)^3 - 1}{r}$

...

Tháng thứ n : $A(1+r)^n - x \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Áp dụng công thức ta có: $A = 500$; $r = 0,0085$; $x = 10$ và sau n tháng trả hết nợ ta có:

$$500 \cdot (1 + 0,0085)^n - 10 \cdot \frac{(1 + 0,0085)^n - 1}{0,0085} = 0$$

$$\Leftrightarrow 50 \cdot (1,0085)^n = \frac{(1,0085)^n - 1}{0,0085} \Leftrightarrow (1,0085)^n = \frac{40}{23} \Leftrightarrow n = \log_{1,0085} \frac{40}{23} \approx 65,4$$

Câu 110: Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ 2 trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra.

A. 1.686.898.000 VNĐ. **B.** 743.585.000 VNĐ.

C. 739.163.000 VNĐ. **D.** 1.335.967.000 VNĐ.

Lời giải

Gọi $a = 200$ triệu; $b = 20$ triệu; $\alpha = 7\%$.

Số tiền sau 1 năm: $a(1+\alpha)$.

Số tiền sau 2 năm: $a(1+\alpha)^2 + b(1+\alpha)$.

Số tiền sau 3 năm: $a(1+\alpha)^3 + b(1+\alpha)^2 + b(1+\alpha)$.

.....

Số tiền sau 18 năm: $a(1+\alpha)^{18} + b[(1+\alpha)^{17} + (1+\alpha)^{16} + \dots + (1+\alpha)]$

$$= a(1+\alpha)^{18} + b \left[(1+\alpha) \cdot \frac{(1+\alpha)^{17} - 1}{\alpha} \right]$$

Vậy số tiền ông Chính nhận sau 18 năm là: 1.335.967.000 VNĐ.

Câu 111: Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất 6,9% / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

- A.** 105370000 đồng **B.** 111680000 đồng **C.** 107667000 đồng **D.** 116570000 đồng

Lời giải

Gọi P_0 là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất / năm.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất: $P_1 = P_0 + P_0.r = P_0(1+r)$.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai: $P_2 = P_1 + P_1.r = P_0(1+r)^2$.

....

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$$P_5 = P_0.(1+r)^5 = 80\,000\,000.(1+6,9\%)^5 \approx 111\,680\,799.$$

Câu 112: Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng, người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

- A.** 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

Lời giải

Chọn C

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng đầu tiên là $T(1+0,006)^{15} = T.1,006^{15}$.

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng thứ 2 là $T(1+0,006)^{14} = T.1,006^{14}$.

Cứ như vậy, số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng thứ 14 là $T(1+0,006) = T.1,006$.

Vậy tổng số tiền nhận được sau 15 tháng là:

$$T(1,006^{15} + 1,006^{14} + \dots + 1,006^2 + 1,006) = T.1,006 \cdot \frac{1,006^{15} - 1}{0,006}.$$

$$\text{Theo giả thiết có: } 10\,000\,000 = T.1,006 \cdot \frac{1,006^{15} - 1}{0,006} \Rightarrow T \approx 635\,301,46.$$

Câu 113: Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7% / 1 năm và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu ?

- A.** 130 650 280 . **B.** 130 650 000 .
C. 139 795 799 . **D.** 139 795 800 .

Lời giải

Chọn A

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n , với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có: $T_1 = T_0 + rT_0 = T_0(1+r)$.

Đầu năm thứ 2, người đó có tổng số tiền là:

$$T_0(1+r) + T_0 = T_0[(1+r) + 1] = \frac{T_0}{[(1+r) - 1]}[(1+r)^2 - 1] = \frac{T_0}{r}[(1+r)^2 - 1].$$

$$\text{Do đó: } T_2 = \frac{T_0}{r}[(1+r)^2 - 1] + \frac{T_0}{r}[(1+r)^2 - 1] \cdot r = \frac{T_0}{r}[(1+r)^2 - 1](1+r).$$

.....

$$\text{Ta có: } T_n = \frac{T_0}{r}[(1+r)^n - 1](1+r).$$

$$\text{Áp dụng vào bài toán, ta có: } 10^9 = \frac{T_0}{0,07}[(1+0,07)^6 - 1](1+0,07) \Rightarrow T_0 \approx 130\,650\,280 \text{ đồng.}$$

Câu 114: Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A. 22.

B. 23.

C. 24.

D. 21.

Lời giải

Gọi số tiền vay ban đầu là M , số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m , lãi suất một tháng là r .

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn nợ ngân hàng là $M + Mr = M(1+r)$.

Sau khi hoàn nợ lần thứ nhất, số tiền còn nợ là $M(1+r) - m$.

Sau khi hoàn nợ lần thứ hai, số tiền còn nợ là

$$M(1+r) - m + [M(1+r) - m]r - m = M(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Sau khi hoàn nợ lần thứ ba, số tiền còn nợ là

$$M(1+r)^2 - m(1+r) - m + [M(1+r)^2 - m(1+r) - m]r - m$$

$$= M(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Lập luận tương tự, sau khi hoàn nợ lần thứ n , số tiền còn nợ là

$$M(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - m(1+r)^{n-2} - \dots - m(1+r) - m = M(1+r)^n - \frac{m[(1+r)^{n-1} - 1]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n - \frac{m[(1+r)^{n-1} - 1]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\Leftrightarrow m = (m - Mr)(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{m}{m - Mr} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{m}{m - Mr} \right)$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 0,7\%$, $m = 5.000.000$ ta tính được $n \approx 21,62$.

Vậy sau 22 tháng người đó trả hết nợ ngân hàng.

Câu 115: Vào ngày 15 hàng tháng ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng SHB số tiền 5 triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn một tháng, lãi suất tiết kiệm không đổi trong suốt quá trình gửi là $7,2\%$ / năm. Hỏi sau đúng 3 năm kể từ ngày bắt đầu gửi ông An thu được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu ?.

A. 195251000

B. 201453000

C. 195252000

D. 201452000

Lời giải

Gọi T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n tháng, a là số tiền gốc, r là lãi suất, ta có:

Cuối tháng thứ 1 ông An có số tiền là: $T_1 = a(1+r)$

Đầu tháng thứ 2 ông An có số tiền là: $T_2 = a(1+r) + a$

Cuối tháng thứ 2 ông An có số tiền là: $T_2 = a(1+r) + a + (a(1+r) + a)r = a(1+r) + a(1+r)^2$

.....

Cuối tháng thứ n ông An có số tiền là: $T_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^n$

$$= a((1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^n) = a \cdot \frac{(1+r)((1+r)^n - 1)}{1+r-1} = \frac{a(1+r)((1+r)^n - 1)}{r} (1).$$

Với kì hạn một tháng, suy ra 3 năm có 36 kỳ. Lãi suất của một năm là $7,2\%$, suy ra lãi suất của 1 tháng là: $\frac{7,2}{12}\% = 0,6\%$. Áp dụng (1) ta có: $a = 5000000; r = 0,6\% = 0,006; n = 36$

$$\Rightarrow T_{36} = \frac{5000000(1+0,6\%)((1+0,6\%)^{36} - 1)}{0,6\%} \approx 201453000$$

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA – LOGARIT – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a} \text{ bằng}$$

- A. $\sqrt{2014}$. B. $\sqrt{2016}$. C. $\sqrt{2018}$. D. $\sqrt{2020}$.

Câu 2: Tìm số nguyên dương n sao cho

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \log_{2018} 2019$$

- A. $n = 2021$. B. $n = 2019$. C. $n = 2020$. D. $n = 2018$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right)$. Tính $T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

- A. $T = \frac{2019}{2}$. B. $T = 2019$. C. $T = 2018$. D. $T = 1009$.

Câu 4: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_3 n}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của n để $f(n) = a$.

- A. 2 B. 4 C. 1 D. vô số

Câu 5: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

- A. 52. B. -60. C. 60. D. -52.

Câu 6: Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log \left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right].$$

- A. $T = 9$. B. $T = 3$. C. $T = 10$. D. $T = 4$.

Câu 7: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} + \frac{1}{\log_2 z} = \frac{1}{2020}$ và

$$\log_2 (xyz) = 2020. \text{ Tính } \log_2 (xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1)$$

- A. 4040. B. 1010. C. 2020. D. 2020^2 .

- Câu 8:** Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương a ($a \neq 1$) thì $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1959x}{y} + \frac{2019y}{z} + \frac{60z}{x}$.
- A. 60. B. 2019. C. 4038. D. $\frac{2019}{2}$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right)$ và hai số thực m, n thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f(m)+f(n)$.
- A. 2. B. 0. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 10:** Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 2n+3$.
- A. $P=32$. B. $P=23$. C. $P=43$. D. $P=41$.
- Câu 11:** Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p = \frac{9x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{3z}{x}$ là
- A. 13. B. 3. C. 12. D. 10.
- Câu 12:** Cho $f(1)=1; f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log \left[\frac{f(2019)-f(2009)-145}{2} \right]$
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 10.
- Câu 13:** Có bao nhiêu số nguyên dương n để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.
- Câu 14:** Cho $x = 2018!$. Tính $A = \frac{1}{\log_{2^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{3^{2018}} x} + \dots + \frac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{2018^{2018}} x}$.
- A. $A = \frac{1}{2017}$. B. $A = 2018$. C. $A = \frac{1}{2018}$. D. $A = 2017$.
- Câu 15:** Tìm bộ ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn $\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+5+\dots+19) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3$
- A. $(2; 6; 4)$. B. $(1; 3; 2)$. C. $(2; 4; 4)$. D. $(2; 4; 3)$.
- Câu 16:** Tổng $S = 1 + 2^2 \log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \dots + 2018^2 \log_{\sqrt[2018]{2}} 2$ dưới đây.
- A. $1008^2 \cdot 2018^2$. B. $1009^2 \cdot 2019^2$. C. $1009^2 \cdot 2018^2$. D. 2019^2 .
- Câu 17:** Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số?
- A. 147278481. B. 147278480. C. 147347190. D. 147347191.
- Câu 18:** Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2 \cdot 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a \cdot b$.
- A. $P = 10$. B. $P = -45$. C. $P = -10$. D. $P = 45$.

Câu 19: Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 20: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x+2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

- A. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. B. $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$. C. $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. D. $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Câu 21: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a+b$.

- A. $a+b=14$. B. $a+b=3$. C. $a+b=21$. D. $a+b=34$.

Câu 22: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3 (x+y) = \log_4 (x^2+y^2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Câu 24: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1} (16a^2+b^2+1) + \log_{8ab+1} (4a+5b+1) = 2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

- A. 6 B. $\frac{27}{4}$ C. $\frac{20}{3}$ D. 9

Câu 25: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

- A. $\frac{33}{4}$. B. $\frac{65}{8}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Câu 26: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4y}{2x+y+1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

- A. -2. B. -3. C. -5. D. -4.

Câu 27: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2} (2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x+3y$ là

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$. C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$. D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

- Câu 28:** Cho các số thực a, b thay đổi, thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $P = \log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng
- A. $3 + 9^{\sqrt{2}}$ B. $9 + 2^{\sqrt{3}}$ C. $2 + 9\sqrt{2}$ D. $3 + 3\sqrt{2}$
- Câu 29:** Xét các số thực dương a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $4(\log_a c + \log_b c) = 25 \log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a + \log_a c + \log_c b$ bằng
- A. 5. B. 8. C. $\frac{17}{4}$. D. 3.
- Câu 30:** Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4xy + 2x - y$ có dạng $m + n\sqrt{165}$, tính $S = m + n$.
- A. 58. B. 54. C. 56. D. 60
- Câu 31:** Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 (x-1) + \log_2 (y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?
- A. $T = 9$. B. $T = \frac{7}{3}$. C. $T = \frac{5}{3}$. D. $T = 7$.
- Câu 32:** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1} (16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1} (4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. $\frac{27}{4}$. B. 6. C. $\frac{20}{3}$. D. 9.
- Câu 33:** Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$ bằng
- A. 2020. B. 16160. C. 20200. D. 13130.
- Câu 34:** Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 3m - M$ bằng
- A. -16. B. 4. C. -6. D. 6.
- Câu 35:** Cho các số thực $x, y \geq 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy \leq 4$. Biểu thức $P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0, y = y_0$. Đặt $T = x_0^4 + y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng
- A. $T = 131$. B. $T = 132$. C. $T = 129$. D. $T = 130$.
- Câu 36:** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 10$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 5 \log a \cdot \log b + 2 \log b \cdot \log c + \log c \cdot \log a$ bằng $\frac{m}{n}$ với m, n nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m + n$ bằng
- A. 13. B. 16. C. 7. D. 10.

- Câu 37:** Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2\log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a ab - \log_b bc$. Tính giá trị biểu thức $S = 2m^2 + 9M^2$.
- A. $S = 28$. B. $S = 25$. C. $S = 26$. D. $S = 27$.
- Câu 38:** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. 9. B. 6. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{20}{3}$.
- Câu 39:** Xét các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$ thuộc tập nào dưới đây?
- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
- Câu 40:** Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng:
- A. 11. B. 8. C. 9. D. 10.
- Câu 41:** Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$.
- A. $T = 9$. B. $T = \frac{7}{3}$. C. $T = \frac{5}{3}$. D. $T = 7$.
- Câu 42:** Xét các số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?
- A. $(-1; 2)$. B. $[-5; -1)$. C. $[2; 4)$. D. $[4; 6)$.
- Câu 43:** Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?
- A. $[10; 13)$. B. $[7; 10)$. C. $[3; 5)$. D. $[5; 7)$.
- Câu 44:** Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = \sqrt{a \cdot b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x \cdot y$ là
- A. $P = \frac{9}{4}$. B. $P = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = \frac{4}{9}$.
- Câu 45:** Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{\frac{x^2}{y}} = b^{\frac{y^2}{x}} = ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x \cdot y$ là
- A. $P = 2$. B. $P = 4$. C. $P = 3$. D. $P = 1$.

- Câu 46:** Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1, y > 2$ và $a^{x+1} = b^{y-2} = c^{z+1} = abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ là
- A.** $P = 13$. **B.** $P = 3$. **C.** $P = 9$. **D.** $P = 1$.

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI CÁC BÀI TOÁN LOGARIT

1. Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(a; b)$ thì

* $\forall u, v \in (a; b): f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

* Phương trình $f(x) = k$ ($k = \text{const}$) có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

2. Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(a; b)$, đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = k$ ($k = \text{const}$) có duy nhất nghiệm trên $(a; b)$.

3. Tính chất của logarit:

1.1. So sánh hai logarit cũng cơ số: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c. ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.	1.2. Hệ quả: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c. ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$. ◦ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	3. Logarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ (n nguyên dương).	5. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$ Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

- Câu 47:** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4 (x^2 + y) \geq \log_3 (x + y)$?
- A.** 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

- Câu 48:** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4 (x^2 + y) \geq \log_3 (x + y)$?
- A.** 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

- Câu 49:** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?
- A. 89. B. 46. C. 45. D. 90.
- Câu 50:** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng
- A. $\frac{65}{8}$. B. $\frac{33}{4}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.
- Câu 51:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$?
- A. 2019. B. 6. C. 2020. D. 4.
- Câu 52:** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng
- A. $\frac{33}{8}$. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{21}{4}$. D. $\frac{41}{8}$.
- Câu 53:** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?
- A. 80. B. 79. C. 157. D. 158.
- Câu 54:** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng
- A. $\frac{33}{8}$. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{21}{4}$. D. $\frac{41}{8}$.
- Câu 55:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m - n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?
- A. 16. B. 14. C. 15. D. 13.
- Câu 56:** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8x + 4}{2x - y + 1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?
- A. 9 B. 6. C. 7. D. 8.
- Câu 57:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $m + n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp $(m; n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?
- A. 7. B. 8. C. 10. D. 9.
- Câu 58:** Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{8x + 4}{2x - y + 1}$ gần nhất với số nào dưới đây
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 59:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

- A.** 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Câu 60: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1, 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

- A.** 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 61: Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4y}{2x + y + 1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 62: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$

A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ **B.** $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$

C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$

Câu 63: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$ **B.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ **C.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ **D.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$

Câu 64: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln(\frac{x+y}{2})} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

- A.** $P_{\max} = 10$. **B.** $P_{\max} = 0$. **C.** $P_{\max} = 1$. **D.** $P_{\max} = \ln 2$.

Câu 65: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \frac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

- A.** 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 66: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

- A.** $k \in [2; 3]$. **B.** $k \in (0; 1)$. **C.** $k \in [0; 1]$. **D.** $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 67: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b)=1$. Tính $P=\frac{a}{b}$ khi biểu thức $S=4a+6b-5$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{-13}{2}$ C. $\frac{-13}{4}$ D. $\frac{17}{44}$

Câu 68: Cho a, b là các số dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$.

- A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

Câu 69: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 70: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

- A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Câu 71: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $P_{\min} = 9$ B. $P_{\min} = 8$ C. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$ D. $P_{\min} = \frac{17}{2}$

Câu 72: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $T_{\min} \in (7; 8)$ B. $T_{\min} \in (6; 7)$ C. $T_{\min} \in (5; 6)$ D. $T_{\min} \in (8; 9)$

Câu 73: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 0 B. Vô số C. 1 D. 2

Câu 74: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x \neq y$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x} \right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y} \right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2}$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. -2 . D. 6.

Câu 75: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$. Khi $x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 76: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1}$.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 77: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$

- A. 2. B. 1. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 78: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 79: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = (ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\sqrt{2}x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[10; 15)$. B. $[6; 10)$. C. $(1; 4)$. D. $[4; 6)$.

Câu 80: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_x x + \log_x y \geq \log_x (x + y^2)$. Biểu thức $P = x + 8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

- A. $P_{\min} = 16$. B. $P_{\min} = \frac{33}{2}$. C. $P_{\min} = 11\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = \frac{31}{2}$.

Câu 81: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2 (6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

- A. 16. B. 18. C. 12. D. 20.

Câu 82: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + b$.

- A. $P_{\min} = -1 + 2\sqrt{5}$. B. $P_{\min} = 2 + \sqrt{5}$. C. $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$. D. $P_{\min} = 1 + 2\sqrt{5}$.

- Câu 83:** Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + xy$ là bao nhiêu?
A. $30 - 20\sqrt{2}$. **B.** $33 - 22\sqrt{2}$. **C.** $24 - 16\sqrt{2}$. **D.** $36 - 24\sqrt{2}$.
- Câu 84:** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y$ bằng
A. $2\sqrt{2} + 3$. **B.** $2 + 3\sqrt{2}$. **C.** $3 + \sqrt{3}$. **D.** 9.
- Câu 85:** Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy$. Tính $M.m$.
A. $-\frac{5}{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -3.
- Câu 86:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.
A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$. **B.** $P_{\min} = 8$. **C.** $P_{\min} = 9$. **D.** $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.
- Câu 87:** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y}$. Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.
- Câu 88:** Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log(x + 2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x}$ là:
A. $\frac{31}{5}$. **B.** 6. **C.** $\frac{29}{5}$. **D.** $\frac{32}{5}$.
- Câu 89:** Cho các số thực x, y thay đổi, thỏa mãn $x > y > 0$ và $\ln(x - y) + \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của $M = x + y$ là
A. $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 16.
- Câu 90:** Xét x, y, z là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_2^3 x + \log_2^3 y + \frac{1}{4}\log_2^3 z$ bằng
A. $\frac{1}{32}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{8}$.
- Câu 91:** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + 2y^2)$?
A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** Vô số

- Câu 92:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 93:** Có bao nhiêu số nguyên $y < 10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2 - x - 1} + (x - 1)^2$?
- A. 10 B. 1 C. 5 D. Vô số
- Câu 94:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$?
- A. 2021. B. 10. C. 2020. D. 11.
- Câu 95:** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x + y) - \log_2(1 + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 1)$?
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 5
- Câu 96:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x - 1}{y}\right) = y + 1 - 2^x$?
- A. 2019. B. 11. C. 2020. D. 4.
- Câu 97:** Xét các số thực a, b, x thỏa mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.
- A. $\frac{1 - 3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{e}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{3 + 2\sqrt{2}}{12}$.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA – LOGARIT – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a} \text{ bằng}$$

A. $\sqrt{2014}$.

B. $\sqrt{2016}$.

C. $\sqrt{2018}$.

D. $\sqrt{2020}$.

Lời giải

Chọn B

Do $a > b > 1$ nên $\log_a b > 0$, $\log_b a > 0$ và $\log_b a > \log_a b$.

Ta có: $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$

$$\Leftrightarrow \log_b a + \log_a b = \sqrt{2020}$$

$$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b + 2 = 2020$$

$$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b = 2018 (*)$$

Khi đó, $P = \log_b ab - \log_a ab = \log_b a + \log_b b - \log_a a - \log_a b = \log_b a - \log_a b$

Suy ra: $P^2 = (\log_b a - \log_a b)^2 = \log_b^2 a + \log_a^2 b - 2 = 2018 - 2 = 2016 \Rightarrow P = \sqrt{2016}$

Câu 2: Tìm số nguyên dương n sao cho

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \log_{2018} 2019$$

A. $n = 2021$.

B. $n = 2019$.

C. $n = 2020$.

D. $n = 2018$.

Lời giải

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \log_{2018} 2019$$

$$\Leftrightarrow \log_{2018} 2019 + 2^3 \log_{2018} 2019 + 3^3 \log_{2018} 2019 + \dots + n^3 \log_{2018} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \log_{2018} 2019$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_{2018} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \log_{2018} 2019$$

$$\Leftrightarrow 1+2^3+3^3+\dots+n^3=1010^2.2021^2$$

$$\Leftrightarrow (1+2+\dots+n)^2=1010^2.2021^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = 1010^2.2021^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 1010.2021$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-2020.2021=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=2020 \\ n=-2021 (\ell) \end{cases}$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right)$. Tính $T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

A. $T = \frac{2019}{2}$.

B. $T = 2019$.

C. $T = 2018$.

D. $T = 1009$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1-x) = \log_2 \left(1-x - \frac{1}{2} + \sqrt{(1-x)^2 - (1-x) + \frac{17}{4}} \right) = \log_2 \left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$f(x) + f(1-x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right) + \log_2 \left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \log_2 \left[\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right) \left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right] = \log_2 4 = 2$$

$$\Rightarrow T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right)$$

$$= 1009.2 = 2018$$

Câu 4: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_3 n}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của n để $f(n) = a$.

A. 2

B. 4

C. 1

D. vô số

Lời giải

Chọn A

$$f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_3 n}{9^n} = \frac{1}{9} \log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \dots \log_{3^9} n$$

Ta có:

- Nếu $2 \leq n \leq 3^8 \Rightarrow 0 < \log_{3^9} k < 1 \Rightarrow f(n) = \frac{1}{9} \log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \dots \log_{3^9} n \geq f(3^8)$

- Nếu $n = 3^9 \Rightarrow f(3^9) = f(3^8) \cdot \log_{3^9} 3^9 = f(3^8)$

- Nếu $n > 3^9 \Rightarrow \log_{3^9} n > 1 \Rightarrow f(n) = f(3^9) \cdot \log_{3^9} (3^9 + 1) \dots \log_{3^9} n > f(3^9)$

Từ đó suy ra $\min f(n) = f(3^9) = f(3^8)$.

Câu 5: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

A. 52.

B. -60.

C. 60.

D. -52.

Lời giải

Chọn C

$$\log_x w = 24 \Rightarrow \log_w x = \frac{1}{24}$$

$$\log_y w = 40 \Rightarrow \log_w y = \frac{1}{40}$$

Lại do

$$\log_{xyz} w = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w (xyz)} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_w z} = 12 \Leftrightarrow \log_w z = \frac{1}{60} \Rightarrow \log_z w = 60.$$

Câu 6: Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log \left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right].$$

A. $T = 9$.

B. $T = 3$.

C. $T = 10$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn B

Có $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$

$\Rightarrow$

$$f(96) = f(95+1) = f(95) + f(1) + 95 = f(95) + 96 = f(94) + 95 + 96 = \dots = f(1) + 2 + \dots + 95 + 96$$

$$\Rightarrow f(96) = 1 + 2 + \dots + 95 + 96 = \frac{96 \cdot 97}{2} = 4656.$$

$$\text{Tương tự } f(69) = 1 + 2 + \dots + 68 + 69 = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415.$$

$$\text{Vậy } T = \log \left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right] = \log \left(\frac{4656 - 2415 - 241}{2} \right) = \log 1000 = 3.$$

- Câu 7:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} + \frac{1}{\log_2 z} = \frac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz) = 2020$. Tính $\log_2(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1)$
- A.** 4040. **B.** 1010. **C.** 2020. **D.** 2020^2 .

Lời giải

Chọn A

Đặt $a = \log_2 x; b = \log_2 y; c = \log_2 z$.

Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2020}$ và $a + b + c = 2020$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a + b + c) = 1 \Leftrightarrow (a + b + c)(ab + ac + bc) = abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

Vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a + b = 0 \Rightarrow c = 2020 \Rightarrow z = 2^{2020}$ và $xy = 1$.

$$\log_2(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1) = \log_2(z(x+y+z) - 1 - yz - zx + 1)$$

$$= \log_2(z^2) = 2 \log_2 z = 4040$$

- Câu 8:** Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương a ($a \neq 1$) thì $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1959x}{y} + \frac{2019y}{z} + \frac{60z}{x}$.

- A.** 60. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** $\frac{2019}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: x, y, z là ba số thực dương, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì $y^2 = x.z$ (1).

Với mỗi số thực a ($a \neq 1$), $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì

$$2 \log_{\sqrt{a}} y = \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z \Leftrightarrow 4 \log_a y = \log_a x + 3 \log_a z \quad (2).$$

Thay (1) vào (2) ta được $2 \log_a x.z = \log_a x + 3 \log_a z \Leftrightarrow \log_a x = \log_a z \Leftrightarrow x = z$.

Từ (1) ta suy ra $y = x = z$.

Thay vào giả thiết thì $P = 1959 + 2019 + 60 = 4038$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right)$ và hai số thực m, n thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho $m+n=1$.
 Tính $f(m) + f(n)$.

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} f(m) + f(n) &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2m}{1-m} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2n}{1-n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\log_2 \left(\frac{2m}{1-m} \right) + \log_2 \left(\frac{2n}{1-n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2m}{1-m} \cdot \frac{2n}{1-n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{4mn}{1-m-n+mn} \right), \text{ vì } m+n=1 \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{4mn}{mn} \right) = \frac{1}{2} \log_2 4 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

Câu 10: Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

- A.** $P = 32$. **B.** $P = 23$. **C.** $P = 43$. **D.** $P = 41$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} &= \frac{190}{\log_3 x} \\ \Leftrightarrow \log_x 3 + 2 \log_x 3 + 3 \log_x 3 + \dots + n \log_x 3 &= 190 \log_x 3 \\ \Leftrightarrow \log_x 3 (1 + 2 + 3 + \dots + n) &= 190 \log_x 3 \\ \Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 190 \\ \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} &= 190 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 380 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n = 19 \\ n = -20 \end{cases} \Rightarrow n = 19 \text{ (do } n \text{ nguyên dương)} &\Rightarrow P = 2n + 3 = 41 \end{aligned}$$

Câu 11: Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p = \frac{9x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{3z}{x}$ là

- A.** 13. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\log_{2^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{3^{2018}} x} + \dots + \frac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{2018^{2018}} x} \\
 &= \log_x 2^{2018} + \log_x 3^{2018} + \dots + \log_x 2017^{2018} + \log_x 2018^{2018} \\
 &= 2018 \cdot \log_x 2 + 2018 \cdot \log_x 3 + \dots + 2018 \cdot \log_x 2017 + 2018 \cdot \log_x 2018 \\
 &= 2018 \cdot (\log_x 2 + \log_x 3 + \dots + \log_x 2017 + \log_x 2018) = 2018 \cdot \log_x (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017 \cdot 2018)
 \end{aligned}$$

- Câu 15:** Tìm bộ ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn $\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+5+\dots+19) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3$
- A.** (2; 6; 4). **B.** (1; 3; 2). **C.** (2; 4; 4). **D.** (2; 4; 3).

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 &\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+5+\dots+19) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3 \\
 \Leftrightarrow &\log 1 + \log 2^2 + \log 3^2 + \dots + \log 10^2 - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3 \\
 \Leftrightarrow &\log(1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10^2) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3 \\
 \Leftrightarrow &\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10)^2 - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3 \\
 \Leftrightarrow &2 \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3 \\
 \Leftrightarrow &2(\log 10! - \log 7!) = a + b \log 2 + c \log 3 \Leftrightarrow 2 \log(8 \cdot 9 \cdot 10) = a + b \log 2 + c \log 3 \\
 \Leftrightarrow &2 + 6 \log 2 + 4 \log 3 = a + b \log 2 + c \log 3.
 \end{aligned}$$

Vậy $a = 2, b = 6, c = 4$.

- Câu 16:** Tổng $S = 1 + 2^2 \log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \dots + 2018^2 \log_{\sqrt[2018]{2}} 2$ dưới đây.

- A.** $1008^2 \cdot 2018^2$. **B.** $1009^2 \cdot 2019^2$. **C.** $1009^2 \cdot 2018^2$. **D.** 2019^2 .

Lời giải

Ta có $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + 2^2 \log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \dots + 2018^2 \log_{\sqrt[2018]{2}} 2 \\
 &= 1 + 2^2 \log_{\frac{1}{2^2}} 2 + 3^2 \log_{\frac{1}{2^3}} 2 + \dots + 2018^2 \log_{\frac{1}{2^{2018}}} 2 = 1 + 2^3 \log_2 2 + 3^3 \log_2 2 + \dots + 2018^3 \log_2 2 \\
 &= 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2018^3 = \left[\frac{2018(2018+1)}{2} \right]^2 = 1009^2 \cdot 2019^2.
 \end{aligned}$$

- Câu 17:** Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số?

- A.** 147278481. **B.** 147278480. **C.** 147347190. **D.** 147347191.

Lời giải

Số chữ số của một số tự nhiên x là: $[\log x] + 1$ ($[\log x]$ là phần nguyên của $\log x$).

Vậy số chữ số của số $20172018^{20162017}$ là

$$\left[\log 20172018^{20162017} \right] + 1 = 20162017 \log(20172018) + 1 = 147278481.$$

Câu 18: Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a.b$.

A. $P = 10$.

B. $P = -45$.

C. $P = -10$.

D. $P = 45$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$9^x + 9^{-x} = 14 \Leftrightarrow 3^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-2x} + 3^{-2x} = 16$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 16 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 4.$$

$$\begin{aligned} \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} &= \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3 \cdot 3^x-3 \cdot 3^{-x}} = \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3 \cdot (3^x+3^{-x})} \\ &= \frac{6+3 \cdot 4}{2-3 \cdot 4} = -\frac{18}{10} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{9}{5} \Rightarrow ab = -45. \end{aligned}$$

Câu 19: Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a+b = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} (L)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4^t}{6^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 20: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x+2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

A. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

B. $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

C. $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

D. $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giả sử } \log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x+2y) = t. \text{ Ta có: } \begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x+2y = 4^t & (3) \end{cases}$$

Khi đó $\frac{x}{y} = \frac{6^t}{9^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t > 0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t + 2.9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \text{ (thỏa)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Câu 21: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a + b$.

A. $a + b = 14$.

B. $a + b = 3$.

C. $a + b = 21$.

D. $a + b = 34$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = 15^{\log_{25} \frac{x}{2}} \\ \log_9 \frac{x + 15^{\log_{25} \frac{x}{2}}}{4} = \log_{25} \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = \log_{25} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2.25^t, \text{ ta được } 2.25^t + 15^t = 4.9^t \Leftrightarrow 2\left(\frac{5}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{5}{3}\right)^t = 4$$

$$\Rightarrow t = \log_{\frac{5}{3}} \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2.25^t}{15^t} = 2.\left(\frac{5}{3}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}.$$

Do đó $a = 1, b = 33$ nên $a + b = 34$.

① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)

• $\forall a, b \geq 0$, thì $\boxed{a + b \geq 2\sqrt{ab}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $a = b$.

• $\forall a, b, c \geq 0$, thì $\boxed{a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpki)

• $\forall a, b, x, y$, thì: $\boxed{(a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$. Dấu "=" khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

• $\forall a, b, c, x, y, z$ thì: $\boxed{(a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Hệ quả. Nếu a, b, c là các số thực và x, y, z là các số dương thì:

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}} \quad \text{và} \quad \boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}} : \text{bất đẳng thức cộng mẫu số.}$$

Câu 22: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $t > 0$.

Ta có: $a^x = \sqrt{ab} \Rightarrow x = \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2}(1 + t)$.

$b^y = \sqrt{ab} \Rightarrow y = \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_b a) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$.

Vậy $P = x + 2y = \frac{1}{2}(1 + t) + 1 + \frac{1}{t} = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t}{2} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{2}}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ bằng $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ thuộc nửa khoảng $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 23: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $t = \log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases} (1).$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$9^t = (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 4^t \Rightarrow \frac{9^t}{4^t} \leq 2 \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$

Như vậy,

$x^2 + y^2 = 4^t \Rightarrow x^2 \leq 4^t \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 1,89 \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$

➤ Trường hợp 1: $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

➤ Trường hợp 2: $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

➤ Trường hợp 3: $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 + 1 = 4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y = 3^t + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5$ mâu thuẫn với

$x^2 + y^2 \leq 4^{\frac{\log_3 \sqrt{2}}{2}}$ suy ra loại $x = -1$.

Vậy có hai giá trị $x \in \{0; 1\}$

Cách 2:

Đặt $t = \log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases} (1)$.

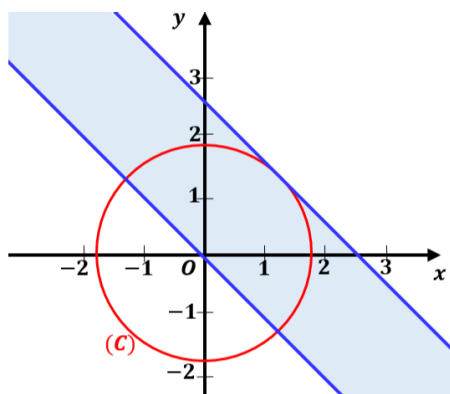
Suy ra x, y là tọa độ của điểm M với M thuộc đường thẳng $d: x + y = 3^t$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4^t$.

Để tồn tại y tức tồn tại M nên $d, (C)$ có điểm chung, suy ra $d(O, d) \leq R$ trong đó

$O(0; 0), R = 2^t$ nên $\frac{|-3^t|}{\sqrt{2}} \leq 2^t \Leftrightarrow t \leq \log_3 \sqrt{2}$.

Khi đó (1) $\Rightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 3^{\frac{\log_3 \sqrt{2}}{2}} \\ x^2 + y^2 \leq 4^{\frac{\log_3 \sqrt{2}}{2}} \end{cases}$.

Minh họa quỹ tích điểm M như hình vẽ sau



Ta thấy có 3 giá trị $x \in \mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x = -1; x = 0; x = 1$.

Thử lại:

➤ Trường hợp 1: $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

➤ Trường hợp 2: $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

➤ Trường hợp 3: $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 + 1 = 4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y = 3^t + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5$ mâu thuẫn với

$$x^2 + y^2 \leq 4^{\frac{\log_3 \sqrt{2}}{2}} \text{ suy ra loại } x = -1.$$

Câu 24: (Mã 103 2018) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$.

Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 6 B. $\frac{27}{4}$ C. $\frac{20}{3}$ D. 9

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) > 0$ và $\log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) > 0$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$\begin{aligned} \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) &\geq 2\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \\ &= 2\log_{8ab+1}(16a^2 + b^2 + 1). \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 16a^2 + b^2 + 1 = (4a - b)^2 + 8ab + 1 \geq 8ab + 1 (\forall a, b > 0),$$

$$\text{suy ra } 2\log_{8ab+1}(16a^2 + b^2 + 1) \geq 2.$$

$$\text{Khi đó } \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) = \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \\ b = 4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{24a+1}(32a^2 + 1) = 1 \\ b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32a^2 = 24a \\ b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a + 2b = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}.$$

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

- A. $\frac{33}{4}$. B. $\frac{65}{8}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Nhận xét: Giá trị của x, y thỏa mãn phương trình $2x + y \cdot 4^{x+y-1} = 3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Đặt $a = x + y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1} + \frac{2}{y} \cdot a - 2 - \frac{3}{y} = 0.$$

Nhận thấy $y = 4^{a-1} + \frac{2}{y} \cdot a - 2 - \frac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến a , nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $a = \frac{3}{2} \Rightarrow x + y = \frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P = (x+y)^2 + 4(x+y) + 2\left(y - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min} = \frac{65}{8}$.

Cách 2:

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow x + y \cdot 4^{x+y-\frac{3}{2}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y \cdot \left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu $x + y - \frac{3}{2} < 0$ thì $\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + y \cdot \left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) < 0 + y \cdot (4^0 - 1) = 0$ (vô lí)

Vậy $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+3)^2 + (y+2)^2 - 13$$

$$\geq \frac{1}{2}(x+y+5)^2 - 13 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x + 3 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy $\min P = \frac{65}{8}$.

Câu 26: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4y}{2x+y+1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

A. -2.

B. -3.

C. -5.

D. -4.

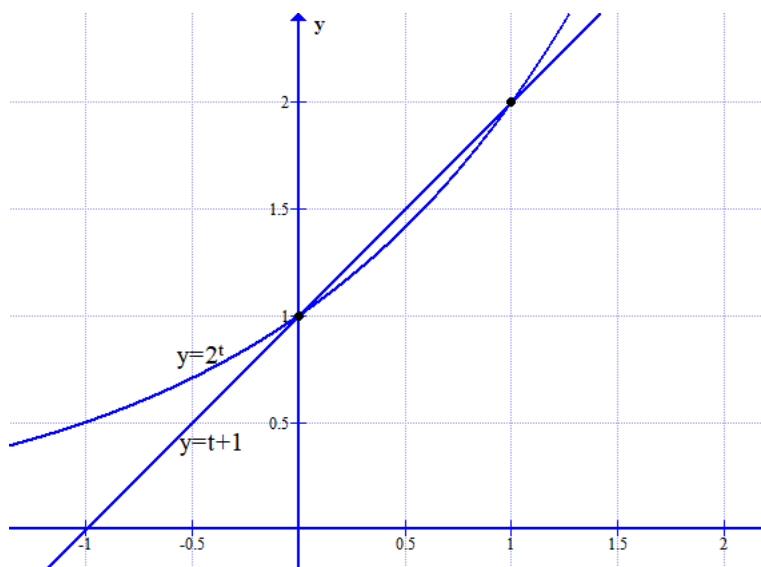
Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x} \leq x^2 + y^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2} \leq (x-1)^2 + y^2 + 1. \text{ Đặt } t = (x-1)^2 + y^2 (t \geq 0), \text{ ta được BPT: } 2^t \leq t+1.$$

Đồ thị hàm số $y = 2^t$ và đồ thị hàm số $y = t+1$ như sau:



Từ đồ thị suy ra $2^t \leq t+1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Do đó tập hợp các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn (C) tâm $I(1;0), R=1$.

Ta có $P = \frac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px + (P-4)y + P = 0$ là phương trình của đường thẳng d .

Do d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, (d)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|3P|}{\sqrt{4P^2 + (P-4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 4P^2 + 8P - 16 \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{5} \leq P \leq -1 + \sqrt{5}$, suy ra giá trị nhỏ nhất của P gần nhất với -3 .

Câu 27: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2} (2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x+3y$ là

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$. C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$. D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Điều kiện $4x^2+9y^2 \neq 1$.

Trường hợp 1: $4x^2+9y^2 < 1$.

Ta có $(2x)^2 + (3y)^2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ 3y < 1 \end{cases} \Rightarrow x+3y < \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow P < \frac{3}{2}$. (1)

Trường hợp 2: $4x^2+9y^2 > 1$.

Khi đó $\log_{4x^2+9y^2} (2x+3y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+3y \geq 4x^2+9y^2 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$.

$P = x+3y = \frac{1}{2} \left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta được:

$$\left[\frac{1}{2} \left(2x - \frac{1}{2} \right) + \left(3y - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \leq \left(\frac{1}{4} + 1 \right) \left[\left(2x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(3y - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{5}{8}.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{1}{2} \right) + \left(3y - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \leq \frac{3 + \sqrt{10}}{4}. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2 \left(2x - \frac{1}{2} \right) = 3y - \frac{1}{2} \\ x + 3y = \frac{3 + \sqrt{10}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x + 12y = 3 + \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{10}}{20} \\ y = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{30} \end{cases}.$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{3 + \sqrt{10}}{4}$.

Câu 28: (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho các số thực a, b thay đổi, thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi

biểu thức $P = \log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A. $3 + 9^{\sqrt{2}}$

B. $9 + 2^{\sqrt{3}}$

C. $2 + 9\sqrt{2}$

D. $3 + 3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Do $a^4 - 9a^2 + 81 \geq 9a^2 \Leftrightarrow (a^2 - 9)^2 \geq 0$ đúng $\forall a > \frac{1}{3}$; Dấu bằng xảy ra khi $a = 3$

$$\text{Suy ra } P \geq \log_{3a} b + \log_b (3a)^2 = \log_{3a} b + 2 \log_b 3a \geq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = 3 \\ \log_{3a} b = 2 \log_b 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy, khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $a + b = 3 + 9^{\sqrt{2}}$.

Câu 29: Xét các số thực dương a, b, c lớn hơn 1 (với $a > b$) thỏa mãn $4(\log_a c + \log_b c) = 25 \log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a + \log_a c + \log_c b$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. $\frac{17}{4}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_c a = x, \log_c b = y$.

Vì $a, b, c > 1$ và $a > b$ nên suy ra $\log_c a > \log_c b$ hay $x > y > 0$.

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } 4 \left(\frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} \right) = 25 \cdot \frac{1}{\log_c ab} \Leftrightarrow \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{25}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 4y \text{ (vì } x > y \text{)}.$$

Ta có: $\log_b a + \log_a c + \log_c b = \frac{\log_c a}{\log_c b} + \frac{1}{\log_c a} + \log_c b = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$

$$= \frac{x}{y} + \frac{1}{4y} + y \geq 4 + 2\sqrt{\frac{1}{4y}} \cdot y = 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = \frac{1}{2}$ và $x = 2$, tức là $a = c^2; c = b^2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng 5.

Cách khác

Từ giả thiết suy ra: $4(\log_a b \cdot \log_b c + \log_b c) = 25 \cdot \log_{ab} b \cdot \log_b c$

$$\Leftrightarrow 4\log_b c(\log_a b + 1) = 25 \frac{\log_b c}{\log_b ab} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b c = 0 \\ 4(\log_a b + 1) = \frac{25}{\log_b a + 1} \end{cases}$$

Do $a, b, c > 1$ nên $\log_b c > 0$; suy ra $4(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) = 25 \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{4}$.

Khi đó: $\log_b a + \log_a c + \log_c b \geq 4 + 2\sqrt{\log_a c \cdot \log_c b} = 4 + 2\sqrt{\log_a b} = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 5 đạt được khi và chỉ khi $a = b^4, a = c^2, c = b^2$.

Câu 30: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4xy + 2x - y$ có dạng $m + n\sqrt{165}$ (với m, n là các số tự nhiên), tính $S = m + n$.

A. 58.

B. 54.

C. 56.

D. 60

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có: $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x} = a^6 b^6 \\ b^{3y} = a^6 b^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \log_a (a^6 b^6) \\ 3y = \log_b (a^6 b^6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 + 6\log_a b \\ 3y = 6 + 6\log_b a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(1 + \log_a b) \\ y = 2(1 + \log_b a) \end{cases}$$

Vì $a, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$.

Do đó:

$$P = 4xy + 2x - y = 24(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) + 6 + 6\log_a b - 2 - 2\log_b a$$

$$= 52 + 30 \log_a b + 22 \log_b a \geq 52 + 2\sqrt{30 \log_a b \cdot 22 \log_b a} = 52 + 4\sqrt{165}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $m+n\sqrt{165}$ khi $30 \log_a b = 22 \log_b a \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{\frac{11}{15}} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{\frac{11}{15}}}$

Ta có: $\begin{cases} m = 52 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow m + n = 56.$

Câu 31: Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

A. $T = 9$. **B.** $T = \frac{7}{3}$. **C.** $T = \frac{5}{3}$. **D.** $T = 7$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

Khi đó: $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 2 \Leftrightarrow y-1 = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x-1} + 1$

Suy ra: $P = 2x + 3y = 2x + \frac{6}{x-1} + 3 = 2(x-1) + \frac{6}{x-1} + 5$

Cách 1: Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x-1) + \frac{6}{x-1} \geq 2\sqrt{2(x-1) \cdot \frac{6}{x-1}}$

$$\Rightarrow 2(x-1) + \frac{6}{x-1} \geq 4\sqrt{3} \Rightarrow P \geq 4\sqrt{3} + 5$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 2(x-1) = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \text{ (N)} \\ x = 1 - \sqrt{3} \text{ (L)} \end{cases}$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}.$$

Do đó: $3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = 1; b = \frac{5}{3} \Rightarrow T = ab = \frac{5}{3}.$

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P = 2x + \frac{6}{x-1} + 3 \Rightarrow P' = 2 - \frac{6}{(x-1)^2}$

$$P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \text{ (N)} \\ x = 1 - \sqrt{3} \text{ (L)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
P'	–	0	+
P	$+\infty$	$4\sqrt{3} + 5$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P_{\min} = 4\sqrt{3} + 5 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

Do đó: $3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = 1; b = \frac{5}{3} \Rightarrow T = ab = \frac{5}{3}$.

Câu 32: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. $\frac{27}{4}$.

B. 6.

C. $\frac{20}{3}$.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a > 0, b > 0$

$$\text{Nên } \begin{cases} 4a + 5b + 1 > 1 \\ 8ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) > 0 \end{cases}$$

$$P = \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 2\sqrt{\log_{8ab+1}(16a^2 + b^2 + 1)}$$

Mặt khác:

$$16a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{16a^2b^2} + 1 = 8ab + 1 \Leftrightarrow P \geq 2\sqrt{\log_{8ab+1}(8ab + 1)} = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} 16a^2 = b^2 \\ 8ab + 1 = 4a + 5b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = b \\ 2b^2 + 1 = 6b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } a + 2b = \frac{27}{4}.$$

Câu 33: Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3\log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$
 bằng

A. 2020.

B. 16160.

C. 20200.

D. 13130.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}} = \frac{4040}{2 \log_{bc} a} + \frac{1010}{\frac{1}{2} \log_{ac} b} + \frac{8080}{3 \cdot \frac{1}{3} \log_{ab} c} \\ &= 2020 \log_a bc + 2020 \log_b ac + 8080 \log_c ab \\ &= 2020 (\log_a b + \log_a c) + 2020 (\log_b a + \log_b c) + 8080 (\log_c a + \log_c b) \\ &= 2020 \log_a b + 2020 \log_b a + 2020 \log_a c + 8080 \log_c a + 2020 \log_b c + 8080 \log_c b \end{aligned}$$

Vì $a, b, c > 1$ nên các số $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0$

Khi đó ta có

$$2020 \log_a b + 2020 \log_b a \geq 2 \sqrt{2020^2 \log_a b \log_b a} = 4040$$

$$2020 \log_a c + 8080 \log_c a \geq 2 \sqrt{4040^2 \log_a c \log_c a} = 8080$$

$$2020 \log_b c + 8080 \log_c b \geq 2 \sqrt{4040^2 \log_b c \log_c b} = 8080$$

$$\text{Suy ra } P \geq 4040 + 8080 + 8080 = 20200$$

Câu 34: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 3m - M$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi đẳng thức đề bài ta được

$$\begin{aligned} \log_a^2 b + \log_b^2 c &= \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3 \Leftrightarrow \log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a c - \log_a b - 2 \log_b c - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a b \cdot \log_b c - \log_a b - 2 \log_b c - 1 \end{aligned}$$

Đặt $u = \log_a b; v = \log_b c$ ta có phương trình

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= uv - u - 2v - 1 \\ \Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 + u^2 + 2u + 1 + v^2 + 4v + 4 &= 3 \\ \Leftrightarrow (u - v)^2 + (u + 1)^2 + (v + 2)^2 &= 3 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x - y)^2$ dấu bằng xảy ra khi $x = -y$, áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$(u+1)^2 + (v+2)^2 \geq \frac{1}{2}(u+1-v-2)^2 \Leftrightarrow (u+1)^2 + (v+2)^2 \geq \frac{1}{2}(u-v-1)^2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $3-(u-v)^2 \geq \frac{1}{2}(u-v-1)^2$ hay

$$3-P^2 \geq \frac{1}{2}(P-1)^2 \Leftrightarrow 3P^2-2P-5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$$

Vậy $m=-1, M=\frac{5}{3}$ suy ra $S=m-3M=-6$.

Câu 35: Cho các số thực $x, y \geq 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy \leq 4$. Biểu thức $P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0, y = y_0$. Đặt $T = x_0^4 + y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng

A. $T = 131$. **B.** $T = 132$. **C.** $T = 129$. **D.** $T = 130$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2} = \frac{\log_2 8x}{\log_2 4x} - \frac{\log_2 \frac{y^2}{2}}{\log_2 2y^2} = \frac{3 + \log_2 x}{2 + \log_2 x} - \frac{2 \log_2 y - 1}{2 \log_2 y + 1}.$$

$$\text{Đặt } \log_2 x = a, \log_2 y = b \ (a, b \geq 0), \text{ ta được } P = \frac{3+a}{2+a} - \frac{2b-1}{2b+1} = \frac{1}{2+a} + \frac{2}{2b+1}.$$

$$\text{Vì } xy \leq 4 \text{ suy ra } \log_2 x + \log_2 y \leq 2 \Leftrightarrow a + b \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2 - b$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{2+a} + \frac{2}{2b+1} \geq \frac{1}{4-b} + \frac{2}{2b+1}.$$

Xét hàm $f(b) = \frac{1}{4-b} + \frac{2}{2b+1}$ trên $[0; 2]$, ta có:

$$f'(b) = \frac{1}{(4-b)^2} - \frac{4}{(2b+1)^2}$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 - 4(4-b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Ta có: } f(0) = \frac{9}{4}, f(2) = \frac{9}{10}, f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Suy ra trên đoạn } [0; 2] \text{ ta có: } \min P = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{4} \\ \log_2 y = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2^{\frac{1}{4}} \\ y_0 = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = x_0^4 + y_0^4 = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4 + \left(2^{\frac{7}{4}}\right)^4 = 130.$$

$$\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2 \log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 2 = xy - 3 - x$$

Khi đó ta có $(P+y)^2 + y^2 + 2y - 2 = (P+y)y - 3 - (P+y)$

$$\Leftrightarrow y^2 + (P+3)y + P^2 + P + 1 = 0$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 2P + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3} \Rightarrow m = -1; M = \frac{5}{3} \Rightarrow S = 27$$

Nên giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{4} \\ \log_2 y = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2^{\frac{1}{4}} \\ y_0 = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow T = x_0^4 + y_0^4 = 130$

Câu 38: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 9. B. 6. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức Côsi với $a > 0, b > 0$ ta có:

$$16a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{16a^2 b^2} + 1 = 8ab + 1 \Rightarrow 16a^2 + b^2 + 1 \geq 8ab + 1 \quad (*)$$

Do $4a + 5b + 1 > 1$ nên từ (*) có:

$$\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)$$

$$\Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1)}$$

$$\text{Mặt khác } 4a + 5b + 1 > 1 \text{ và } 8ab + 1 > 1 \text{ nên: } \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1)} \geq 2.$$

$$\text{Suy ra } \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 16a^2 = b^2 \\ 4a + 5b + 1 = 8ab + 1 \\ a, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ 2b^2 - 6b = 0 \\ a, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a + 2b = \frac{27}{4}.$$

Câu 39: Xét các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = x - 2y$ thuộc tập nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} a^x = \sqrt{\frac{a}{b}} \\ b^y = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a \sqrt{\frac{a}{b}} \\ y = \log_b \sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - \log_a b) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_a b} - 1\right) \end{cases}$$

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a > 1, b > 1$, nên $t > 0$.

Khi đó:
$$P = \frac{1}{2}(1-t) - \left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{t}\right) \leq \frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t}{2} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \ (t > 0)$. $P_{\max} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \approx 0,086 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 40: Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng:

A. 11.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_{n+1} = 7u_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu là u_1 , công bội $q = 7$.

$$\begin{aligned} \log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) &= [\log_2 5 + \log_2 u_1]^2 + [\log_2 7 + \log_2 u_1]^2 \\ &= \log_2^2 5 + 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 u_1 + \log_2^2 7 + 2 \cdot \log_2 7 \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 u_1 \\ &= 2 \log_2^2 u_1 + 2 \cdot (\log_2 5 + \log_2 7) \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ &= 2 \log_2^2 u_1 + 2 \cdot \log_2 35 \cdot \log_2 u_1 + \log_2^2 5 + \log_2^2 7 = \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ &\Leftrightarrow 2 \log_2^2 u_1 + 2 \cdot \log_2 35 \cdot \log_2 u_1 = 0 \Leftrightarrow 2 \log_2 u_1 \cdot (\log_2 u_1 + \log_2 35) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 0 \\ \log_2 u_1 + \log_2 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \text{ (loại)} \\ \log_2 u_1 = -\log_2 35 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{35} \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} = \frac{1}{5} \cdot 7^{n-1} = \frac{1}{5} \cdot 7^{n-2}$.

$$u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 7^{n-2} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-2} > 5555555 \Leftrightarrow n-2 > \log_7 5555555$$

$$\Leftrightarrow n > \log_7 5555555 + 2. \text{ Vì } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên giá trị nhỏ nhất của } n \text{ bằng } 10.$$

Câu 41: Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$.

A. $T = 9$.

B. $T = \frac{7}{3}$.

C. $T = \frac{5}{3}$.

D. $T = 7$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 1 \\ y-1 = \frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y = 1 + \frac{2}{x-1} \end{cases}.$$

Khi đó $P = 2x + 3y = 2x + 3\left(\frac{2}{x-1} + 1\right) = 2(x-1) + \frac{6}{x-1} + 5 \geq 2\sqrt{12} + 5$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2(x-1) = \frac{6}{x-1} \\ y = 1 + \frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{3} \\ y = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $a = 1, b = \frac{5}{3}$ nên $T = \frac{5}{3}$.

Câu 42: Xét các số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1; 2)$.

B. $[-5; -1)$.

C. $[2; 4)$.

D. $[4; 6)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } 3^a = 5^b = 15^{-c} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \log_3 t \\ b = \log_5 t \\ c = -\log_{15} t \end{cases} \text{ . Khi đó}$$

$$P = \log_3^2 t + \log_5^2 t + \log_{15}^2 t - 4(\log_3 t + \log_5 t - \log_{15} t)$$

$$= \log_3^2 t (1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3) - 4 \log_3 t (1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)$$

$$= X^2 (1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3) - 4X (1 + \log_5 3 - \log_{15} 3), \text{ (với } X = \log_3 t \text{)}$$

$$P_{\min} = P \left(\frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3} \right) = -4,$$

$$\text{khi } \log_3 t = \frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3} \Rightarrow t = 3^{\frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}}$$

Suy ra

$$a = \frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}$$

$$b = \log_5 3^{\frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}}$$

$$c = -\log_{15} 3^{\frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}}.$$

Câu 43: Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10; 13)$.

B. $[7; 10)$.

C. $[3; 5)$.

D. $[5; 7)$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có

$$x = \frac{1}{2}(1 + \log_a b + \log_a c), y = \frac{1}{2}(1 + \log_b a + \log_b c), z = \frac{1}{2}(1 + \log_c b + \log_c a). \text{ Khi đó ta có}$$

$$2P = 4 + \log_a b + \log_b a + \log_a c + \log_c a + \log_b c + \log_c b.$$

Vì $a > 1, b > 1, c > 1$ nên $\log_a b > 0, \log_b c > 0, \log_c a > 0, \log_b a > 0, \log_c b > 0, \log_a c > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta được

$$\log_a b + \log_b a \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} \text{ hay } \log_a b + \log_b a \geq 2.$$

Tương tự $\log_a c + \log_c a \geq 2$ và $\log_b c + \log_c b \geq 2$.

Do đó $2P \geq 10$ hay $P \geq 5$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min} = 5$.

Câu 44: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = \sqrt{a \cdot b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x \cdot y$ là

A. $P = \frac{9}{4}$.

B. $P = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $P = \frac{3}{2}$.

D. $P = \frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$a^{x^2} = b^{y^2} = \sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \log_a b + \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \log_b a + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) (xy)^2 = \left(\frac{1}{2} \log_a b + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \log_b a + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\log_a b + \log_b a) + \frac{1}{4} \right)$$

$$\geq \frac{3}{2} \quad (a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0, \log_b a > 0).$$

Vì $x > 0, y > 0 \Rightarrow xy \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Câu 45: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{\frac{x^2}{y}} = b^{\frac{y^2}{x}} = ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x \cdot y$ là

A. $P = 2$.

B. $P = 4$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$a^{\frac{x^2}{y}} = b^{\frac{y^2}{x}} = ab \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = 1 + \log_a b \\ \frac{y^2}{x} = 1 + \log_b a \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } xy = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x} = (1 + \log_a b)(1 + \log_b a)$$

$$= 1 + 1 + \log_a b + \log_b a$$

$$\geq 4 \quad (a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0, \log_b a > 0).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Câu 46: Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1, y > 2$ và $a^{x+1} = b^{y-2} = c^{z+1} = abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ là

A. $P = 13$.

B. $P = 3$.

C. $P = 9$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$a^{x+1} = b^{y-2} = c^{z+1} = abc \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 + \log_a b + \log_a c \\ y-2 = 1 + \log_b a + \log_b c \\ z+1 = 1 + \log_c b + \log_c a \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x+1+y-2+z-1 = 3 + \log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c b + \log_c a$$

$$\Leftrightarrow x+y+z \geq 3+6$$

$$\Leftrightarrow P \geq 9 \quad (a, b, c > 1 \Rightarrow \log_a b > 0, \log_a c > 0, \log_b a > 0, \log_b c > 0, \log_c a > 0, \log_c b > 0).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ (HÀM ĐẶC TRƯNG) GIẢI CÁC BÀI TOÁN LOGARIT

1. Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên $(a; b)$ thì

$$* \quad \forall u, v \in (a; b): f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

* Phương trình $f(x) = k$ ($k = \text{const}$) có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

2. Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $(a; b)$, đồng thời

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0 \text{ thì phương trình } f(x) = k (k = \text{const}) \text{ có duy nhất nghiệm trên } (a; b).$$

3. Tính chất của logarit:

1.1. So sánh hai logarit cũng cơ số: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c. ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.	1.2. Hệ quả: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c. ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$. ◦ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	3. Logarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ (n nguyên dương).	5. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$ Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

Câu 47: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4 (x^2 + y) \geq \log_3 (x + y)$?

A. 55.

B. 28.

C. 29.

D. 56.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}.$$

Đặt $\log_3 (x + y) = t$, ta có
$$\begin{cases} x^2 + y \geq 4^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq 4^t - 3^t \\ y = 3^t - x \end{cases} (*)$$

Nhận xét rằng hàm số $f(t) = 4^t - 3^t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $f(t) > 0$ với mọi $t > 0$

Gọi $n \in \mathbb{Z}$ thỏa $4^n - 3^n = x^2 - x$, khi đó $(*) \Leftrightarrow \boxed{t \leq n}$

Từ đó, ta có $-x < y = 3^t - x \leq 3^n - x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn đề bài nên $3^n \leq 242 \Leftrightarrow n \leq \log_3 242$.

Từ đó, suy ra $\boxed{x^2 - x \leq 4^{\log_3 242} - 242} \Leftrightarrow \boxed{-27,4 \leq x \leq 28,4}$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-27, -26, \dots, 27, 28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 48: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 59.

B. 58.

C. 116.

D. 115.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y)$.

Tập xác định $D = (-x; +\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$).

$$f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 3} - \frac{1}{(x^2+y)\ln 4} \geq 0, \forall x \in D \text{ (do } x^2 + y \geq x + y > 0, \ln 4 > \ln 3)$$

$\Rightarrow f$ tăng trên D .

Ta có $f(-x+1) = \log_3(x-x+1) - \log_4(x^2-x+1) \leq 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(-x+729) > 0 \Leftrightarrow \log_3 729 - \log_4(x^2 - x + 729) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 729 - 4^6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0$$

$$\Leftrightarrow -57,5 \leq x \leq 58,5$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-57, -56, \dots, 58\}$.

Vậy có $58 - (-57) + 1 = 116$ số nguyên x thỏa.

Câu 49: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 89.

B. 46.

C. 45.

D. 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)(1)$

Đặt $t = x + y \in \mathbb{N}^*$ (do $x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$)

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + t) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t) = \log_2 t - \log_3(x^2 - x + t) \leq 0(2)$$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - \frac{1}{(x^2 - x + t) \ln 3} > 0$ với mọi y . Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3 (x^2 - x + 128) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8$$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 50: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

A. $\frac{65}{8}$.

B. $\frac{33}{4}$.

C. $\frac{49}{8}$.

D. $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow \boxed{2y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{3-2x}} \quad (*)$

Hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ $(*)$ ta suy ra $2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow \boxed{2x + 2y - 3 \geq 0} \quad (1)$

Ta thấy (1) bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: 2x + 2y - 3 = 0$ (phần không chứa gốc tọa độ O), kể cả các điểm thuộc đường thẳng d .

Xét biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y \Leftrightarrow \boxed{(x+3)^2 + (y+2)^2 = P+13} \quad (2)$

Để P tồn tại thì ta phải có $P+13 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P = -13$ thì $x = -3$; $y = -2$ không thỏa (1). Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

Trường hợp 2: Với $P > -13$, ta thấy (2) là đường tròn (C) có tâm $I(-3; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{P+13}$.

Để d và (C) có điểm chung thì $d(I; d) \leq R \Leftrightarrow \frac{13}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{P+13} \Leftrightarrow \boxed{P \geq \frac{65}{8}}$.

Vậy $\boxed{\min P = \frac{65}{8}}$

Câu 51: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y} \quad (1)$

Đặt $\log_3(x+1) = t \Rightarrow x+1 = 3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t + 3^t = 2y + 3^{2y} \quad (2)$

Xét hàm số $f(u) = u + 3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u) = 1 + 3^u \ln 3 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Rightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 9^y \Leftrightarrow x = 9^y - 1$

Vì $0 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 9^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021$

$(\log_3 2021 \approx 3,464)$

Do $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Cách 2:

Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y}$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(x+1) + x + 1$ với $x \in [0; 2020]$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + 1 > 0, \forall x \in [0; 2020] \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 2020]$.

Suy ra $f(0) \leq f(x) = \log_3(x+1) + x + 1 \leq f(2020) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \log_3 2021 + 2021$

$\Rightarrow 1 \leq 2y + 9^y \leq \log_3 2021 + 2021 < 2028$

Nếu $y < 0 \Rightarrow 2y + 9^y < 9^y < 9^0 = 1 \Rightarrow y \geq 0$

Khi đó $y \in \mathbb{N} \Rightarrow (2y + 9^y) \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y + 9^y \leq 2027 \Rightarrow 9^y \leq 2027 - 2y \leq 2027$

$\Rightarrow y \leq \log_9 2027 \approx 3,465 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y \leq 3$

$\Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x .

+) $y = 0 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$$+) y = 1 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 11 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 10 \Leftrightarrow x = 8$$

$$+) y = 2 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 85 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 84 \Leftrightarrow x = 80$$

$$+) y = 3 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 735 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 734 \Leftrightarrow x = 729$$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 52: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3) \cdot 4^{-x} + y \cdot 4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x} \quad (1)$$

$$\text{Xét TH: } 3-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}. \quad (1) \text{ đúng với mọi giá trị } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq \frac{21}{4} \quad (2)$$

$$\text{Xét TH: } 3-2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \geq 0$

$$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0 \text{ với mọi } t \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \geq 3-2x \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x. \text{ Khi đó:}$$

$$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 2x + 2(3-2x) = 2x^2 - 5x + \frac{33}{4} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8} \quad (3)$$

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Câu 53: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 80.

B. 79.

C. 157.

D. 158

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 3^{\log_2(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \geq (x + y)^{\log_2 3} \quad (1)$$

Đk: $x + y \geq 1$ (do $x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$)

$$\text{Đặt } t = x + y \geq 1, \text{ nên từ (1)} \Rightarrow x^2 - x \geq t^{\log_2 3} - t \quad (2)$$

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t .

Đặt $M = f(255)$ với $f(t) = t^{\log_2 3} - t$.

Vì f là hàm đồng biến trên $[1, +\infty)$ nên $(2) \Leftrightarrow 1 \leq t \leq f^{-1}(x^2 - x)$ khi $x^2 - x \geq 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}(x^2 - x) \leq 255 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 255$

$\Leftrightarrow -78 \leq x \leq 79 \ (x \in \mathbb{Z})$.

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 54: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3) \cdot 4^{-x} + y \cdot 4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x} \quad (1)$

Xét TH $3-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \geq \frac{33}{4} \quad (2)$

Xét TH $3-2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \geq 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$

$(1) \Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x)$

$\Leftrightarrow 2y \geq 3-2x$

$\Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x$

$\Rightarrow P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \geq x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 4x + (3-2x) = 2x^2 - x + \frac{21}{4}$

$\Rightarrow P = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8} \quad (3)$

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$

Câu 55: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m+n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m - n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 16.

B. 14.

C. 15.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(a) = 2a^m - n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$, ta có $f'(a) = 2ma^{m-1} - \frac{n}{\sqrt{a^2 + 1}}$.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2ma^{m-1} - \frac{n}{\sqrt{a^2+1}} = 0 \Leftrightarrow a^{m-1}\sqrt{a^2+1} = \frac{n}{2m} \text{ phải có một nghiệm } a_0 < 1.$$

Suy ra $\frac{n}{2m} < 2 \Rightarrow \frac{n}{m} < 4$ suy ra a_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có bảng biến thiên

a	0	a_0	1	
$f'(a)$		–	0	+
$f(a)$	0		$f(a_0)$	$f(1)$

Ta thấy 0 là một nghiệm của phương trình $f(a) = 0$.

Nếu $m = 1$ suy ra để có nghiệm duy nhất thì $\frac{n}{2m} > 1 \Rightarrow n > 2$ (loại)

Nếu m lẻ và $m \neq 1$ thì ta có a là một nghiệm thì $-a$ cũng là một nghiệm, do đó có đủ 3 nghiệm.

Nếu m chẵn thì phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm (vì không có nghiệm âm).

Suy ra m lẻ.

Để có 1 nghiệm dương thì theo BBT ta có

$$f(1) > 0 \Rightarrow 2 > n \ln(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2,2.$$

Suy ra $n \in \{1; 2\}$ suy ra $m \in \{3; 5; \dots; 15\}$.

Suy ra có 13 cặp (m, n) (do $15 + 2 = 17 > 16$).

Câu 56: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất

của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 9

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$$

$$2^{x^2+y^2-2x+1} \leq x^2 + y^2 - 2x + 2$$

$$2^{(x-1)^2+y^2} - [(x-1)^2 + y^2] - 1 \leq 0(1)$$

Đặt $t = (x-1)^2 + y^2$

$$(1) \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \Rightarrow (2P-8).x - P.y + (P-4) = 0$$

Yêu cầu bài toán tương đương:

$$\frac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \leq 1 \Leftrightarrow |3P-12| \leq \sqrt{(2P-8)^2+P^2} \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \leq P \leq 5+\sqrt{5}$$

Câu 57: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $m + n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp $(m; n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \Leftrightarrow \frac{2a^m}{n} = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$.

Xét hai hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ và $g(x) = \frac{2}{n}x^m$ trên $(-1; 1)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và

$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1	0	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$g(-1)$	0	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

+ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x = 0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay

$$f(1) > g(1) \Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{2}) < \frac{2}{n} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 2,26 \Rightarrow n \in \{1;2\}.$$

Đối chiếu điều kiện, với $n = 1$ suy ra $m \in \{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n = 2$ thì $m \in \{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

Câu 58: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2 + y^2 - 2x + 2 > 0 \forall x, y$

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình } 2^{x^2+y^2+1} &\leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \\ &\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

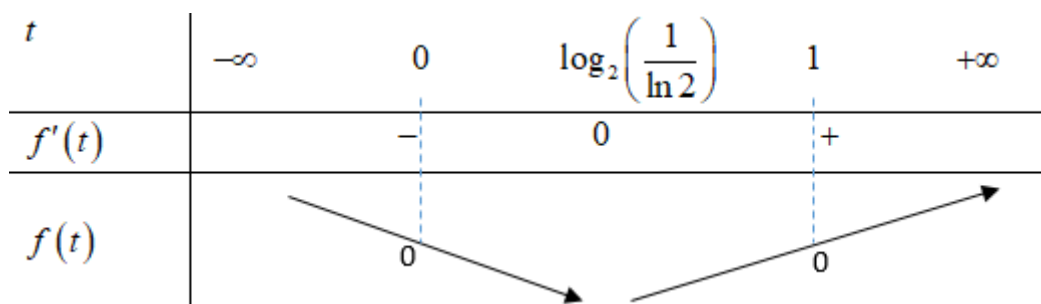
$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 - 2x + 1$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow 2^t \leq t + 1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \leq 0$$

$$\text{Đặt } f(t) = 2^t - t - 1. \text{ Ta thấy } f(0) = f(1) = 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2^t \ln 2 - 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2 = 1 \Leftrightarrow t = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) \approx 0,52$$



Quan sát BBT ta thấy $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Xét } P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow 2Px - Py + P = 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow P - 4 = (8 - 2P)x + Py$$

$$\Leftrightarrow P - 4 + 2P - 8 = (8 - 2P)x + 2P - 8 + Py$$

$$\Leftrightarrow 3P - 12 = (8 - 2P)(x - 1) + Py$$

$$\Leftrightarrow (3P - 12)^2 = [(8 - 2P)(x - 1) + Py]^2 \leq [(8 - 2P)^2 + P^2][(x - 1)^2 + y^2]$$

$$\text{Thế (1) vào ta có } (3P - 12)^2 \leq [(8 - 2P)^2 + P^2] \Leftrightarrow 4P^2 - 40P + 80 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \leq P \leq 5 + \sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{8-2P}{P} = \frac{x-1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y \\ \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y \\ y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{-\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5 - \sqrt{5} \approx 2,76$ gần giá trị 3 nhất.

Câu 59: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 14.

B. 12.

C. 11.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2}{n}x^m - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ trên } (-1; 1)$$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{2m}{n}x^{m-1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

$$\text{Theo đề bài } f(x) = 0 \text{ có ba nghiệm nên } \frac{2m}{n}x^{m-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ có ít nhất hai nghiệm}$$

$$\text{Xét đồ thị của hàm } y = x^{m-1}; y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ suy ra } m-1 \text{ chẵn và } m-1 > 0$$

$$\text{Suy ra } m \in \{3; 5; 7; 9; 11; 13\}. \text{ Khi đó } f'(x) = 0 \text{ có nghiệm } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có 3 nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n} > \ln(\sqrt{2}+1) \\ -\frac{2}{n} < \ln(\sqrt{2}-1) \end{cases} \Leftrightarrow n \leq 2 \Rightarrow n = \{1; 2\}$$

$n \in \{1; 2\}$ và $m \in \{3; 5; 7; 9; 11; 13\}$, do $m+n \leq 14$ nên ta có 11 cặp $(m; n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 60: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m+n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1, 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 12.

B. 10.

C. 11.

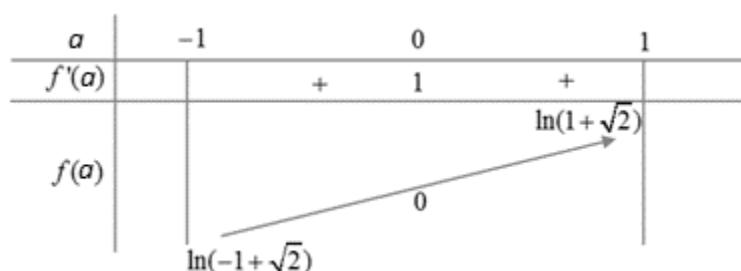
D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \Leftrightarrow \frac{2}{n} a^m = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \quad (*).$$

Xét hàm $f(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ trên $(-1, 1)$ (dễ thấy hàm f lẻ, đồng biến trên R), có BBT:



Xét hàm $g(a) = \frac{2}{n} a^m$ trên $(-1, 1)$.

Với m chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a) \geq 0, \forall a \in R$, do đó (*) không thể có 3 nghiệm.

Với m lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên R và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a = 0$ là đường thẳng $y = 0$.

Dễ thấy (*) có nghiệm $a = 0 \in (-1; 1)$. Để (*) có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0 < a_0 < 1$.

$$\text{Muốn vậy, thì } g(1) = \frac{2}{n} \cdot 1^m = \frac{2}{n} > f(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2,26 \Rightarrow n = 1; n = 2$$

Cụ thể:

+ $m \in \{3; 5; 7; 9\}$ thì $n \in \{1; 2\}$: Có 8 cặp (m, n)

+ $m = 11$ thì $n \in \{1\}$: Có 1 cặp (m, n)

+ $m = 1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a) = a; g(a) = 2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0 \neq 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a = 0$ là đường thẳng $y = a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp (m, n) .

Câu 61: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{4y}{2x + y + 1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2} \leq (x^2 - 2x + 1) + y^2 + 1$.

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow t \geq 0$. Khi đó ta có $2^t \leq t + 1, \forall t \geq 0$.

Đặt $f(t) = 2^t - t - 1, \forall t \geq 0$, ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 - 1$, cho $f'(t) = 0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t) = 0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0) = f(1) = 0$. Suy ra phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm $t = 1$ và $t = 0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0	1	$+\infty$	
f(t)	0	-	0	+

Khi đó $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [0; 1]$. Suy ra $x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x; y)$ là một hình tròn (S) tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 1$.

Ta có: $P = \frac{4y}{2x + y + 1} \Leftrightarrow 2Px + (P - 4)y + P = 0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x; y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px + (P - 4)y + P = 0$.

Để Δ và (S) có điểm chung, ta suy ra $d(I, \Delta) \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2P + P|}{\sqrt{(2P)^2 + (P - 4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3|P| \leq \sqrt{5P^2 - 8P + 16}$$

$$\Leftrightarrow 4P^2 + 8P - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{5} \leq P \leq -1 + \sqrt{5}.$$

Ta suy ra $P_{\max} = -1 + \sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

Câu 62: (Mã 123 2017) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1 - xy}{x + 2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$

$$\begin{array}{ll} \text{A. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3} & \text{B. } P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9} \\ \text{C. } P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21} & \text{D. } P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9} \end{array}$$

Lời giải

Chọn A

Với x, y dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$ ta được $1-xy > 0$

$$\text{Biến đổi } \log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (1-xy) - \log_3 (x+2y) = -3(1-xy) + (x+2y) - \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow [\log_3 (1-xy) + \log_3 3] + 3(1-xy) = \log_3 (x+2y) + (x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [3(1-xy)] + 3(1-xy) = \log_3 (x+2y) + (x+2y)(1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \in D \text{ nên hàm số } f(t) = \log_3 t + t \text{ đồng biến trên } D = (0; +\infty)$$

$$\text{Từ đó suy ra } (1) \Leftrightarrow 3(1-xy) = x+2y \Leftrightarrow 3-2y = x(1+3y) \Leftrightarrow x = \frac{3-2y}{1+3y} \text{ (do } y > 0)$$

Theo giả thiết ta có $x > 0, y > 0$ nên từ $x = \frac{3-2y}{1+3y}$ ta được $0 < y < \frac{3}{2}$.

$$P = x + y = \frac{3-2y}{1+3y} + y = \frac{3y^2 - y + 3}{3y + 1}$$

Xét hàm số $g(y) = \frac{3y^2 - y + 3}{3y + 1}$ với $0 < y < \frac{3}{2}$

$$g'(y) = \frac{9y^2 + 6y - 10}{(3y+1)^2} = 0 \text{ ta được } y = \frac{-1+\sqrt{11}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \min P = g\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}.$$

Câu 63: (Mã 110 2017) Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$

B. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$

C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$

D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $ab < 1$.

Ta có $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 [2(1-ab)] + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b) (*)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

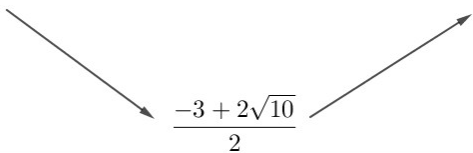
Do đó $(*) \Leftrightarrow f[2(1-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow a(2b+1) = 2-b \Leftrightarrow a = \frac{-b+2}{2b+1}$.

Do $a > 0, b > 0$ nên $\frac{-b+2}{2b+1} > 0 \Rightarrow 0 < b < 2$.

Khi đó: $P = a + 2b = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b$. Xét hàm số $g(b) = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$g'(b) = \frac{-5}{(2b+1)^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-2-\sqrt{10}}{4} \notin (0; 2) \\ b = \frac{-2+\sqrt{10}}{4} \in (0; 2) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

x	0	$\frac{-2+\sqrt{10}}{4}$	2
$g'(b)$	—	0	+
$g(b)$			

Vậy $P_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{10}-2}{4}\right) = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 64: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

A. $P_{\max} = 10$.

B. $P_{\max} = 0$.

C. $P_{\max} = 1$.

D. $P_{\max} = \ln 2$.

Lời giải

$$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow 2^{\ln(x+y) - \ln 2} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \cdot 2^{\ln 2} \Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 10}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+y) = \log(2^{\ln 10}) \Leftrightarrow \ln(x+y) = \ln 10 \cdot \log 2 \Leftrightarrow e^{\ln(x+y)} = e^{\ln 10 \cdot \log 2}$$

$$\Leftrightarrow x+y = 10^{\log 2} \Leftrightarrow x+y = 2.$$

Do đó $P = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x)$.

Xét hàm số $f(x) = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x)$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(2-x) - \frac{3-x}{2-x} = \ln \frac{x}{2-x} + \frac{2-2x}{x(2-x)}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x} - \frac{2x^2-4x+4}{(2x-x^2)^2} < 0, \forall x \in (0;2)$$

Do đó $f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;2)$

Mà $x=1$ là một nghiệm của pt $f'(x) = 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max f(x) = f(1) = 0$.

Câu 65: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \frac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

- A.** 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$$\log_3 \frac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 (x+y) - \log_3 (1-xy) + xy + x + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) + (x+y) = \log_3 (1-xy) + (1-xy) (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 t + t$ trên $(0;2)$

$$f'(t) = \frac{1}{t} \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in (0;2) \text{ nên hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0;2).$$

Do đó từ (*) ta có $x+y = 1-xy \Leftrightarrow y(1+x) = 1-x \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$

$$P = 2x + y = 2x + \frac{1-x}{1+x}$$

$$P'(x) = 2 - \frac{2}{(1+x)^2} \geq 0, \forall x \in [0;1]$$

Suy ra $\min P = P(0) = 1$ đạt được khi $x=0, y=1$.

Câu 66: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

- A.** $k \in [2; 3]$. **B.** $k \in (0; 1)$. **C.** $k \in [0; 1]$. **D.** $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $a \geq b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$.

$$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

Đặt $t = \sqrt{1 - \log_a b}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow \log_a b = 1 - t^2$. Ta có: $P = -t^2 + t + 2$ trên $[0; +\infty)$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
P		$\frac{9}{2}$	

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{1}{2}$.

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \log_a b} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \frac{3}{4}.$$

Câu 67: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1$. Tính $P = \frac{a}{b}$ khi biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $\frac{8}{5}$ **B.** $\frac{-13}{2}$ **C.** $\frac{-13}{4}$ **D.** $\frac{17}{44}$

Lời giải

Chọn B

$$\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1 \Leftrightarrow 2a - 8b = a^2 + 4b^2 + 1$$

Ta có:

$$\begin{cases} 2a - 8b = a^2 + 4b^2 + 1 \\ S = 4a + 6b - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 8b = a^2 + 4b^2 + 1 \\ a = \frac{S - 6b + 5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{S - 6b + 5}{4}\right) - 8b = \left(\frac{S - 6b + 5}{4}\right)^2 + 4b^2 + 1 \\ a = \frac{S - 6b + 5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8S - 48b + 40 - 128b = S^2 + 36b^2 + 25 - 12Sb + 10S - 60b + 64b^2 + 16 \\ a = \frac{S - 6b + 5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100b^2 + 2(58 - 6S)b + 2S + 1 + S^2 = 0 \\ a = \frac{S - 6b + 5}{4} \end{cases}$$

$$\Delta = (58 - 6S)^2 - 100 \cdot (1 + S)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -64S^2 - 896S + 3264 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -17 \leq S \leq 3$$

Giá trị lớn nhất của S là: $3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{5} \\ b = \frac{-2}{5} \end{cases}$

Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{13}{2}$

Câu 68: Cho a, b là các số dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right).$$

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{1 - \log_a b} + 4 \cdot (\log_b a - 1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_b a}} + 4 \cdot (\log_b a - 1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_b a. \text{ Vì } \sqrt{a} \leq b < a \Rightarrow \log_b(\sqrt{a}) \leq 1 \leq \log_b a \Leftrightarrow \frac{t}{2} < 1 < t \Leftrightarrow 1 < t < 2.$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{1 - \frac{1}{t}} + 4(t - 1) = \frac{t}{t - 1} + 4(t - 1) \text{ với } t \in (1; 2).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{t - 1} + 4(t - 1) \text{ với } t \in (1; 2).$$

$$f'(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + 4, f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2}(tm) \\ t = \frac{1}{2}(l) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'(t)			-	0	+	
f(t)			$+\infty$			
					6	
					5	

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min_{(1;2)} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 5.

Câu 69: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) = \log_5 (a+b) + a+3b-4$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) + (4a+2b+5) = \log_5 [5(a+b)] + 5(a+b) \quad (*).$$

Xét hàm $f(x) = \log_5 x + x, x > 0$.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{x \ln 5} + 1 > 0, \forall x > 0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$$f(4a+2b+5) = f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5 = 5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5.$$

$$\text{Mặt khác: } 5^2 = (a+3b)^2 \leq (1^2+3^2) \cdot (a^2+b^2) \Rightarrow T = a^2+b^2 \geq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}.$$

Câu 70: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải

Để $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Vậy ĐKXD: $x > 0; 0 < y < 1$.

Ta có: $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3}$
 $\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = \frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y) \cdot 3^{3-3y} = (3xy+x) \cdot 3^{3xy+x} (*)$

Xét $f(t) = t \cdot 3^t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t \cdot 3^t \cdot \ln 3 > 0$ với $\forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ $(*)$ ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y > 0, 3xy+x > 0$ nên $3-3y = 3xy+x \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P = x + y = x + \frac{3-x}{3(x+1)} = (x+1) + \left(\frac{3-x}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3}$

$P = (x+1) + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{4}{3} \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{3(x+1)}} - \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Vậy $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{4}{3(x+1)} \\ y = \frac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}$.

Câu 71: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P_{\min} = 9$ **B.** $P_{\min} = 8$ **C.** $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$ **D.** $P_{\min} = \frac{17}{2}$

Lời giải.

Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow xy \geq x + y^2$

$\Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{y^2}{y-1} \\ y > 1 \end{cases} \text{ (Vì } x, y > 0 \text{)}.$

Ta có: $P = x + 3y \geq \frac{y^2}{y-1} + 3y = 4y + 1 + \frac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 4y + 1 + \frac{1}{y-1}; y > 1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 4 - \frac{1}{(y-1)^2}$.

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} (n) \\ y = \frac{1}{2} (l) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên.

y	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$		0	+
$f(y)$	$+\infty$	9	$+\infty$

Câu 72: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $T_{\min} \in (7; 8)$

B. $T_{\min} \in (6; 7)$

C. $T_{\min} \in (5; 6)$

D. $T_{\min} \in (8; 9)$

Lời giải.

Ta có:

$$\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y) \Leftrightarrow \log_{2019} xy \geq \log_{2019} (x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{x-1} \\ x > 1 \end{cases}$$

Ta có: $T = 2x + y \geq 2x + \frac{x^2}{x-1} = 3x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

Xét hàm số: $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x-1}; x > 1$.

Đạo hàm: $f'(x) = 3 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} (do x > 1).$$

Bảng biến thiên.

x	1	$1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$4 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$

Do đó: $T_{\min} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 73: (Mã 105 2017) Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0 B. Vô số C. 1 D. 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow 9^{x+y} = m^4 \Rightarrow x+y = \log_9 m^4 = \log_3 m^2$

Đặt $x+y=t, t>0$. Vì $e^{x+y} \leq e(x+y) \Rightarrow e^t \leq et \Leftrightarrow t \leq 1 + \ln t \Leftrightarrow 1 + \ln t - t \geq 0, \forall t > 0$ (1)

Xét hàm $f(t) = \ln t + 1 - t$ với $t > 0$. $f'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} = 0 \Rightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'		+ 0 -	
y	$-\infty$	0	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) \leq f(1), \forall t > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t - t \leq 0, \forall t > 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $t = 1 \Rightarrow \log_3 m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

Câu 74: Cho $x; y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x \neq y$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2}$ bằng

A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. -2. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x \Leftrightarrow (4^x + 1)^y < (4^y + 1)^x$

$\Leftrightarrow y \ln(4^x + 1) < x \ln(4^y + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln(4^x + 1)}{x} < \frac{\ln(4^y + 1)}{y}$ (vì $x, y > 0$).

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln(4^t + 1)}{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{\frac{4^t \cdot \ln 4}{4^t + 1} \cdot t - \ln(4^t + 1)}{t^2} = \frac{4^t \ln 4^t - (4^t + 1) \ln(4^t + 1)}{(4^t + 1)t^2} < 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lại có $f(x) < f(y) \Rightarrow x > y$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó $t \in (1; +\infty) \Rightarrow P = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$.

Cách 1: Xét $P = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$ với $t \in (1; +\infty)$, ta có $P' = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t - 1)^2}; P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	1	3	$-\infty$
P'		- 0 +	
P		6	

The diagram illustrates the behavior of the function P as t increases. The table shows that P' is negative between $t=1$ and $t=3$, indicating that P is decreasing. At $t=3$, P reaches a minimum value of 6. For $t > 3$, P' is positive, indicating that P is increasing. The arrows in the diagram show the function P decreasing from $t=1$ to $t=3$ and then increasing towards $-\infty$.

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t = 3$ hay $x = 3y$.

Cách 2: Ta có $P = \frac{t^2 + 3}{t - 1} = t - 1 + \frac{4}{t - 1} + 2 \geq 2\sqrt{4} + 2 = 6$ (AM - GM).

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t = 3$ hay $x = 3y$.

Câu 75: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$. Khi $x + 4y$

đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

- A.** 2. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$

$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 - 4xy + 8 + 1 + \log_2(x + y) - \log_2(xy) = \frac{1}{2}(xy)^2 - 4xy + 8$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)^2 + \log_2(x+y) = 2\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \log_2\left(\frac{xy}{2}\right) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + \log_2 t$, với $t \in (0; +\infty)$

$f'(t) = 4t + \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ

$$(1) \Rightarrow f(x+y) = f\left(\frac{xy}{2}\right) \Leftrightarrow 2(x+y) = xy.$$

$$\text{Ta có: } 2(x+y) = xy \Leftrightarrow x(y-2) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{y-2}; y > 2.$$

$$P = x + 4y = \frac{2y}{y-2} + 4y = 10 + 4(y-2) + \frac{4}{y-2} \geq 10 + 2\sqrt{4(y-2) \cdot \frac{4}{y-2}} = 18$$

$$\Rightarrow P_{\min} = 18 \text{ khi } 4(y-2) = \frac{4}{y-2} \Leftrightarrow y-2 = 1 \Leftrightarrow y = 3.$$

$$y = 3 \Rightarrow x = \frac{2y}{y-2} = 6 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2.$$

Câu 76: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1}$.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\bullet \text{ Ta có: } \log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = \frac{2^{2x^2+2y^2}}{2^{3x+3y+3}} \Leftrightarrow (3x+3y+4) \cdot 2^{3x+3y+3} = (x^2+y^2) \cdot 2^{2x^2+2y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (3x+3y+4) \cdot 2^{3x+3y+3} = 2 \cdot (x^2+y^2) \cdot 2^{2x^2+2y^2}$$

$$\Leftrightarrow (3x+3y+4) \cdot 2^{3x+3y+4} = (2x^2+2y^2) \cdot 2^{2x^2+2y^2} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Đặt } f(t) = t \cdot 2^t \quad (t > 0).$$

Ta xét: $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lúc đó; (1) có dạng: $f(3x+3y+4) = f(2x^2+2y^2)$

$$\Leftrightarrow 3x+3y+4=2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-3(x+y)-4=-x^2+2xy-y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4=-(x-y)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x+y \leq 4 \Rightarrow x+y-4 \leq 0.$$

• Khi đó: $P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1} = 2 + \frac{x+y-4}{2x+y+1} \leq 2+0=2.$

• Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y+4=2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x=y=2. \\ x-y=0 \end{cases}$

Câu 77: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + xy + x + y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) + x + y = \log_3 (1-xy) + 1 - xy$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$

Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t > 0$

Có $f(x+y) = f(1-xy) \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Leftrightarrow x(y+1) = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y+1}$

Ta có $P = 2x + y = \frac{2-2y}{y+1} + y = -3 + \frac{4}{y+1} + y + 1 \geq -3 + 2\sqrt{\frac{4}{y+1}(y+1)} = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Câu 78: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{3x^4 y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}.$

- A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1 \Leftrightarrow \log_3 (x+4y) + (x+4y) = \log_3 3(x+y) + 3(x+y) \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(x+4y) = f(3(x+y))$ và $(x+4y) > 0; 3(x+y) > 0$.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow x+4y = 3(x+y) \Leftrightarrow y = 2x$.

$$P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2} = \frac{6x^5 + 12x^2}{9x^3} = \frac{1}{9} \left(6x^2 + \frac{12}{x} \right) = \frac{1}{9} \left(6x^2 + \frac{6}{x} + \frac{6}{x} \right) \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Vậy $P_{\min} = 2$.

Câu 79: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = (ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\sqrt{2}x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10; 15)$.

B. $[6; 10)$.

C. $(1; 4)$.

D. $[4; 6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $a^{x^2} = (ab)^2 \Rightarrow x^2 = \log_a (ab)^2 = 2(1 + \log_a b) \Rightarrow x = \sqrt{2 + 2\log_a b}$

$b^{y^2} = (ab)^2 \Rightarrow y^2 = \log_b (ab)^2 = 2(1 + \log_b a) \Rightarrow y = \sqrt{2 + 2\log_b a}$

$$P = 2\sqrt{2}x + y = 4\sqrt{1 + \log_a b} + \sqrt{2 + 2\log_b a}.$$

Đặt $t = \log_a b$ ($t > 0$) ta được: $P = 4\sqrt{1+t} + \sqrt{2 + \frac{2}{t}}$.

Xét hàm số $f(t) = 4\sqrt{1+t} + \sqrt{2 + \frac{2}{t}}$, với $t \in (0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t^2 \sqrt{2 + \frac{2}{t}}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t^2 \sqrt{2 + \frac{2}{t}}} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 \sqrt{2 + \frac{2}{t}} = \sqrt{1+t}$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 \left(2 + \frac{2}{t} \right) = 1+t \Leftrightarrow 8t^4 + 8t^3 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.

t	0		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$				

$\searrow \quad \nearrow$
 $3\sqrt{6}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{(0;+\infty)} P = \min_{(0;+\infty)} f(t) = 3\sqrt{6} \in [6;10)$ khi $\begin{cases} \log_a b = \frac{1}{2} \\ x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}$.

Câu 80: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_x x + \log_x y \geq \log_x (x + y^2)$. Biểu thức $P = x + 8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

A. $P_{\min} = 16$.

B. $P_{\min} = \frac{33}{2}$.

C. $P_{\min} = 11\sqrt{2}$.

D. $P_{\min} = \frac{31}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đề bài $xy \geq x + y^2$

$$\Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{y^2}{y-1} \\ y > 1 \end{cases} \text{ (Vì } x, y > 0 \text{)}.$$

Ta có: $P = x + 8y \geq \frac{y^2}{y-1} + 8y = 9y + 1 + \frac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 9y + 1 + \frac{1}{y-1}; y > 1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 9 - \frac{1}{(y-1)^2}$.

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \text{ (l)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của $f(y)$ là $f\left(\frac{4}{3}\right) = 16$.

Vậy $P_{\min} = 16$ khi $x = \frac{16}{3}$.

Câu 81: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

A. 16.

B. 18.

C. 12.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0, 0 < y < 6$.

Ta có $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + 6x - xy$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + \log_2 x + 6x - xy$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2) + x^2 = \log_2[x(6-y)] + x(6-y) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2) = f(x(6-y)) \Leftrightarrow x^2 = x(6-y) \Leftrightarrow x = 6-y \Leftrightarrow y = 6-x$.

$$\Rightarrow T = x^3 + 3(6-x) = x^3 - 3x + 18 = g(x).$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 18$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; +\infty) \\ x = 1 \in (0; +\infty) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	18	16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $T = g(x) \geq g(1) = 16$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 - x = 5 \end{cases}$.

Câu 82: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + b$.

A. $P_{\min} = -1 + 2\sqrt{5}$.

B. $P_{\min} = 2 + \sqrt{5}$.

C. $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$.

D. $P_{\min} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $1 - ab > 0 \Leftrightarrow ab < 1$.

Ta có $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2(1-ab) - \log_2(a+b) = (a+b) - 2(1-ab) - 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(1-ab) + 1 + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(1-ab) + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(2(1-ab)) = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow 2-a = b(2a+1) \Leftrightarrow b = \frac{2-a}{2a+1}$.

Do $a, b > 0 \Rightarrow \frac{2-a}{2a+1} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2$.

Khi đó $P = a+b = a + \frac{2-a}{2a+1} = \frac{2a^2+2}{2a+1}$

Xét hàm $g(a) = \frac{2a^2+2}{2a+1} \Rightarrow g'(a) = \frac{4a^2+4a-4}{(2a+1)^2} \Rightarrow g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bảng biến thiên

a	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	2
$g'(a)$	0	-	0
$g(a)$	2		2

$\swarrow \quad \searrow$
 $-1+\sqrt{5}$

Vậy $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$.

Câu 83: Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + xy$ là bao nhiêu?

A. $30 - 20\sqrt{2}$.

B. $33 - 22\sqrt{2}$.

C. $24 - 16\sqrt{2}$.

D. $36 - 24\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \frac{2-x}{2+x} > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x+2} < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ y > 0 \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$$\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2-x) - \log_2 (x+2) - \log_2 y = 2(x-2) + y(x+2) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2-x) + 1 - (2x-4) = \log_2 [(x+2)y] + y(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4-2x) + (4-2x) = \log_2 [y(x+2)] + y(x+2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t (t > 0)$:

$$f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0 \forall t > 0$$

Suy ra: $f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Mà $f(4-2x) = f[y(x+2)]$ nên $4-2x = y(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{4-2x}{x+2}$

Vì $P = x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$

Thay vào P ta có:

$$P \geq \frac{3}{4} \left(x + \frac{4-2x}{x+2} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{x^2+4}{x+2} \right)^2$$

Xét hàm số $y = \frac{x^2+4}{x+2}$ trên khoảng $(-2; 2)$:

$$y' = \frac{2x(x+2) - (x^2+4)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ x = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases} (l)$$

(Vì $x \in (-2; 2)$)

Lập bảng biến thiên:

x	-2		$-2 + 2\sqrt{2}$		2
y'			-	0	+
y		$+\infty$		$-4 + 4\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y_{\min} = -4 + 4\sqrt{2}$

Vậy $P_{\min} = \frac{3}{4}(-4 + 4\sqrt{2})^2 = 36 - 24\sqrt{2}$

Câu 84: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y$ bằng

A. $2\sqrt{2} + 3$.

B. $2 + 3\sqrt{2}$.

C. $3 + \sqrt{3}$.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Với $x > 0; y > 0$. Ta có:

$$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2xy \geq x^2 + 2y \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 2y(x-1) \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq \frac{x^2}{2y} > 0$$

$$\Rightarrow x > 1.$$

Đặt $m = x + 2y$ ta có:

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow x(m-x) \geq x^2 - x + m \\&\Leftrightarrow m(x-1) \geq 2x^2 - x \\&\Leftrightarrow m \geq \frac{2x^2 - x}{x-1}.\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$ với $x > 1$.

Ta tìm thấy $\min_{(1;+\infty)} g(x) = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy GTNN của $x+2y$ là $3+2\sqrt{2}$.

Câu 85: Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy$. Tính $M.m$.

A. $-\frac{5}{2}$.

B. -5 .

C. 5 .

D. -3 .

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned}2020^{1-x-y} &= \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022} \Leftrightarrow 2020^{1-x-y} (y^2 - 2y + 2022) = x^2 + 2021 \\&\Leftrightarrow 2020^{1-y} [(1-y)^2 + 2021] = 2020^x (x^2 + 2021).\end{aligned}$$

Ta có

$$f(t) = 2020^t (t^2 + 2021) \text{ với } t \in [0;1] \text{ có } f'(t) = 2020^t \ln 2020 (t^2 + 2021) + 2 \cdot 2020^t t > 0.$$

Do vậy $f(t) = 2020^t (t^2 + 2021)$ đồng biến trên khoảng $t \in [0;1]$.

$$\text{Suy ra } f(1-y) = f(x) \Leftrightarrow x = 1-y \Leftrightarrow y = 1-x.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy &= 2x^3 + 6(1-x)^3 + 3x^2 - 9x(1-x) \\&= 2x^3 + 6 - 18x + 18x^2 - 6x^3 + 3x^2 - 9x + 9x^2 = -4x^3 + 30x^2 - 27x + 6.\end{aligned}$$

Xét $f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 27x + 6$ với $x \in (0;1)$.

$$\text{Mà } f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 27x + 6 \text{ nên } f'(x) = -12x^2 + 60x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{9}{2} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Mặt khác $f(0) = 6, f(1) = 5, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Do vậy $M = 6$ và $m = -\frac{1}{2}$.

Vậy nên $M.m = -3$.

Câu 86: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$. B. $P_{\min} = 8$. C. $P_{\min} = 9$. D. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow xy \geq x + y^2$

$$\Leftrightarrow (y-1)x \geq y^2.$$

Do $y > 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow (y-1)x \geq y^2 > 0$. Mà $x > 0$ nên $y-1 > 0$, hay $y > 1$.

Khi đó ta có $x \geq \frac{y^2}{y-1}$. Suy ra $P = x + 3y \geq \frac{y^2}{y-1} + 3y$

Xét hàm số $f(y) = \frac{y^2}{y-1} + 3y$ trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(y) = \frac{y^2 - 2y}{(y-1)^2} + 3 = \frac{4y^2 - 8y + 3}{(y-1)^2}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \notin (1; +\infty) \\ y = \frac{3}{2} \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

y	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$		- 0 +	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$ 9 $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(y) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$. Vậy $P \geq f(y) \geq 9$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{y^2}{y-1} = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Câu 87: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y}$. Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y} \Leftrightarrow 2xy+x+y = \log_2(8-8xy) - \log_2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(1-xy) + 2(1-xy) = \log_2(x+y) + (x+y)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Do đó từ (*) ta có } 2(1-xy) = x+y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{2y+1}$$

$$\text{Suy ra } P = 2xy^2 + xy = -y^2 + 2y \Rightarrow P_{\min} = 1 \text{ khi } y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } 3x + 2y = 3$$

Câu 88: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x} \text{ là:}$$

A. $\frac{31}{5}$.

B. 6.

C. $\frac{29}{5}$.

D. $\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log(x+2y) = \log(x) + \log(y) \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x+2y = xy$$

$$\text{Mặt khác: } xy = x+2y \geq 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow (xy)^2 - 8(xy) \geq 0 \Rightarrow xy \geq 8$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức cauchy- Swat ta có: } P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x} \geq \frac{(x+2y)^2}{2+x+2y} = \frac{(xy)^2}{xy+2}$$

$$\text{Đặt } xy = t \text{ suy ra } P \geq \frac{(xy)^2}{xy+2} = \frac{t^2}{t+2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2}{t+2}, \text{ với } t \in [8; +\infty).$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 4t}{(t+2)^2} > 0, \forall t \geq 8, \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (8; +\infty).$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(8) = \frac{32}{5} \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{32}{5}.$$

$$\Rightarrow \text{Min} P = \frac{32}{5} \text{ khi } \begin{cases} x = 2y \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Câu 89: Cho các số thực x, y thay đổi, thỏa mãn $x > y > 0$ và $\ln(x-y) + \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y)$. Giá

trị nhỏ nhất của $M = x + y$ là

A. $2\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 4.

D. 16.

Lời giải

Chọn C

Với $x > y > 0$, ta có $\ln(x-y) + \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y) - \ln(x-y)$

$$\Leftrightarrow \ln(xy) = 2\ln \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 \Leftrightarrow xy = \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 xy = (x+y)^2 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+y > 0 \\ v = xy > 0 \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (u^2 - 4v)v = u^2 \Leftrightarrow (v-1)u^2 = 4v^2 \Leftrightarrow u^2 = \frac{4v^2}{v-1} = f(v), (v > 1)$

$$f'(v) = \frac{8v(v-1) - 4v^2}{(v-1)^2} = \frac{4v(v-2)}{(v-1)^2}, f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 2 \text{ do } v > 1$$

Bảng biến thiên :

v	1	2	$+\infty$
$f'(v)$	-	0	+
$f(v)$	$+\infty$	16	$+\infty$

$$\text{Vậy } \min(x+y) = \min u = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \\ x>y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 90: Xét x, y, z là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_2^3 x + \log_2^3 y + \frac{1}{4}\log_2^3 z \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{32}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C

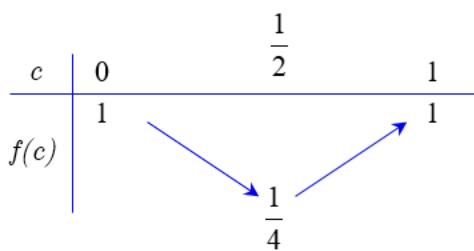
Ta có $\log_2(xyz) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 1$. Đặt $a = \log_2 x, b = \log_2 y, c = \log_2 z$. Khi đó ta có $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$.

$$S = \log_2^3 x + \log_2^3 y + \frac{1}{4}\log_2^3 z = a^3 + b^3 + \frac{1}{4}c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + \frac{1}{4}c^3$$

$$\geq (a+b)^3 - 3\frac{(a+b)^2}{4}(a+b) + \frac{1}{4}c^3 = \frac{1}{4}(3c^2 - 3c + 1) \text{ với } 0 < c < 1.$$

$$\text{Đặt } f(c) = 3c^2 - 3c + 1, f'(c) = 0 \Leftrightarrow 6c - 3 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên



Từ đây ta suy ra $S \geq \frac{1}{16}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ c=\frac{1}{2} \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{4} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $x = y = \sqrt[4]{2}$, $z = \sqrt{2}$.

Câu 91: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2)$?

A. 1

B. 3

C. 2

D. Vô số

Phân tích

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+y > 0$.

Đặt $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2) = t$, suy ra $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+2y^2=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3^t-y \\ (3^t-y)^2+2y^2=4^t \end{cases} \quad (1)$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3y^2 - 2 \cdot 3^t y + 9^t - 4^t = 0$. Phương trình phải có nghiệm nên:

$$\Delta' = 9^t - 3(9^t - 4^t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{2}.$$

Do đó: $\begin{cases} 0 < x+y \leq \sqrt{3} \\ x^2+2y^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow x \in \{0; \pm 1\}$ (vì $x \in \mathbb{Z}$)

Thử lại:

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ 2y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\log_{\frac{4}{9}} 2 \\ y=3^{\log_{\frac{4}{9}} 2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y=3^t \\ 1+2y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ 2y^2+1=4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 9^t + 4 \cdot 3^t + 3 - 4^t = 0 \quad (2)$$

Khi $t \geq 0 \Rightarrow 9^t \geq 4^t$ nên (2) vô nghiệm, khi $t < 0 \Rightarrow 4^t < 1 \Rightarrow 1 - 4^t > 0$ nên (2) cũng vô nghiệm.

Vậy $x \in \{0; 1\}$.

Câu 92: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $10x^2 - 20x + 20 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log[10(x^2 - 2x + 2)] = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log 10 + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x^2 - 2x + 2)} + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2 \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = 10^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 10^t \cdot \ln 10 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } (*) &\Leftrightarrow f[\log(x^2 - 2x + 2)] = f(y^2) \Leftrightarrow \log(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^{y^2} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 10^6 \text{ nên } 1 \leq (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2} \leq (10^6 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log[(10^6 - 1)^2 + 1].$$

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

$$+ \text{ Với } y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (ktm)} \\ x = 4 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9998 = 0 \text{ (không có giá trị } x \text{ nguyên nào thỏa mãn).}$$

$$+ \text{ Với } y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 999999998 = 0 \text{ (không có giá trị } x \text{ nguyên nào thỏa mãn).}$$

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (4; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 93: Có bao nhiêu số nguyên $y < 10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2 - x - 1} + (x - 1)^2$?

A. 10

B. 1

C. 5

D. Vô số

Phân tích

Phương trình dạng $f(u) = f(v)$.

Phương pháp: Chứng minh $y = f(t)$ đơn điệu trên $(a; b)$. Từ phương trình suy ra $u = v$. Từ đó tìm sự liên hệ giữa 2 biến x, y và chọn x, y thích hợp.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2 - x - 1} + (x - 1)^2 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y + x - 1 = 5^{x^2 - x - 1} + x^2 - x$$

Xét: $f(t) = 5^{t-1} + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình trên suy ra:

$$\sqrt{2}^y + x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = \sqrt{2}^y = 2^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x = 1 \pm 2^{\frac{y}{4}}.$$

Do x nguyên nên ta có $2^{\frac{y}{4}} \in \mathbb{Z}$ và $y < 10$ nên $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

Câu 94: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

A. 2021.

B. 10.

C. 2020.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài, $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

$$\Leftrightarrow 2^y + \log_2(2^y) = 2x + \log_2\left(x + \frac{2^y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^y + 2^y + \log_2(2^y) = 2x + 2^y + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^y) + \log_2(2^y) = 2 \cdot \left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_2 t$, $t > 0$.

Vì $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \ln 2} > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow f(2^y) = f\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \Leftrightarrow 2^y = \frac{2x + 2^y}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y = 2x + 2^y \Leftrightarrow 2x = 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1}.$$

Do $1 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq y - 1 \leq \log_2 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 11,98$.

Do $y \in \mathbb{N}^*$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 11\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 95: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn

$$2\log_2(x+y) - \log_2(1+\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2-1)$$

A. 1

B. 3

C. 2

D. 5

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t = 2\log_2(x+y) - \log_2(1+\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2-1)$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (x+y)^2 = 2^{t+\log_2(1+\sqrt{3})} \\ x^2+y^2-1 = \sqrt{3}^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = (1+\sqrt{3}) \cdot 2^t \\ x^2+y^2 = 1+\sqrt{3}^t \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &\leq 2(x^2+y^2) \\ \Leftrightarrow (1+\sqrt{3}) \cdot 2^t &\leq 2(1+\sqrt{3}^t) \\ \Leftrightarrow \frac{(1+\sqrt{3})2^t}{2} &\leq 1+\sqrt{3}^t \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t &\geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Xét $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow f(t) \geq f(1) \Leftrightarrow t \leq 1.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 0 < x+y = 2^{\frac{t+\log_2(1+\sqrt{3})}{2}} \leq \sqrt{2\log_2(1+\sqrt{3})} \\ x^2+y^2 = 1+\sqrt{3}^t \leq 1+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \{0; \pm 1\} \text{ (vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Thử lại:

Với $x=1$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \sqrt{(1+\sqrt{3})2^t} - 1 \\ y^2 = \sqrt{3}^t \end{cases} \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t} - 1\right)^2 - \sqrt{3}^t = 0 \\ \Rightarrow (1+\sqrt{3})2^t - 2\sqrt{(1+\sqrt{3}) \cdot 2^t} - \sqrt{3}^t + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ta có: $g(x) = (1 + \sqrt{3})2^x - 2\sqrt{(1 + \sqrt{3}) \cdot 2^x} - \sqrt{3}^x + 1$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $g(0)g(1) < 0$ nên phương trình có nghiệm $t \in (0; 1)$.

Do đó với $x = 1$ thì tồn tại số thực y thỏa mãn

$$2\log_2(x + y) - \log_2(1 + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 1)$$

Với $x = -1$:

$$\begin{cases} y = \sqrt{(1 + \sqrt{3})2^t} + 1 \\ y^2 = \sqrt{3}^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(1 + \sqrt{3})2^t} + 1 \right)^2 - \sqrt{3}^t = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{3})2^t + 2\sqrt{(1 + \sqrt{3}) \cdot 2^t} - \sqrt{3}^t + 1 = 0$$

Ta có: $(1 + \sqrt{3})2^t + 2\sqrt{(1 + \sqrt{3}) \cdot 2^t} - \sqrt{3}^t + 1 > 0, \forall t \leq 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó với $x = -1$ thì không tồn tại số thực y thỏa mãn

$$2\log_2(x + y) - \log_2(1 + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 1)$$

Với $x = 0$:

$$\begin{cases} y^2 = (1 + \sqrt{3})2^t \\ y^2 = 1 + \sqrt{3}^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{3})2^t = \sqrt{3}^t + 1$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{3})2^t - \sqrt{3}^t - 1 = 0$$

Ta có: $h(x) = (1 + \sqrt{3})2^x - \sqrt{3}^x - 1$ liên tục trên $[-1; 0]$ thỏa mãn $h(-1)h(0) < 0$ nên phương trình có nghiệm $t \in (-1; 0)$.

Do đó với $x = 0$ thì tồn tại số thực y thỏa mãn

$$2\log_2(x + y) - \log_2(1 + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 1).$$

Vậy $x \in \{0; 1\}$.

Câu 96: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x - 1}{y}\right) = y + 1 - 2^x$?

A. 2019.

B. 11.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3(2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

(*) có dạng $f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$

Vì $0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Vậy có 11 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 97: Xét các số thực a, b, x thỏa mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

A. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{e}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)} \Leftrightarrow \ln(a^{\log_b x}) = \ln(b^{\log_a(x^2)}) \Leftrightarrow \log_b x \cdot \ln a = 2 \cdot \log_a x \cdot \ln b$

$\Leftrightarrow \log_b a \cdot \ln a = 2 \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \ln a = 2 \ln b \Leftrightarrow \ln^2 a = 2 \ln^2 b \Rightarrow \ln a = \sqrt{2} \ln b$ (vì $a > 1, b > 1$).

Thay $\ln a = \sqrt{2} \ln b$ vào biểu thức P ta được

$P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = 3 \ln^2 b - (\sqrt{2} + 1) \ln b = 3t^2 - (\sqrt{2} + 1)t$ (với $t = \ln b > 0$).

Đặt $f(t) = 3t^2 - (\sqrt{2} + 1)t$. Ta có $f'(t) = 6t - (\sqrt{2} + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2} + 1}{6} \in (0; +\infty)$.

BBT:

		$\frac{\sqrt{2} + 1}{6}$	
t	0		$+\infty$
$f'(t)$		0	
		-	+
$f(t)$	0		$+\infty$
		$-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$	

Dựa vào BBT, suy ra $\min_{(0; +\infty)} f(t) = -\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.