

Bài 1 (2,0 điểm).

1. Xét đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các hệ số thực.
 - a) Giả sử $P(x)$ có nghiệm x_0 thỏa mãn $x_0 \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.
 - b) Chứng minh rằng trong các số $|P(0)|; |P(1)|; |P(2)|; |P(3)|$ có ít nhất một số không nhỏ hơn $\frac{3}{4}$.
2. Tìm tất cả đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn : $P(x+y) + P(x-y) = 2P(x) + 2P(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 2 (3,0 điểm).

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , thì $7^n - 6n - 1$ luôn là bội của 36.
2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $5^n + 12^n = m^2$.
3. Chứng minh rằng với hai số nguyên a, b mà $a \equiv b \pmod{7}$ thì $a^7 \equiv b^7 \pmod{49}$. Từ đó chứng minh rằng tổng lũy thừa bậc bảy của bảy số nguyên liên tiếp luôn là bội của 49.

Bài 3 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định không phải là đường kính. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Một điểm H thay đổi trên đoạn thẳng MB . Đường thẳng qua H , vuông góc với BC cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, D sao cho $HA > HD$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên hai cạnh CA, AB . Hai đường thẳng EF, BC cắt nhau tại điểm K . Đường thẳng AK cắt lại đường tròn (O) tại điểm L khác A .

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, E, F, L cùng thuộc một đường tròn và ba đường thẳng BE, CF, LM đồng quy.
2. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng BE, FH và Q là giao điểm của hai đường thẳng CF, HE . Chứng minh ba điểm P, Q, K thẳng hàng.
3. Chứng minh rằng khi điểm H thay đổi trên đoạn thẳng MB thì đường thẳng LD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (2,0 điểm).

1. Một nhóm gồm 9 người tham gia buổi offline, biết rằng cứ ba người trong nhóm đó thì luôn có hai người không quen nhau.
 - a) Gọi S là số cặp, mỗi cặp gồm hai người trong nhóm quen nhau. Chứng minh $S \leq 20$.
 - b) Chứng minh trong nhóm có 4 người nào đó đôi một không quen biết nhau.
2. Trên bảng ta viết ba số thực không đồng thời bằng nhau. Mỗi lần giả sử trên bảng đang có ba số thực a, b, c ta xoá chúng đi và viết thay vào đó ba số khác là $a-b; b-c; c-a$. Chứng minh rằng nếu quá trình nói trên tiếp diễn nhiều lần, sẽ có lúc trên bảng thu được một số lớn hơn 2020.

—————HẾT—————