

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 6:

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số mũ $y = a^x (0 < a \neq 1)$

Hàm số logarit $y = \log_a x (0 < a \neq 1, x > 0)$

+ Các công thức lũy thừa

Với $a, b > 0; m, n \in \mathbb{Z}$ ta có

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

+ Các công thức biến đổi logarit

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b (0 < a \neq 1, b > 0)$$

Với $0 < a, b \neq 1; x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$ ta có

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$$

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Công thức đổi cơ số

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Giải phương trình mũ

Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

+ Nếu $a = a(x)$ là hàm phụ thuộc vào biến x thì rõ ràng $a = 1$ cũng có thể là nghiệm
 Khi đó phương trình tương đương với

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)(f(x)-g(x)) = 0 \end{cases}$$

+ Lấy logarit hóa 2 vế

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b \text{ mục đích là làm xuất hiện nhân tử chung ở cả } f(x) \text{ và } g(x).$$

Bất phương trình mũ – logarit

Dạng 1: $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)(f(x)-g(x)) \geq 0 \end{cases}$

Dạng 2: $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \\ (a-1)(f(x)-g(x)) \geq 0 \end{cases}$

Lưu ý: Điều kiện với hàm $\log_{f(x)} g(x)$ là $\begin{cases} 0 < f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \cdot \frac{1}{8^{1-x}} = 16^x$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x+1} \cdot 2^{2(x-1)} \cdot \frac{1}{2^{3(1-x)}} = 2^{4x} \Leftrightarrow 2^{6x-4} = 2^{4x} \Leftrightarrow 6x-4 = 4x \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 2. Giải phương trình: $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25(\sqrt{2})^{7x}$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x \neq -1$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7x}{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}} = 2^{\frac{7x}{2}-2} \Leftrightarrow \frac{3(2x-1)}{x+1} = \frac{7x}{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \left\{ \frac{2}{7}; 1 \right\}$.

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2}.$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-2=0 \\ \begin{cases} x-2>0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x>2 \\ \log_3 x=0 \\ x-\frac{1}{2}=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x>2 \\ x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 4. Giải phương trình: $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} = (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}.$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Do $\sqrt{10}-3 = \frac{1}{\sqrt{10}+3}$, nên phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt{10}-3)^{\frac{3-x}{x-1}} = (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 9 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = \pm\sqrt{5}$.

Bài 5. Giải phương trình: $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4.$

Lời giải:

+ Điều kiện $0 < x \neq 1$

Khi đó phương trình tương đương với

$$2^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} \cdot 2^{\frac{2(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 2(\sqrt{x}+3) = 4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow 4x - 10\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 9$.

Bài 6. Giải phương trình: $(2+x-x^2)^{\sin x} = (2+x-x^2)^{2-\sqrt{3}\cos x}$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2+x-x^2 > 0 \\ (2+x-x^2-1)(\sin x - 2 + \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 (*) \\ \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 (1) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 (2) \end{cases} \end{cases}$$

$$+(1) \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện } (*).$$

$$+(2) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ta phải có } -1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2 \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, x = \frac{\pi}{6}$.

Bài 7. Giải phương trình: $(x-3)^{3x^2-5x+2} = (x^2-6x+9)^{x^2+x-4}$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-3)^{3x^2-5x+2} = (x-3)^{2(x^2+x-4)} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ (x-3-1)(3x^2-5x+2-2(x^2+x-4)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \begin{cases} x-4=0 \\ x^2-7x+10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x \in \{4; 5\}$.

Bài 8. Giải phương trình: $\frac{1}{3}\log_2(5-x) + 2\log_8\sqrt{3-x} = 1$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x < 3 (*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_8(5-x) + \log_8(\sqrt{3-x})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_8(5-x)(3-x) = 1 \Leftrightarrow (5-x)(3-x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Chỉ có nghiệm $x = 1$ thỏa mãn điều kiện (*).
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 9. Giải phương trình: $\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x > 1$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_4(x-1) + \log_4(2x+1) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(2x+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)(2x+1) = \log_2 2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 2(x+2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Chỉ có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{2}$.

Bài 10. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\frac{1}{2} < x \neq 1$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_3(x-1)^2 + \log_3(2x-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2(2x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1) = 3 \\ (x-1)(2x-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Chỉ có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn điều kiện (*).
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 11. Giải phương trình: $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$.

Lời giải:

+ Điều kiện $0 < x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1(*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_4 2x} = \frac{1}{\log_8 \sqrt{2x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{4}{1 + \log_2 x} = \frac{6}{1 + \log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} = \frac{2}{1 + \log_2 x} \Leftrightarrow 1 + \log_2 x = 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 12. Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0$.

Lời giải:

+ Điều kiện $1 < x < 3(*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_2 (x+1) + \log_2 (3-x) - \log_2 (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+1)(3-x) = \log_2 (x-1) \Leftrightarrow (x+1)(3-x) = x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Chỉ có nghiệm $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

Bài 13. Giải phương trình: $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (x+4)^3$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases} (*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 16-x^2 = 4|x+1|$$

+ Với $-1 < x < 4$ phương trình trở thành

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

+ Với $-4 < x < -1$ phương trình trở thành

$$x^2 - 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{24}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 2, x = 2 - \sqrt{24}$.

Bài 14. giải bất phương trình: $\log_x \left(x - \frac{1}{4} \right) \geq 2$

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \log_x \left(x - \frac{1}{4} \right) \geq \log_x x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \left(x - \frac{1}{4} - x^2 \right) \geq 0 \\ x > \frac{1}{4}, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{4}; 1 \right)$.

Bài 15. Giải bất phương trình: $\frac{\log_2 (x^2 - 9x + 8)}{\log_2 (3 - x)} < 2$

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ \log_2 (3 - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1, \text{ suy ra } \log_2 (3 - x) > 0$$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\log_2 (x^2 - 9x + 8) < 2 \log_2 (3 - x) = \log_2 (3 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 < (3 - x)^2 \Leftrightarrow 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}, \text{ kết hợp với điều kiện suy ra } -\frac{1}{3} < x < 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{3}; 1 \right)$.

Bài 16. Giải bất phương trình:

$$\frac{\log_5 (x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11} (x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^3} \geq 0$$

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 4x - 11 > 0 \\ 2 - 5x - 3x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup (2 + \sqrt{15}; +\infty)$$

Ta đưa về cùng cơ số 5; $\log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3 = 3\log_{11}(x^2 - 4x - 11) = 3 \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{\log_5 11}$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\left(2 - \frac{3}{\log_5 11}\right) \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \leq 0 \text{ do } 2 - \frac{3}{\log_5 11} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x^2 - 4x - 11) \geq 0 \\ 2 - 5x - 3x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 11 \geq 1 \\ 3x^2 + 5x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup [6; +\infty) \\ x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup [6; +\infty)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-1)^{x-1}} = (x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$.

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$.

Bài 3. Giải phương trình: $\log_5(-4x^2 + 13x - 5) = \log_{25}(3x+1)$.

Bài 4. Giải phương trình:

$$\log_2(x^2 + x + 1) + \log_2(x^2 - x + 1) = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1).$$

Bài 5. Giải phương trình: $\log_9(x+1)^2 = \log_3(4-x) + \log_3(4+x)$.

Bài 6. Giải phương trình: $\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{3} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.

Bài 7. Giải phương trình: $(x^2 + 3)^{|x^2 - 5x + 4|} = (x^2 + 3)^{x+4}$

Bài 8. Giải phương trình: $(x^2 + x + 1)^{2x^2 - 3} \leq \left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}\right)^x$

Bài 9. Giải bất phương trình: $\frac{\log_2(x^2 - 9x + 8)}{\log_2(3 - x)} < 2$

Bài 10. Giải bất phương trình: $\log_x \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 2$

Bài 11. Giải phương trình: $(x^2 - 4x)^{x^2 - 10} = (4 - x)^{x^2 - 10}$

Bài 12. Giải phương trình: $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2 (x^2 - 25) = 0$

Bài 13. Giải phương trình: $\log_4 (\log_2 x) + \log_2 (\log_4 x) = 2$

Bài 14. Giải phương trình:

$$\frac{1}{3} \log_2 (3x-4)^6 \cdot \log_2 x^3 = 8 (\log_2 \sqrt{x})^2 + [\log_2 (3x-4)^2]^2$$

Bài 15. Giải phương trình: $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3$

Bài 16. Giải phương trình: $\log_9 (x+8) - \log_3 (x+26) + 2 = 0$

Bài 17. Giải phương trình: $2 \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1}) + \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 3$

Bài 18. Giải phương trình: $\log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 (x - \sqrt{x^2 - 1})$

Bài 19. Giải phương trình: $\log_{(x+3)} 6 + 2 \frac{\log_{\frac{1}{2}} (4-x)}{\log_2 (x+3)} = 1$

Bài 20. Giải phương trình: $\log_4 \{2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

Bài 21. Giải các phương trình:

1.1. $2 \log_2 \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \log_{\frac{1}{2}} (x-1)^2 - 2 \geq 0$

1.2. $\log_2 [x(x+9)] + \log_2 \frac{x+9}{x} = 0$

1.3. $\log_{25} (x^2 - 8x + 25)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} \frac{x-1}{2} + \log_5 |x-5|$

LOGARIT HÓA 2 VỀ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau:

1. $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500.$

2. $3^{x^2-2} \cdot 4^{\frac{2x-3}{x}} = 18.$

3. $2^{x^2-4} \cdot 5^{x-2} = 1.$

4. $2^{x^2-2x} = \frac{3}{2}.$

Lời giải:

1. Phương trình tương đương với

$$5^x \cdot 2^{\frac{x-1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình ta được

$$(x-3)\log_2 5 + \frac{x-3}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\log_2 5 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\log_5 2 \end{cases}$$

2. Phương trình tương đương với

$$3^{x^2-2} \cdot 2^{\frac{2x-3}{x}} = 3^2 \cdot 2^1 \Leftrightarrow 3^{x^2-4} \cdot 2^{\frac{3x-6}{x}} = 1$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình ta được

$$(x^2-4)\log_2 3 + 3\frac{(x-2)}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{3}{x} + (x+2)\log_2 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \frac{3}{x} + (x+2)\log_2 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2 + 2x + 3\log_3 2 = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

3. Phương trình tương đương với

$$\log_2 2^{x^2-4} + \log_2 5^{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2+\log_2 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2-\log_2 5 \end{cases}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau

1. $x^{\lg x} = 1000x^2.$

2. $x^{\log_2 x+4} = 32.$

3. $7^{\log^2_{25}(5x)-1} = x^{\log_5 7}.$

Lời giải:

1. Điều kiện $x > 0$, khi đó phương trình tương đương với

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 1000 + \lg x^2$$

$$\Leftrightarrow (\lg x)^2 - 2\lg x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -1 \\ \lg x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ x = 1000 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \left\{\frac{1}{10}; 1000\right\}.$

2. Điều kiện $x > 0$, lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình, khi đó phương trình tương đương với

$$(\log_2 x + 4) \log_2 x = \log_2 32 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 4 \log_2 x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{32} \end{cases}$$

3. Điều kiện $x > 0$, khi đó phương trình tương đương với

$$\log_5 \left(7^{\log_{25}^2 (5x) - 1} \right) = \log_5 \left(x^{\log_5 7} \right) \Leftrightarrow (\log_{25}^2 (5x) - 1) \log_5 7 = \log_5 7 \cdot \log_5 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_5^2 (5x) - \log_5 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x - 2 \log_5 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = -1 \\ \log_5 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = 125 \end{cases} \quad \text{BÀI}$$

TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình : $5^{x \cdot \sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{8^x} = 100$.

Bài 2. Giải phương trình: $9 \cdot x^{\log_9 x} = x^2$.

Bài 3. Giải phương trình: $3^{x^2} \cdot 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1. Giải phương trình sau: $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} (4 - 2^{2x}) + (4 - 2^{2x}) = 0 \Leftrightarrow (4 - 2^{2x}) (2^{x^2-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2^{2x} = 0 \\ 2^{x^2-x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \{0; 1\}$.

Bài 2. Giải phương trình

$$2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)$$

Lời giải:

+ Điều kiện $x > 0$, khi đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 (\log_3 x)^2 &= 2\log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1}-1) \\
 \Leftrightarrow \log_3 x (\log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1}-1)) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1}-1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3 \sqrt{x} = \log_3 (\sqrt{2x+1}-1) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \{1; 4\}$.

Bài 3. Giải phương trình:

$$2\log_4^2 x = \log_2 x \cdot \log_2 (\sqrt{2x+1}-1)$$

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$, khi đó phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\log_2^2 x &= \log_2 x \cdot \log_2 (\sqrt{2x+1}-1) \Leftrightarrow \log_2 x \left(\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 (\sqrt{2x+1}-1) \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 (\sqrt{2x+1}-1) = 0 \end{cases} & \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_2 \sqrt{x} = \log_2 (\sqrt{2x+1}-1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}-1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x+1+2\sqrt{x} = 2x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1; x = 4$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải bất phương trình: $4x^2 + x \cdot 2^{x^2+1} + 3 \cdot 2^{x^2} > x^2 \cdot 2^{x^2} + 8x + 12$

Bài 2. Giải phương trình: $2(x^2 - 3^{x+1}) = 3x(1 - 4 \cdot 3^x) - 1$

Bài 3. Giải phương trình: $x^2 \cdot 5^{x-1} - (3^x - 3 \cdot 5^{x-1})x + 2 \cdot 5^{x-1} - 3^x = 0$

Bài 4. Giải phương trình: $2^{\frac{1}{x}}(\sqrt{x^2+4}-x-2)=4\sqrt{x^2+4}-4x-8$

Bài 5. Giải phương trình: $3^{x^2+\log_4(x+2)}+3.3^{\sqrt{x+2}+2}=3^{x^2+1}+9.3^{\sqrt{x+2}+\log_4(x+2)}$

MỘT SỐ DẠNG ĐẶT ẨN PHỤ CƠ BẢN

Dạng 1: Phương trình có dạng

$$\alpha_k a^{kf(x)} + \alpha_{k-1} a^{(k-1)f(x)} + \dots + \alpha_1 a^{f(x)} + \alpha_0, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Đặt $t = a^{f(x)}$, đưa về giải phương trình bậc k với ẩn là t .

Dạng 2: Phương trình có dạng

$$\alpha_1 a^{f(x)} + \alpha_2 b^{f(x)} + \alpha_3 = 0, ab = 1$$

Đặt $t = a^{f(x)} > 0 \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0$

Dạng 3: Phương trình có dạng

$$\alpha_1 a^{2f(x)} + \alpha_2 (ab)^{f(x)} + \alpha_3 b^{2f(x)} = 0$$

Khi đó chia cả 2 vế của phương trình cho $b^{2f(x)} > 0$. Phương trình trở thành

$$\alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0, t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0.$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

Lời giải :

Phương trình đã cho tương đương với :

$$2^{x^2-x} - \frac{4}{2^{x^2-x}} = 3 \Leftrightarrow 2^{2(x^2-x)} - 3.2^{x^2-x} - 4 = 0$$

Đặt $t = 2^{x^2-x} > 0$, khi đó phương trình trở thành :

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 > 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình : $2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$

Lời giải :

Đặt $t = 2^x > 0$, khi đó phương trình trở thành :

$$t^3 - 6t - \frac{8}{t^3} + \frac{12}{t} = 1 \Leftrightarrow t^3 - \frac{8}{t^3} - 6\left(t - \frac{2}{t}\right) - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } u = t - \frac{2}{t} \Rightarrow t^3 - \frac{8}{t^3} = \left(t - \frac{2}{t}\right) \left(t^2 + 2 + \frac{4}{t^2}\right) = \left(t - \frac{2}{t}\right) \left(\left(t - \frac{2}{t}\right)^2 + 6\right) = u(u^2 + 6)$$

Khi đó phương trình trở thành :

$$u(u^2 + 6) - 6u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow t - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t = 2 > 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Bài 3. Giải bất phương trình : $x^{\log_{(x+1)}(x-1)} + (x-1)^{\log_{x+1} x} \leq 2$

Lời giải :

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x > 0; x-1 > 0 \\ 0 < x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{khi đó đặt } t = x^{\log_{(x+1)}(x-1)} \Rightarrow x = t^{\frac{1}{\log_{(x+1)}(x-1)}} \Rightarrow \log_{x+1} x = \frac{1}{\log_{(x+1)}(x-1)} \log_{x+1} t = \log_{x-1} t \Rightarrow t = (x-1)^{\log_{x+1} x}$$

vậy bất phương trình tương đương với :

$$t + t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow x^{\log_{(x+1)}(x-1)} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{(x+1)}(x-1) \leq 0; \text{ do } x > 1 \Leftrightarrow x \leq 2$$

vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2]$.

Bài 4. Giải phương trình: $64^{\log_4^2 x} = 3.2^{\log_2^2 x} + 3.4^{\log_4^2 x} + 4$

Lời giải :

Điều kiện $x > 0$

$$\text{Đặt } t = 4^{\log_4^2 x} \Rightarrow 2^{\log_2^2 x} = t^2; 64^{\log_4^2 x} = t^3$$

Khi đó phương trình trở thành

$$t^3 = 3t^2 + 4t + 4 \Leftrightarrow (t-4)(t^2 + t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$\Leftrightarrow 4^{\log_4^2 x} = 4 \Leftrightarrow \log_4^2 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Một số dạng đặt ẩn phụ khác

Cùng tìm hiểu qua một số ví dụ sau

Dạng 1: $\log_a f(x) = \log_b g(x)$, đặt $t = \log_a f(x)$

Bài 1. Giải phương trình: $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x > 0$, khi đó đặt

$$t = \log_7 x = \log_3 (\sqrt{x} + 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 7^t \\ \sqrt{x} + 2 = 7^{\frac{t}{2}} + 2 = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1(*)$$

Vế trái của phương trình (*) là hàm nghịch biến, vế phải là hàm hằng. Mặt khác nhận thấy $t = 2$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$$t = 2 \Leftrightarrow \log_7 x = 2 \Leftrightarrow x = 49.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 49$.

Bài 2. Giải phương trình: $\log_{\sqrt[3]{6}}(x^2 - 2x - 2) = 2 \log_{\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 3)$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x^2 - 2x - 3 > 0$, khi đó phương trình tương đương với

$$\log_6(x^2 - 2x - 2) = \log_5(x^2 - 2x - 3)$$

Đặt $t = x^2 - 2x - 3$, phương trình trở thành

$$\log_6(t + 1) = \log_5 t = y \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^y \\ t + 1 = 5^y + 1 = 6^y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^y + \left(\frac{1}{6}\right)^y = 1(*)$$

Vế trái của phương trình (*) là hàm nghịch biến, vế phải là hàm hằng. Mặt khác ta lại có $y = 1$, thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất

$$y = 1 \Leftrightarrow \log_5 t = 1 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \{-2; 4\}$.

Dạng 2: $a^{\log_b(x+c)} = x, b = a + c$

Đặt $t = \log_b(x + c)$

Bài 1. Giải phương trình: $4^{\log_7(x+3)} = x$.

Lời giải:

Đặt $t = \log_7(x + 3)$, khi đó phương trình trở thành

$$4^t = x = 7^t - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^t + 3\left(\frac{1}{7}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_7(x + 3) = 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Bài 2. Giải phương trình: $2^{\log_3(x+5)} = x + 4$.

Lời giải:

Đặt $t = \log_3(x + 5)$, khi đó phương trình trở thành

$$2^t = x + 4 = 3^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Dạng 3: $s^{ax+b} = c \log_s(dx+e) + \alpha x + \beta, d = ac + \alpha; e = bc + \beta$.

Khi đó đặt $ay+b = \log_s(dx+e)$, và chuyển về hệ phương trình

Bài 1. Giải phương trình: $7^{x-1} = 6 \log_7(6x-5) + 1$.

Lời giải:

Đặt $y-1 = \log_7(6x-5) \Rightarrow 7^{y-1} = 6x-5$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1) + 1 \\ 7^{y-1} = 6x-5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1} - 7^{y-1} = 6y - 6x \Leftrightarrow 7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$, ta có $f'(t) = 7^{t-1} \ln 7 + 6 > 0$. Nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow x = \log_7(6x-5) + 1 \Leftrightarrow 7^{x-1} = 6x-5$

Dễ thấy phương trình này có nghiệm $x=1, x=2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 = 0$

Bài 2. Giải phương trình: $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 1000$

Bài 3. Giải phương trình: $(5-\sqrt{21})^x + 7(5+\sqrt{21})^x = 2^{x+3}$

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{8}{2^{x-1}} + \frac{2^x}{2+2^x} = \frac{18}{2^{x-1} + 2^{1-x} + 2}$

Bài 5. Giải phương trình:

$$(7+5\sqrt{2})^x + (\sqrt{2}-5)(3+2\sqrt{2})^x + 3(1+\sqrt{2})^x + 1 - \sqrt{2} = 0$$

Bài 6. Giải phương trình: $(2+\sqrt{3})^{(x-1)^2} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

Bài 7. Giải phương trình: $\left(\log_x \frac{x+1}{x-1} - 1\right)(3^{\log_2 x} - x^2 + 1) = 0$

Bài 8. Giải phương trình: $64^{\log_4^2 x} = 3.2^{\log_2^2 x} + 3.4^{\log_4^2 x} + 4$

ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1. Giải phương trình: $9^x + 2(x-2)3^x + 2x - 5 = 0$

Lời giải:

Đặt $t = 3^x$, khi đó phương trình trở thành

$t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0$, coi đây là phương trình bậc 2 với ẩn là t

Ta có $\Delta' = (x-2)^2 - (2x-5) = (x-3)^2$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} t = 2 - x + x - 3 = 2x - 5 \\ t = 2 - x - (x - 3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -1(VN) \\ 3^x = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 5 - 2x \Leftrightarrow f(x) = 3^x + 2x - 5 = 0(*)$$

Xét hàm số $f(x)$ ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0$, do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến. mặt khác ta nhận thấy

$f(1) = 0$. Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 2. Giải phương trình: $\log_3^2(x+1) + (x-5)\log_3(x-1) - 2x + 6 = 0$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x > -1$.

Đặt $t = \log_3(x-1)$, khi đó phương trình trở thành

$$t^2 + (x-5)t - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3+x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) = 2 \\ \log_3(x+1) = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 9 \\ x+1 = 3^{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 3^x(x+1) - 27 = 0(*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x(x+1) - 27$ có $f'(x) = 3^x(x+1)\ln 3 + 3^x > 0$. Nên $f(x)$ là hàm đồng biến.

Mặt khác ta lại có $f(2) = 0$. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 2, x = 8$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $3^{2x} - (2^x + 9)3^x + 9 \cdot 2^x = 0$.

Bài 2. Giải phương trình: $9^{x^2} + (x^2 - 3)3^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0$.

Bài 3. Giải phương trình: $9^x + (x-12)3^x + 11 - x = 0$.

Bài 4. Giải phương trình: $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x-3$.

Bài 5. Giải phương trình: $4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x-3} = 16$.

Bài 6. Giải phương trình: $4^{x^2} + (x^2 - 7) \cdot 2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0$

Bài 7. Giải phương trình: $2(x^2 - 3^{x+1}) = 3x(1 - 4 \cdot 3^x) - 1$

Bài 8. Giải phương trình: $x^2 \cdot 5^{x-1} - (3^x - 3 \cdot 5^{x-1})x + 2 \cdot 5^{x-1} - 3^x - 0$

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Tính chất 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và có $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $f(x)$ tăng hoặc giảm trên một miền D thì phương trình $f(x) = 0$ chỉ có tối đa một nghiệm trên D .

Tính chất 3: Nếu hàm số $f(x)$ tăng hoặc giảm trên một miền D thì với 2 số $u, v \in D$, $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Tính chất 4: Nếu hàm số $f(x)$ tăng và hàm số $g(x)$ là hàm hằng hoặc hàm giảm trên miền D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên D .

Định lý Lagrange: Nếu hàm số $F(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $F'(x)$ trên khoảng $(a; b)$, khi đó tồn tại số $c \in (a; b)$ / $F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$.

Áp dụng với $F(a) = F(b) \Rightarrow \exists c \in (a; b) / F'(c) = 0$.

Định lý Rolle: Nếu hàm số $f(x)$ có $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in D$ thì phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Các tính chất 1, 2, 3, 4 được sử dụng trực tiếp khi làm bài.

Định lý Lagrange và định lý Rolle chúng ta sử dụng gián tiếp thông qua việc lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ (Xem các bài tập mẫu 6).

Bài 1. Giải phương trình: $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x > 0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 - x$. Nhận thấy vế trái là hàm số đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến. Mặt khác nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 2. Giải phương trình: $-2^{x^2-x} + 2^{x-1} = (x-1)^2$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2-x} + x^2 - x \Leftrightarrow f(x-1) = f(x^2-x), \text{ trong đó } f(t) = 2^t + t$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến

$$\text{Nên } f(x-1) = f(x^2-x) \Leftrightarrow x-1 = x^2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x \in \{0; 1\}$.

Bài 3. Giải phương trình: $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2.$

Lời giải:

+ Điều kiện $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} (*)$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 0$, khi đó phương trình trở thành

$$\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - u^2} - 2 = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t + 2) + 5^{t^2 - 1} - 2, t \geq 0$. Ta có

$f'(t) = \frac{1}{(t + 2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2 - 1} \cdot \ln 5 > 0, \forall t \geq 0$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến. Mặt khác ta lại có

$f(1) = 0$, do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình: $2^{x^2 - x} + 9^{3 - 2x} + x^2 + 6 = 4^{2x - 3} + 3^{x - x^2} + 5x.$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x^2 - x} + 3^{6 - 4x} + x^2 + 6 = 2^{4x - 6} + 3^{x - x^2} + 5x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2 - x} + x^2 - x - 3^{x - x^2} = 2^{4x - 6} + 4x - 6 - 3^{6 - 4x}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(4x - 6)$$

Trong đó $f(t) = 2^t + t - 3^{-t}$, ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 + 3^{-t} \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } f(x^2 - x) = f(4x - 6) \Leftrightarrow x^2 - x = 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \{2; 3\}$.

Bài 5. Giải phương trình: $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1.$

Lời giải:

Nhận thấy $x = -\frac{1}{2}$, không là nghiệm của phương trình. Khi đó phương trình tương đương với

$$3^x = \frac{2x + 1}{2x - 1} (*)$$

Vế trái của phương trình (*) là một hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, vế phải của (*) là một hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Nên trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ phương trình có tối đa 1 nghiệm.

Nhận thấy $x = \pm 1$ thỏa mãn phương trình.
 Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = \pm 1$.

Bài 6. Giải phương trình: $4^x + 6^x = 25x + 2$.

Lời giải:

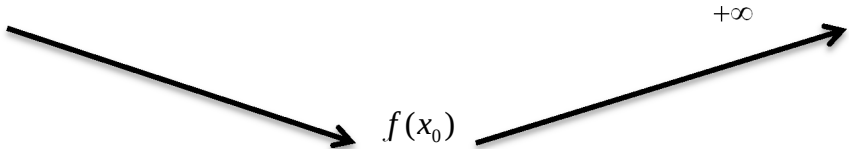
Phương trình đã cho tương đương với

$$4^x + 6^x - 25x - 2 = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 4^x + 6^x - 25x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 4^x \ln 4 + 6^x \ln 6 - 25, f''(x) = 4^x \ln^2 4 + 6^x \ln^2 6 > 0. \text{ Do đó } f'(x) \text{ là hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}. \text{ Mặt khác ta lại có } f'(0) = \ln 4 + \ln 6 - 25 < 0; f'(2) = 16 \ln 4 + 36 \ln 6 - 25 > 0$$

Nên $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0; 2)$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	0	x_0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Nhận thấy $x = 0, x = 2$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \{0; 2\}$.

$$\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2.$$

$$x > 0$$

$$\log_3 \frac{x^2 + x + 1}{x} = 2x - x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3^{2x - x^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 = 3, \forall x > 0$$

$$x = 1.$$

$$g(x) = 3^{2x - x^2} = 3^{1 - (x-1)^2} \leq 3^1 = 3$$

$$x = 1.$$

$$f(x) = g(x) = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài 8. Giải phương trình: $\log_{2012} \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$.

Ta có $\begin{cases} x^2 + x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 + 4x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ và $2x^2 + 4x + 4 - (x^2 + x + 3) = x^2 + 3x + 2$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\log_{2012} \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = (2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3)$$

Đặt $u = x^2 + 3x + 2, v = 2x^2 + 4x + 5$, khi đó phương trình trở thành:

$$\log_{2012} \frac{u}{v} = v - u \Leftrightarrow \log_{2012} u + u = \log_{2012} v + v$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{2012} t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2012} + 1 > 0, \forall t > 0$ do đó hàm số $f(t)$ đồng biến.

Vậy phương trình tương đương với:

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x = -1; x = -2.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x = -1; x = -2$.

Bài 9. Giải phương trình:

$$4(x-2)[\log_3(x-2) + \log_2(x-3)] = 15(x+1)$$

Lời giải:

Điều kiện $x > 3$, khi đó phương trình tương đương với

$$\log_3(x-2) + \log_2(x-3) = \frac{15(x+1)}{4(x-2)} \quad (*)$$

Phương trình (*) có vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến. Mặt khác lại có Nhận thấy $f(11) = g(11) = 5 \Rightarrow x = 5$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Đpcm

Bài 10. Giải phương trình: $5^x + 4^x + 3^x + 2^x = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 17$

Lời giải:

Kí hiệu vế trái của phương trình là $f(x)$, vế phải của phương trình là $g(x)$

Ta có vế trái là hàm đồng biến; vế phải là hàm nghịch biến. Mặt khác nhận thấy $f(1) = g(1) = 13$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $2^{x^2-x} - 2^{x+8} = 8 + 2x - x^2$.

Bài 2. Giải phương trình: $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 7} - 2$.

Bài 3. Giải phương trình: $9^x = 5^x + 4^x + 2(\sqrt{20})^x$.

Bài 4. Giải phương trình: $3 \cdot x^{\log_3 x} + (\log_3 x - 1)^2 = x^2$.

Bài 5. Giải phương trình: $2^x + 3^x = 5$.

Bài 6. Giải phương trình: $3^x + x - 4 = 0$.

Bài 7. Giải phương trình: $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$.

Bài 8. Giải phương trình: $8^x (3x + 1) = 4$.

Bài 9. Giải phương trình: $x(2 \cdot 3^x - 1) = 3^x + 2$.

Bài 10. Giải phương trình: $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

Bài 11. Giải phương trình: $2^{3x} + 3x \cdot 2^{2x} + (1 + 3x^2)2^x + x^3 + x - 2 = 0$.

Bài 12. Giải phương trình: $3^x + 5^x = 6x + 2$.

Bài 13. Giải các bất phương trình sau:

1.1- $(x+1)\log_{\frac{1}{2}} x + (2x+5)\log_{\frac{1}{2}} x + 6 \geq 0$.

1.2- $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$.

1.3- $\frac{3}{\log_2(x+1)} > \frac{2}{\log_3(x+1)}$.

1.4- $\frac{\lg\left(\frac{5+x}{5-x}\right)}{2^x - 3x + 1} < 0$.

1.5- $\log_7 x < \log_3(\sqrt{x} + 2)$.

1.6- $\log_2(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3(x^2 - 5x + 7) \leq 2$.

1.7- $2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.

1.8- $(4 \cdot 3^x + 3^{-x})^{3\log_3(x-1) - \log_3(x-1)(2x+1)} > 1$.

1.9- $(x+1)\log_{\frac{1}{3}} x + 2(x+3)\log_{\frac{1}{3}} x + 8 \leq 0$.

1.10- $\frac{\log_4(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0$.

Bài 14. Giải các phương trình sau:

1.1. $\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$.

1.2. $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$.

Bài 15. Giải các phương trình:

1.1. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = -x^2 + x - 1$.

$$1.2. \quad \frac{(x-1)^2 (\log_5 x - 11 + 2x)}{x+3} = 0.$$

$$1.3. \quad \frac{8}{3} \cdot x^{\log_3 4} = x^2 \cdot 2^{\log_3 x} - x^{\log_3 2}.$$

$$1.4. \quad 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 5^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{5}{12}\right)^x = -3x + 10.$$

$$1.5. \quad 2 \log_6 \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} \right) = \log_4 \sqrt{x}.$$

$$1.6. \quad 3^x + 2^x = 3x + 2.$$

$$1.7. \quad \log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x.$$

$$1.8. \quad 4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1) \sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$$

Bài 16. Giải các phương trình:

$$1.1. \quad 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x = -2x + 6$$

TỔNG HỢP BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Với cách giải thông thường của bất phương trình là xét hai trường hợp cơ sở lớn hơn 1 và nhỏ hơn 1. Tuy nhiên các em nên làm theo cách gộp luôn cả tích $(a-1)$ vào bất phương trình, với cách này thì bài giải sẽ gọn và nhanh hơn cả.

Với các bất phương trình có dạng sau, ta biến đổi như dưới đây.

$$\text{Dạng 1: } a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)(f(x) - g(x)) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2: } \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \\ (a-1)(f(x) - g(x)) \geq 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải bất phương trình: $4^{\frac{x-1}{x+1}} \leq \frac{1}{4} \cdot 32^{\frac{x}{x-2}}.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$$2^{\frac{2(x-1)}{x+1}} \leq 2^{-2} \cdot 2^{\frac{5x}{x-2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-2}{x+1}} \leq 2^{\frac{3x+4}{x-2}} \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x+1} \leq \frac{3x+4}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 13x}{(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -13 \vee -1 < x < 0 \vee x > 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty; -13] \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty).$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}}.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$$(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x} \leq 4$$

$$\text{Đặt } t = (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = \frac{1}{t}$$

Khi đó bất phương trình trở thành

$$t + \frac{1}{t} \leq 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Bài 3. Giải bất phương trình :

$$\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) \right] < 0.$$

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) \right] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) > 0 \\ \log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) > 1$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 - x} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x} > 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < 0 \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2x^2 - x > 4 - 4x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -4) \cup (1; +\infty).$

Bài 4. Giải bất phương trình : $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + 4}{x + 4} \right) < 0.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} : \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2+4}{x+4} \right) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6 \frac{x^2+4}{x+4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2+4}{x+4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+4}{x+4} > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+4} > 6 &\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} > 0 \Leftrightarrow -4 < x < -3 \vee x > 8. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-4; -3) \cup (8; +\infty)$.

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$.

Lời giải:

$$+ \text{Điều kiện} \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3 (9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9^x - 72 > 1 \Leftrightarrow x > \log_9 73 > 1 (*)$$

Khi đó với $x > 1$, bất phương trình tương đương với

$$\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3 (9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 9^x - 72 \leq 3^x \Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 \leq 0$$

Xét hàm số $f(x) = 9^x - 3^x - 72$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy bất phương trình

$$f(x) \leq 0 = f(2) \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Kết hợp với điều kiện suy nghiệm của bất phương trình là $S = (\log_3 73; 2]$.

Bài 6. Giải bất phương trình: $\log_x (3x-1) > \log_x (x^2+1)$.

Lời giải:

$$+ \text{Điều kiện} \frac{1}{3} < x \neq 1.$$

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\log_x (3x-1) > \log_x (x^2+1) \Leftrightarrow (x-1)(3x-1-x^2-1) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left(\frac{1}{3}; 2 \right) \setminus \{1\}.$$

Bài 7. Giải bất phương trình: $\log_{x(3-x)} (3-x) > 1$.

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$$\log_{x(3-x)} (3-x) > 1 \Leftrightarrow \log_{x(3-x)} (3-x) > \log_{x(3-x)} x(3-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x(3-x) \neq 1 \\ 3-x > 0 \\ (x(3-x)-1)(3-x-x(3-x)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x(3-x) \neq 1 \\ 3-x > 0 \\ (x^2-3x+1)(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\log_{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} 2 \leq \log_{\sqrt{x+1}} 2$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 0 < x+1 \neq 1 \\ 0 < \sqrt{x+2}-\sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq \frac{1}{4}.$

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\log_{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} 2 \leq \log_{\sqrt{x+1}} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) \geq \log_2 \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x} \geq \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 1-x \geq 2\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (1-x)^2 \geq 4(x^2+x) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(0; \frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \right).$$

Bài 9. Giải bất phương trình: $\log_2(\sqrt{x-2}+4) \leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+8}\right)$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x \geq 2$

Khi đó ta có vế trái của bất phương trình $VT = \log_2(\sqrt{x-2}+4) \geq \log_2 4 = 2$.

$$VP = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right) \leq \log_3\left(\frac{1}{1}+8\right) = 2.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$VP = VT = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bài 10. Giải bất phương trình: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}$.

Lời giải:

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Xét } A = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}.$$

$$\text{Xét } B = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy

+ Nếu $-1 < x < 0, VT < 0; VP > 0 \Rightarrow BPT$ vô nghiệm.

+ Nếu $0 < x < \frac{1}{2}, VT > 0; VP < 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

+ Nếu $1 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow VT > 0, VP < 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

+ Nếu $x > \frac{3}{2} \Rightarrow VT < 0, VP < 0$, khi đó bất phương trình tương đương với

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

Kết hợp với trường hợp đang xét suy ra $x > 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty).$$

Bài 11. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leq 0$.

Lời giải:

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 8x - 2x^2 - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $x=1$, bất phương trình trở thành $\log_5 \frac{1}{5} + 1 \leq 0$ luôn đúng.

Với $x=3$, bất phương trình trở thành $\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \leq 0 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 12. Giải bất phương trình: $x(3\log_2 x - 2) > 9\log_2 x - 2$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x > 0$, khi đó bất phương trình tương đương với

$$3(x-3)\log_2 x > 2(x-1)$$

Nhận thấy $x=3$ không là nghiệm của bất phương trình.

+ Nếu $x > 3$, khi đó bất phương trình trở thành

$$\frac{3}{2}\log_2 x > \frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x - \frac{x-1}{x-3} > 0$$

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2x\ln 2} + \frac{2}{(x-3)^2} > 0$, nên $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$. Mặt khác

$$f(4) = 0, \text{ vậy } f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4.$$

+ Nếu $x < 3$, khi đó bất phương trình trở thành

$$\frac{3}{2}\log_2 x < \frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x - \frac{x-1}{x-3} < 0$$

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2x\ln 2} + \frac{2}{(x-3)^2} > 0$, nên $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0; 3)$. Mặt khác

$$f(1) = 0, \text{ vậy } f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

Bài 13. Giải bất phương trình: $\frac{2^x + 2x - 5}{x - 2} > 1$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x \neq 2$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\frac{2^x + 2x - 5}{x - 2} > 1 \Leftrightarrow \frac{2^x + 2x - 5}{x - 2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2^x + x - 3}{x - 2} > 0$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x - 3$, ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0$. Do đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác ta lại có $f(1) = 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1; f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Vậy nếu $x < 1 \Rightarrow f(x) < 0; x - 2 < 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm với $x < 1$.

Nếu $1 < x < 2 \Rightarrow f(x) > 0; x - 2 < 0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $x > 2 \Rightarrow f(x) > 0; x - 2 > 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm với $x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Bài 14. Giải bất phương trình : $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$

Lời giải :

Điều kiện $x > 0$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^{-x} > 1 \\ 2\log_2 x - \log_2(x+6) > 0 \\ 2^x + 3 \cdot 2^{-x} < 1 \\ 2\log_2 x - \log_2(x+6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3; +\infty)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải bất phương trình: $\frac{2^{x-1} + 6x - 11}{x - 2} > 4$.

Bài 2. Giải bất phương trình: $2^{2x^2-4x+2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \leq 0$.

Bài 3. Giải bất phương trình : $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x \leq 0$.

Bài 4. Giải bất phương trình: $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$.

Bài 5. Giải bất phương trình: $(\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} \leq (\sqrt{10} - 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$.

Bài 6. Giải bất phương trình: $\sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 2x > 3 \cdot 2^x \sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 4x^2 \cdot 3^x$.

Bài 8. Giải bất phương trình: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2}{2} + 2^{\log_2(x-1)} \right) + 3 \right]} \geq 1$.

Bài 9. Giải bất phương trình: $x^4 - 8e^{x-1} > x(x^2 e^{x-1} - 8)$.

Bài 10. Giải bất phương trình: $4x^2 + x \cdot 2^{x^2+1} + 3 \cdot 2^{x^2} > x^2 \cdot 2^{x^2} + 8x + 12$.

Bài 11. Giải các bất phương trình sau

1. $\log_{x^2} \frac{4x-2}{|x-2|} \geq \frac{1}{2}$.

2. $\log_{\frac{x+1}{2}} \log_2 \frac{2x-1}{x+3} < 0$.

3. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-2x-x^2}{14} > 1.$

4. $\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right) \left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right) \log_x \frac{2}{x}.$

Bài 12. Giải các bất phương trình sau

1. $5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}.$

2. $\frac{\lg \frac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0.$

3. $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x) - 3} \leq 1.$

4. $\log_{\frac{1}{2}} \log_5(\sqrt{x^2 + 1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2 + 1} - x).$

Bài 13. Giải các bất phương trình sau

1. $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt[3]{2-x}).$

2. $\log_4(18 - 2^x) \log_2\left(\frac{18 - 2^x}{2}\right) \leq -1.$

3. $\frac{\log_2(x^2 - 9x + 8)}{\log_2(3 - x)} < 2.$

4. $\sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} < 1.$

Bài 14. Giải các bất phương trình sau

1. $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(x+3).$

2. $\log_{\frac{1}{3}} \log_4(x^2 - 5) > 0.$

3. $\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x-5|} \geq 0.$

4. $\frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x + 11)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0.$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

1.1. $\frac{1 - \lg^2 x^2}{\lg x - 2 \lg^2 x} = \lg x^4 + 5$

1.2. $2 \log_2 \frac{x-3}{x-7} + 1 = \log_3 \frac{x-3}{x-1}$

Bài 16. Giải các bất phương trình sau:

- 1.1. $(x+1)\log_{\frac{1}{2}} x + (2x+5)\log_{\frac{1}{2}} x + 6 \geq 0.$
- 1.2. $\frac{3}{\log_2(x+1)} > \frac{2}{\log_3(x+1)}.$
- 1.3. $\frac{\lg \frac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0.$
- 1.4. $\log_2(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3(x^2 - 5x + 7) \leq 2.$
- 1.5. $\log_7 x < \log_3(\sqrt{x} + 2).$
- 1.6. $2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1.$
- 1.7. $(4 \cdot 3^x + 3^{-x})^{3\log_3(x-1) - \log_3(x-1)(2x+1)} > 1$
- 1.8. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0.$
- 1.9. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}.$
- 1.10. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} > 0.$
- 1.11. $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{9x - x^2} + 3) > \log_3 \frac{27}{\sqrt{9x - x^2} + \sqrt{5 - x^2}} - 3.$
- 1.12. $\log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x+1} + 1} + 1$

Bài 17. Giải các bất phương trình:

- 1.1. $(2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4)\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0.$
- 1.2. $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0.$
- 1.3. $\frac{3^x + x - 4}{x^2 - x - 6} > 0.$
- 1.4. $\sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 2x > 3^x \cdot \sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + (2x)^2 \cdot 3^x.$
- 1.5. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_7(\sqrt{x^2 + 1} + x)\right) < \log_4\left(\log_{\frac{1}{7}}(\sqrt{x^2 + 1} - x)\right).$
- 1.6. $2^{(\log_2 x)^2} + x^{\log_2 x} < 0.$
- 1.7. $2\log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \frac{2}{3}.$

$$1.8. \quad \frac{1}{\log_4(x+3)} > \frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}}$$

$$1.9. \quad \log_{\frac{x+6}{3}} \log_2 \frac{x-1}{x+2} > 0$$

$$1.10. \quad (4x^2 - 16x + 7) \log_3(x-3) > 0$$

$$1.11. \quad \left(\log_{\frac{1}{2}}(1-|x|) - \frac{1}{2} \right) \cdot \log_x \frac{4x+1}{6(x+1)} < 0.$$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Bài 1.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ y = 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 5y^2 + 4y = 0 \\ y = 2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 \\ y = 2^x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là $(0;1), (2;4)$.

Bài 2.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{x+y} + 3 \cdot 4^{2y} = 8 \\ x + 3y = 2 - \log_4 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ (x+y-1) + (2y-1) = -\log_4 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ (x+y-1) + (2y-1) = \log_4 3^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ 4^{(x+y-1)+(2y-1)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = 4^{x+y-1}, v = 4^{2y-1} \Rightarrow \begin{cases} u + 3v = 2 \\ uv = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} = 1 \\ 4^{2y-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + \log_4 3) \\ y = \frac{1}{2}(1 - \log_4 3) \end{cases}$$

Bài 3.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3 \cdot 2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y = 4 \end{cases}$$

Đặt $u = 4^{x^2-1}$, $v = 2^y$, khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1 \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(u^2 - 4uv + v^2) = (v^2 - 3uv) \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u^2 - 13uv + 3v^2 = 0 \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-3v)(4u-v) = 0 \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3v \\ u = \frac{1}{4}v \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases}$$

+ Nếu $u = 3v \Rightarrow v^2 - 9v^2 = 4 \Rightarrow$ vô nghiệm.

+ Nếu $u = \frac{1}{4}v \Rightarrow v^2 - \frac{3}{4}v^2 = 4 \Leftrightarrow v = 4 > 0 \Rightarrow u = 1$

Vậy $\begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 4.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{2|x|+1} - 3 \cdot 2^{|x|} = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = 2^{2|x|} - 2 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $u = 2^{|x|} \geq 1$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u^2 - 3u = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-y)(u+y-1) = 0 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 2.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Bài 3.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 7xy + 6y^2 = 0 \\ 3^{x+2y+1} - 3^{4y+x+1} + 3^{3y+x} = 0 \end{cases}$$

Bài 4.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 + 4^{x-y}) \cdot 5^{1-x+y} = 1 + 3^{x-y+2} \\ x^2 - 3y\sqrt{y - \frac{1}{x}} = 1 - 2y \end{cases}$$

Bài 5.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} e^{x-y} + e^{x+y} = 2(x+1) \\ e^{x+y} = x - y + 1 \end{cases}$$

Bài 6.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases}$$

Bài 7.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Bài 8.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Bài 9.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

Bài 10.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + xy + \frac{3}{2} = 2^y \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 11.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^4 + y)3^{y-x^4} = 1 \\ 8(x^4 + y) - 6^{x^4-y} = 0 \end{cases}$$

Bài 12.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 32 \cdot 2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases}$$

Bài 13.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 5^{\frac{x-y}{3}} \\ 5^{\frac{x-y}{3}} = 5 \cdot 3^{x-y-3} \end{cases}$$

Bài 14.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2 + 3} + 1 = 6\sqrt{2y^2 - 2y + 1} + 8y \end{cases}$$

Bài 15.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

Bài 16.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} \cdot 3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ y + \log_3 x = 1 \end{cases}$$

Bài 17.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x + y) - \log_3(2x - y) = 1 \end{cases}$$

Bài 18.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$$

Bài 19.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

Bài 20.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Bài 21.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

Bài 22.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 23.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8 (\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$$

Bài 24.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \frac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$$

Bài 25.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$$

Bài 26.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_x(6x+4y) = 2 \\ \log_y(6y+4x) = 2 \end{cases}$$

Bài 27.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2) + \log_{2+y}(x^2-2x+1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$$

Bài 28.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

Bài 29.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^{\log_2 x} + \log_2^2 \left(\frac{x}{2} \right) = y^2 \\ \log_2(xy - x + y) = 2\log_2 x \end{cases}$$

Bài 30.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_{x+y}(3x+y) + \log_{3x+y}(x^2 + 2xy + y^2) = 3 \\ 4^{x+y} + 2.4^{\frac{x}{x+y}} = 20 \end{cases}$$

Bài 31.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_3 y - 2^x = 4 \\ 2^x \cdot \log_3 y = \log_3 y^2 + 2^{x+1} \end{cases}$$

Bài 32.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_3 y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1 \\ \log_2 y = (\log_2 x - 1)\log_2 3 \end{cases}$$

Bài 33.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{3-x}(6-3y+xy-2x) + \log_{2-y}(x^2-6x+9) = 6 \\ \log_{3-x}(5-y) - \log_{2-y}(x+2) = 1 \end{cases}$$

Bài 34.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x \end{cases}$$

Bài 35.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 36.

Chứng minh với mỗi số dương a , hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

Bài 37.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 38.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(x+y) = x+y-1 \\ \log_{x+y+2}(xy+1) = x+y-1 \end{cases}$$

Bài 39.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y-x)(x^2 - xy + y^2) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Bài 40.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2 \\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right) + \log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right) = (x-2)^3 \end{cases}$$

Bài 41.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2 \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3 \end{cases}$$

Bài 42.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + 3\lg 2 \\ \lg(x + y) + \lg(x - y) = \lg 3 \end{cases}$$

Bài 43.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$$

Bài 44.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x + 3y) \\ \log_4(xy + 1) - \log_4(4y^2 + 2y - 2x + 4) = \log_4 \frac{x}{y} - 1 \end{cases}$$

Bài 45.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 y) \\ \log_4(\log_2 x) = \log_2(\log_4 y) \end{cases}$$

Bài 46.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 12 \end{cases}$$

Bài 47.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + xy + y = 14 \\ \log_{x+1}(y + 2) - \log_{y-2}(x + 1) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Bài 48.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x - y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}$$

Bài 49.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ (2y^2 - y + 12) \cdot 3^x = 81y \end{cases}$$

Bài 50.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

A. PHẦN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

Bài 1. Giải phương trình: $\log_2(8-x^2) + \log \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0 (x \in \mathbb{R})$.

Bài 2. Giải phương trình: $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$.

Bài 3. Giải phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2+x-1) + \log_{x-1}(2x-1)^2 = 4$.

Bài 4. Giải phương trình: $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}\right) < 0$.

Bài 6. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0$.

Bài 7. Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$.

Bài 8. Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$.

Bài 9. Giải phương trình: $(\sqrt{1+x^2} + x)^{\log_2 2012} - (\sqrt{1+x^2} - x)^{\log_2 2011} = 2x$.

Bài 10. Giải phương trình: $(\log_2 x)^2 + x \log_6(x+2) = \log_2 x \left(\frac{x}{2} + 2 \log_6(x+2) \right)$.

Bài 11. Giải bất phương trình: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}(x+1)}$.

Bài 12. Giải phương trình:

$$2 \cdot 9^x + (4x - 39 - \sqrt{3^x + 16}) \cdot 3^x - (2x - 13)(13 + \sqrt{3^x + 16}) = 0.$$

Bài 13. Giải bất phương trình:

$$(x-3) \log_2(x^2-2) < (x-3) [\log_2(x+11) + 2]$$

Bài 14. Tìm nghiệm $x \in (0; 2)$ của phương trình

$$4^{\frac{1}{x}-2x+1} - 4^{x^2-2x+1} = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right)$$

Bài 15. Giải bất phương trình:

$$\frac{2^{4-x} - x + 1}{(\log_2 |x| - 2)(x^2 - 25)} \geq 0$$

Bài 16. Giải bất phương trình:

$$3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1$$

Bài 17. Giải phương trình

$$\frac{\log_3(2x+1) + \log_5(4x+1) + \log_6(6x+1) - 3x}{x^2(x^3-3x+2)} = 0$$

Bài 18. Giải phương trình: $(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2$.

Bài 19. Giải các bất phương trình:

1.1. $\frac{(5^{x-2} + x - 3)(x^2 + 5x + 6)}{3^{x-1} - 1} \geq 0$.

1.2. $\frac{(3 \cdot 2^{x+2} - 7x - 17)(\log_4(x+4) + \log_7(x+7) - 2)}{x^2 - 9} < 0$.

1.3. $\sqrt{2 \cdot 6^x - 4^x} + \sqrt[3]{3 \cdot 12^x - 2 \cdot 8^x} \geq 2 \cdot 3^x$.

1.4. $4^x + (x^3 - x) \ln(x^2 + x + 2) \geq 4^{\sqrt[3]{x}}$.

1.5. $x^{\log_2 x} + x^{5 \log_x 2 - \log_2 x} - 18 < 0$.

1.6. $2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2^{2x+1} + 4x + 2}$.

1.7. $(2^x - 2)^2 < (2^x + 2)(1 - \sqrt{2^x - 1})^2$.

1.8. $2^{x^2 + \sqrt{x-1} - 1} + 2 \leq 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$.

1.9. $\frac{4^x - 2^{x+2} - x^2 + 2x + 3}{\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt{2x+1}} > 0$

1.10. $(\sqrt{5} + 1)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3 \cdot (\sqrt{5} - 1)^{-x^2+x}$

1.11. $\log_{0,25} \left(\frac{2-x}{16^x - 2x} \right) \leq x$

1.12. $(2 + \sqrt{5})^{\log_{0,5} 0,5x} \geq \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{\log_2 x + \log_{2x} 0,25}$

1.13. $3^{2 \log_2 (x^3 + 3x + 4)} - 8(x^3 + 3x + 4)^{\log_2 3} < 9$

1.14. $3^{3x-x^2-1} \geq 2 + 3^{x^3-1} \quad x \in \mathbb{R}$

1.15. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2x}{2-x} \right) - 4} \leq \sqrt{5}$

1.16. $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2 - x)2^{x+1} + x \cdot 2^{x+2} \cdot \sqrt{2-x^2}$

1.17. $5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + \sqrt{6 + x - x^2}$

1.18. $\log_4(x^2 - x - 8) \leq 1 + \log_3 x$

1.19. $\frac{6-3^x}{x} > \frac{10}{2x-1}, x > 0$

1.20. $3^{x^2-4} + (x^2 - 4) \cdot 3^{x-2} \geq 1$

1.21. $4x^2 + x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} < 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} x^2 + 2x + 6$

1.22. $\log_2(\sqrt{x^2 + 3 - x^2} - 1) + 2 \log_2 x \leq 0$

$$1.23. \quad \ln(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) - \ln(x^3 + x^2) \leq \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$$

$$1.24. \quad (3^x - 2x - 1)(\sqrt{x+3} - 2) > 0$$

$$1.25. \quad \log_2(4x^2 - 4x + 1) - 2x > 2 - (x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

$$1.26. \quad \log_{\frac{x}{4}}\left(\log_2\left(x + \sqrt{2x^2 - x}\right)\right) < 0$$

Bài 20. Giải các phương trình sau:

$$1.1. \quad \log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$$

$$1.2. \quad \log_x(3 - \sqrt{x^2 + x + 1}) = \frac{1}{2}$$

$$1.3. \quad (26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1$$

$$1.4. \quad \log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$$

$$1.5. \quad 2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)}$$

$$1.6. \quad (\log_x \sqrt{2x+1} - 2) \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - 3^{2x-x^2} \right) = 0$$

$$1.7. \quad \log_2(\sqrt{x-2} + 4) = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8\right)$$

$$1.8. \quad \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} + 2\sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 6$$

$$1.9. \quad \left(\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) - 2 \right) \left((1+x)(2+4^x) - 3 \cdot 4^x \right) = 0$$

$$1.10. \quad \sqrt{x} \left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}} \right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$$

$$1.11. \quad 4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$$

$$1.12. \quad x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$$

$$1.13. \quad 2^x(2^{2^x+x} + 1) + \log_2 x + 2x = \frac{9x + 512}{x}$$

$$1.14. \quad 3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$$

$$1.15. \quad \log_4\left(2x + \frac{1}{2x}\right) + \log_{0,25}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{29}{4}\right) = \log_{0,5}\sqrt{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}}$$

$$1.16. \quad x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln x} - \frac{2}{3}\ln(x+2\ln x) = 0$$

- 1.17. $(\sqrt{3}+1)^{\log_2 x} + x(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x} = 1+x^2$
- 1.18. $(x+1)\ln \frac{x+1}{x} + x-1 = x(x^2+1)\ln \frac{x^2+1}{x^2}, x \geq 1$
- 1.19. $\ln(x^2+x+1) + x + x^4 = 0$
- 1.20. $x^2 - x - 1 = x^2 \cdot e^{x+1} - (x+1)e^{x^2}$
- 1.21. $\log_{2x}\left(\frac{x^3}{2}\right) + \log_{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{x}} = 2$
- 1.22. $\log_2(x^2+1) - \log_2 x = 3x^2 - 2x^3$
- 1.23. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$
- 1.24. $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2 \cdot 3^{\log_2 4x^2}$
- 1.25. $\log_2(x^2+2)\log_{2-x} 2 - 2 = 0$
- 1.26. $\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right)\left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(2 + \sqrt{14x - 2x^2 - 24}\right)\log_x \frac{2}{x}$
- 1.27. $|\ln(2x-3) + \ln(4-x^2)| = |\ln(2x-3)| + |\ln(4-x^2)|$
- 1.28. $4(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = 15(x+1)$
- 1.29. $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}} = 1-x, x > 0$
- 1.30. $x \cdot 3^{x^2-1} + (x^2-1) \cdot 3^x + 1 - x - x^2 = 0$
- 1.31. $x^2(6^{x^2-4x+3} + 8^{x^2-4x+3} + 9^{x^2-4x+3}) = (2x^3+1)12^{x^2-4x+3}$
- 1.32. $(6^x - 3^x)(19^x - 5^x)(10^x - 7^x) + (15^x - 8^x)(9^x - 4^x)(5^x - 2^x) = 231^x$
- 1.33. $\log_2 \frac{4^x - 2^x + 1}{2 \cdot 16^x - 2 \cdot 4^x + 1} = 2^x(2 \cdot 8^x - 3 \cdot 2^x + 1)$
- 1.34. $27^x = (6x^2 - 4x + 1)9^x$
- 1.35. $\log_4(x^2+x+1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1) = \frac{1}{3}\log_2(x^2+x+1)^3 + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x^4-x^2+1})$
- 1.36. $(x+6) \cdot 5^{1-|x-1|} - x = (x+1)|5^x - 1| + 5^{x+1} + 1$
- 1.37. $(x-1)^2 + 4\sqrt{x^2-2x} - 2(2\sqrt{x^2-2x}+1)\ln\sqrt{x^2-2x} \geq 6$

Bài 21. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình $2\log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x$ thỏa mãn bất đẳng

thức $\cos \frac{\pi x}{16} < \sin \frac{16\pi}{x}$

B. PHẦN HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

- 1.1.
$$\begin{cases} \frac{\log_2 x}{1 + \log_2^2 x} + \frac{\log_2 y}{1 + \log_2^2 y} = \frac{9}{10} \\ (1 + \log_x 2 \cdot \log_y 2) \log_2(xy) = \frac{9}{2} \end{cases}$$
- 1.2.
$$\begin{cases} \log_2 x = 2^{y+2} \\ 4\sqrt{1+x} + xy\sqrt{4+y^2} = 0 \end{cases}$$
- 1.3.
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y + 3x + 7) = 6 \\ 2 \cdot 8^x + 2^{y+2} = 17 \cdot 2^{y+3x-1} \end{cases}$$
- 1.4.
$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + 1} + \log_3(2x - y) = 4xy - 4x^2 + \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 1} + \log_3 y \\ \sqrt{y^2 + 5} = x^2 - \sqrt{x - 1} \end{cases}$$
- 1.5.
$$\begin{cases} x^3 + x + \log_2 \frac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1 \\ y^2 - xy + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$
- 1.6.
$$\begin{cases} \log_{x+y}(3x + y) + \log_{3x+y}(x^2 + 2xy + y^2) = 3 \\ 4^{x+y} + 2 \cdot 4^{\frac{x}{x+y}} = 20 \end{cases} \quad (x \in R)$$
- 1.7.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_{xy} 16 = 4 - \frac{1}{\log_y 2} \\ 4x^4 + 8x^2 + xy = 16x^2 \sqrt{4x + y} \end{cases}$$
- 1.8.
$$\begin{cases} y^{2y^2+x^2} = y^{3xy} \\ \log_{y-2x}(y + 2x) = \log_{2y-2x-1}(4x^2 + xy + x) \end{cases}$$
- 1.9.
$$\begin{cases} x \geq y^2 - 4y + 5 \\ \log_{x+1}(4y^2 - 12y + 9) = \frac{x^2 + 2x + 10}{6y - 9} \\ y > \frac{3}{2} \end{cases}$$
- 1.10.
$$\begin{cases} e^x + (x^2 - y) \ln(x + y + 2012) = e^{\sqrt{y}} \\ 2^x(2^x - 1) + 3^x(3^x - 1) = 34y - 26x \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} + \frac{1}{1+10^y} = \frac{3}{1+2^y}, x, y \geq 0 \\ 2^{x+\frac{y}{2}} = 2^{\sqrt{2x^2+\frac{y^2}{2}}} \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y = \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x, x, y > 0 \\ e^x + (x^3 - y) \ln(y^2 + x + 2) = e^{\sqrt[3]{x}} \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} = 5 \\ \log_3 8xyz^3 = 10 \log_9 z^2 - \left(\log_3 \frac{3x^2 z}{y}\right)^2 \end{cases}$$