

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 8: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Dang Thanh Nam

Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Email : dangnamneu@gmail.com

Yahoo: changtraipkt

Mobile: 0976266202

Các yếu tố trong tam giác cần nắm vững

+ Với tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH khi đó

$$BC^2 = AB^2 + AC^2; AB^2 = BH \cdot BC; AC^2 = CH \cdot BC; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

+ Với tam giác ABC có các cạnh là a, b, c độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c và có bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r , nửa chu vi là p khi đó

$$\text{Định lý cosin: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\text{Từ đó tính được: } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}, \sin B, \sin C.$$

$$\text{Định lý hàm số sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Độ dài đường trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}; m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$$

$$S = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{Với tam giác đều cạnh } a \text{ thì có diện tích là } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Diện tích hình thang } S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h \text{ (} a, b \text{ là hai cạnh đáy và } h \text{ là chiều cao).}$$

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD$

Các công thức tính thể tích

+ V (khối hộp chữ nhật) $= abc$ (với a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật).

+ V (khối chóp) $= \frac{1}{3} dt$ (đáy).chiều cao

+ V (khối lăng trụ) $= dt$ (đáy).chiều cao

+ V (khối cầu) $= \frac{4}{3} \pi R^3$

Phương pháp xác định chiều cao của khối chóp

Loại 1: Khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy đó chính là chiều cao của khối chóp.

Loại 2: Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao chính là đường kẻ từ đỉnh khối chóp đến giao tuyến của mặt bên đó với đáy khối chóp.

Loại 3: Khối chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao chính là giao tuyến của hai mặt bên đó.

Loại 4: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đường cao là đường kẻ từ đỉnh khối chóp đến tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy.

Loại 5: Khối chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đường cao là đường kẻ từ đỉnh đến tâm vòng tròn nội tiếp đáy.

Loại 6: Khối chóp có hai mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao khối chóp hạ từ đỉnh sẽ nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi hai cạnh nằm trên mặt đáy của hai mặt bên. Chẳng hạn khối chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAC) và (SAB) cùng tạo với đáy góc α khi đó chân đường cao của khối chóp hạ từ đỉnh S nằm trên đường phân giác của góc BAC .

Loại 7: Khối chóp có hai cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao hạ từ đỉnh khối chóp nằm trên đường trung trực nối giữa hai giao điểm của hai cạnh bên với đáy. Chẳng hạn khối chóp $S.ABCD$ có cạnh $SB = SD$ khi đó chân đường cao của khối chóp hạ từ đỉnh S nằm trên đường trung trực của BD .

Việc xác định chân đường cao của khối chóp giúp ta giải quyết bài toán

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

+ Tính thể tích khối chóp thông qua công thức $V(\text{khối chóp}) = \frac{1}{3} dt(\text{đáy}) \cdot \text{chiều cao}$.

+ Tính góc tạo bởi đường thẳng hoặc mặt phẳng bên với đáy hoặc tính góc giữa hai mặt bên khối chóp (góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy chính là góc tạo bởi cạnh bên và đường thẳng nối chân đường cao khối chóp và giao điểm của cạnh bên với đáy). Chẳng hạn khối chóp $SABCD$ có chân đường cao hạ từ đỉnh S của khối chóp là H khi đó góc tạo bởi cạnh bên SA và mặt phẳng đáy chính là góc giữa hai đường thẳng SA và AH .

+ Tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng: $h = \frac{3V}{S_d}$.

Phương pháp tính thể tích khối đa diện

+ Khi xác định được chiều cao khối chóp thì áp dụng cách tính trực tiếp thể tích khối chóp nhờ công thức $V(\text{khối chóp}) = \frac{1}{3} dt(\text{đáy}) \cdot \text{chiều cao}$.

+ Phân chia khối đa diện thành nhiều khối đa diện hơn và dễ tính thể tích hơn.

+ Dùng tỷ số thể tích:

Cho ba đường thẳng không đồng phẳng SA, SB, SC các điểm $A' \in SA; B' \in SB; C' \in SC$ khi đó ta có tỷ số thể tích

$$\frac{V(SA'B'C')}{V(SABC)} = \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC}$$

$$\frac{V(A'ABC)}{V(SABC)} = \frac{A'A}{SA}$$

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên d đến (P) là như nhau.

- Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm M và có hai điểm A, B trên d sao cho $AM = kBM$ thì $d(A; (P)) = k \cdot d(B; (P))$. Áp dụng khi tính khoảng cách trực tiếp từ một điểm đến mặt phẳng khó khăn.

Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Giả sử I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $S.A_1A_2...A_n$ khi đó

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- + I thuộc trục đường tròn đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.
 - + I cách đều tất cả các điểm $S, A_1, A_2, \dots, A_n$ nên I phải nằm trên mặt phẳng trung trực của SA_1 .
- Để chứng minh các điểm đều thuộc một mặt cầu
- + Chứng minh các điểm cùng nhìn một cạnh dưới một góc 90° .
 - + Chứng minh chúng cách đều một điểm nào đó.

Dưới đây trình bày 4 bài toán cơ bản nhất, các em nên nắm vững để áp dụng vào bài thi

Bài toán cơ bản 1: Cho khối chóp có diện tích đáy là S và chiều cao khối chóp h khi đó thể tích

khối chóp được xác định theo công thức $V = \frac{1}{3} S.h$.

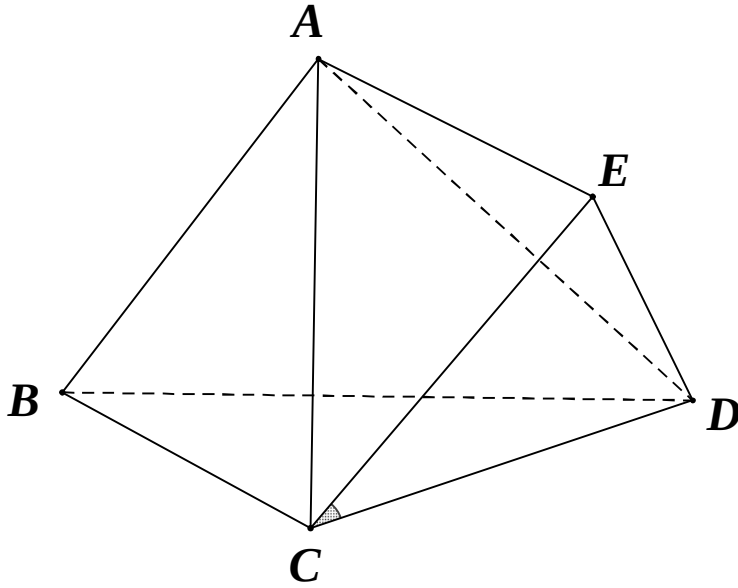
Bài toán cơ bản 2: Cho khối chóp $S.ABC$ trên các cạnh $SA; SB; SC$ lần lượt lấy các điểm $A'; B'; C'$. Khi đó ta có

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA_1} \cdot \frac{SB}{SB_1} \cdot \frac{SC}{SC_1}$$

Bài toán cơ bản 3: Cho tứ diện $ABCD$, có d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD và α là góc giữa hai đường thẳng đó. Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ được xác định theo công thức

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin \alpha$$

Chứng minh:



Dựng hình bình hành $ABCE$, khi đó $\widehat{ECD} = \alpha$

Ta có $V_{ABCD} = V_{E.BCD} = V_{B.CED}$ (do AE song song với mặt phẳng BCD)

Do AB song song với mặt phẳng CED nên khoảng cách giữa $AB; CD$ cũng chính là khoảng cách từ B đến mặt phẳng CED

Vậy $V_{ABCD} = V_{B.CED}$

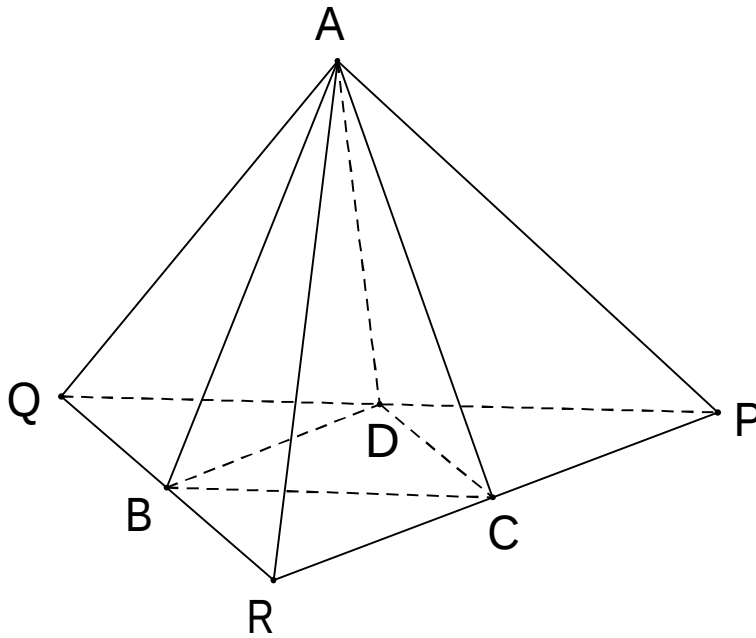
$$= \frac{1}{3} d(B; (CED)) \cdot \frac{1}{2} CE \cdot CD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha$$

Bài toán cơ bản 4: Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau

$AB = CD = a; AC = BD = b; AD = BC = c$.

Lời giải:

Dựng tứ diện $APQR$ sao cho $B; C; D$ lần lượt là trung điểm của $QR; RP; PQ$



Ta có $AB = CD = \frac{1}{2}QR$, mà B

là trung điểm của QR suy ra tam giác AQR vuông tại A

$$\Rightarrow AQ \perp AR$$

Một cách tương tự, ta cũng có

$$AP \perp AQ; AR \perp AP$$

$$\text{Do } S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{PQR}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}AQ \cdot AR \cdot AP$$

Ta xác định AQ; AP; AR:

Theo định lý pitago ta có:

$$\begin{cases} AQ^2 + AR^2 = QR^2 = (2CD)^2 = 4a^2 \\ AQ^2 + AP^2 = QP^2 = (2BC)^2 = 4c^2 \\ AP^2 + AR^2 = PR^2 = (2BD)^2 = 4b^2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đây suy ra: } AQ = \sqrt{2(a^2 - b^2 + c^2)}; AP = \sqrt{2(-a^2 + b^2 + c^2)}; AR = \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

1.1. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG CÔNG THỨC TRỰC TIẾP

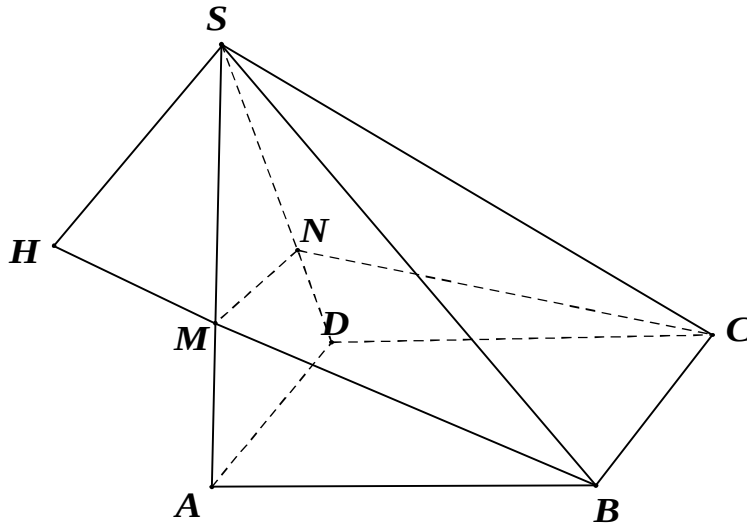
- Với những khối chóp ta xác định được đường cao một cách tương đối dễ thì nên áp dụng cách này. Đây cũng là cách thông dụng nhất để giải các bài toán thi đại học, vì mức độ yêu cầu học sinh nắm chắc cách vận dụng kiến thức.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a$; $AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.

Lời giải:



Do AD song song với BC nên giao tuyến của mặt phẳng (BCM) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng MN song song với AD

Lại có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BM$$
 vậy thiết diện là hình thang vuông $BCNM$

Có AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (SAB) chính là góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Xét tam giác SAD có:

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{SA - AM}{SA} \Rightarrow MN = \frac{SA - AM}{SA} \cdot AD = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$$

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Và $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích hình thang $BCNM$ là $S_{BCNM} = \frac{1}{2}(AB + MN)BM = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{4a}{3}\right) \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{10a^2\sqrt{3}}{9}$

Hạ $SH \perp BM$, thì do $BC \perp (SAB) \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (BCNM)$

Vậy SH chính là đường cao của khối chóp $S.BCNM$

$\tan \widehat{ABH} = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ABH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{SBH} = 30^\circ \Rightarrow SH = \frac{1}{2}SB = a$

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}S_{BCNM} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{10a^2\sqrt{3}}{9} \cdot a = \frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$

Cách khác: Sử dụng tỷ số thể tích; tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ theo tổng thể tích của khối chóp $SBMN$ và $SBCN$

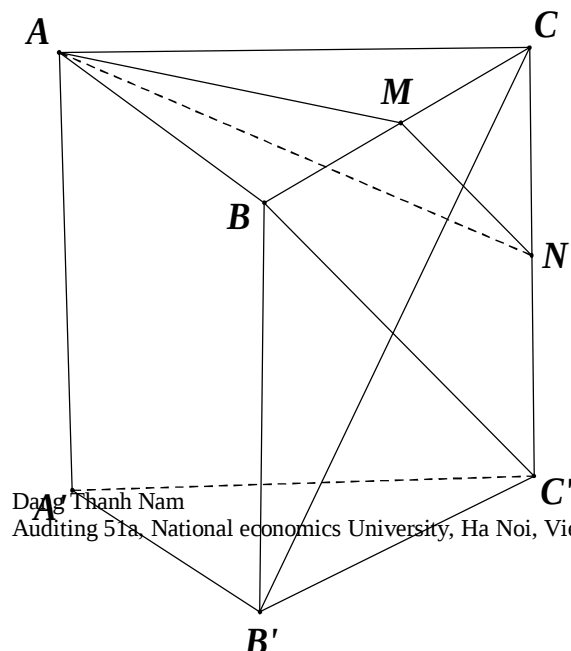
- $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD}$

- $\frac{V_{S.BCN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SD}$

(chi tiết xem phương pháp tỷ số thể tích).

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với $B'C$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện; một khối

chứa đỉnh C , một khối chứa đỉnh B' . Tính thể tích của khối chứa đỉnh B' .



Lời giải:

Gọi M là trung điểm của BC ; kẻ MN song song với BC' ($N \in CC'$)

Khi đó $MN \perp B'C$

563

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Và $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ vì vậy tam giác AMN chính là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P)

$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

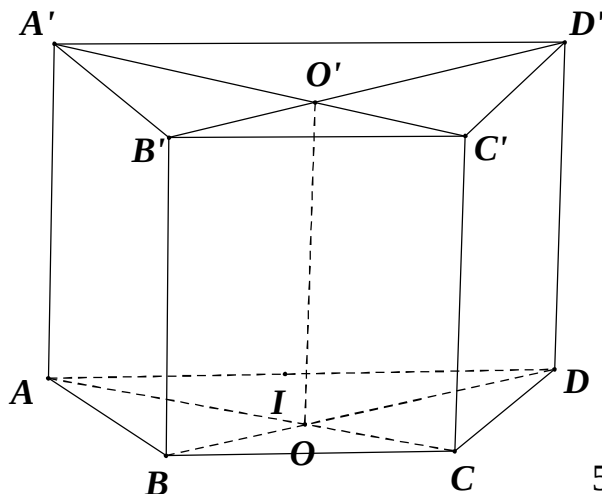
$$V_{A.CMN} = \frac{1}{3} AM \cdot S_{CMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48} \text{ vậy}$$

$$V_{AA'BMNC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.CMN} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{48} \text{ (đvtt)}$$

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AD ; SD vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ $AD = 2a$; $AB = CD$; $SD = a$

$\widehat{BAD} = 60^\circ$. Trên các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại $A; B; C$ lần lượt lấy các điểm $A'; B'; C'$ ($A'; B'; C'$ cùng phía với S). Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và chứng minh rằng $V_{S.ABC} = V_{D.A'B'C'}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AD

Do $AB = CD$ nên BC song song với AD , suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang cân

Lại có $\widehat{BAD} = 60^\circ$

Suy ra tam giác IAB đều, cũng có ICD đều; và IBC đều cạnh a

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = 3S_{IAB} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Chứng minh: $V_{S.ABC} = V_{D.A'B'C'}$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SD.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} (\text{dvtt})$$

$$\text{Gọi } AC \cap BD = \{O\}; A'C' \cap B'S = \{O'\}$$

Do OO' song song với SD nên ta có:

$$\frac{d(D; (A'B'C'))}{d(O; (A'B'C'))} = \frac{SD}{OO'}; \quad \frac{d(S; (ABC))}{d(O'; (ABC))} = \frac{SD}{OO'}$$

Từ đó suy ra

$$V_{S.ABC} = \frac{SD}{OO'} V_{O'.ABC}; V_{D.A'B'C'} = \frac{SD}{OO'} V_{O.A'B'C'}$$

Ta chỉ cần chứng minh: $V_{O'.ABC} = V_{O.A'B'C'}$

Thật vậy:

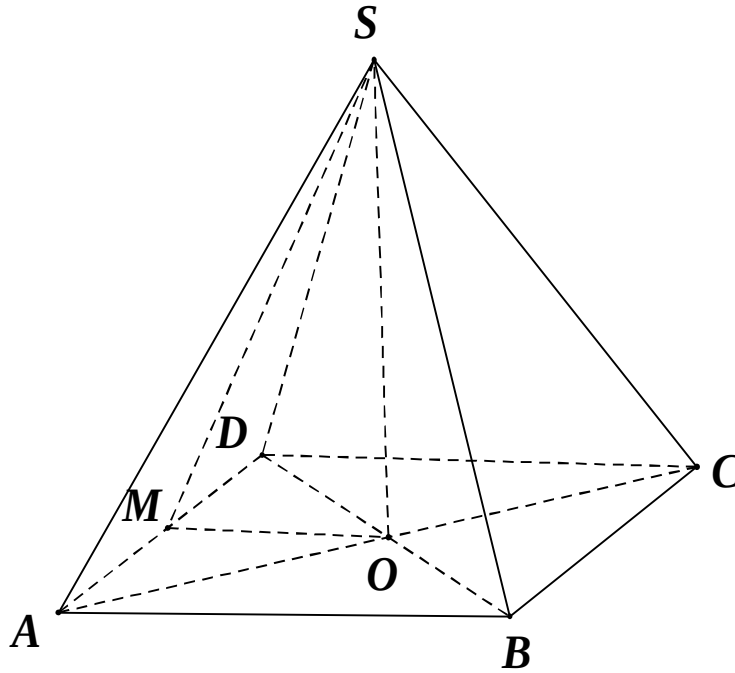
$$\begin{aligned} - \quad V_{O.A'B'C'} &= V_{B'.OA'C'} = \frac{1}{3} d(B'; (ACC'A')) \cdot S_{OA'C'} = \frac{1}{3} d(BB'; (ACC'A')) \cdot S_{OA'C'} \\ - \quad V_{O'.ABC} &= V_{B.O'AC} = \frac{1}{3} d(B; (ACC'A')) \cdot S_{O'AC} = \frac{1}{3} d(BB'; (ACC'A')) \cdot S_{O'AC} \end{aligned}$$

Mặt khác $S_{OA'C'} = S_{O'AC}$; từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Mặt bên (SAD) cân tại S và tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải:

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN



Gọi O là tâm mặt đáy $ABCD$

Do

$$\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

Gọi M là trung điểm của AD

Thì do tam giác SAD cân tại S nên

$$SM \perp AD$$

Lại có $SO \perp AD$

Từ đây suy ra $AD \perp (SMO)$

Vậy nên góc giữa mặt bên (SAD)

và mặt đáy $(ABCD)$ chính là góc

$$\widehat{SMO} = 60^\circ$$

Mặt khác $AD \perp MO$, tam giác vuông AOD có OM vừa là trung tuyến lại vừa là đường cao nên nó là tam giác cân; hay $OD = OA \Rightarrow ABCD$ là hình vuông

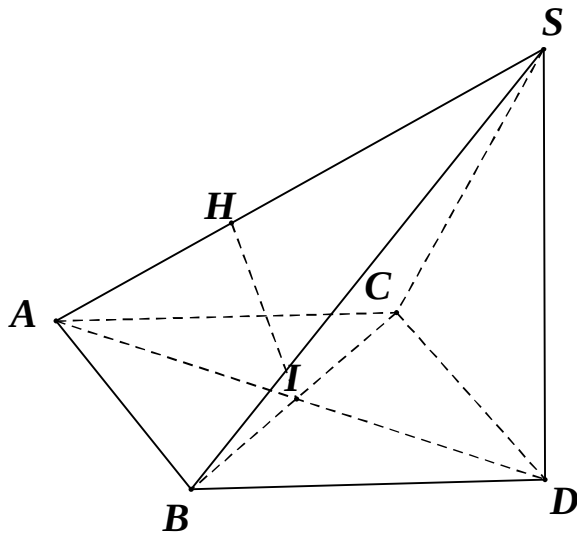
$$\text{Vậy } SO = OM \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} (\text{đvtt})$$

Bài 5. Trên mặt phẳng (P) chứa tam giác đều ABC cạnh a , D là điểm đối xứng của A qua trung điểm I của BC . Lấy điểm S trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại D , biết $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi H là hình chiếu của I trên SA . Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Tính thể tích khối chóp $H.ABC$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Lời giải:



Ta có $ABCD$ là hình thoi (có tất cả các cạnh đều bằng a)

Suy ra $BC \perp AD$

Lại có $BC \perp SD$, từ đó suy ra $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$

Mặt khác lại có $HI \perp SA$

Vậy $SA \perp (HBC)$; suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) chính là góc $\widehat{BHC}$

Ta tính góc $\widehat{BHC}$:

Tam giác $AHI \sim ADS (g.g) \Rightarrow \frac{AI}{HI} = \frac{AS}{DS} \Rightarrow HI = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}$. Tam giác HBC có trung tuyến bằng

$\frac{1}{2}$ cạnh đối diện nên nó là hình vuông. Vậy $\widehat{BHC} = 90^\circ$

Từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAC)$.

Ta có $V_{H.ABC} = \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} HI \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$ (đvtt)

Bài 6. Cho lăng trụ đứng có đáy $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng a và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC bằng $\frac{a(3+\sqrt{3})}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải:

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

- 1.1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'; B'C'$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AD'MN$ và khoảng cách từ A đến $D'N$.
- 1.2. Cho hình chóp đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a , đường cao hình chóp bằng $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) qua cạnh BC và vuông góc với SA . Hỏi mặt phẳng (P) chia khối chóp thành hai phần có tỷ số thể tích bằng bao nhiêu?
- 1.3.

1.2. PHƯƠNG PHÁP TỶ SỐ THỂ TÍCH

Nội dung: Xem bài toán cơ bản 2

BÀI TẬP MẪU

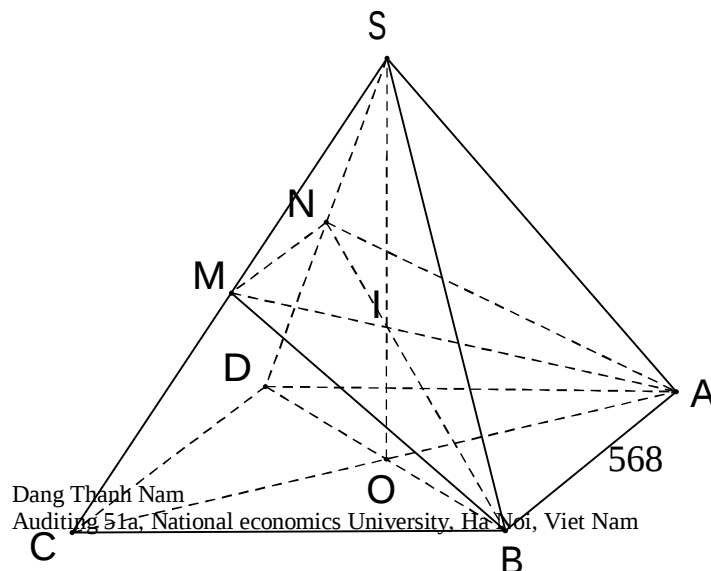
Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Xét mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A; B$ và trung điểm M của cạnh SC . Tính tỷ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

Lời giải:

Kẻ MN song song với SD ($N \in SD$)

Khi đó hình thang $ABMN$ là thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) và hình chóp.

$$V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.ABM}$$



HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Áp dụng tỷ số thể tích cho hai khối chóp $S.ABD; S.BCD$ ta được:

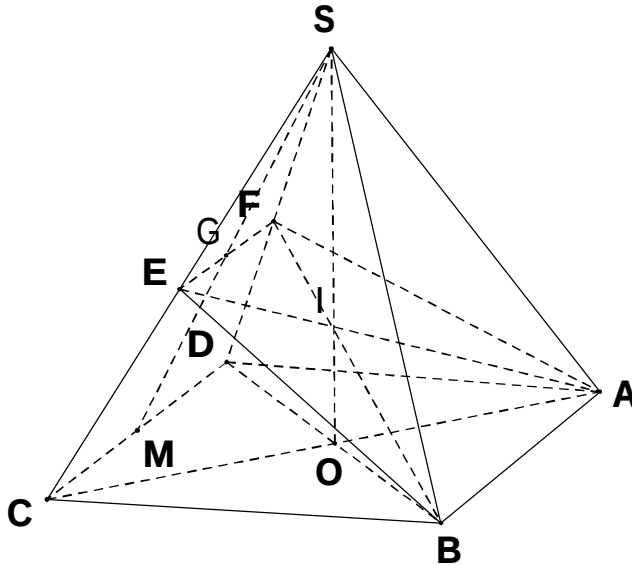
$$\begin{aligned} - \quad \frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} &= \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{2} V_{S.ABD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} \\ - \quad \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} &= \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4} V_{S.BCD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.ABM} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}$

Suy ra: $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{ABCDNM}} = \frac{3/8}{1-3/8} = \frac{3}{5}$.

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh a , mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Mặt phẳng đi qua hai điểm $A; B$ và trọng tâm G của tam giác SCD cắt các cạnh $SC; SD$ lần lượt tại E và F . Tính thể tích khối chóp $S.ABEF$

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của CD ; O là tâm hình vuông $ABCD$

Ta có

$$\begin{cases} SO \perp CD \\ OM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SMO) \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ \Rightarrow SO$$

Kẻ EF qua G và song song với CD ($E \in SC; F \in SD$); khi đó thiết diện là hình thang cân $ABEF$.

Áp dụng tỷ số thể tích ta được:

$$- \quad \frac{V_{S.ABF}}{V_{S.ABD}} = \frac{SF}{SD} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABF} = \frac{2}{3} V_{S.ABD}$$

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

$$- \frac{V_{I.BNE}}{V_{I.AMD}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IE}{ID} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_{I.BNE} = \frac{1}{16} V_{I.AMD} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{27} V_{S.ABC} = \frac{1}{27} V_{S.ABC}$$

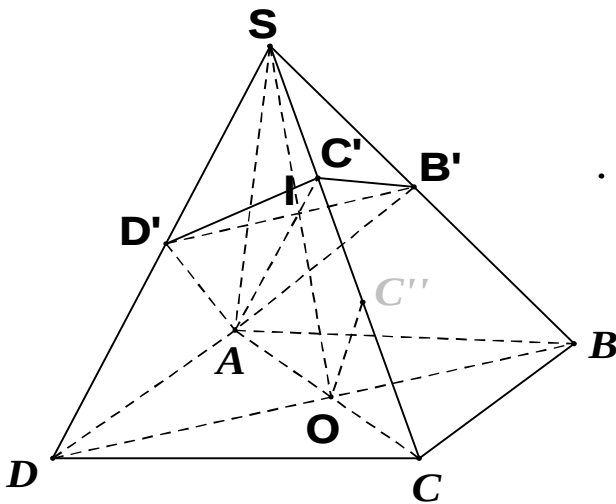
$$\text{Suy ra } V_{ADMNE} = V_{A.MDI} - V_{I.BNE} = \frac{15}{27} V_{S.ABC}$$

Vậy gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích phần dưới; phần trên do mặt phẳng (α) tạo ra với khối chóp

$$S.ABC \text{ thì } \frac{V_1}{V_2} = \frac{15/27}{1-15/27} = \frac{5}{4}$$

Bài 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $B'; D'$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SB; SD$. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C' . Tìm tỷ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

Lời giải:



Gọi O là tâm mặt đáy $ABCD$; $B'D' \cap SO = \{I\}$; $AI \cap SC = \{C'\}$

Kẻ OC'' song song với AC' ($C'' \in SC$)

Do $B'D'$ là đường trung bình của tam giác SBD nên I là trung điểm của SO

Và O là trung điểm của AC . Từ đó suy ra

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

$$SC' = C'C''; C'C'' = C''C \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$$

Theo công thức tỷ số thể tích ta có

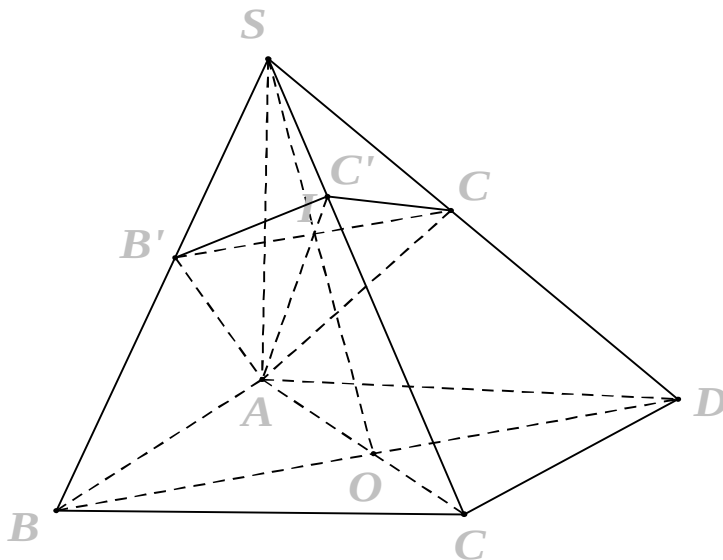
$$- \frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AD'C'} = \frac{1}{6} V_{S.ADC} = \frac{1}{12} V_{S.ABCD}$$

$$- \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{1}{12} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AB'D'} = V_{S.AD'C'} + V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$$

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; cạnh SA vuông góc với đáy; $SA = 2a$. Gọi $B'; D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh $SB; SD$. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C' . Chứng minh rằng năm điểm $S; A; B'; C'; D'$ cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Lời giải:



Để chứng minh năm điểm $S; A; B'; C'; D'$ cùng thuộc một mặt cầu ta chỉ cần chứng minh $AC' \perp SC$. Vì khi đó chúng cùng thuộc mặt cầu đường kính SA

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD'$

Mặt khác $AD' \perp SD \Rightarrow AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp SC$

Tương tự ta cũng có: $AB' \perp SC$. Từ đó suy ra $(SC) \perp (AB'D') \Rightarrow SC' \perp SC$ (ta có đpcm).

Dễ thấy $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}$ (tính chất đối xứng xứng của hình chóp)

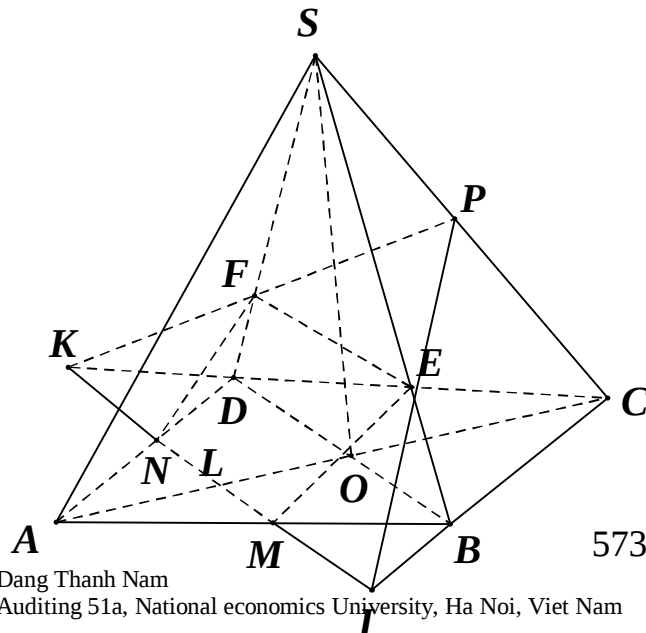
Theo công thức tỷ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB.SB'}{SB^2} \cdot \frac{SC.SC'}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2} \cdot \frac{4a^2}{6a^2} = \frac{8}{15}$$

$$\text{Từ đó suy ra } V_{S.AB'C'} = \frac{8}{15} V_{S.ABC} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{8a^3}{45} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{16}{45} a^3$$

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M; N; P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB; AD; SC$. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Lời giải:



MN cắt BC tại I , cắt CD tại K

Cắt AC tại L ; gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$

IP cắt cạnh SB tại E ; KP cắt cạnh SD tại F

Khi đó thiết diện của khối chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNFPE$

Theo tính chất song song ta có

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CI}{CB} = \frac{CL}{CO} = \frac{3}{2} \Rightarrow CK = \frac{3}{2}CD; CI = \frac{3}{2}CB \text{ Do } P \text{ là trung điểm của cạnh } SC \text{ nên}$$

$$d(P; (ABCD)) = \frac{1}{2}d(S; (ABCD))$$

$$\begin{aligned} - \quad V_{P.CIK} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d(S; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2}CK \cdot CI \cdot \sin \widehat{ICK} \\ &= \frac{1}{12}d(S; (ABCD)) \cdot \frac{3}{2}CD \cdot \frac{3}{2}CB \cdot \sin \widehat{DCB} = \frac{9}{16}V_{S.ABCD} \end{aligned}$$

Bây giờ ta tính thể tích hai khối tứ diện $I.MBE; K.END$ theo thể tích khối tứ diện $S.ABCD$

Vì tính chất đối xứng suy ra $V_{I.BME} = V_{K.END}$

Theo tỷ số thể tích ta có:

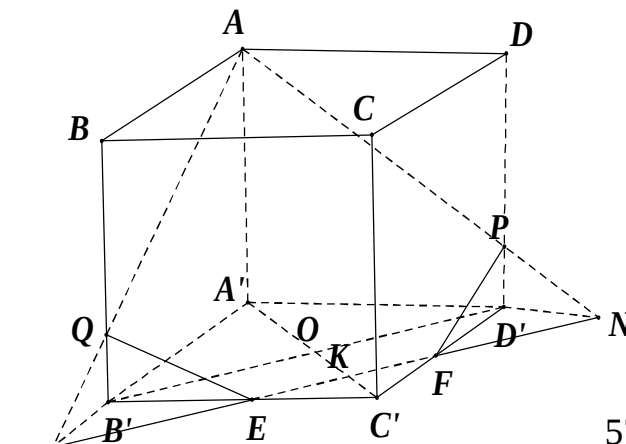
$$\frac{V_{I.BME}}{V_{I.CKP}} = \frac{IB}{IC} \cdot \frac{IM}{IK} \cdot \frac{IE}{IP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{I.BME} = \frac{1}{18}V_{I.CKP} = \frac{1}{32}V_{S.ABCD}$$

Gọi V_1 là thể tích phần phía dưới tạo bởi mặt phẳng (MNP) và khối chóp

$$\text{Ta có } V_1 = V_{P.CIK} - 2V_{I.BME} = \left(\frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{1}{32} \right) V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \text{ Từ đây ta có đpcm.}$$

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $E; F$ lần lượt là trung điểm các cạnh $C'B'; C'D'$. Tính tỷ số thể tích hai phần khi cắt hình lập phương bởi mặt phẳng (AEF) .

Lời giải:



EF cắt $A'B'$ tại M ; MA cắt BB' tại Q

EF cắt $A'D'$ tại N ; PN cắt DD' tại P

Gọi O là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và K là giao điểm của $A'C'$ và EF

Khi đó thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (AEF) là ngũ giác $APFEQ$

Theo tính chất song song ta có

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

$$\frac{A'M}{A'B'} = \frac{A'N}{A'D'} = \frac{AK}{AO} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có } V_{A.A'MN} = \frac{1}{6} AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6}.a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8}$$

$$V_{P.D'NF} = V_{Q.B'ME} \text{ (do tính chất đối xứng)}$$

$$= \frac{1}{6} PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6} \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{72}$$

Gọi V_1 là phần thể tích phía dưới cắt bởi mặt phẳng (AEF); V_2 là phần thể tích phía trên

$$\text{Ta có } V_1 = V_{A.A'MN} - V_{P.D'NF} - V_{Q.B'ME} = \frac{3a^3}{8} - 2 \cdot \frac{a^3}{72} = \frac{25}{72} a^3$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{25/72}{1-25/72} = \frac{25}{47}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

- 1.1. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Mặt phẳng quay quanh AG cắt cạnh SB, SC theo thứ tự tại M, N . Gọi V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$; V là thể tích tứ diện $SABC$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$.
- 1.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2a}{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, K và song song với BD chia hình lập phương thành hai phần. Tính thể tích hai phần đó.

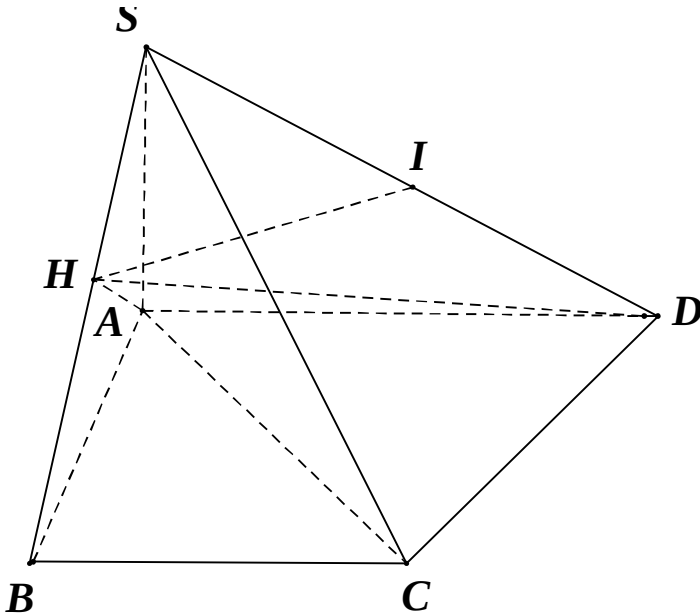
BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP ĐA DIỆN

BÀI TẬP MẪU

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho hình chóp $A.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và có $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$ cắt SB tại H . Chứng minh rằng $AH \perp BS$ và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải:



Do $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ nên

$$CD^2 = BC^2 + AB^2 = 2a^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$$

$$\text{Suy ra } AC^2 + CD^2 = AD^2 = 4a^2$$

Vậy tam giác ACD vuông cân tại C

Vì thế gọi I là trung điểm của SD thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$

Do H cũng thuộc mặt cầu nên

$$\widehat{SHD} = 90^\circ \text{ hay } SH \perp HD \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $SB \perp (AHD) \Rightarrow AH \perp SB$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính thể tích khối chóp $S.CDE$ và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đó.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$ $AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi H là trung điểm của AB . Biết mặt bên (SAB) vuông góc với đáy và là tam giác cân đỉnh S . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.AHC$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a , $DA = DB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và CD vuông góc với AD . Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm E sao cho tam giác AEB vuông tại E . Tính góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD) . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $ABCE$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Chân đường vuông góc kẻ từ đỉnh S trùng với trọng tâm tam giác ABD . Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD$.

Bài 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của $A'A, AB$ và BC . Biết góc tạo bởi mặt phẳng $(C'AI)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $N.AC'I$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $C'.AIB$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có đường cao là SH trong đó H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HN} = -3\overrightarrow{HM}$ (M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD). Mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) và xác định thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$; $AD = 2a$, SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SB tạo với mặt phẳng (SAC) góc 60° . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Giả sử mặt phẳng (P) qua O và song song với SC cắt SA tại M . Tính thể tích khối chóp $MBCD$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SACD$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a; CB = CD = a$ và AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACD) và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 9. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC , lấy điểm D đối xứng với A qua M . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M lên SA . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) . Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $NBCD$.

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh $a, DA = DB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, CD$ vuông góc AD . Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD) . Xác định tâm và thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCE$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{3}; SB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và O là giao điểm của AC và BD . Tính theo a thể tích khối chóp $SAMBN$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SAMON$.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Lấy điểm H trên đoạn AC sao cho $AH = \frac{a}{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{ASC} = 45^\circ$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = a, BC = b$. Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau và tam giác BCD vuông tại D . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a, b .

Bài 14. Cho hình chóp $SABC$ có $SA = SB = SC = a; \widehat{ASB} = 60^\circ; \widehat{BSC} = 90^\circ; \widehat{CSA} = 120^\circ$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SABC$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = a$. Từ trung điểm M của AB ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) , trên đó lấy điểm S sao cho tam giác SAB đều. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SABC$.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = AC = a$. BB', CC' là hai đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cùng phía với mặt phẳng (ABC) biết $BB' = CC' = a$. Tính thể tích khối chóp $ABCC'B'$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $ABCC'B'$.

Bài 17. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $A'A, AB, BC$ biết mặt phẳng (MNP) tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° . Tính thể tích khối chóp $MNPC'$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $ABPC'$.

Bài 18. Cho hình chóp $SABCD$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$ biết $SA = h$.

Bài 19. Cho hình cầu (S) có đường kính $AB = 2R$, lấy điểm H trên AB sao cho $AH = x (0 < x < 2R)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . $MNPQ$ là hình vuông nội tiếp trong đường tròn (C)

1. Tính bán kính đường tròn (C) và độ dài AC, MN .
2. Tính thể tích khối đa diện tạo bởi hai khối chóp $AMNPQ$ và $BMNPQ$.

Bài 20. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ cạnh đáy bằng a , tâm của đáy là O , chiều cao $SH = \frac{a}{2}$.

1. Chứng minh rằng có mặt cầu (S) tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $SABCD$. Xác định tâm và bán kính R của mặt cầu đó.
2. Gọi (P) là mặt phẳng song song và cách mặt phẳng $(ABCD)$ một khoảng bằng $x (0 < x < R)$. Gọi S là phần diện tích tạo bởi (P) và hình chóp (bỏ đi phần diện tích nằm trong mặt cầu (S)). Xác định x để $S = \pi R^2$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 21. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có chiều cao và cạnh đáy cùng bằng a . Gọi E, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Tính diện tích xung quanh, thể tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp $SEBK$.

Bài 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 23. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a , các cạnh bên tạo với đáy góc 30° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$.

Bài 24. Cho hình chóp cắt tam giác đều ngoại tiếp một hình cầu bán kính r . Tính thể tích khối chóp cắt biết cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh đáy nhỏ.

Bài 25. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có độ dài cạnh bên bằng a . Các mặt bên hợp với đáy góc α . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$.

BÀI TẬP VỀ HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

Bài 1. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' . Bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$.

1. Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ.

2. Tính thể tích tứ diện $OABO'$.

Bài 2. Cho hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , có hai đỉnh A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn đáy thứ hai. Biết mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ một góc 45° . Tính diện tích xung quanh và diện tích của hình trụ.

Bài 3. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O , SA, SB là hai đường sinh. Biết $SO = 3a$, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng a , diện tích tam giác SAB bằng $18a^2$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

- 1.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của đoạn AO . Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60° và $AB=a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .
- 1.2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ theo a .
- 1.3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân tại S . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA . Chứng minh rằng $(SIJ) \perp (ABCD)$ và tính thể tích khối chóp $K.IBCD$.
- 1.4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B có đáy nhỏ BC . Biết tam giác SAB đều độ dài cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, độ dài $SC=a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$, với H là trung điểm của AB . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .
- 1.5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên tạo với đáy một góc 60° và cạnh đáy bằng a . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$, qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC . Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp $SABCD$.
- 1.6. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm cạnh BC . Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $SABC$ và khoảng cách từ trung điểm K của SB đến mặt phẳng (SAH) .

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.7. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh huyền bằng $3a$, trọng tâm là G có $SG \perp (ABC)$, $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $SABC$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- 1.8. (TSDH Khối D 2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a .
- 1.9. (TSDH Khối B 2011) Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .
- 1.10. (TSDH Khối A 2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC) . Gọi M là trung điểm AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .
- 1.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $CA = a$, $CB = b$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số đo góc phẳng nhị diện cạnh BC của hình chóp $S.ABC$ bằng α . Gọi D là trung điểm cạnh AB .
- Tính thể tích khối chóp $S.ABC$
 - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD
 - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD .

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và tam giác ABC cân tại A ; cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng $30^\circ, 45^\circ$, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .
- 1.13. Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa mặt bên và đỉnh đối diện bằng 6. Tính thể tích của khối chóp đã cho.
- 1.14. (TSDH Khối A 2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .
- 1.15. (TSDH Khối B 2010) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .
- 1.16. (TSDH Khối D 2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .
- 1.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) đi qua AC và song song với BD cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.
- 1.18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. cạnh SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, cạnh SB hợp với đáy một góc 60° . Trên SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Chân đường vuông góc hạ từ S trùng với trọng tâm tam giác ABD . Mặt bên (SAB) tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ góc 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $SABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) .
- 1.20.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30° . Tính thể tích khối lăng trụ trên theo a và khoảng cách từ trung điểm N của BB' đến mặt phẳng $(C'MA)$. Biết M là trung điểm của $A'D'$.
- 1.21.** Cho hình chóp $SABC$ có góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° , ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a . Tính khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC) .
- 1.22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$ và $SB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC . Tính theo a thể tích khối chóp $SBMDN$ và tính cosin góc tạo bởi DN và SM .
- 1.23. (TSDH Khối A 2009)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .
- 1.24. (TSDH Khối B 2009)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a .
- 1.25. (TSDH Khối D 2009)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, A'A = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao

- điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .
- 1.26. (TSDH Khối A 2008)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $A'A$ và $B'C'$.
- 1.27. (TSDH Khối B 2008)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích khối chóp $SBMDN$ và tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM, DN .
- 1.28. (TSDH Khối D 2008)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, cạnh bên $A'A = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.
- 1.29. (TSDH Khối A 2007)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.
- 1.30. (TSDH Khối B 2007)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN, AC .
- 1.31. (TSDH Khối D 2007)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.32. (TSDH Khối B 2006)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$.
- 1.33. (TSDH Khối D 2006)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC . Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$.
- 1.34. (TSDH Khối A 2002)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
- 1.35. (TSDH Khối A 2002)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.
- 1.36. (TSDH Khối B 2002)** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a .
1. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D .
 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1 . Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .
- 1.37. (TSDH Khối D 2003)** Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C , trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a .
- 1.38. (TSDH Khối B 2003)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh $A'A$ và N là trung điểm cạnh CC' . Chứng minh bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh $A'A$ theo a để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.39. (TSDH Khối B 2004)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo φ . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và φ .
- 1.40.** Khối chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) đi qua AM , song song với BD chia khối chóp làm hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.
- 1.41.** Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD ; I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AEF) . Tính thể tích khối chóp $S.AEIF$.
- 1.42.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.
- 1.43.** Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông cân, cạnh huyền $AB = \sqrt{2}$. Mặt phẳng (A_1AB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AA_1 = \sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn, mặt phẳng (A_1AC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ.
- 1.44.** Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5. Hạ AK vuông góc với A_1D tại K . Chứng minh rằng $AK = 2$ và tính thể tích khối lăng trụ đã cho.
- 1.45.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AC = AD = 4; AB = 3; BC = 3$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .
- 1.46.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh bên SB, SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
- 1.47.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tam giác ABC có $AB = BC = 2a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng SBC .

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.48. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có các cạnh bên $SA = SB = SC = a$, góc $\widehat{ASB} = 120^\circ, \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{CSA} = 90^\circ$. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính thể tích khối chóp đã cho.
- 1.49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α . Tính thể tích khối chóp đã cho theo a, α . Xác định α để thể tích đó là nhỏ nhất.
- 1.50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ và $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC và I là giao điểm của BM, AC . Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) và tính thể tích khối chóp $ANIB$.
- 1.51. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn $A'C'$ và I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) .
- 1.52. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có $SC = a\sqrt{7}$. Góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .
- 1.53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ, SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (O là tâm mặt đáy), M là trung điểm của AD . Gọi (P) là mặt phẳng qua BM và song song với SA , cắt SC tại K . Tính thể tích khối chóp $KABCD$.
- 1.54. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy, góc $\widehat{ASC} = 90^\circ$ và SA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp đã cho.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- 1.55. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.
Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.
- 1.56. Cho hình chóp $SABC$ có $AB = AC = a, BC = \frac{a}{2}; SA = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.
- 1.57. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , khoảng cách từ G đến mặt bên (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ tâm mặt đáy đến mặt bên (SCD) .
- 1.58. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1 . Chứng minh rằng MB vuông góc với MB_1 và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1MB) .
- 1.59. Cho hình chóp $S.ABC$ có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Các tam giác SBC và ABC là các tam giác đều cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- 1.60. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, gọi S là điểm nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại trung điểm của AB và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60° . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Chứng minh rằng tam giác AHK vuông và tính theo R thể tích khối chóp $S.ABC$.
- 1.61. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA_1 . Chứng minh rằng BM vuông góc với B_1C và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.