

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2$

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(5m-1)x + 2m-1$ có hai điểm cực trị.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

Câu 4 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\log_2^2(4x) - \log_2 x - 2 = 0$

Câu 5 (1,0 điểm) Tìm nguyên hàm sau: $\int (x^3 + x \ln x) dx$

Câu 6 (1,0 điểm) Từ một hộp có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên hai quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu lấy được có tích các số ghi trên hai quả cầu là số chẵn.

Câu 7 (1,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa SA và BD .

Câu 8 (1,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD > DC$. Đường thẳng $d_1: x = 2$ cắt đoạn AD và BC lần lượt tại E và F sao cho $DE = CF = CD$. Đường thẳng d_2 qua C vuông góc với BD có phương trình $d_2: 11x + 4y - 54 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết điểm A thuộc đường thẳng $d_3: x + y + 4 = 0$.

Câu 9 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (1-x)\sqrt{y-x} + y - 2 = (y-x-1)\sqrt{x} \\ (x+4)(\sqrt{x+2} + 2) = x^2y - 2x^2 + y + 2 \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$, chứng minh rằng:

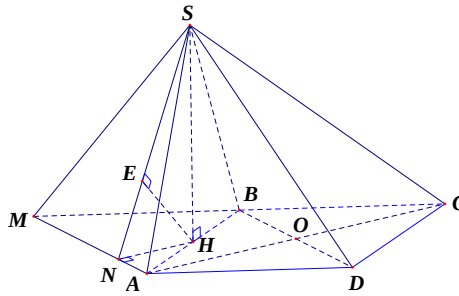
$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

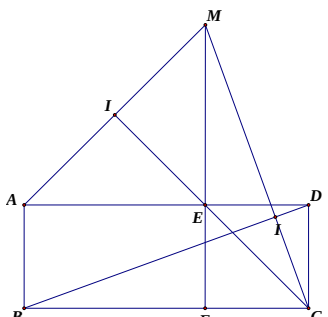
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN		ĐIỂM																		
Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2$		1,0																		
TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 2x^3 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$		0,25																		
Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y(0) = 0$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1; y(1) = y(-1) = -\frac{1}{2}$		0,25																		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>0</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>		x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	0	$-$	y	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$															
y'	$-$	0	$+$	0	$-$															
y	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$															
Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng và đi qua các điểm $(-2;4), (2;4)$ 		0,25																		
Câu 2 (1,0 điểm). Tìm m để hs $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(5m-1)x + 2m-1$ có 2 điểm cực trị.		1,0																		
TXĐ: $D = \mathbb{R}$ Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(5m-1)$		0,25																		
$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (5m-1) = 0$ $\Delta' = (m+1)^2 - 5m + 1 = m^2 - 3m + 2$ Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		0,25																		
hay $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$		0,25																		
Vậy $m \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$ thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị.		0,25																		
Câu 3 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$		1,0																		
$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$		0,5																		

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,5
Câu 4 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\log_2^2(4x) - \log_2 x - 2 = 0$	1,0
ĐK: $x > 0$ $\log_2^2(4x) - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + 3\log_2 x + 2 = 0$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{4}$	0,5
Câu 5 (1,0 điểm) Tìm nguyên hàm sau: $\int (x^3 + x \ln x) dx$	1,0
$\int (x^3 + x \ln x) dx = \int x^3 dx + \int x \ln x dx$	0,25
Ta có $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1$	0,25
Tính $\int x \ln x dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$ $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$	0,25
$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2$ Vậy $\int (x^3 + x \ln x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + C$	0,25
Câu 6 (1,0 điểm) Trong một hộp có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên hai quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu lấy được có tích các số ghi trên hai quả cầu là số chẵn.	1,0
Phép thử: “Lấy ngẫu nhiên hai quả cầu trong hộp gồm 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10” Ta có $n(\Omega) = C_{10}^2$	0,25
Gọi A là biến cố: “Tích hai số trên hai quả cầu lấy được là một số chẵn” Số cách lấy được hai quả cầu mà tích của hai số ghi trên hai quả cầu đó là số lẻ là C_5^2.	0,25
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_{10}^2 - C_5^2$	0,25
Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{C_{10}^2 - C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$	0,25
Câu 7 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa SA và BD.	1,0

ĐÁP ÁN		ĐIỂM
	+) Ta có $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$ Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0,25
	Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$ $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt)	0,25
Dựng $Ax \parallel BD$, Gọi $M = Ax \cap BC$, Dựng $Hx \parallel AC$ cắt AM tại N. Dựng HE vuông góc với SN tại E Ta có $AM \parallel BD \Rightarrow BD \parallel (SAM) \Rightarrow d(BD, SA) = d(BD, (SAM)) = d(B, (SAM)) = 2d(H, (SAM))$ Ta có $\begin{cases} AM \parallel BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp AM$ Có $\begin{cases} HN \parallel AC \\ MA \perp AC \end{cases} \Rightarrow HN \perp MA \quad (1)$ Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AM \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có $MA \perp (SHN) \Rightarrow AM \perp HE \quad (3)$ Theo cách dựng ban đầu ta lại có $HE \perp SN \quad (4)$ Từ (3) và (4) suy ra $HE \perp (SAM) \Rightarrow d(H, (SAM)) = HE$		0,25
Ta có $HN = \frac{1}{2}d(B, AM) = \frac{1}{2}d(O, AM) = \frac{1}{2}OA = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (Với $O = AC \cap BD$) $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HN$, suy ra tam giác SHN vuông tại H Ta có $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{16}{2a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{3a^2}$ Suy ra $d(H, (SAM)) = HE = \frac{\sqrt{21}a}{14} \Rightarrow d(SA, BD) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$		0,25
Câu 8 (1,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD > DC$. Đường thẳng $d_1: x = 2$ cắt đoạn AD và BC lần lượt tại E và F sao cho $DE = CF = CD$. Đường thẳng d_2 qua C vuông góc với BD có phương trình $d_2: 11x + 4y - 54 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết điểm A thuộc đường thẳng $d_3: x + y + 4 = 0$.		1,0
Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2, suy ra $M(2;8)$ Ta có $FMC = CBD$ (vì cùng cộng với góc BCM bằng 90°) Ta thấy $\triangle MFC = \triangle BCD$, suy ra $MF = BC$ và $MC = BD$ Lại có $EF = ED$ và $MF = BC = AD$ nên $AE = EM$ suy ra tam giác AEM là tam giác vuông cân tại E Suy ra $\angle EMA = 45^\circ$		0,25

ĐÁP ÁN		ĐIỂM
d_1 có một vtpt là $\vec{n}_1(1;0)$; Gọi $\vec{n}(a;b) \neq \vec{0}$ là vtpt của AM Ta có $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}) = \cos EMA \Leftrightarrow \frac{ a }{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} a \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=-b \end{cases}$ Với $a=b$, chọn $\vec{n}(1;1)$ suy ra AM có phương trình $x+y-10=0$ (không thỏa mãn vì nó song song với d_3) Với $a=-b$, chọn $\vec{n}(1;-1)$ suy ra AM có phương trình $x-y+6=0$ Ta có $A = AM \cap d_3 \Rightarrow A(-5;1)$		0,25
	Gọi I là trung điểm của AM, suy ra $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ Ta có $CM = BD = AC$ nên tam giác ACM cân tại C, suy ra IC là trung trực của AM IC đi qua I và vuông góc với AM nên $IC: x+y-3=0$ Ta có $C = IC \cap d_2$ nên $C(6;-3)$	0,25
	Ta có BC đi qua C vuông góc với d_1 nên $BC: y=-3$ AB đi qua A và song song với d_1 nên $AB: x=-5$ Ta có AD đi qua A vuông góc với d_1 nên $AD: y=1$ CD đi qua C và song song với d_1 nên $CD: x=6$ Ta có $B = AB \cap BC \Rightarrow B(-5;-3)$ $D = AD \cap DC \Rightarrow D(6;1)$ Vậy $A(-5;1), B(-5;-3), C(6;-3), D(6;1)$	0,25
Câu 9 (1,0 điểm) Giải hpt: $\begin{cases} (1-x)\sqrt{y-x} + y-2 = (y-x-1)\sqrt{x} & (1) \\ (x+4)(\sqrt{x+2}+2) = x^2y-2x^2+y+2 & (2) \end{cases}$		1,0
ĐK: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x \end{cases}$ Ta có $(1-x)(\sqrt{y-x}-1) + y-x-1 - (y-x-1)\sqrt{x} = 0$ $\Leftrightarrow (1-x)(\sqrt{y-x}-1) + (y-x-1)(1-\sqrt{x}) = 0$ $\Leftrightarrow (1-x)(y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x+1 \end{cases}$ Với $x=1$ thay vào (2) ta được $y = \frac{5\sqrt{3}+10}{2}$ (thỏa mãn)		0,5
Với $y=x+1$ thay vào (2) ta có phương trình $(x+4)(\sqrt{x+2}+2) = x^3-x^2+x+3$ $\Leftrightarrow (x+4)(\sqrt{x+2}+2) = (x+1)(x^2-2x+3)$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+2)[(x+2)+2] = [(x-1)+2][(x-1)^2+2] \quad (*)$		0,25
Xét hàm số $f(t) = (t+2)(t^2+2)$ trên $\mathbb{R}$ Ta có $f'(t) = 3t^2+4t+2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-1$		0,25

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ Với $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ ta có $y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ (thỏa mãn) Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5\sqrt{3} + 10}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$	
Câu 10 (1,0 điểm): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$, chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$	1,0
Đặt $x = \tan A$; $y = \tan B$; $z = \tan C$ với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ Từ giả thiết ta có $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1 \Leftrightarrow \tan C (\tan A + \tan B) = 1 - \tan A \tan B$ $\Leftrightarrow \tan(A + B) = \cot C \Leftrightarrow A + B + C = \frac{\pi}{2}$	0,25
Khi đó $P = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \sin A \cdot \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cdot \cos C$ $= \frac{1}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ Với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, ta có $2P + \sin \frac{\pi}{3} = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin \frac{\pi}{3}$ $= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(C - \frac{\pi}{6}\right)$	0,25
$\leq 2 \sin(A + B) + 2 \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \sin \frac{A + B + C + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{A + B - C - \frac{\pi}{6}}{2}$ $\leq 4 \sin \frac{A + B + C + \frac{\pi}{6}}{2} = 4 \sin \frac{\pi}{3}$	0,25
Vậy $P \leq \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{6}$ hay $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0,25