

Chương 1

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài số

1

GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

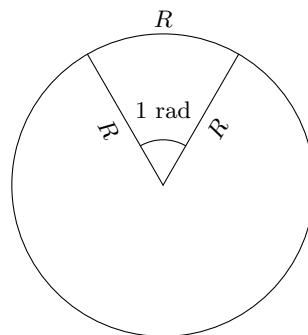
A – GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Góc hình học và số đo của chúng

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều khi đo góc là radian (đọc là ra-di-an). Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian (hình vẽ bên).

1 radian còn viết tắt là 1 rad.

Nhận xét: Ta biết góc ở tâm có số đo 180° sẽ chắn cung bằng nửa đường tròn (có độ dài bằng πR) nên số đo góc 180° bằng $\frac{\pi R}{R} \text{ rad} = \pi \text{ rad}$.



A Người ta thường không viết chữ radian hay rad sau số đo của góc. Chẳng hạn $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$.

2. Góc lượng giác và số đo của chúng

2.1. Khái niệm

↻ **Định nghĩa 1.1.** Cho hai tia Ou, Ov . Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một góc lượng giác với tia đầu Ou và tia cuối Ov , kí hiệu là (Ou, Ov) .

Nhận xét: Khi tia Om quay góc a° thì góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo a° (hay $\frac{\pi a}{180^\circ} \text{ rad}$). Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có một số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng α thì ta kí hiệu là $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha$.

↻ **Định nghĩa 1.2.** Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của góc đó.

2.2. Tính chất

↻ **Định nghĩa 1.3.** Cho hai góc lượng giác (Ou, Ov) , $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau ($Ou \equiv O'u'$), tia cuối trùng nhau ($Ov \equiv O'v'$). Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo độ thì ta có

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Nếu sử dụng đơn vị radian thì công thức trên có thể viết như sau

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

B – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn lượng giác

↻ **Định nghĩa 1.4.** Trong mặt phẳng tọa độ đã được định hướng Oxy , lấy điểm $A(1; 0)$. Đường tròn tâm O , bán kính $OA = 1$ được gọi là đường tròn lượng giác (hay đường tròn đơn vị) gốc A .

A Các điểm $B(0; 1)$, $A'(-1; 0)$, $B'(0; -1)$ nằm trên đường tròn lượng giác.

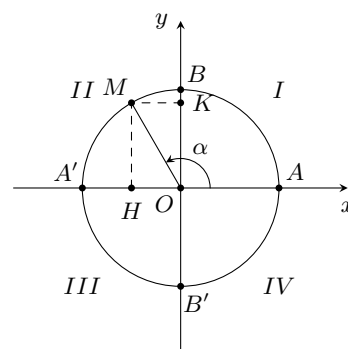
2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Định nghĩa 1.5.

- a) Hoành độ x của điểm M gọi là *côsin* của góc lượng giác α và kí hiệu $\cos \alpha$, $\cos \alpha = x$.
- b) Tung độ y của điểm M gọi là *sin* của góc lượng giác α và kí hiệu $\sin \alpha$, $\sin \alpha = y$.
- c) Nếu $\cos \alpha \neq 0$ thì tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là *tang* của góc lượng giác α và kí hiệu $\tan \alpha$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- d) Nếu $\sin \alpha \neq 0$ thì tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là *côtang* của góc lượng giác α và kí hiệu $\cot \alpha$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Dấu của các giá trị lượng giác của góc $\alpha = (OA, OM)$ phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn lượng giác. Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Định lí 1.1.

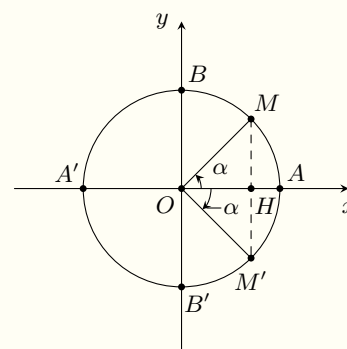
- ☑ $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ với mọi α ;
- ☑ $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ với $\cos \alpha \neq 0$, $\sin \alpha \neq 0$;
- ☑ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\cos \alpha \neq 0$;
- ☑ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với $\sin \alpha \neq 0$.

C- GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Định lí 1.2.

Hai góc đối nhau (α và $-\alpha$)

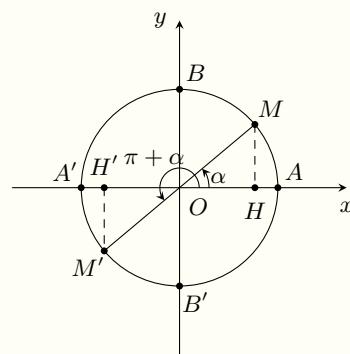
- ☑ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- ☑ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- ☑ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- ☑ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



Định lí 1.3.

Hai góc hơn kém π (α và $\alpha + \pi$)

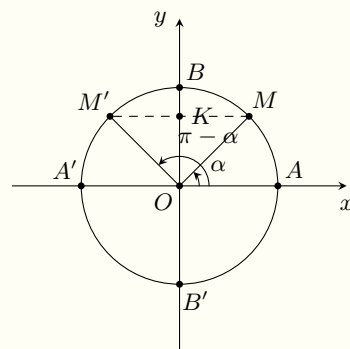
- ☑ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- ☑ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- ☑ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- ☑ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



☞ Định lí 1.4.

Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

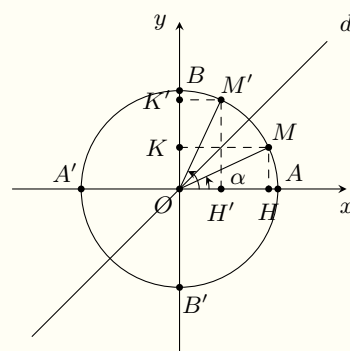
- ☑ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- ☑ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- ☑ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- ☑ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



☞ Định lí 1.5.

Hai góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

- ☑ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- ☑ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- ☑ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- ☑ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



D - CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

📁 Dạng 1. Chuyển đổi đơn vị độ - radian

Để chuyển đổi đơn vị độ - radian cần nhớ:

- ☑ $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Rightarrow a^\circ = \frac{a \cdot \pi}{180} \text{ rad}$
- ☑ $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Rightarrow \alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Đổi 50° sang radian.

☞ **Lời giải.**

Ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

Nên $50^\circ = \frac{50 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$.

□

Ví dụ 2. Đổi $\frac{3\pi}{4}$ rad sang độ.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

$$\text{Nên } \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left(\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 135^\circ.$$

□

Ví dụ 3.

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: 45° ; 150° .

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4},$$

$$150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

b) Ta có

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 60^\circ,$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 225^\circ.$$

□

Ví dụ 4. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 72° ; 600° ; $-37^\circ 45' 30''$.

Lời giải.

$$\text{Vì } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad nên}$$

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5};$$

$$600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3};$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587.$$

□

Ví dụ 5. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{5}$; -4 .

Lời giải.

$$\text{Vì } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \text{ nên}$$

$$\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ;$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

□

Ví dụ 6. Hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$	?	$\frac{\pi}{2}$	?	$\frac{3\pi}{4}$	?

Lời giải.

Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt.

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

□

Ví dụ 7. Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc sau.

Độ	18°	?	72°	?
Radian	?	$\frac{2\pi}{9}$	?	$\frac{5\pi}{6}$

Lời giải.

Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc.

Độ	18°	40°	72°	150°
Radian	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

a) 38° ;

b) -115° ;

c) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải.

a) $38^\circ = \frac{38\pi}{180} = \frac{19\pi}{90}$.

b) $-115^\circ = \frac{-115\pi}{180} = -\frac{23\pi}{36}$;

c) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^\circ = \frac{3\pi}{\pi \cdot 180} = \frac{1}{60}$.

□

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

a) $\frac{\pi}{12}$;

b) -5 ;

c) $\frac{13\pi}{9}$.

Lời giải.

a) $\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\pi \cdot 180}{12 \cdot \pi}\right)^\circ = 15^\circ$;

b) $-5 = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{-900}{\pi}\right)^\circ$;

$$c) \frac{13\pi}{9} = \left(\frac{13\pi \cdot 180}{9 \cdot \pi} \right) = 260^\circ.$$

□

Bài 3. Hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$	?	$\frac{\pi}{2}$	?	$\frac{3\pi}{4}$	?

Lời giải.

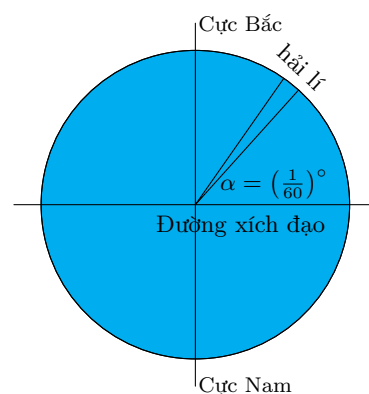
Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt.

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

□

Bài 4.

Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Lời giải.

$$1 \text{ hải lí} = \alpha \cdot R = \frac{1 \cdot \pi}{60 \cdot 180} \cdot 6371 \approx 1,85 \text{ km}.$$

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Chọn khẳng định đúng.

(A) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

(B) $1 \text{ rad} = 60^\circ$.

(C) $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

(D) $1 \text{ rad} = 1^\circ$.

Lời giải.

Ta có công thức $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 2. Góc có số đo 135° đổi sang radian là

(A) $\frac{4\pi}{3}$.

(B) $\frac{3\pi}{4}$.

(C) $\frac{5\pi}{6}$.

(D) $\frac{3\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

Vậy $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 3. Đổi sang radian góc có số đo 108° ta được

(A) $\frac{\pi}{4}$.

(B) $\frac{\pi}{10}$.

(C) $\frac{3\pi}{2}$.

(D) $\frac{3\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có $108^\circ = 108^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5}$.

Chọn đáp án (D)



Câu 4. Đổi sang radian góc có số đo 960° ta được

(A) $\frac{8}{3}\pi$.

(B) $\frac{16}{3}\pi$.

(C) $\frac{16}{3}$.

(D) $\frac{3}{16}\pi$.

Lời giải.

Số đo góc 960° theo đơn vị radian là $\frac{960}{180}\pi = \frac{16}{3}\pi$.

Chọn đáp án (B)



Câu 5. Đổi sang radian góc có số đo 250° ta được

(A) $\frac{25\pi}{12}$.

(B) $\frac{25\pi}{18}$.

(C) $\frac{25\pi}{9}$.

(D) $\frac{35\pi}{18}$.

Lời giải.

Ta có $250^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 250 = \frac{25\pi}{18}$.

Chọn đáp án (A)



Câu 6. Đổi sang radian góc có số đo $\frac{5\pi}{4}$ ta được

(A) 172° .

(B) 15° .

(C) 225° .

(D) 5° .

Lời giải.

Ta có $\frac{5\pi}{4} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4}\right)^\circ = 225^\circ$.

Chọn đáp án (C)



Câu 7. Góc có số đo $\frac{\pi}{12}$ đổi sang độ là

(A) 15° .

(B) 16° .

(C) $17^\circ 30'$.

(D) 14° .

Lời giải.

Ta có $\frac{\pi}{12} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$.

Chọn đáp án (A)



Câu 8. Đổi góc $\alpha = \frac{\pi}{9}$ ra đơn vị độ ta được

(A) $\alpha = 20^\circ$.

(B) $\alpha = 10^\circ$.

(C) $\alpha = 15^\circ$.

(D) $\alpha = 25^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$.

Chọn đáp án (A)



Câu 9. Nếu một góc có số đo bằng radian là $\frac{17\pi}{6}$ thì số đo bằng độ của góc đó là

(A) 30° .

(B) 390° .

(C) 510° .

(D) 520° .

Lời giải.

Ta có $\frac{17\pi}{6}(\text{rad}) = \left(\frac{17\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 510^\circ$.

Chọn đáp án (C)



Câu 10. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây. Tìm góc theo radian mà bánh xe quay được trong 1 giây.

(A) $\frac{22\pi}{5} \text{ rad}$.

(B) $\frac{11\pi}{5} \text{ rad}$.

(C) $22\pi \text{ rad}$.

(D) $11\pi \text{ rad}$.

Lời giải.

Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng.

Một vòng ứng với số đo là 2π rad.

Vậy trong 1 giây bánh xe quay được một góc $\frac{11}{5} \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5}$.

Chọn đáp án **(A)**



Dạng 2. Độ dài của một cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , độ dài cung tròn có số đo α radian là $\boxed{\ell = \alpha \cdot R}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 8. Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35° ; d) 315° .

Lời giải.

a) $l = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3}$ cm;

b) $l = R\alpha = 20 \cdot 1,5 = 30$ cm;

c) Đổi $35^\circ = 35 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$ rad.

Độ dài cung tròn là $l = R\alpha = 20 \cdot \frac{7\pi}{36} = \frac{35\pi}{9}$ cm;

d) Đổi $315^\circ = 315 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$ rad.

Độ dài cung tròn là $l = R\alpha = 20 \cdot \frac{7\pi}{4} = 35$ cm.



Ví dụ 9. Một bánh xe máy có đường kính 60 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

Lời giải.

Trong một phút bánh xe quay được: $\left[\frac{50 \cdot 1000}{3600} : (0,6 \cdot \pi) \right] \cdot 5 \simeq 36,9$.



Ví dụ 10. Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

Lời giải.

Tính được: $270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$.

Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút

Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.



Ví dụ 11. Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25 cm, kim phút dài 13,25cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

Lời giải.

Trong 6 giờ kim giờ vạch nên một cung có số đo là π rad, vậy trong 30 phút kim giờ vạch nên cung có số đo là $\frac{\pi}{12}$ (rad). Khi đó độ dài cung tròn mà kim giờ vạch ra trong 30 phút là

$l = R \cdot \alpha \Rightarrow l = 10,25 \cdot \frac{\pi}{12} = 2,68$ cm.



Ví dụ 12. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.
b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)?

Lời giải.

- a) Sau 1 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{1}{2}$ vòng của quỹ đạo.
Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 9\,000\pi \approx 28247,3 \text{ km.}$$

Sau 3 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{3}{2}$ vòng của quỹ đạo.
Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 27\,000\pi \approx 84823 \text{ km.}$$

Sau 5 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{5}{2}$ vòng của quỹ đạo.
Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{5}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 45\,000\pi \approx 141371,7 \text{ km.}$$

- b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km. Gọi x là thời gian vệ tinh chuyển động. Khi đó

$$200\,000 = x \cdot 2\pi \cdot 9\,000 \Leftrightarrow x \approx 11,1 \text{ giờ.}$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 5. Một đường tròn có bán kính $R = 75$ cm. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\alpha = \frac{\pi}{25}$ là

Lời giải.

Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\alpha = \frac{\pi}{25}$ là $\ell = R \cdot \alpha = 75 \cdot \frac{\pi}{25} = 3\pi$ cm.

□

Bài 6. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là bao nhiêu?

Lời giải.

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $\ell = R \cdot \alpha$.

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{8}$; $R = 4$ thì $\ell = R \cdot \alpha = \frac{\pi}{2}$.

□

Bài 7. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- a) Tính góc (theo độ và theo radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây;
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của xe đạp là 680 mm.

Lời giải.

- a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ (vòng).

Vì 1 vòng ứng với 360° nên góc mà bánh xe quay được trong 1 giây là $\frac{11}{5} \cdot 360^\circ = 792^\circ$.

Vì 1 vòng ứng với 2π rad nên góc mà bánh xe quay được trong 1 giây là $\frac{11}{5} \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5}$ (rad).

b) Đổi 1 phút = 60 s.

Trong 60 giây, bánh xe quay được số vòng là $\frac{11}{5} \cdot 60 = 132$ (vòng).

Chu vi mỗi vòng xe là 680π (mm).

Độ dài quãng đường người đó đi trong 1 phút là $132 \cdot 680\pi = 89760\pi$ (mm).

□

Bài 8. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)?

Lời giải.

a) Sau 1 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{1}{2}$ vòng của quỹ đạo.

Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 9\,000\pi \approx 28247,3 \text{ km.}$$

Sau 3 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{3}{2}$ vòng của quỹ đạo.

Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 27\,000\pi \approx 84823 \text{ km.}$$

Sau 5 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{5}{2}$ vòng của quỹ đạo.

Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{5}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 45\,000\pi \approx 141371,7 \text{ km.}$$

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km. Gọi x là thời gian vệ tinh chuyển động. Khi đó

$$200\,000 = x \cdot 2\pi \cdot 9\,000 \Leftrightarrow x \approx 11,1 \text{ giờ.}$$

□

Bài 9. Trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tên Tiếng Anh: International Space Station) nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km. Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là 6400 km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Lời giải.

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6400 + 400 = 6800$ (km).

$$\text{Đổi } 45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

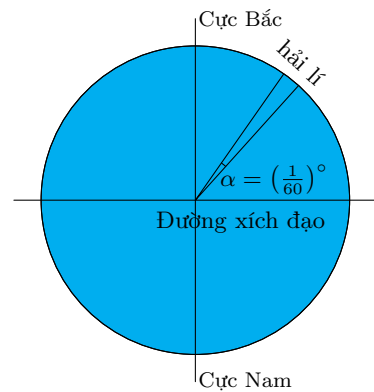
Vậy trong khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển một quãng đường có độ dài là

$$l = R\alpha = 6800 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 5340,708 \approx 5341 \text{ (km).}$$

□

Bài 10.

Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Lời giải.

$$1 \text{ hải lí} = \alpha \cdot R = \frac{1 \cdot \pi}{60 \cdot 180} \cdot 6371 \approx 1,85 \text{ km.}$$

Bài 11. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải.

Đổi 1 phút = 60 s.

Trong 60 giây, bánh xe quay được số vòng là $\frac{11}{5} \cdot 60 = 132$ (vòng).

Chu vi mỗi vòng xe là 680π (mm).

Độ dài quãng đường người đi trong 1 phút là $132 \cdot 680\pi = 89760\pi$ (mm).

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 11. Tính độ dài cung tròn có số đo góc ở tâm bằng $\frac{\pi}{6}$ của đường tròn lượng giác.

(A) $\frac{\pi}{6}$.

(B) $\frac{\pi}{12}$.

(C) $\frac{\pi}{3}$.

(D) $\frac{\pi}{24}$.

Lời giải.

Đường tròn lượng giác có bán kính $R = 1$.

Độ dài cung tròn có số đo góc ở tâm bằng $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $l = R\alpha = 1 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 12. Trên đường tròn lượng giác đường kính 36, cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ thì có độ dài bằng bao nhiêu?

(A) $l = \frac{\pi}{54}$.

(B) $l = \frac{54}{\pi}$.

(C) $l = 3\pi$.

(D) $l = 6\pi$.

Lời giải.

Độ dài cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ là $l = R \cdot \alpha \Rightarrow l = 18 \cdot \frac{\pi}{6} = 3\pi$.

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Một đường tròn có bán kính $R = 3$ cm. Tính độ dài l của cung trên đường tròn đó có số đo bằng 60° .

(A) $l = \frac{\pi}{2}$ cm.

(B) $l = \pi$ cm.

(C) $l = \frac{\pi}{4}$ cm.

(D) $l = 2\pi$ cm.

Lời giải.

Ta có số đo cung $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$l = R \cdot \alpha = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \text{ cm.}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 14. Một cung tròn có độ dài bằng bán kính. Khi đó số đo bằng radian của cung tròn đó là

(A) 2.

(B) 3.

(C) π .

(D) 1.

Lời giải.

Theo định nghĩa 1 radian là số đo của cung có độ dài bằng bán kính.

Chọn đáp án (D)

Câu 15. Cung tròn bán kính $R = 4$ cm và có số đo $\frac{3\pi}{4}$ thì có độ dài là (kết quả làm tròn đến số thập phân thứ 2)

(A) 0,59 cm.

(B) 1,05 cm.

(C) 17,76 cm.

(D) 9,42 cm.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $l = \alpha \cdot R = \frac{3\pi}{4} \cdot 4 = 3\pi \approx 9,42$.

Chọn đáp án (D)

Câu 16. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là

(A) $\frac{\pi}{3}$.

(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) $\frac{\pi}{16}$.

(D) $\frac{\pi}{4}$.

🗨️ **Lời giải.**

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R \cdot \alpha$.

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{8}$; $R = 4$ thì $l = R \cdot \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 17. Cho đường tròn (O) đường kính bằng 10 cm. Tính độ dài cung có số đo $\frac{7\pi}{12}$.

(A) $\frac{17\pi}{3}$ cm.

(B) $\frac{35\pi}{2}$ cm.

(C) $\frac{35\pi}{6}$ cm.

(D) $\frac{35\pi}{12}$ cm.

🗨️ **Lời giải.**

Độ dài cung tròn cần tìm là $l = \alpha \cdot R = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{10}{2} = \frac{35\pi}{12}$ (cm).

Chọn đáp án (D)

Câu 18. Trên đường tròn có đường kính 20 cm. Độ dài của một cung tròn có số đo $\frac{\pi}{4}$ là

(A) $\frac{5}{2}$ cm.

(B) 5 cm.

(C) $\frac{5\pi}{2}$ cm.

(D) 5π cm.

🗨️ **Lời giải.**

Đường tròn có bán kính $R = 10$ cm.

Gọi l là độ dài cung tròn cần tìm, ta có $l = R \cdot \alpha = 10 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 19. Một đường tròn có bán kính 4 cm. Độ dài cung tròn có số đo 45° là

(A) $\frac{1}{20\pi}$ cm.

(B) 9 cm.

(C) 180 cm.

(D) π cm.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng tính độ dài cung tròn công thức $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$, suy ra độ dài cung tròn là $l = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 45}{180} = \pi$.

Chọn đáp án (D)

Câu 20. Một đường tròn có đường kính bằng 10 cm. Tính độ dài l của cung tròn có số đo $\frac{\pi}{5}$.

(A) $l = 2\pi$ cm.

(B) $l = \pi$ cm.

(C) $l = 5\pi$ cm.

(D) $l = 1$ cm.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $l = 10 \cdot \frac{\pi}{5} = 2\pi$ cm.

Chọn đáp án (A)

📁 Dạng 3. Số đo của một góc lượng giác

Cho hai góc lượng giác (Ou, Ov) , $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau ($Ou \equiv O'u'$), tia cuối trùng nhau ($Ov \equiv O'v'$). Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo độ thì ta có

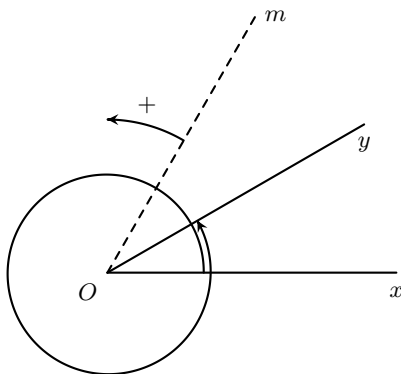
$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Nếu sử dụng đơn vị radian thì công thức trên có thể viết như sau

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 13. Đọc tên góc lượng giác, tia đầu và tia cuối của góc lượng giác đó trong hình.



Lời giải.

Trong hình, góc lượng giác là (Ox, Oy) với tia đầu Ox và tia cuối Oy . □

Ví dụ 14. Cho góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 60° . Cho góc lượng giác $(O'u', O'v')$ có tia đầu $O'u' \equiv Ou$, tia cuối $O'v' \equiv Ov$. Viết công thức biểu thị số đo góc lượng giác $(O'u', O'v')$.

Lời giải.

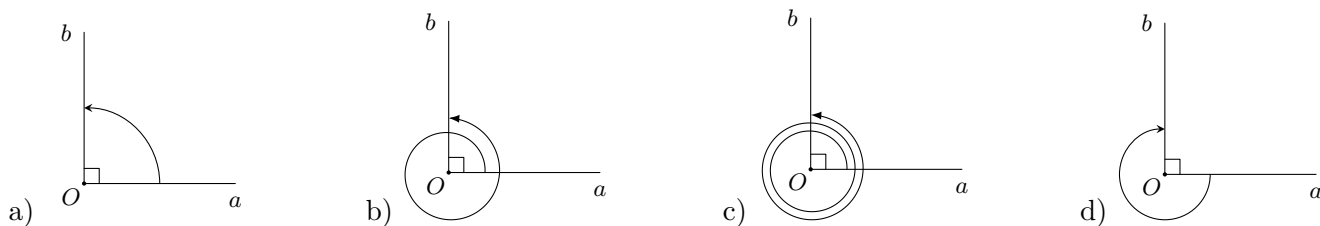
Ta có $(O'u', O'v') = (Ou, Ov) + k360^\circ = 60^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$). □

Ví dụ 15. Cho góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{4\pi}{3}$. Cho góc lượng giác $(O'u', O'v')$ có tia đầu $O'u' \equiv Ou$, tia cuối $O'v' \equiv Ov$. Viết công thức biểu thị số đo góc lượng giác $(O'u', O'v')$.

Lời giải.

Ta có $(O'u', O'v') = (Ou, Ov) + k2\pi = -\frac{4\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). □

Ví dụ 16. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau



Lời giải.

- a) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là 90° .
- b) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$.
- c) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 810^\circ$.
- d) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $\frac{3}{4} \cdot (-360^\circ) = -270^\circ$. □

Ví dụ 17. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow) .

Lời giải.

Theo hệ thức Chasles, ta có

$$\begin{aligned}(Ov, Ow) &= (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 18. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{11\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow) .

Lời giải.

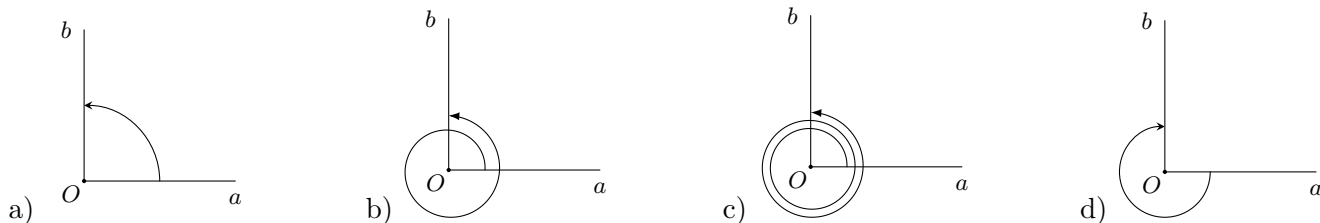
Theo hệ thức Chasles, ta có

$$\begin{aligned}(Ov, Ow) &= (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{4} + k2\pi \\ &= \frac{7\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 12. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau

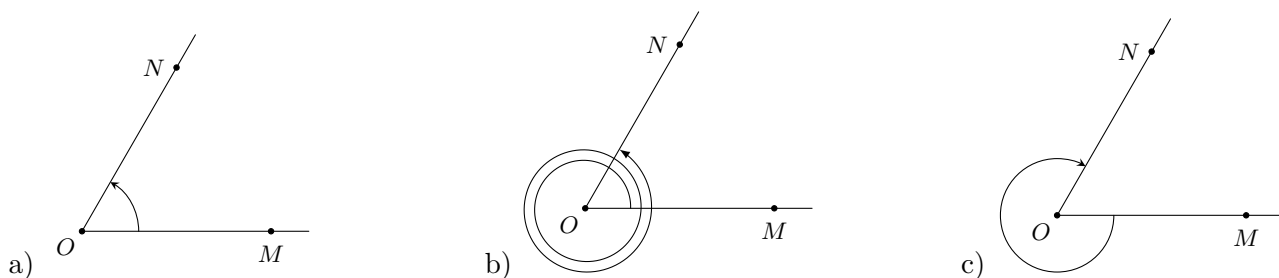


Lời giải.

- a) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là 90° .
- b) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$.
- c) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 810^\circ$.
- d) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $\frac{3}{4} \cdot (-360^\circ) = -270^\circ$.

□

Bài 13. Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



Lời giải.

- a) Số đo của góc lượng giác (OM, ON) là 60° .
- b) Số đo của góc lượng giác (OM, ON) là $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$.
- c) Số đo của góc lượng giác (OM, ON) là -300° .

Công thức tổng quát: $\text{sđ}(OM, ON) = 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. □

Bài 14. Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất và số đo âm lớn nhất, biết một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng 1000° .

Lời giải.

Ta có $(Ou, Ov) = 1000^\circ + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Gọi α là góc có số đo dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

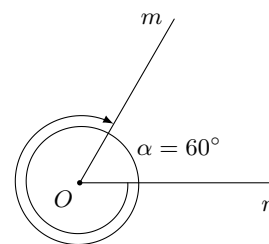
Ta có $\alpha > 0 \Leftrightarrow 1000^\circ + k360^\circ > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{25}{9}$. Mà α dương nhỏ nhất nên $k = -2$, khi đó $\alpha = 280^\circ$.

Gọi β là góc có số đo âm lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

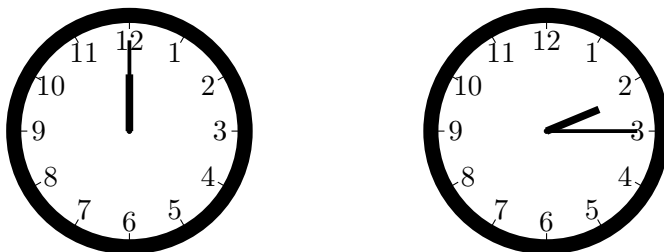
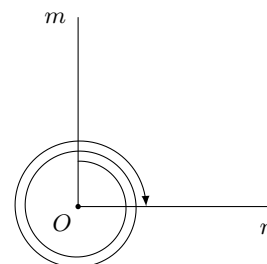
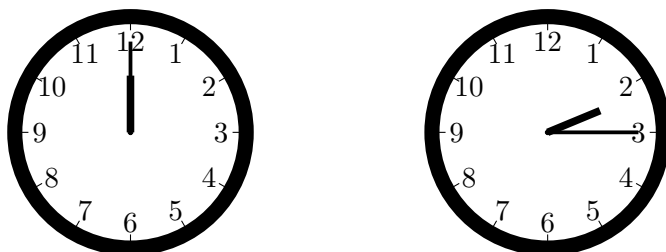
Ta có $\beta < 0 \Leftrightarrow 1000^\circ + k360^\circ < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{25}{9}$. Mà β âm lớn nhất nên $k = -3$, khi đó $\beta = -80^\circ$. □

Bài 15.

Góc lượng giác được biểu diễn ở hình bên có số đo bao nhiêu độ?



Bài 16. Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ?

**Lời giải.**

Gọi Om, On là các tia biểu diễn cho vị trí của kim phút lần lượt tại 0 giờ và 2 giờ 15 phút.

Khi đó kim phút đã quay hết 2 vòng và đi tiếp $\frac{1}{4}$ vòng của đồng hồ.

Mà kim phút chuyển động theo chiều âm nên ta có

$$(Om, On) = \frac{1}{4} \cdot (-360^\circ) + 2 \cdot (-360^\circ) = -810^\circ.$$

Vậy kim phút đã quét hết một góc lượng giác là -810° . □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 21. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{13\pi}{4}$?

(A) $-\frac{3\pi}{4}$.

(B) $\frac{3\pi}{4}$.

(C) $-\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{13\pi}{4} = 4\pi - \frac{3\pi}{4}$, suy ra $\frac{13\pi}{4}$ và $-\frac{3\pi}{4}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A)

Câu 22. Cặp góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối là

(A) 35° và -265° .

(B) -130° và 590° .

(C) $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$.

(D) $-\frac{37\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

$-130^\circ = -360^\circ + 230^\circ$ và $590^\circ = 360^\circ + 230^\circ$ nên điểm cuối của hai góc lượng giác -130° và 590° cùng trùng với điểm cuối của góc lượng giác 230° .

Chọn đáp án (B)

Câu 23.

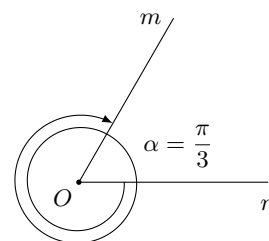
Góc lượng giác nào sau đây **không** thuộc họ góc lượng giác cho trên hình vẽ bên?

(A) $\frac{\pi}{3}$.

(B) $\frac{7\pi}{3}$.

(C) $\frac{4\pi}{3}$.

(D) $-\frac{5\pi}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta có góc lượng giác đã cho trong hình là $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy góc $\frac{4\pi}{3}$ không thuộc họ góc lượng giác đã cho.

Chọn đáp án (C)

Câu 24.

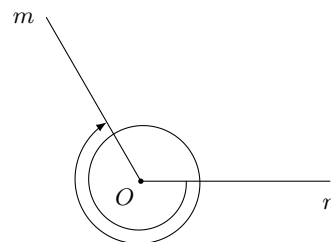
Cho góc $\widehat{mOn} = 120^\circ$. Góc nào sau đây có cùng điểm cuối với góc đã cho ở hình bên?

(A) 240° .

(B) -120° .

(C) -60° .

(D) -240° .



Lời giải.

Ta có $(Om, On) = -240^\circ + k360^\circ$, vậy trong các góc trên chỉ có góc -240° thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D)

Câu 25.

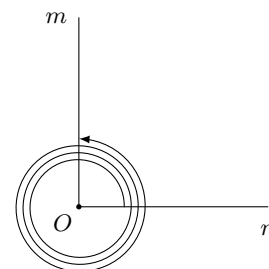
Góc lượng giác trên hình có số đo bao nhiêu?

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) $\frac{13\pi}{2}$.

(C) $-\frac{13\pi}{2}$.

(D) $\frac{5\pi}{2}$.



Lời giải.

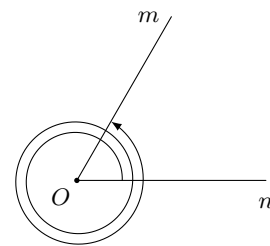
Dựa vào hình vẽ, ta thấy góc lượng giác đã cho có số đo $\frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 26.

Biết góc $\widehat{mOn} = \frac{\pi}{3}$, hỏi góc lượng giác nào sau đây có cùng tia cuối với góc ở hình bên?

- (A) $\frac{7\pi}{3}$. (B) $\frac{13\pi}{3}$. (C) $-\frac{4\pi}{3}$. (D) $-\frac{\pi}{3}$.

**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ, ta thấy góc đề bài cho bằng $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 27. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{2023\pi}{4}$?

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $-\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{2023\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 253 \cdot 2\pi$, suy ra $\frac{2023\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{4}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (B)

Câu 28. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $-\frac{2\pi}{3}$?

- (A) $\frac{4\pi}{3}$. (B) $\frac{2\pi}{3}$. (C) $-\frac{5\pi}{3}$. (D) $\frac{7\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - 2\pi$, suy ra $\frac{4\pi}{3}$ và $-\frac{2\pi}{3}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A)

Câu 29. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $-\frac{\pi}{6}$?

- (A) $\frac{11\pi}{6}$. (B) $\frac{17\pi}{6}$. (C) $-\frac{5\pi}{6}$. (D) $-\frac{7\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, suy ra $\frac{11\pi}{6}$ và $-\frac{\pi}{6}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A)

Câu 30. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{3\pi}{4}$?

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $\frac{11\pi}{4}$. (C) $-\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, suy ra $\frac{11\pi}{4}$ và $\frac{3\pi}{4}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (B)

Dạng 4. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau:

- ☑ Góc α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- ☑ Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m điểm. Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $m - 1$ rồi biểu diễn các góc đó.

Phương pháp :

- ☑ Chọn tia OA làm tia đầu với $A(1, 0)$.
- ☑ Xác định tia cuối OM sao cho $(OA, OM) = \alpha$.

1. Ví dụ mẫu

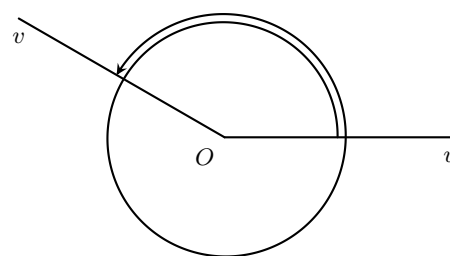
Ví dụ 19. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau

- a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° ;
 b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$.

🗨️ Lời giải.

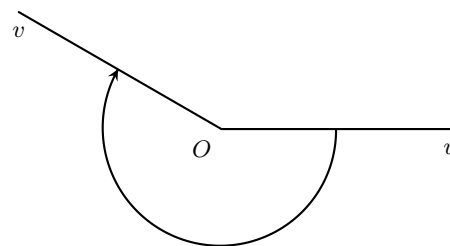
a)

Ta có $510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° được biểu diễn ở hình bên.



b)

Ta có $-\frac{7\pi}{4} = -\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn ở hình bên.



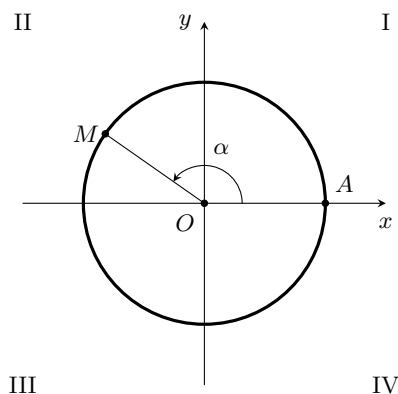
□

Ví dụ 20. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là

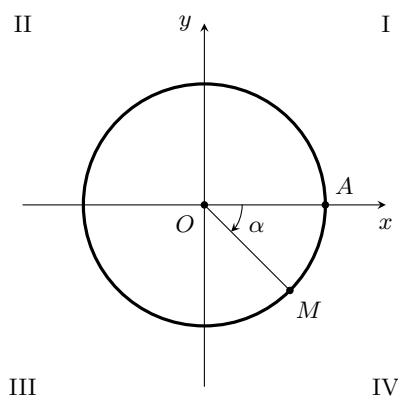
- a) 865° ; b) -1485° ; c) $\frac{13}{3}\pi$; d) $-\frac{7}{3}\pi$.

🗨️ Lời giải.

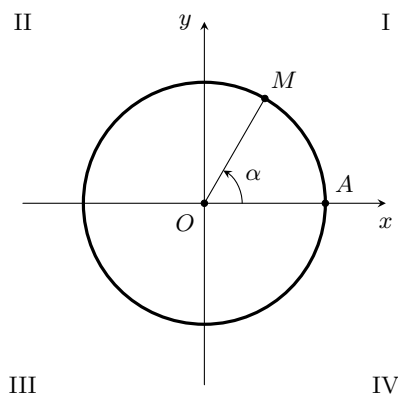
- a) Ta có $865^\circ = 145^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 865° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$.



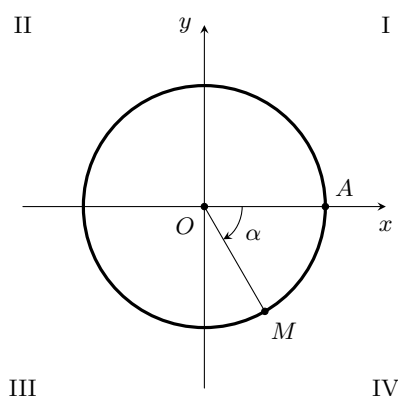
- b) Ta có $-1485^\circ = -45^\circ - 3 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1485° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$.



- c) Ta có $\frac{13}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{13}{3}\pi$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$.



- d) Ta có $-\frac{7}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{7}{3}\pi$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$.



Ví dụ 21. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý)

a) $\alpha = k\pi$;

b) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải.

a) Ta có $\alpha = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo α .

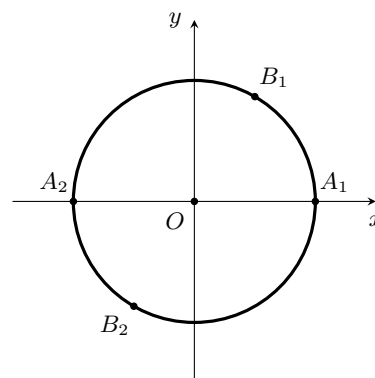
Với $k = 0$, ta có $\alpha = 0$ được biểu diễn bởi điểm A_1 .

Với $k = 1$, ta có $\alpha = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A_2 .

b) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo α .

Với $k = 0$, ta có $\alpha = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm B_1 .

Với $k = 1$, ta có $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm B_2 .



2. Bài tập tự luyện

Bài 17. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là

a) 865° ;

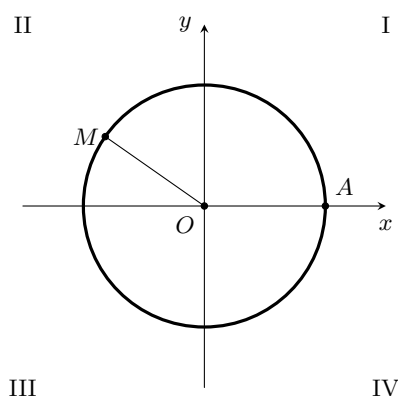
b) -1485° ;

c) $\frac{13}{3}\pi$;

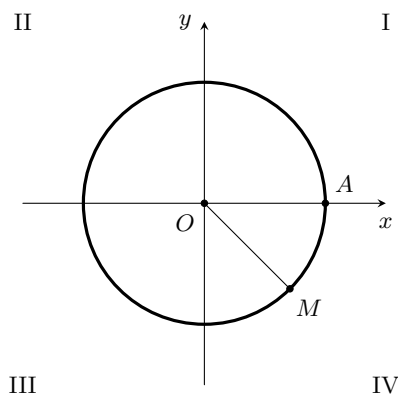
d) $-\frac{7}{3}\pi$.

Lời giải.

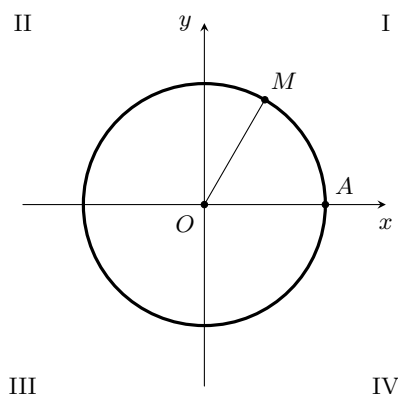
a) Ta có $865^\circ = 145^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 865° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$.



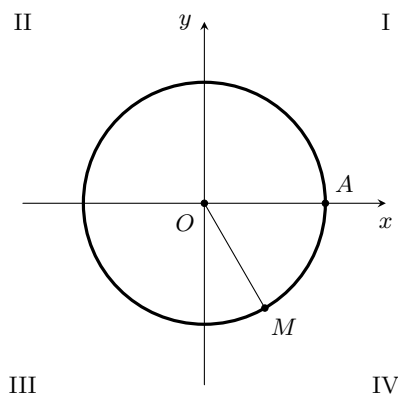
b) Ta có $-1485^\circ = -45^\circ - 3 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1485° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$.



- c) Ta có $\frac{13}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{13}{3}\pi$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$.



- d) Ta có $-\frac{7}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{7}{3}\pi$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$.



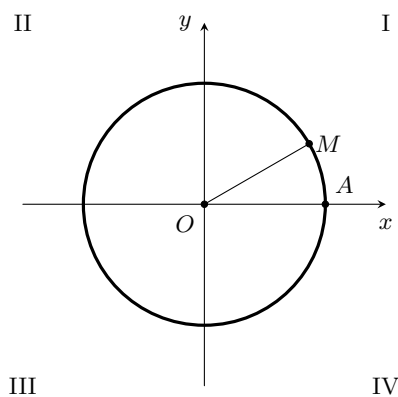
Bài 18. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

a) 750° ;

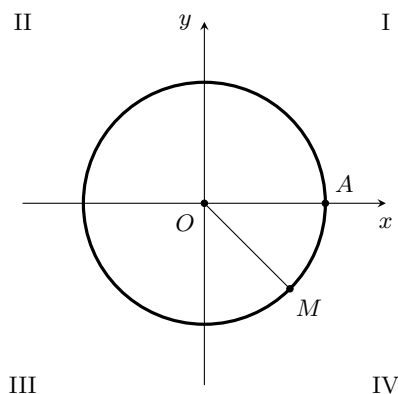
b) -1125° .

Lời giải.

- a) Ta có $750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 750° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\widehat{AOM} = 30^\circ$.



- b) Ta có $-1125^\circ = -45^\circ - 3 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1125° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = 45^\circ$.



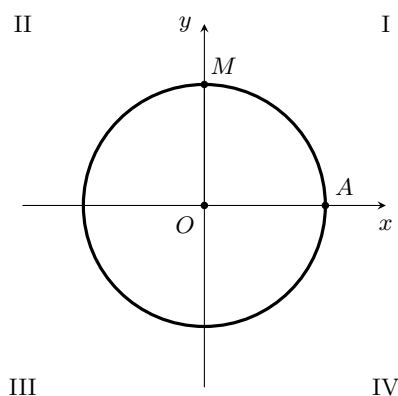
Bài 19. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{9\pi}{2}$;

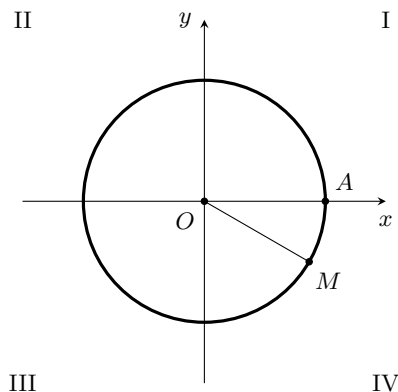
b) $-\frac{37\pi}{6}$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{2}$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{2}$.



- b) Ta có $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 3 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{37\pi}{6}$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{6}$.



Bài 20. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý)

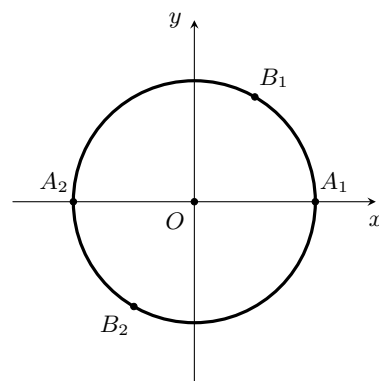
a) $\alpha = k\pi$;

b) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải.

- a) Ta có $\alpha = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo α .
 Với $k = 0$, ta có $\alpha = 0$ được biểu diễn bởi điểm A_1 .
 Với $k = 1$, ta có $\alpha = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A_2 .

- b) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo α .
 Với $k = 0$, ta có $\alpha = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm B_1 .
 Với $k = 1$, ta có $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm B_2 .



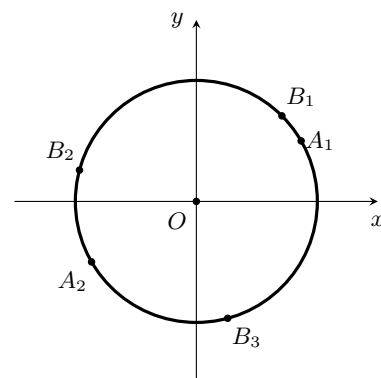
Bài 21. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$;

b) $-\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải.

- a) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn góc α lần lượt là $\frac{\pi}{6}$ biểu diễn bởi A_1 và $\frac{7\pi}{6}$ biểu diễn bởi A_2 .
- b) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$ có ba điểm biểu diễn góc α lần lượt là $\frac{\pi}{4}$ biểu diễn bởi B_1 , $\frac{11\pi}{12}$ biểu diễn bởi B_2 và $\frac{19\pi}{12}$ biểu diễn bởi B_3 .



Bài 22. Khi biểu diễn các góc lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo x .

☑ Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .

☑ Với $k = 1$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' .

Ta có $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo y . Với $k = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.

Bài 23. Xác định công thức hợp nhất của hai góc lượng giác $x_1 = k\pi$ và $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

Ta có $x_1 = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$ có hai điểm biểu diễn cho góc x_1 với 0 biểu diễn bởi A_1 và π biểu diễn bởi A_2 .

$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$ có hai điểm biểu diễn với $\frac{\pi}{2}$ biểu diễn bởi B_1 và $\frac{3\pi}{2}$ biểu diễn bởi B_2 .

Dễ thấy 4 điểm này cách đều nhau do đó có thể gộp hai hai góc lượng giác này lại thành công thức duy nhất là $\frac{k2\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$.

Bài 24. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

- a) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); b) $k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

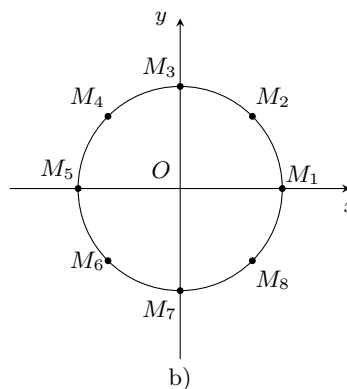
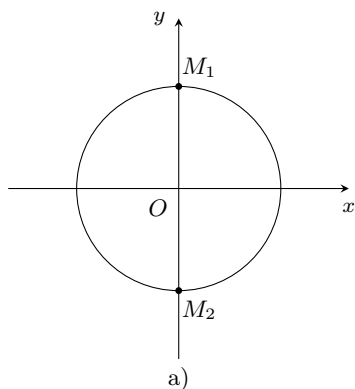
Lời giải.

- a) Ta có $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

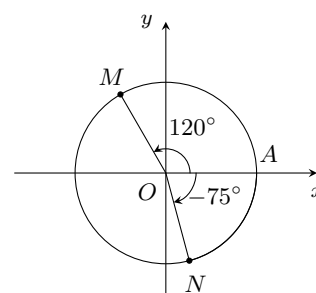
Vậy có 2 điểm M_1, M_2 biểu diễn góc lượng giác $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) trên đường tròn lượng giác là $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{3\pi}{2}$ (Hình a).

- b) Ta có $k\frac{\pi}{4} = \frac{k2\pi}{8}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy có 8 điểm $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ và M_8 biểu diễn góc lượng giác $k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$) trên đường tròn lượng giác là $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ (Hình b).

**Bài 25.**

Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong hình bên.



Hình 14

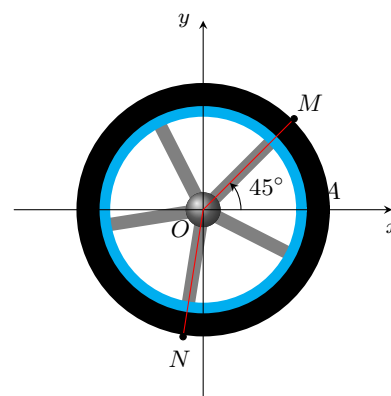
Lời giải.

$$\textcircled{A} \quad (OA, OM) = 120^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{B} \quad (OA, ON) = -75^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 26.

Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Hình 15

Lời giải.

$$\text{Ta có } \widehat{AON} = \left(\frac{360^\circ}{5} - 45^\circ \right) + 72^\circ = 99^\circ.$$

$$\text{Vậy } (Ox, ON) = -99^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 31. Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$\textcircled{A} \quad \frac{3\pi}{7}.$$

$$\textcircled{B} \quad \frac{10\pi}{7}.$$

$$\textcircled{C} \quad \frac{-25\pi}{7}.$$

$$\textcircled{D} \quad \frac{2\pi}{5}.$$

Lời giải.

Ta có $\frac{31\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi$, do đó góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn với góc $\frac{3\pi}{7}$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 32. Các góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác?

(A) 45° ; 405° ; 750° .

(B) 30° ; 405° ; 750° .

(C) 60° ; 405° ; 750° .

(D) 45° ; 405° ; 765° .

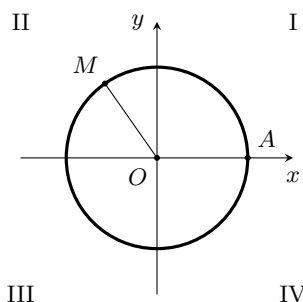
Lời giải.

Ta có $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$ và $765^\circ = 45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$.

Do đó 45° ; 405° ; 765° có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 33. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



(A) 30° .

(B) 90° .

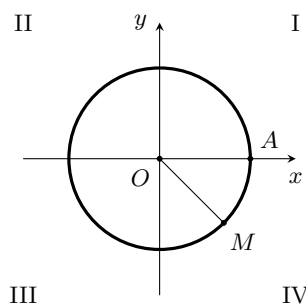
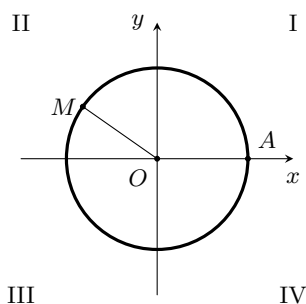
(C) 125° .

(D) -60° .

Lời giải.

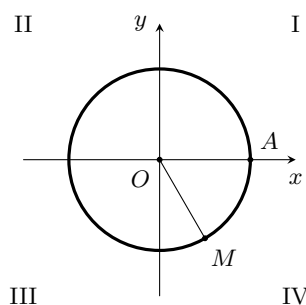
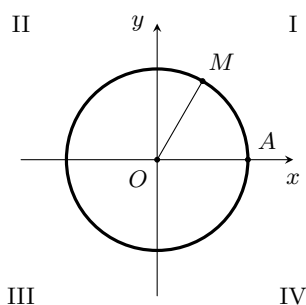
Chọn đáp án **(C)**

Câu 34. Hình vẽ nào dưới đây biểu diễn góc lượng giác có số đo $\alpha = -765^\circ$?



(A)

(B)



(C)

(D)

Lời giải.

Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó góc -765° có điểm biểu diễn tại vị trí góc phần tư thứ IV và góc $\widehat{AOM} = 45^\circ$.
 Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$?

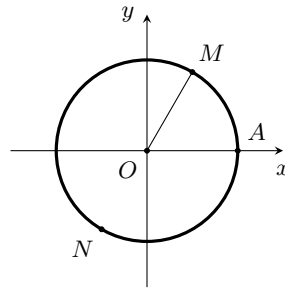
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{4}$. Do đó có 4 điểm biểu diễn cho góc x .

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



- (A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$. (C) $\frac{\pi}{3} + k\pi$. (D) $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$ và có hai điểm M, N đối xứng nhau qua O biểu diễn cho góc lượng giác α . Do đó, α có thể viết dưới dạng $\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOM} = 75^\circ$. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo góc lượng giác $\widehat{AON}$ bằng

- (A) 255° . (B) -105° . (C) -105° hoặc 255° . (D) $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Vì N đối xứng với M qua gốc tọa độ O . Do đó $\widehat{AON} = \widehat{AOM} \pm 180^\circ$, suy ra $\widehat{AON} = 255^\circ$ hoặc $\widehat{AON} = -105^\circ$.
 Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- (A) $\frac{k\pi}{2}$. (B) $k\pi$. (C) $\frac{k2\pi}{3}$. (D) $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\alpha = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Do đó có 4 điểm biểu diễn cho góc α và 4 điểm này tạo thành hình vuông trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho góc lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

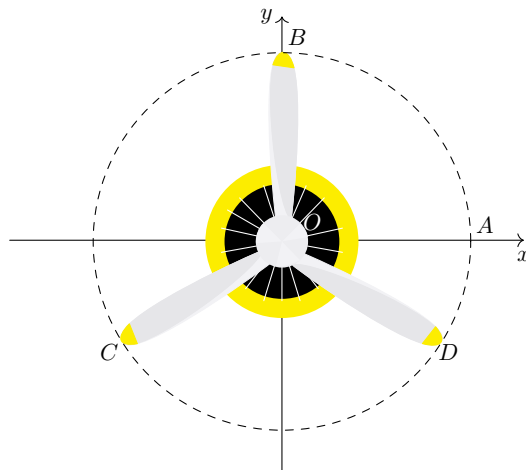
Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in [2\pi; 5\pi]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$.

Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k , là 2, 3, 4, thỏa mãn ycbt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cánh quạt của động cơ máy bay. Các vị trí B, C, D trên cánh quạt có thể biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



(A) $\frac{\pi}{4} + 2\pi$.

(B) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

(C) $\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.

(D) $-\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta thấy $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$ và có điểm biểu diễn cho góc α . Do đó α có thể viết dưới dạng $\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.

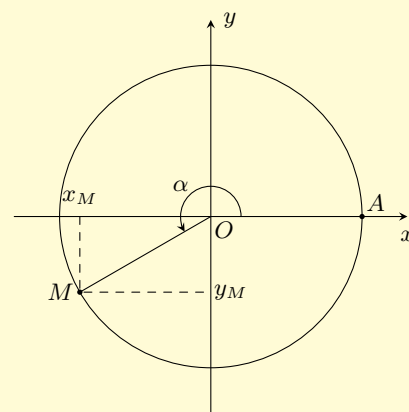
Chọn đáp án (C) □

Dạng 5. Tính giá trị lượng giác của góc lượng giác bằng định nghĩa và xét dấu của các giá trị lượng giác

1. Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Khi đó:

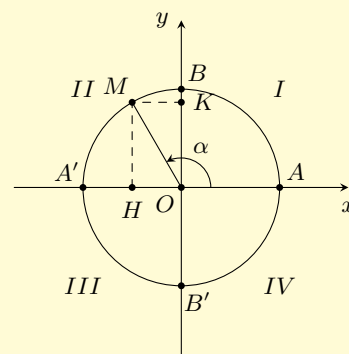
- ✔ Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- ✔ Hoành độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- ✔ Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- ✔ Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu $\cot \alpha$.



Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α . 2.

Dấu của các giá trị lượng giác của góc $\alpha = (OA, OM)$ phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn lượng giác. Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



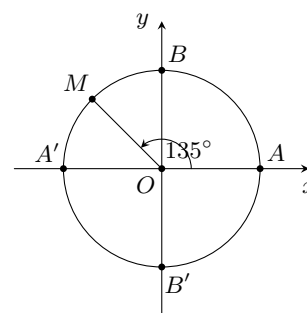
1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 22. Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = 135^\circ$.

Lời giải.

Gọi M là điểm chính giữa của cung BA' trên đường tròn lượng giác.

Ta có $(OA, OM) = 135^\circ$ (tham khảo hình vẽ bên).

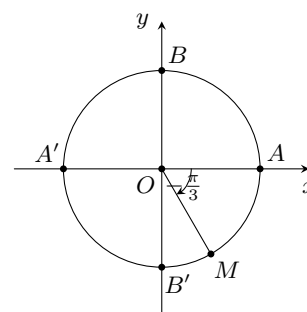


Ví dụ 23. Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, ON) = -\frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là điểm của cung AB' trên đường tròn lượng giác sao cho số đo cung AM bằng $\frac{1}{3}$ số đo cung AB' .

Ta có $(OA, OM) = -\frac{\pi}{3}$ (tham khảo hình vẽ bên).



Ví dụ 24. Cho góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{\pi}{3}$.

a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

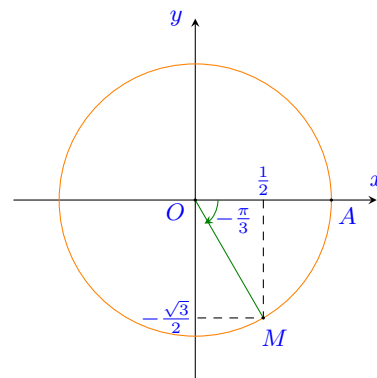
Lời giải.

a) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo là $-\frac{\pi}{3}$ được xác định trong hình bên.

b) Ta có $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3};$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Ví dụ 25. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Do $-\pi < -\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$; $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$; $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$.

Ví dụ 26. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Do $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$ nên $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$; $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$; $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$.

Ví dụ 27. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ)$;

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}$.

Lời giải.

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ)$.

Ta có điểm cuối của cung 50° thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin 50^\circ > 0$. Điểm cuối của cung -100° thuộc góc phần tư thứ III nên $\cos(-100^\circ) < 0$.

Do đó, $A < 0$.

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}$.

Ta có: điểm cuối của cung 195° thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin 195^\circ < 0$. Điểm cuối của cung $\frac{20\pi}{7} = \frac{6\pi}{7} + 2\pi$

thuộc góc phần tư thứ II nên $\tan \frac{20\pi}{7} < 0$.

Do đó, $B > 0$.

Ví dụ 28. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $B = \tan\left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha\right)$.

Lời giải.

a) $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha < 0$.

b) $B = \tan\left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 1009\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha > 0$.

2. Bài tập tự luyện

Bài 27. Tìm các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải.



Bài 28. Tìm các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.



Bài 29. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc sau

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

b) $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Lời giải.

a) Xét $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có

☑ $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

☑ $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

☑ $\tan \alpha = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

☑ $\cot \alpha = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Xét $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có

☑ $\sin \alpha = 0$;

☑ $\cos \alpha = (-1)^k$;

☑ $\tan \alpha = 0$;

☑ $\cot \alpha$ không xác định.

c) Xét $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có

☑ $\sin \alpha = (-1)^k$;

☑ $\cos \alpha = 0$;

☑ $\cot \alpha = 0$;

☑ $\tan \alpha$ không xác định.

d) Xét $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có

☑ $\sin \alpha = (-1)^k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

☑ $\cos \alpha = (-1)^k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

☑ $\tan \alpha = 1$;

☑ $\cot \alpha = 1$.



Bài 30. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Do $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$ nên $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$; $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$; $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$.



4

4

7

4

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin \alpha > 0.$

Do đó $A < 0.$

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ).$

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $80^\circ < \alpha + 80^\circ < 170^\circ.$

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + 80^\circ$ thuộc góc phần tư thứ I hoặc thứ II nên $B > 0.$

□

Bài 36. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right).$

Lời giải.

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha < 0.$

b)

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 280 \cdot 2\pi\right) \\ &= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha > 0 \end{aligned}$$

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 41. Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $\sin \alpha > 0.$

(B) $\cos \alpha > 0.$

(C) $\tan \alpha < 0.$

(D) $\cot \alpha > 0.$

Lời giải.

Với $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0.$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 42. Cho góc lượng giác $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $\sin \alpha < 0.$

(B) $\cos \alpha < 0.$

(C) $\tan \alpha < 0.$

(D) $\cot \alpha < 0.$

Lời giải.

Với $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, ta có α thuộc góc phần tư thứ IV nên $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0.$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 43. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin(90^\circ + \alpha) < 0.$

(B) $\cos(90^\circ + \alpha) < 0.$

(C) $\sin(150^\circ + \alpha) > 0.$

(D) $\cos(180^\circ + \alpha) > 0.$

Lời giải.

Ta có $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha + 90^\circ < 180^\circ$ thuộc góc phần tư thứ II, nên $\cos(90^\circ + \alpha) < 0.$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 44. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) > 0.$

(B) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) > 0.$

(C) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) > 0.$

(D) $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) > 0.$

Lời giải.

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ I và II, nên $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) > 0.$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 45. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$. (B) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) > 0$. (C) $\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) < 0$. (D) $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) > 0$.

Lời giải.

Ta có $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} + \alpha < \frac{19\pi}{10}$ thuộc góc phần tư thứ III và IV, nên $\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 6. Cho một giá trị lượng giác của góc, tính các giá trị còn lại hay một biểu thức lượng giác

Dựa vào các công thức cơ bản và dấu của các giá trị lượng giác.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Nhớ: "Nhất cả - nhì sin- tam tan - tứ cos để biết dấu của các giá trị lượng giác."

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 29. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} + \cot^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \cos^2 \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} + \cot^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + (\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$
□

Ví dụ 30. Tính giá trị của biểu thức $Q = \tan^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \tan^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} \\ &= (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 + 0 \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$
□

Ví dụ 31. Cho góc lượng giác α sao cho $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\tan \alpha = -2$. Tính $\cos \alpha$, $\sin \alpha$.

Lời giải.

Do $\tan \alpha = -2$ nên $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2$, suy ra $\sin \alpha = -2 \cos \alpha$.

Vì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha + (-2 \cos \alpha)^2 = 1$, suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$.

Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos \alpha > 0$.

Từ đó ta có $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, suy ra $\sin \alpha = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. □

Ví dụ 32. Cho góc lượng giác α sao cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. Tìm $\cos \alpha$.

Lời giải.

Vì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$.

Từ đó ta có $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$. □

Ví dụ 33. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \end{cases}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nên $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$ và $\cot \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

b) Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nên $\tan \alpha = \frac{2}{5} : \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$ và $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

c) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, do đó từ công thức:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{5})^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ và } \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

d) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$, do đó từ công thức:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}.$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\sqrt{2} \text{ và } \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 37. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \end{cases}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nên $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$ và $\cot \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

b) Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nên $\tan \alpha = \frac{2}{5} : \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$ và $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

c) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, do đó từ công thức:

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$.

$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{5})^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$;

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ và $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}$.

d) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$, do đó từ công thức:

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$.

$\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$;

$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\sqrt{2}$ và $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

□

Bài 38. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0$;

c) $\tan \alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0$;

d) $\cot \alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi$.

Lời giải.

a) Xét $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Từ đó ta có $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{15}$; $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.

b) Xét $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0$;

Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

Do $-\pi < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

Từ đó ta có $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) Xét $\tan \alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0$;

Ta có $\cot \alpha = \frac{1}{3}$.

Do $\tan \alpha = 3$ nên $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$, suy ra $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$.

Vì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha + (3 \cos \alpha)^2 = 1$, suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$.

☑ Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos \alpha > 0$.

Từ đó ta có $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

☑ Do $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$.

Từ đó ta có $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

d) Xét $\cot \alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi$;

Ta có $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$.

Do $\cot \alpha = -2$ nên $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -2$, suy ra $\cos \alpha = -2 \sin \alpha$.

Vì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ nên $(-2 \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$.

Do $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$.

Từ đó ta có $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

□

Bài 39. Cho $\tan a = 2$, $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $A = \sin a + \cos a$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ (vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$).

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin a = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Do đó $A = -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

□

Bài 40. Cho $\cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{-\sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= -1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &= -1 + 1 + \tan^2 \alpha \\ &= \frac{1}{\cot^2 \alpha} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 46. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\sin \alpha < 0$. (B) $\cos \alpha > 0$. (C) $\tan \alpha < 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Vì α là góc tù, nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 47. Giá trị của $\sin(-240^\circ)$ là

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin(-240^\circ) = \sin(120^\circ - 360^\circ) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 48. Với điều kiện của α đã được thỏa mãn. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

- (A) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. (B) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$. (C) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. (D) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Lời giải.

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 49. Giá trị của $\tan 180^\circ$ là

- (A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) Không xác định.

Lời giải.

Ta có $\tan 180^\circ = 0$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 50. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$. (C) $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. (D) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Lời giải.

Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ là góc phần tư thứ II, nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 51. Biểu thức $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) -2. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 52. Cho $\cot x = -5$. Giá trị của $P = \frac{\sin x - 2 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$ là

(A) $-\frac{7}{11}$.

(B) $\frac{7}{11}$.

(C) $-\frac{11}{17}$.

(D) $\frac{11}{17}$.

Lời giải.

$$\text{Biến đổi được } P = \frac{1 - 2 \cot x}{3 + 4 \cot x} = \frac{1 - 2(-5)}{3 + 4(-5)} = -\frac{11}{17}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Cho $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ ($\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$). Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(C) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Do $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho α là một góc lượng giác thỏa mãn $\tan \alpha = -2$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó, giá trị $\cos \alpha$ bằng

(A) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(B) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(C) $\cos \alpha = \frac{-1}{5}$.

(D) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Giá trị của $\sin \alpha$ biết $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bằng

(A) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

(B) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

(C) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

(D) $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sin \alpha = -\frac{3}{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho $\tan a = 2$. Khi đó, giá trị $A = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5$ bằng

(A) $A = -5$.

(B) $A = -4$.

(C) $A = -3$.

(D) $A = -2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5 \\ &= 1 + \tan^2 a + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5 \\ &= 1 + \tan^2 a + \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} - 5 \\ &= 1 + \tan^2 a + \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} - 5 \\ &= 1 + 4 + \frac{1 + 2}{1 - 2} - 5 = -3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Cho $\cot a = 4 \tan a$ và $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó $\sin a$ bằng

(A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\cot^2 a = 4 \tan a \cdot \cot a = 4 \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 58. Cho $\tan \alpha = -2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{-\sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ bằng

(A) 6.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 12.

Lời giải.

$$P = \frac{-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 4}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 3} = \frac{-\tan \alpha + 4}{\tan \alpha + 3} = \frac{2 + 4}{-2 + 3} = 6.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 59. Cho $\sin a + 2 \cos a = 0$ và $a \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Khi đó $\cos a$ bằng

(A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\sin a + 2 \cos a = 0 \Leftrightarrow \sin a = -2 \cos a \Leftrightarrow \tan a = -2$.

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow \cos a &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (vì } \frac{3\pi}{2} < a < 2\pi). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 60. Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + 3 \cdot \sin^2 x}$.

(A) $A = 4$.

(B) $A = 0$.

(C) $A = 1$.

(D) $A = 2$.

Lời giải.

Chia cả tử và mẫu của A cho $\cos^2 x$ ta được

$$A = \frac{\tan^2 x - 2 \tan x}{1 + 3 \tan x} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{1 + 3 \cdot 2} = 0.$$

Chọn đáp án (B)

Dạng 7. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

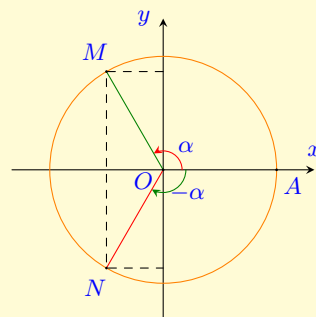
a) Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

☒ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

☒ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

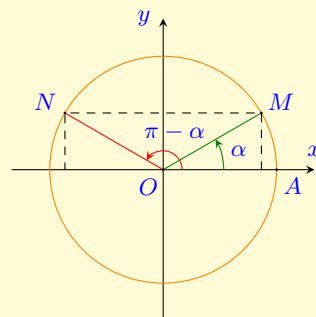
☒ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

☒ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

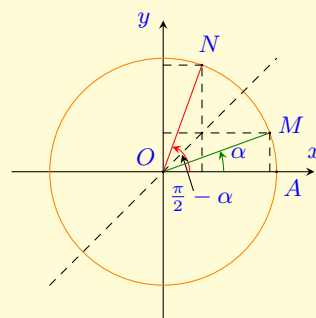


b) Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

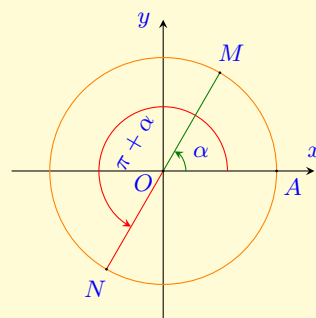
- ☑ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- ☑ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- ☑ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- ☑ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

c) Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

- ☑ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- ☑ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- ☑ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- ☑ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

d) Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

- ☑ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
- ☑ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
- ☑ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
- ☑ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$



- ☑ $\begin{cases} \sin(k2\pi + a) = \sin a, & \sin[(2k+1)\pi + a] = -\sin a \\ \cos(k2\pi + a) = \cos a, & \cos[(2k+1)\pi + a] = -\cos a \end{cases}$ (bỏ chẵn pi cộng, bỏ lẻ trừ).
- ☑ $\tan(k\pi + a) = \tan a, \quad \cot(k\pi + a) = \cot a$ (tan và cot bỏ pi chẵn, lẻ đều cộng).

1. Ví dụ mẫu**Ví dụ 34.** Tính

a) $\sin \frac{13\pi}{4};$

b) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5}.$

Lời giải.

Ta có

a) $\sin \frac{13\pi}{4} = \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

b) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{10} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = 0.$

□

Ví dụ 35. Tính

a) $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}$.

b) $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} & \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ \\ &= \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan(90^\circ - 2^\circ) \cdot \tan(90^\circ - 1^\circ) \\ &= \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \cot 1^\circ \\ &= \tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \\ &= \tan 45^\circ = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 36. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức

$$A = \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \cos \frac{5\pi}{36} + \cos \frac{8\pi}{9} - \cos \pi.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \cos \frac{5\pi}{36} + \cos \frac{8\pi}{9} - \cos \pi \\ &= \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{36} \right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) + 1 \\ &= \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \sin \frac{13\pi}{36} - \cos \frac{\pi}{9} + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$.

Ví dụ 37. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay).

a) $A = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{35\pi}{36} + \sin \pi$;

b) $B = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{36}$;

c) $C = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{23\pi}{36}$;

d) $D = \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{5\pi}{9}$.

Lời giải.

a) $A = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{35\pi}{36} + \sin \pi = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(\pi - \frac{\pi}{36} \right) + \sin \pi$
 $= \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{36} + \sin \pi = \sin \frac{\pi}{6} + \sin \pi = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$

b) $B = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{36} = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{36} \right)$
 $= \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{36} = 0.$

c) $C = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{23\pi}{36} = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \left(\pi - \frac{13\pi}{36} \right)$
 $= \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \left(-\tan \frac{13\pi}{36} \right) = -\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{13\pi}{36}$
 $= -\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{36} \right) = -\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \cot \frac{5\pi}{36}$
 $= -\left(\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \cot \frac{5\pi}{36} \right) \tan \frac{\pi}{4} = -1 \cdot 1 = -1.$

$$\begin{aligned}
 d) \quad D &= \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{5\pi}{9} = \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \left(\pi - \frac{4\pi}{9} \right) \\
 &= \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\cot \frac{4\pi}{9} \right) = -\cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{4\pi}{9} \\
 &= -\cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} \right) = -\cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \tan \frac{\pi}{18} \\
 &= -\left(\cot \frac{\pi}{18} \cdot \tan \frac{\pi}{18} \right) \cot \frac{\pi}{6} = -1 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 41. Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau: 225° ; -225° ; $-1\ 035^\circ$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{2}$; $-\frac{159\pi}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{a} \quad \sin 225^\circ &= \sin(45^\circ + 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 \cos 225^\circ &= \cos(45^\circ + 180^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 \tan 225^\circ &= \frac{\sin 225^\circ}{\cos 225^\circ} = 1; \\
 \cot 225^\circ &= \frac{\cos 225^\circ}{\sin 225^\circ} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{b} \quad \sin(-225^\circ) &= \sin(-45^\circ + 180^\circ) = -\sin(-45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 \cos(-225^\circ) &= \cos(-45^\circ + 180^\circ) = -\cos(-45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 \tan(-225^\circ) &= \frac{\sin(-225^\circ)}{\cos(-225^\circ)} = -1; \\
 \cot(-225^\circ) &= \frac{\cos(-225^\circ)}{\sin(-225^\circ)} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{c} \quad \sin(-1\ 035^\circ) &= \sin(45^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 \cos(-1\ 035^\circ) &= \cos(45^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 \tan(-1\ 035^\circ) &= \frac{\sin(-1\ 035^\circ)}{\cos(-1\ 035^\circ)} = 1; \\
 \cot(-1\ 035^\circ) &= \frac{\cos(-1\ 035^\circ)}{\sin(-1\ 035^\circ)} = 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{d} \quad \sin \frac{5\pi}{3} &= \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\
 \cos \frac{5\pi}{3} &= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \\
 \tan \frac{5\pi}{3} &= \frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3}} = -\sqrt{3}; \\
 \cot \frac{5\pi}{3} &= \frac{\cos \frac{5\pi}{3}}{\sin \frac{5\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{e} \quad \sin \frac{19\pi}{2} &= \sin \left(10\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1; \\
 \cos \frac{19\pi}{2} &= \cos \left(10\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\cot \frac{19\pi}{2} = \frac{\cos \frac{19\pi}{2}}{\sin \frac{19\pi}{2}} = 0.$$

$$\textcircled{v} \sin \left(-\frac{159\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 40\pi \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \left(-\frac{159\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 40\pi \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan \left(-\frac{159\pi}{4} \right) = \frac{\sin \left(-\frac{159\pi}{4} \right)}{\cos \left(-\frac{159\pi}{4} \right)} = 1;$$

$$\cot \left(-\frac{159\pi}{4} \right) = \frac{\cos \left(-\frac{159\pi}{4} \right)}{\sin \left(-\frac{159\pi}{4} \right)} = 1.$$

□

Bài 42. Tính

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng);

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Lời giải.

a) Nhận xét thấy $\sin^2 85^\circ = [\sin(90^\circ - 5^\circ)]^2 = \cos^2 5^\circ$.

Do đó

$$\begin{aligned} A &= \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ \\ &= \sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ + \dots + \sin^2 45^\circ \\ &= \sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \dots + \sin^2 45^\circ \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{8 \text{ số hạng}} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

b) Nhận xét thấy $\cos 175^\circ = \cos(180^\circ - 5^\circ) = -\cos 5^\circ$.

Do đó

$$\begin{aligned} B &= \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ \\ &= \cos 5^\circ + \cos 175^\circ + \cos 10^\circ + \cos 170^\circ + \dots + \cos 90^\circ \\ &= \cos 5^\circ - \cos 5^\circ + \cos 10^\circ - \cos 10^\circ + \dots + \cos 90^\circ \\ &= \cos 90^\circ \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bài 43. Rút gọn biểu thức

$$\textcircled{v} A = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin(x - \pi).$$

$$\textcircled{v} B = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right).$$

$$\textcircled{v} C = 2 \cos x + 3 \cos(\pi - x) - \sin \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) + \tan \left(\frac{3\pi}{2} - x \right).$$

$$\textcircled{v} D = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin(5\pi - x) + \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right).$$

$$\textcircled{v} E = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

$$\textcircled{v} F = \sin(5\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot(3\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

Bài 44. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right).$$

$$\text{b) } H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

$$\text{c) } I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x).$$

$$\text{d) } J = \cos(270^\circ - x) - 2 \sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2 \sin(270^\circ - x).$$

$$\text{e) } K = \cos^{2013} x + \cos^{2013}(\pi + x) \cdot \sin^{2012}(\pi + x) - \sin^{2011}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$\text{f) } L = \sin^6(\pi + x) + \cos^6(x - \pi) - 2 \sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{g) } M = \frac{\tan\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(36\pi - x) \cdot \sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(x - 99\pi)}.$$

$$\text{h) } P = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Bài 45. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha) &= \sin\left(-8\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(12\pi + \pi + \alpha) \\ &= \cos \alpha + \cos \alpha = 2 \cos \alpha = -\frac{10}{13}. \end{aligned}$$

□

Bài 46. Tính $\sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha = 0.$$

□

Bài 47. Cho $\cos \alpha = \frac{-3}{7}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Tính $\sin(-\alpha)$.

Lời giải.

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \sin \alpha > 0.$$

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

$$\text{Mà } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

□

Bài 48. Với mọi tam giác ABC , chứng minh $\cos \frac{A+B+C}{2} = \sin A$.

Lời giải.

Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\cos \frac{A+B+C}{2} = \cos \frac{2A - (A+B+C)}{2} = \cos \frac{2A - 180^\circ}{2} = \cos(A - 90^\circ) = \sin A.$$

□

Bài 49. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tính giá trị của biểu thức $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$.

Lời giải.

Áp dụng quan hệ hai cung hơn kém π , ta có

$$\begin{aligned}\cos \left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right) &= -\cos \alpha, \\ \cos \left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right), \\ \cos \left(\alpha + \frac{7\pi}{5}\right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right), \\ \cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{5}\right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right), \\ \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Suy ra $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) = 0$.

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 61. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

(A) $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$.

(B) $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.

(C) $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.

(D) $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

Lời giải.

Ta có: $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 62. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $\tan(\pi - a) = \tan a$.

(B) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\sin a$.

(C) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$.

(D) $\sin(\pi + a) = \sin a$.

Lời giải.

Ta có $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - (-a)\right) = \tan(-a) = -\tan a$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 63. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

(A) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

(B) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

(C) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$.

(D) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Lời giải.

Ta có: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cot(-x) = -\cot x$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 64. Giá trị của $\sin \frac{47\pi}{6}$ là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $-\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \frac{47\pi}{6} = \sin \left(8\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 65. Tính $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$

(A) 1.

(B) 0.

(C) $2 \cos 18^\circ$.

(D) $-2 \cos 18^\circ$.

Lời giải.

Ta có: $342^\circ = -18^\circ + 360^\circ$. Nên $\cos 342^\circ = \cos(-18^\circ) = \cos 18^\circ$.

$\Rightarrow \cos 18^\circ - \cos 342^\circ = \cos 18^\circ - \cos 18^\circ = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 66. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

(A) $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$.

(C) $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$.

(D) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 67. $\tan \alpha - (-\tan \alpha)$ bằng

(A) 0.

(B) $2 \tan \alpha$.

(C) $-2 \tan \alpha$.

(D) $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có: $\tan \alpha - (-\tan \alpha) = \tan \alpha + \tan \alpha = 2 \tan \alpha$.

Chọn đáp án (B)

Câu 68. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

(A) $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{C}$.

(B) $\tan \widehat{B} = \sin \widehat{C}$.

(C) $\cot \widehat{B} = \tan \widehat{C}$.

(D) $\sin \widehat{B} = -\cos \widehat{C}$.

Lời giải.

Vì $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\cot \widehat{B} = \tan \widehat{C}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 69. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

(B) $\tan \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$.

(C) $\cot \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2}$.

(D) $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2} \\ \cot \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2} \\ \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \end{cases}$

Vậy khẳng định “ $\tan \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$ ” là sai.

Chọn đáp án (B)

Câu 70. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\sin(A+B) = -\sin C$.

(B) $\tan(A+B) = -\tan C$.

(C) $\cos(A+B) = -\cos C$.

(D) $\cot(A+B) = -\cot C$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.

Chọn đáp án (A)

Câu 71. Cho $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 2 \cos(-x)$.

(A) 1.

(B) 3.

(C) 0.

(D) -1.

Lời giải.

Ta có $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 2 \cos(-x) = \cos x + 2 \cos x = 1$.

Chọn đáp án (A)

Câu 72. Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos(\pi + \alpha)$.

(A) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(B) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

(C) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

(D) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên suy ra $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Mà $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Chọn đáp án (B)

Câu 73. Cho $A = \frac{\sin 515^\circ \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \tan 73^\circ}$. Giá trị của A bằng

(A) $\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$.

(B) $-\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$.

(C) $\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$.

(D) $-\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 515^\circ &= \sin(-25^\circ + 180^\circ + 360^\circ) = -\sin(-25^\circ) = \sin 25^\circ, \\ \cos(-475^\circ) &= \cos(-25^\circ - 90^\circ - 360^\circ) = \sin(-25^\circ) = -\sin 25^\circ, \\ \cot 408^\circ &= \cot(720^\circ - 90^\circ - 222^\circ) = -\tan(-222^\circ) = \tan 222^\circ, \\ \cot(-505^\circ) &= \cot(-415^\circ - 90^\circ) = -\tan(-415^\circ) = \tan 415^\circ, \\ \tan 197^\circ &= \tan(-73^\circ + 90^\circ + 180^\circ) = -\tan(-73^\circ + 90^\circ) = \cot 73^\circ.\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sin 25^\circ (-\sin 25^\circ) + \cot 222^\circ \tan 222^\circ}{\cot 415^\circ \tan 415^\circ + \cot 73^\circ \tan 73^\circ} = \frac{-\sin^2 25^\circ + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$.

Chọn đáp án (A)

Câu 74. Cho tam giác ABC không có góc 45° . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) $\sin A = \sin(B + C)$.

(B) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

(C) $\cos(3A + B + C) = \cos 2A$.

(D) $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(3A + B + C) = \cos(2A + A + B + C) = \cos(2A + 180^\circ) = -\cos 2A \neq \cos 2A.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 75. Giá trị biểu thức $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ$ bằng

(A) $\frac{89}{2}$.

(B) 44.

(C) 45.

(D) $\frac{91}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng quan hệ hai cung phụ nhau, ta có

$$\begin{aligned}\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ &= \cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ = 1, \\ \cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ &= \cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ = 1, \\ &\dots \\ \cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ &= \cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ = 1.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ = 44 + \cos^2 45^\circ = \frac{89}{2}.$$

Chọn đáp án (A)

Dạng 8. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Phương pháp:

- ☑ Cách 1. Thông thường biến đổi về phức tạp thành về đơn giản bằng cách phép biến đổi đại số và công thức lượng giác.
- ☑ Cách 2. Dùng biến đổi tương đương.

Lưu ý:

- ☑ Các hằng đẳng thức

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

- ☑ Các công thức lượng giác cơ bản

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 38. Chứng minh đẳng thức sau: $\frac{\cot a - \cos a}{\cos^3 a} = \frac{1}{\sin a \cdot (1 + \sin a)}$.

☞ **Lời giải.**

Với điều kiện xác định, ta có

$$\frac{\cot a - \cos a}{\cos^3 a} = \frac{\cos a (1 - \sin a)}{\sin a \cdot \cos^3 a} = \frac{1 - \sin a}{\sin a \cdot (1 - \sin^2 a)} = \frac{1}{\sin a \cdot (1 + \sin a)}.$$

□

Ví dụ 39. Với điều kiện $x \neq k\pi$, chứng minh đẳng thức sau: $\sin x \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) = 2$.

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sin x \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) &= \sin x \left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{(1 - \cos x) \sin x} \right) \\ &= \sin x \cdot \frac{2 - 2 \cos x}{(1 - \cos x) \sin x} = \sin x \cdot \frac{2}{\sin x} = 2. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 40. Chứng minh đẳng thức $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$.

☞ **Lời giải.**

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 50. Chứng minh rằng: $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

☞ **Lời giải.**

□

Bài 51. Chứng minh rằng: $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

☞ **Lời giải.**

Bài 52. Chứng minh rằng: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

 **Lời giải.**

Bài 53. Chứng minh rằng: $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$

 **Lời giải.**

$$VT = \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x + \tan^2 x = 1 + 2 \tan^2 x = VP \text{ (đpcm)}$$

Bài 54. Chứng minh rằng: $\frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 1 + 2 \cot^2 x$

 **Lời giải.**

Bài 55. Chứng minh rằng: $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

 **Lời giải.**

Bài 56. Chứng minh rằng: $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

 **Lời giải.**

Bài 57. Chứng minh rằng: $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} VT &= \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot (1 - \sin^2 x) = \cot^2 x \cdot \cos^2 x \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 58. Chứng minh rằng: $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

 **Lời giải.**

Bài 59. Chứng minh rằng: $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$

 **Lời giải.**

Bài 60. Chứng minh rằng: $\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\sin x}$

 **Lời giải.**

Bài 61. Rút gọn biểu thức $A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} + \sin x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} + \sin x = \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} + \sin x \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sin x = \cos x - \sin x + \sin x = \cos x. \end{aligned}$$

Bài 62. Rút gọn biểu thức $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$.

Lời giải.

Bài 63. Rút gọn biểu thức $A = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

Lời giải.

Bài 64. Rút gọn biểu thức $A = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x$.

Lời giải.

Bài 65. Rút gọn biểu thức $A = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

Lời giải.

Bài 66. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(1 + \tan x) \cos^2 x + (1 + \cot x) \sin^2 x}$.

Lời giải.

Bài 67. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}$.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 76. Câu 4. Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

- (A) $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$. (B) $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$. (C) $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$. (D) $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 77. Tìm khẳng định đúng (α là góc tùy ý).

- (A) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. (B) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2$. (C) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. (D) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án (C)

Câu 78. Câu 4. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) = 0$.

(B) $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) = 2$.

(C) $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) = 1$.

(D) $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) = 3$.

Lời giải.

Ta có $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. Do đó $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

(A) $M = 1$.

(B) $M = 2$.

(C) $M = 4$.

(D) $M = 4 \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

Suy ra $M = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Đơn giản biểu thức $P = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x$, ta được

(A) $P = 0$.

(B) $P = -\sin x$.

(C) $P = \cos x - \sin x$.

(D) $P = -2 \sin x$.

Lời giải.

Ta có

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = \sin x - \sin x = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Với góc x bất kì. Chọn khẳng định đúng.

(A) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

(B) $\sin x + \cos x = 1$.

(C) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

(D) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Lời giải.

Khẳng định đúng là $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Bài số 2

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng

$$a) \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a.$$

$$c) \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

$$e) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$$

$$b) \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a.$$

$$d) \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

$$f) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$$

2. Công thức nhân đôi

$$a) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$c) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

$$b) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$d) \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$$

3. Công thức hạ bậc

$$a) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha).$$

$$b) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha).$$

$$c) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

4. Công thức nhân ba

$$a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

$$b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$c) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}.$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$a) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$c) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$b) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$d) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$a) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$b) \sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

$$c) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

B – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Áp dụng công thức cộng

Một số công thức cộng cần nhớ (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

✓ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

✓ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

✓ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$

$$\textcircled{v} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{v} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{v} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Một số trường hợp rút gọn nên nhớ:

$$\textcircled{v} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\textcircled{v} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\textcircled{v} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (TH). Không dùng máy tính, hãy tính

a) $\sin 75^\circ$.

b) $\sin \frac{\pi}{12}$.

Lời giải.

a) Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

b) Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

□

Ví dụ 2 (TH). Không dùng máy tính, hãy tính

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$.

b) $\cos 15^\circ$.

Lời giải.

a) Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

b) Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

□

Ví dụ 3 (TH). Không dùng máy tính, hãy tính

a) $\tan \frac{7\pi}{12}$.

b) $\tan 165^\circ$.

Lời giải.

a) Áp dụng công thức cộng đối với tang, ta có:

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}.$$

b) Áp dụng công thức cộng đối với tang, ta có:

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4 (TH). Không dùng máy tính, hãy tính $\cos 105^\circ$ và $\cot \frac{\pi}{12}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \cot \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Ví dụ 5 (TH). Chứng minh rằng $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

🗨️ **Lời giải.**

Cách 1: Ta có $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

Đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Ta có $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6 (TH). Tính $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\sin a = \frac{12}{13}$ và $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}.$$

$$\text{Vì } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos a > 0, \text{ suy ra } \cos a = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Do đó } \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin a \cos \frac{\pi}{4} + \cos a \sin \frac{\pi}{4} = \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

$$\text{Vậy } \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

Ví dụ 7 (VDT). Không sử dụng máy tính, hãy tính $P = \cos 10^\circ \cos 35^\circ - \cos 55^\circ \cos 80^\circ$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$P = \cos 10^\circ \cos 35^\circ + \cos 55^\circ \cos 80^\circ = \cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ = \cos(10^\circ + 35^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 8 (VDT). Chứng minh giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha$$

không phụ thuộc vào α .

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha - \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \cos \alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào α .

Ví dụ 9 (VDC). Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là sóng hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi < \varphi < \pi$) của sóng âm.

Lời giải.

Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 5 \sin t + 5 \cos t$.

Mà $\sin t + \cos t = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) = \sqrt{2} \left(\sin t \cos \frac{\pi}{4} + \cos t \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$,

suy ra $f(t) = 5(\sin t + \cos t) = 5\sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$.

Vậy biên độ âm của sóng âm là $k = 5\sqrt{2}$ và pha ban đầu của sóng âm là $\varphi = \frac{\pi}{4}$. □

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tính các giá trị lượng giác của góc 75° .

Lời giải.

Ta có:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2 - \sqrt{3}. \quad \square$$

Bài 2. Tính các giá trị lượng giác của góc $\frac{\pi}{12}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2 - \sqrt{3}. \quad \square$$

Bài 3. Không dùng máy tính, hãy tính $\cos 105^\circ$ và $\cot \frac{\pi}{12}$.

Lời giải.

$$\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \cot \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}. \quad \square$$

Bài 4. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính: $\sin \left(a + \frac{\pi}{6} \right)$, $\cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)$, $\tan \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Do } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin a > 0. \text{ Suy ra } \sin a = \frac{4}{5}, \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned}\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin a \cos \frac{\pi}{6} + \cos a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10} \\ \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos a \cos \frac{\pi}{3} + \sin a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10} \\ \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan a + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan a \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{4}{3} + 1}{1 - \frac{4}{3} \cdot 1} = -7.\end{aligned}$$

Bài 5. Tính:

$$\textcircled{v} A = \sin(a - 17^\circ) \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cos(a - 17^\circ).$$

$$\textcircled{v} B = \cos\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - b\right) - \sin\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - b\right).$$

Lời giải.

$$\textcircled{v} A = \sin[(a - 17^\circ) - (a + 13^\circ)] = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{v} B = \cos\left[\left(b + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - b\right)\right] = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Bài 6. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{b) } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right).$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sin x - \cos x.\end{aligned}$$

Đẳng thức được chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \\ &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Đẳng thức được chứng minh.

Bài 7 (NB). Chứng minh rằng $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) = \sin x + \cos x.$$

$$\text{Vậy } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Cách 2: Ta có

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Vậy } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Bài 8. Chứng minh rằng $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

Đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Ta có $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

Đẳng thức được chứng minh. □

Bài 9. Tính $\sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$, biết $\sin a = \frac{12}{13}$ và $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2 = \frac{25}{169}$.

Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos a > 0$, suy ra $\cos a = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

Do đó $\sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = \sin a \cos \frac{\pi}{4} + \cos a \sin \frac{\pi}{4} = \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$.

Vậy $\sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$. □

Bài 10. Tính

a) $\cos \left(a + \frac{\pi}{6} \right)$, biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\tan \left(a - \frac{\pi}{4} \right)$, biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ nên $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ (vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$).

$\cos \left(a + \frac{\pi}{6} \right) = \cos a \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$.

b) Ta có $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ nên $\sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$).

Suy ra $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 2\sqrt{2}$.

Do đó $\tan \left(a - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan a - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan a \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9\sqrt{3} - 8\sqrt{2}}{5}$. □

Bài 11. Không sử dụng máy tính, hãy tính $P = \cos 10^\circ \cos 35^\circ - \cos 55^\circ \cos 80^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$P = \cos 10^\circ \cos 35^\circ + \cos 55^\circ \cos 80^\circ = \cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ = \cos (10^\circ + 35^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 12. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$P = \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) - \cos \alpha$$

không phụ thuộc vào α .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha - \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \cos \alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào α . □

Bài 13. Không sử dụng máy tính, hãy tính $P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 140^\circ \sin 160^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$$P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 140^\circ \sin 160^\circ = \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ = \cos(40^\circ + 20^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Vậy $P = \frac{1}{2}$. □

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\cos B = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Chứng minh rằng

$$\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

và tính $\sin A$.

Lời giải.

Theo tính chất tổng ba góc trong một tam giác, ta có $A + B + C = \pi$.

Do đó $\sin A = \sin(\pi - A) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$.

Vậy $\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C$.

Ta có $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, suy ra $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Mà $0 < B < \pi$ nên $\sin B > 0$, suy ra $\sin B = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Lại có $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, suy ra $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Mà $0 < C < \pi$ nên $\sin C > 0$, suy ra $\sin C = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Do đó $\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6 + 4\sqrt{21}}{25}$.

Vậy $\sin A = \frac{6 + 4\sqrt{21}}{25}$. □

Bài 15. Với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa, chứng minh rằng

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$$

Lời giải.

Ta có $\cot(a + b) = \frac{1}{\tan(a + b)} = \frac{1}{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}} = \frac{1 - \tan a \tan b}{\tan a + \tan b} = \frac{\frac{1}{\tan a} \cdot \frac{1}{\tan b} - 1}{\frac{1}{\tan b} + \frac{1}{\tan a}} = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$

Vậy $\cot(a + b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$. □

Bài 16. Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là sóng hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi < \varphi < \pi$) của sóng âm.

Lời giải.

Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 5 \sin t + 5 \cos t$.

Mà $\sin t + \cos t = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) = \sqrt{2} \left(\sin t \cos \frac{\pi}{4} + \cos t \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$,

suy ra $f(t) = 5(\sin t + \cos t) = 5\sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$.

Vậy biên độ âm của sóng âm là $k = 5\sqrt{2}$ và pha ban đầu của sóng âm là $\varphi = \frac{\pi}{4}$. $\square$

Bài 17. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa có phương trình $x_1(t) = 2\sqrt{3} \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$ và $x_2(t) = 2 \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$. Chứng tỏ rằng phương trình dao động tổng hợp của vật đó $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ viết được dưới dạng $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, tức là dao động tổng hợp của vật đó là dao động điều hòa. Hãy xác định biên độ A , tần số góc ω và pha ban đầu φ ($-\pi < \varphi < \pi$) của dao động tổng hợp.

Lời giải.

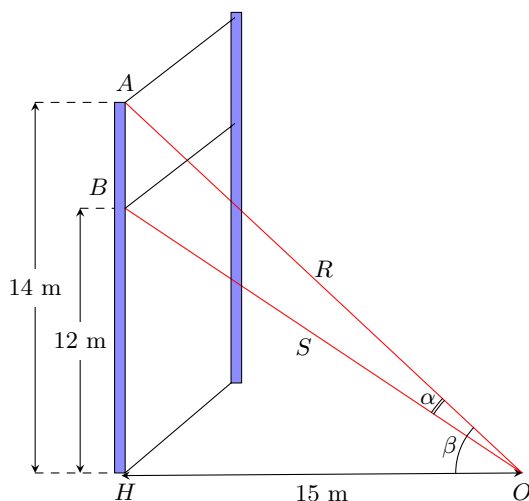
Ta có $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2\sqrt{3} \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$, đồng thời

$$\frac{1}{2} \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{3} + \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{\pi}{3} = \cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{suy ra } x(t) = 4 \left[\frac{1}{2} \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 4 \cos \left(4\pi t - \frac{\pi}{6} \right).$$

Vậy dao động tổng hợp $x(t)$ có biên độ $A = 4$, tần số góc $\omega = 4\pi$ và pha ban đầu $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. $\square$

Bài 18. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

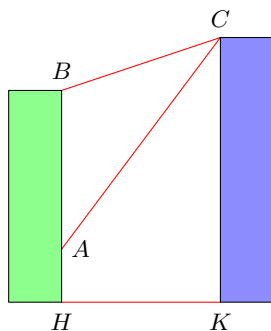
Lời giải.

a) Ta có: $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$, $\tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15}$. Suy ra:

$$\tan \alpha = \tan \widehat{AOB} = \tan (\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{12}{15}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{12}{15}} = \frac{10}{131}.$$

b) $\tan \alpha = \frac{10}{131} \Rightarrow \alpha \approx 4^\circ$. $\square$

Bài 19. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

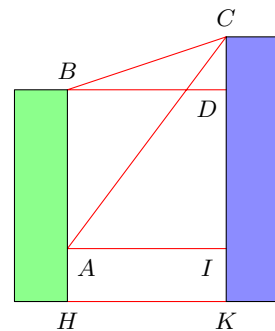
**Lời giải.**

Ta có: $CD = CK - BH = 8$, $CI = CK - AH = 26$, $BD = AI = HK = 20$.

$$\tan \widehat{BCD} = \frac{BD}{CD} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}, \quad \tan \widehat{ACI} = \frac{AI}{CI} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}.$$

$$\tan \widehat{BCA} = \tan (\widehat{BCD} - \widehat{ACI}) = \frac{\tan \widehat{BCD} - \tan \widehat{ACI}}{1 + \tan \widehat{BCD} \cdot \tan \widehat{ACI}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{13}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{13}}$$

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{45}{76} \Rightarrow \widehat{BCA} \approx 30,6^\circ.$$

**3. Câu hỏi trắc nghiệm**

Câu 1. Với mọi a, b , ta có $\sin(a - b)$ bằng

- (A) $\sin a \sin b - \cos a \cos b$. (B) $\sin b \cos a - \sin a \cos b$. (C) $\sin a \cos b - \cos a \sin b$. (D) $\sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải.

Theo công thức cộng, ta có $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Chọn đáp án (C)

Câu 2. Biết rằng $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, khi đó giá trị $\cos \frac{7\pi}{12}$ bằng

- (A) $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$. (B) $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$.
(C) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$. (D) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức cộng, ta có $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 3. Thu gọn $\sin a \sin b - \cos a \cos b$, ta được

- (A) $-\cos(a + b)$. (B) $\cos(a - b)$. (C) $\cos(a + b)$. (D) $-\cos(a - b)$.

Lời giải.

Ta có $\sin a \sin b - \cos a \cos b = -(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = -\cos(a + b)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 4. Với điều kiện các biểu thức đều xác định, biểu thức nào sau đây bằng $\tan(a - b)$?

- (A) $\tan a \cot b - \tan b \cot a$. (B) $\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.
(C) $\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. (D) $\frac{1 - \tan a \tan b}{\tan a + \tan b}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức cộng, ta có $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 5. Cho a, b thỏa $\tan a = \tan b = 2$. Tính $\tan(a + b)$.

(A) $-\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) 0.

(D) $\frac{3}{4}$.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng công thức cộng, ta có $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{2+2}{1-2 \cdot 2} = -\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Với $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $\tan x$ xác định, biểu thức nào sau đây bằng $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$?

(A) $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$.

(B) $\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$.

(C) $\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$.

(D) $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng công thức cộng, ta có $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Biểu thức nào sau đây bằng $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$?

(A) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$.

(C) $\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng công thức cộng, ta có $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Thu gọn $\sin x + \cos x$ ta được

(A) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(B) $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(C) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(D) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa $\sin x = \frac{7}{25}$, giá trị của $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là

(A) $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{50}$.

(B) $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{17}{25}$.

(C) $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{31}{25}$.

(D) $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17}{25}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, suy ra $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{576}{625}$.

Mà $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos x \geq 0$, suy ra $\cos x = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$.

Lại có $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \cos x - \sin x$,

suy ra $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{24}{25} - \frac{7}{25} = \frac{17}{25}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho $x \in [0; \pi]$ thỏa $\cos x = \frac{3}{5}$. Tính $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(A) 7.

(B) -7.

(C) $\frac{1}{7}$.

(D) $-\frac{1}{7}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, suy ra $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $\sin x \geq 0$, suy ra $\sin x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Ta có $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$, suy ra $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{2\pi}{13} \cos \frac{\pi}{13} - \cos \frac{2\pi}{13} \sin \frac{\pi}{13}}{\cos \frac{2\pi}{13} \cos \frac{\pi}{13} + \sin \frac{2\pi}{13} \sin \frac{\pi}{13}}$ là

(A) $\tan \frac{\pi}{13}$.

(B) $\sin \frac{\pi}{13}$.

(C) $\tan \frac{3\pi}{13}$.

(D) $\sin \frac{3\pi}{13}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin \frac{2\pi}{13} \cos \frac{\pi}{13} - \cos \frac{2\pi}{13} \sin \frac{\pi}{13}}{\cos \frac{2\pi}{13} \cos \frac{\pi}{13} + \sin \frac{2\pi}{13} \sin \frac{\pi}{13}} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{13} - \frac{\pi}{13}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{13} - \frac{\pi}{13}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{13}}{\cos \frac{\pi}{13}} = \tan \frac{\pi}{13}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Giá trị của biểu thức $P = \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ$ là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ = \sin(10^\circ + 20^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho a, b thỏa $a + b \neq k\pi$. Biểu thức nào sau đây bằng $P = \cot(a + b)$?

(A) $\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \cos b + \cos a \sin b}$.

(B) $\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \cos b + \cos a \sin b}$.

(C) $\frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$.

(D) $\frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \cot(a + b) = \frac{\cos(a + b)}{\sin(a + b)} = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \cos b + \cos a \sin b}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho $a, b \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin a = \cos b = \frac{3}{5}$. Khi đó $\sin(a + b)$ bằng

(A) $\frac{24}{25}$.

(B) 1.

(C) 0.

(D) $-\frac{7}{25}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } a, b \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \text{ suy ra } \cos a > 0 \text{ và } \sin b > 0.$$

$$\text{Lại có } \sin^2 a + \cos^2 a = \sin^2 b + \cos^2 b = 1, \text{ suy ra } \cos a = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{ và } \sin b = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Biểu thức $P = \cos 5^\circ \sin 70^\circ - \sin 175^\circ \sin 20^\circ$ có giá trị bằng với

(A) $\sin 25^\circ$.

(B) $\cos 25^\circ$.

(C) $\sin 15^\circ$.

(D) $\cos 15^\circ$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = \cos 5^\circ \sin 70^\circ - \sin 175^\circ \sin 20^\circ = \cos 5^\circ \cos 20^\circ - \sin 5^\circ \sin 20^\circ = \cos(5^\circ + 20^\circ) = \cos 25^\circ.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ và $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$. Giá trị của $\sin(\alpha - \beta)$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $-\frac{3}{2}$.

(C) $-\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\text{suy ra } \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta = \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

$$\text{Do đó } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3} - 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 17. Cho tam giác ABC cân tại A có $\cos B = \frac{5}{13}$. Tính $\sin A$.

(A) $\frac{119}{169}$.

(B) 1.

(C) $\frac{120}{169}$.

(D) $\frac{5}{13}$.

Lời giải.

Vì $0 < \widehat{B} < \pi$ nên $\sin B > 0$. Ta có $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, suy ra $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$, suy ra $\sin C = \frac{12}{13}$ và $\cos C = \frac{5}{13}$.

Theo tính chất tổng ba góc trong một tam giác, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

$$\text{Do đó } \sin A = \sin(\pi - A) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 18. Cho a, b thỏa mãn $\sin a = \frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\sin b = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Giá trị của $\sin(a + b) \sin(a - b)$ là:

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $-\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin(a + b) \sin(a - b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b) = \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b$.

Lại có $\sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \cos^2 a \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b (\sin^2 a + \sin^2 b)$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(a + b) \sin(a - b) = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 19. Cho $\alpha \in \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ thỏa mãn $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Giá trị của $\tan \alpha$ là

(A) $2 - \sqrt{3}$.

(B) $2 + \sqrt{3}$.

(C) $-2 + \sqrt{3}$.

(D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{6}$, suy ra $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \frac{\pi}{6} \leq 0$, do đó $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$.

Lại có $\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, suy ra

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{8} - 2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{2 - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -2 + \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 20. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa có phương trình $x_1(t) = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ và $x_2(t) = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình dao động tổng hợp của vật $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ được viết dưới dạng $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$,

tức là dao động tổng hợp của vật đó là dao động điều hòa. Hãy xác định pha ban đầu φ ($-\pi < \varphi < \pi$) của dao động tổng hợp.

(A) $\frac{\pi}{4}$.

(B) $\frac{\pi}{12}$.

(C) $\frac{5\pi}{12}$.

(D) $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lại có $\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \right]$
 $= \sqrt{2} \left[\cos\frac{\pi}{4} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{12}\right)$.

Suy ra $x(t) = \sqrt{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{12}\right)$. Vậy pha ban đầu của dao động tổng hợp là $\frac{\pi}{12}$.

Chọn đáp án **(B)**

Dạng 2. Áp dụng công thức nhân đôi, hạ bậc

Công thức nhân đôi	Công thức nhân ba
☒ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ☒ $\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2 \alpha. \end{cases}$ ☒ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.	☒ $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$. ☒ $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$. ☒ $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$.
Công thức hạ bậc	Công thức tính theo $\tan \frac{a}{2}$
☒ $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$. ☒ $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$. ☒ $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$. ☒ $\cos^3 a = \frac{1}{4} \cos 3a + \frac{3}{4} \cos a$. ☒ $\sin^3 a = \frac{3}{4} \sin a - \frac{1}{4} \sin 3a$.	Đặt $t = \tan \frac{a}{2}$, ta có ☒ $\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$. ☒ $\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. ☒ $\tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$. ☒ $\cot a = \frac{1 - t^2}{2t}$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 10. Cho $\tan \frac{a}{2} = -2$. Tính $\tan a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhân đôi, ta có

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot (-2)}{1 - (-2)^2} = -\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 11. Biết $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính: $\cos \frac{\pi}{12}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Mà $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ nên $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Ví dụ 12. Tính: $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \text{ Mà } \sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}. \text{ Mà } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Ví dụ 13. Biến đổi thành tích biểu thức sau

$$A = \sin 2x - \sin x + 2 \cos x - 1.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin 2x - \sin x + 2 \cos x - 1 = 2 \sin x \cos x - \sin x + 2 \cos x - 1 \\ &= \sin x(2 \cos x - 1) + (2 \cos x - 1) \\ &= (2 \cos x - 1)(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Ví dụ 14. Rút gọn các biểu thức (giả sử các góc làm cho biểu thức có nghĩa).

$$\text{a) } A = \frac{(1 + \sin 2a)(\cos a - \sin a)}{\cos 2a(\cos a + \sin a)}.$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin a + \sin 2a}{\cos a + \cos 2a + 1}.$$

Lời giải.

a) Ta có

$$A = \frac{(1 + \sin 2a)(\cos a - \sin a)}{\cos 2a(\cos a + \sin a)} = \frac{(\sin a + \cos a)^2(\cos a - \sin a)}{(\cos^2 a - \sin^2 a)(\sin a + \cos a)} = 1.$$

b) Ta có

$$B = \frac{\sin a + \sin 2a}{\cos a + \cos 2a + 1} = \frac{\sin a(1 + 2 \cos a)}{\cos a + 2 \cos^2 a} = \frac{\sin a(1 + 2 \cos a)}{\cos a(1 + 2 \cos a)} = \tan a.$$

Ví dụ 15. Cho $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$. Tính

a) $\sin 2a$.

b) $\cos 4a$.

Lời giải.

a) Do $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ nên $(\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4}$
 hay $1 + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4}$. Suy ra $\sin 2a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

b) Áp dụng công thức nhân đôi, ta có: $\cos 4a = \cos(2 \cdot 2a) = 1 - 2 \sin^2 2a = -\frac{1}{8}$.

□

Ví dụ 16. Cho $\cos a = \frac{5}{13}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, $\sin\left(2a + \frac{\pi}{3}\right)$, $\tan\left(2a - \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{12}{13} \\ \sin a = -\frac{12}{13} \end{cases}$.

Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin a > 0$, suy ra $\sin a = \frac{12}{13}$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}; \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 = 2 \cdot \frac{25}{169} - 1 = -\frac{119}{169}; \\ \tan 2a &= \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\frac{120}{119}; \\ \sin\left(2a + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin 2a \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2a \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{120}{169} \cdot \frac{1}{2} - \frac{119}{169} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60(1 - \sqrt{3})}{169}; \\ \tan\left(2a - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\tan 2a - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan 2a \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{120}{119} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{120}{119} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= -\frac{360 + 119\sqrt{3}}{357 - 120\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 17. Cho $\sin 2a = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\tan a + \cot a$, $\tan a - \cot a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \tan a + \cot a &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2a} = \frac{2}{\sin 2a}. \end{aligned}$$

Thay $\sin 2a = \frac{3}{5}$, ta được $\tan a + \cot a = \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}$.

Ta cũng có

$$\begin{aligned} \tan a - \cot a &= \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{-\cos 2a}{\frac{1}{2} \sin 2a} = -2 \cot 2a. \end{aligned}$$

Vì $\sin 2a = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos 2a < 0$, suy ra $\cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2 2a} = -\frac{4}{5}$.

Do đó $\tan a - \cot a = -\cot 2a = -\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 18. Cho $\sin a + \cos a = m$, $(-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2})$. Tính $|\sin a - \cos a|$.

Lời giải.

Ta có $m^2 = (\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a = 1 + \sin 2a$. Suy ra $\sin 2a = m^2 - 1$. Do đó

$$|\sin a - \cos a| = \sqrt{(\sin a - \cos a)^2} = \sqrt{1 - \sin 2a} = \sqrt{2 - m^2}.$$

Ví dụ 19. Rút gọn biểu thức $P = \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a} \\ &= \frac{3 - 4 \cos 2a + 2 \cos^2 2a - 1}{3 + 4 \cos 2a + 2 \cos^2 2a - 1} \\ &= \frac{2 \cos^2 2a - 4 \cos 2a + 2}{2 \cos^2 2a + 4 \cos 2a + 2} \\ &= \frac{2 (\cos 2a - 1)^2}{2 (\cos 2a + 1)^2} = \frac{(-2 \sin^2 a)^2}{(2 \cos^2 a)^2} = \tan^4 a. \end{aligned}$$

Ví dụ 20. Chứng minh các đẳng thức

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4};$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \\ &= \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

2. Bài tập tự luyện

Bài 20. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết:

$$\text{a) } \sin a = \frac{1}{3} \text{ và } \frac{\pi}{2} < a < \pi;$$

$$\text{b) } \sin a + \cos a = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}.$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \text{ nên } \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (vì } \frac{\pi}{2} < a < \pi).$$

$$\text{Suy ra } \sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 1 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

$$\text{b) Ta có } \sin a + \cos a = \frac{1}{2} \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} (\sin a + \cos a)^2 &= \sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 + \sin 2a \\ \Leftrightarrow \sin 2a &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4} \text{ nên } \pi < 2a < \frac{3\pi}{2}. \text{ Suy ra } \cos 2a < 0. \text{ Do đó}$$

$$\cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2 2a} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Bài 21. Cho $\tan \frac{a}{2} = -2$. Tính $\tan a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhân đôi, ta có

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot (-2)}{1 - (-2)^2} = -\frac{4}{3}.$$

Bài 22. Biết $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính: $\cos \frac{\pi}{12}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}. \text{ Mà } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \text{ nên } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Bài 23. Tính: $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{v} \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \text{ Mà } \sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\textcircled{v} \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}. \text{ Mà } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Bài 24. Tính $\sin \frac{\pi}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$. Suy ra $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Vì $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \frac{\pi}{8} > 0$.

Suy ra $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$. □

Bài 25. Cho $\sin 2a = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\tan a + \cot a$, $\tan a - \cot a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \tan a + \cot a &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2a} = \frac{2}{\sin 2a}. \end{aligned}$$

Thay $\sin 2a = \frac{3}{5}$, ta được $\tan a + \cot a = \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}$.

Ta cũng có

$$\begin{aligned} \tan a - \cot a &= \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{-\cos 2a}{\frac{1}{2} \sin 2a} = -2 \cot 2a. \end{aligned}$$

Vì $\sin 2a = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos 2a < 0$, suy ra $\cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2 2a} = -\frac{4}{5}$.

Do đó $\tan a - \cot a = -\cot 2a = -\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$. □

Bài 26. Cho $\sin a + \cos a = m$, $(-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2})$. Tính $|\sin a - \cos a|$.

Lời giải.

Ta có $m^2 = (\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a = 1 + \sin 2a$. Suy ra $\sin 2a = m^2 - 1$. Do đó

$$|\sin a - \cos a| = \sqrt{(\sin a - \cos a)^2} = \sqrt{1 - \sin 2a} = \sqrt{2 - m^2}. \quad \square$$

Bài 27. Cho $\cos a = \frac{5}{13}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, $\sin \left(2a + \frac{\pi}{3} \right)$, $\tan \left(2a - \frac{\pi}{6} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{12}{13} \\ \sin a = -\frac{12}{13} \end{cases}$$

Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin a > 0$, suy ra $\sin a = \frac{12}{13}$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}; \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 = 2 \cdot \frac{25}{169} - 1 = -\frac{119}{169}; \\ \tan 2a &= \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\frac{120}{119}; \\ \sin \left(2a + \frac{\pi}{3} \right) &= \sin 2a \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2a \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{120}{169} \cdot \frac{1}{2} - \frac{119}{169} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60(1 - \sqrt{3})}{119}. \\ \tan \left(2a - \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{\tan 2a - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan 2a \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{120}{119} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{120}{119} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= -\frac{360 + 119\sqrt{3}}{357 - 120\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Bài 28. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Lời giải.

□

Bài 29. $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$.

Lời giải.

□

Bài 30. Chứng minh các đẳng thức

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4};$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}.$

Lời giải.

□

a) Ta có

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \\ &= \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

Bài 31. $(\tan 2x - \tan x) \cos 2x = \tan x$.

Lời giải.

Bài 32. Biến đổi thành tích biểu thức sau

$$A = \sin 2x - \sin x + 2 \cos x - 1.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin 2x - \sin x + 2 \cos x - 1 = 2 \sin x \cos x - \sin x + 2 \cos x - 1 \\ &= \sin x(2 \cos x - 1) + (2 \cos x - 1) \\ &= (2 \cos x - 1)(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Bài 33. $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$.

Lời giải.

Bài 34. Rút gọn các biểu thức (giả sử các góc làm cho biểu thức có nghĩa).

a) $A = \frac{(1 + \sin 2a)(\cos a - \sin a)}{\cos 2a(\cos a + \sin a)}.$

b) $B = \frac{\sin a + \sin 2a}{\cos a + \cos 2a + 1}.$

Lời giải.

a) Ta có

$$A = \frac{(1 + \sin 2a)(\cos a - \sin a)}{\cos 2a(\cos a + \sin a)} = \frac{(\sin a + \cos a)^2 (\cos a - \sin a)}{(\cos^2 a - \sin^2 a)(\sin a + \cos a)} = 1.$$

b) Ta có

$$B = \frac{\sin a + \sin 2a}{\cos a + \cos 2a + 1} = \frac{\sin a(1 + 2 \cos a)}{\cos a + 2 \cos^2 a} = \frac{\sin a(1 + 2 \cos a)}{\cos a(1 + 2 \cos a)} = \tan a.$$

Bài 35. Rút gọn biểu thức $P = \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a} \\ &= \frac{3 - 4 \cos 2a + 2 \cos^2 2a - 1}{3 + 4 \cos 2a + 2 \cos^2 2a - 1} \\ &= \frac{2 \cos^2 2a - 4 \cos 2a + 2}{2 \cos^2 2a + 4 \cos 2a + 2} \\ &= \frac{2(\cos 2a - 1)^2}{2(\cos 2a + 1)^2} = \frac{(-2 \sin^2 a)^2}{(2 \cos^2 a)^2} = \tan^4 a. \end{aligned}$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 21. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

(A) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

(B) $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$.

(C) $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

(D) $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ nên đáp án “ $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$ ” sai.

Chọn đáp án (B)

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\sin 4x = 4 \sin x \cdot \cos x$.

(B) $\sin 4x = 4 \sin 2x \cdot \cos 2x$.

(C) $\sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$.

(D) $\sin 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \xrightarrow{a=2x} \sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$.

Chọn đáp án (C)

Câu 23. Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

(A) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

(B) $\sin 2a = 2 \sin a$.

(C) $\sin 2a = \sin a + \cos a$.

(D) $\sin 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

Lời giải.

Công thức đúng là $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Chọn đáp án (A)

Câu 24. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin 2020a = 2020 \sin a \cos a$.

(B) $\sin 2020a = 2020 \sin 1010a \cos 1010a$.

(C) $\sin 2020a = 2 \sin a \cos a$.

(D) $\sin 2020a = 2 \sin 1010a \cos 1010a$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2020a = 2 \sin 1010a \cos 1010a$.

Chọn đáp án (D)

Câu 25. Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Giá trị $\cos 2\alpha$ bằng

(A) $\frac{4}{9}$.

(B) $\frac{1}{9}$.

(C) $\frac{5}{9}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 26. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\sin 2\alpha$ bằng

(A) $-\frac{12}{25}$.

(B) $\frac{6}{5}$.

(C) $\frac{24}{5}$.

(D) $-\frac{24}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Mặt khác, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{5}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 27. Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Giá trị của $\sin 2\alpha$ bằng

(A) $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$.

(B) $\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$.

(C) $\sin 2\alpha = \frac{60}{169}$.

(D) $\sin 2\alpha = -\frac{60}{169}$.

Lời giải.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ nên $\cos \alpha > 0$, suy ra $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$.

Vậy $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 28. Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Giá trị $\sin \frac{\alpha}{2}$ bằng

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{2}{3}$.

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, suy ra $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ hay $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 29. Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$. Tính $\cos 2x$.

(A) $\cos 2x = -\frac{7}{25}$.

(B) $\cos 2x = -\frac{3}{10}$.

(C) $\cos 2x = -\frac{8}{9}$.

(D) $\cos 2x = \frac{7}{25}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{7}{25}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 30. Biết $\cos 2a = \frac{1}{3}$. Giá trị của $\cos 4a$ bằng

(A) $-\frac{7}{9}$.

(B) $\frac{7}{9}$.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$\cos 4a = 2 \cos^2 2a - 1 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 31. Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos 2\alpha + \cos \alpha$.

(A) $A = -\frac{10}{9}$.

(B) $A = \frac{4}{9}$.

(C) $A = -\frac{4}{9}$.

(D) $A = \frac{10}{9}$.

Lời giải.

Ta có $A = \cos 2\alpha + \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 + \cos \alpha = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{4}{9}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 32. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó $\cos 2\alpha$ bằng

(A) $\frac{1}{8}$.

(B) $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

(C) $-\frac{1}{8}$.

(D) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 33. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Khi đó $\sin 2\alpha$ có giá trị bằng

(A) $\frac{5}{2}$.

(B) 2.

(C) $\frac{3}{32}$.

(D) $\frac{9}{16}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

Vậy $\sin 2\alpha = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 34. Cho $\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$, thì $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ có giá trị bằng

(A) 18.

(B) 12.

(C) 14.

(D) 16.

Lời giải.

Ta có

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha = \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{\sin 2\alpha} \right)^2 - 2 = 14.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 35. Cho $\cot \alpha = 15$ thì $\sin 2\alpha$ bằng

(A) $\frac{11}{113}$.

(B) $\frac{15}{113}$.

(C) $\frac{17}{113}$.

(D) $\frac{13}{113}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cot \alpha = 15 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{226}{15} = \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{113}.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 36. Rút gọn biểu thức $\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$ ta được

(A) $(\sin x + \cos x)^2$.

(B) -1 .

(C) $1 - \sin 2x$.

(D) $1 - \cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$.

Chọn đáp án (A)

Câu 37. Cho số thực α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính $(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha$.

(A) $\frac{25}{128}$.

(B) $\frac{1}{16}$.

(C) $\frac{255}{128}$.

(D) $\frac{225}{128}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha &= (2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha = 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha (\cos 2\alpha + 1) \\ &= 8 \sin \alpha \cdot \cos^4 \alpha = 8 \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha)^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{225}{128}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Dạng 3. Công thức biến đổi

Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\checkmark \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\checkmark \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}.$$

$$\checkmark \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\checkmark \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}.$$

$$\checkmark \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\checkmark \cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

$$\checkmark \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\checkmark \cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Hệ quả

$$\checkmark \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\checkmark \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 21. Cho $\sin 2x = -\frac{1}{3}$. Tính: $A = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 22. Cho $\cos a = \frac{2}{3}$. Tính: $B = \cos \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = -\frac{1}{9}$.

Do đó

$$B = \cos \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\right) + \cos\left(\frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos a) = \frac{5}{18}.$$

Ví dụ 23. Tính

a) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$.

b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$.

Lời giải.

a) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ví dụ 24. Tính $D = \frac{\sin \frac{7\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9}}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \frac{7\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} = 2 \sin \frac{\frac{7\pi}{9} + \frac{\pi}{9}}{2} \cos \frac{\frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{9}}{2} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{9}.$

$\cos \frac{7\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9} = -2 \sin \frac{\frac{7\pi}{9} + \frac{\pi}{9}}{2} \sin \frac{\frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{9}}{2} = -2 \sin \frac{4\pi}{9} \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}.$

Suy ra $D = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Ví dụ 25. Biến đổi các tổng sau thành tích

a) $A = \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x.$

b) $B = \sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x.$

c) $C = \cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x.$

d) $D = \sin 35^\circ + \cos 40^\circ + \sin 55^\circ + \cos 20^\circ.$

Lời giải.

a) $A = (\sin 8x + \sin 5x) + (\sin 7x + \sin 6x) = 2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{13x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right).$

b) $B = (\sin 7x + \sin x) - (\sin 5x + \sin 3x) = 2 \sin 4x \cos 3x - 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x - \cos x).$

$$c) C = (\cos 7x - \cos 3x) + (\sin 3x + \sin 2x) = -2 \sin 5x \sin 2x + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{5x}{2} \left(-2 \cos \frac{5x}{2} \sin 2x + \cos \frac{x}{2} \right).$$

$$d) D = (\sin 55^\circ + \sin 35^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 20^\circ) = 2 \sin 45^\circ \cos 10^\circ + 2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ = 2 \cos 10^\circ (\sin 45^\circ + \cos 30^\circ).$$

□

Ví dụ 26. Chứng minh đẳng thức $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Biến đổi về trái, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \cos^3 a \cdot \cos 3a - \sin^3 a \cdot \sin 3a \\ &= (\cos a \cdot \cos 3a) \cdot \cos^2 a - (\sin a \cdot \sin 3a) \cdot \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a] \cdot \cos^2 a - \frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 4a] \cdot \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos 2a (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \cdot \cos 4a (\cos^2 a + \sin^2 a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos^2 2a + \frac{1}{2} \cdot \cos 4a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 4a \\ &= \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4} \\ &= VP. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 27. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \cos 11x \cos 3x - \cos 17x \cos 9x.$$

$$b) B = \sin 18x \cos 3x - \sin 19x \cos 4x.$$

$$c) C = \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x.$$

$$d) D = \sin 2x \sin 6x - \cos x \cos 3x.$$

$$e) E = \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right).$$

$$f) F = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x.$$

Lời giải.

$$a) A = \frac{1}{2} \cos 14x + \frac{1}{2} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 26x - \frac{1}{2} \cos 8x = \frac{1}{2} (\cos 14x - \cos 26x) = \sin 15x \sin 12x.$$

$$b) B = \frac{1}{2} \sin 21x + \frac{1}{2} \sin 15x - \frac{1}{2} \sin 23x - \frac{1}{2} \sin 15x = \frac{1}{2} (\sin 21x - \sin 23x) = -\cos 22x \sin x.$$

$$c) C = -\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 12x + \frac{1}{2} \cos 4x = \frac{1}{2} (\cos 12x + \cos 2x) = \cos 7x \cos 5x.$$

$$d) D = -\frac{1}{2} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) = -\cos 5x \cos 3x.$$

$$e) E = \sin x \cdot \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin x = \frac{1}{4} \sin 3x.$$

$$f) F = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 5x) = \sin \frac{9x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

□

Ví dụ 28. Cho $\tan 3a = 2023$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} \\ &= \frac{(\sin 4a + \sin 2a) - \sin 3a}{(\cos 4a + \cos 2a) - \cos 3a} \\ &= \frac{2 \sin 3a \cdot \cos a - \sin 3a}{2 \cos 3a \cdot \cos a - \cos 3a} \\ &= \frac{\sin 3a \cdot (2 \cos a - 1)}{\cos 3a \cdot (2 \cos a - 1)} = \tan 3a. \end{aligned}$$

Vậy $P = \tan 3a = 2023$. □

Ví dụ 29. Rút gọn biểu thức $S = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$. Từ đó tính giá trị biểu thức

$$P = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot \cos 3x + 2 \sin x \cdot \cos 5x \\ &= \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x \\ &= \sin 6x. \end{aligned}$$

Vậy $S = \sin 6x$.

Áp dụng kết quả trên để tính $P = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

Vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} P &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \\ \Rightarrow 2P \cdot \sin \frac{\pi}{7} &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \\ \Rightarrow P &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 30. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} u &= 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) \text{ (V)} \\ i &= 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \text{ (A)}. \end{aligned}$$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i$ (W). Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= u \cdot i = [40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t)] \cdot [4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\ &= 160 \sin^2(120\pi t) + 10 \sin^2(360\pi t) + 80 \sin(120\pi t) \sin(360\pi t) \\ &= 80[1 - \cos(240\pi t)] + 5[1 - \cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\ &= 85 - 80 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) + 40 \cos(240\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \\ &= 85 - 40 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \text{ (W)}. \end{aligned}$$
□

2. Bài tập tự luyện

Bài 36. Tính giá trị của biểu thức $\cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

Lời giải.

$$\cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$
□

Bài 37. Tính giá trị của các biểu thức

$$A = \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}; \quad B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \cos \pi \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{4}. \\ B &= \cos 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} [\sin (15^\circ - 75^\circ) + \sin (15^\circ + 75^\circ)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin (-60^\circ) + \sin 90^\circ] = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

□

Bài 38. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ; \quad B = \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \cos 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos (75^\circ - 15^\circ) + \cos (75^\circ + 15^\circ)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos (60^\circ) + \cos 90^\circ] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4}. \\ B &= \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \sin \pi \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

Bài 39. Tính giá trị của biểu thức $\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} \right) - \cos \left(\frac{7\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

□

Bài 40. Tính

a) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}.$

b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ.$

Lời giải.

$$\text{a) } \sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b) } \cos 105^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Bài 41. Tính $D = \frac{\sin \frac{7\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9}}.$

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \sin \frac{7\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} = 2 \sin \frac{\frac{7\pi}{9} + \frac{\pi}{9}}{2} \cos \frac{\frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{9}}{2} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{9}.$$

$$\cos \frac{7\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9} = -2 \sin \frac{\frac{7\pi}{9} + \frac{\pi}{9}}{2} \sin \frac{\frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{9}}{2} = -2 \sin \frac{4\pi}{9} \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}.$$

$$\text{Suy ra } D = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

Bài 42. Tính $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}.$

💬 **Lời giải.**

$$\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

□

Bài 43. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức

$$A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}.$$

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$A = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$$

□

Bài 44. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức

$$B = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}.$$

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$B = \left(\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \right) + \cos \frac{11\pi}{9} = 2 \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{11\pi}{9} = \cos \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9} = 0.$$

□

Bài 45. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$$u = 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) (\text{V})$$

$$i = 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (\text{A}).$$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i$ (W). Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

💬 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= u \cdot i = [40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t)] \cdot [4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\
 &= 160 \sin^2(120\pi t) + 10 \sin^2(360\pi t) + 80 \sin(120\pi t) \sin(360\pi t) \\
 &= 80[1 - \cos(240\pi t)] + 5[1 - \cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\
 &= 85 - 80 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) + 40 \cos(240\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \\
 &= 85 - 40 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) - 40 \cos(480\pi t) (W).
 \end{aligned}$$

□

Bài 46. Biến đổi các tổng sau thành tích

- a) $A = \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$.
 b) $B = \sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x$.
 c) $C = \cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x$.
 d) $D = \sin 35^\circ + \cos 40^\circ + \sin 55^\circ + \cos 20^\circ$.

Lời giải.

- a) $A = (\sin 8x + \sin 5x) + (\sin 7x + \sin 6x) = 2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{13x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$.
 b) $B = (\sin 7x + \sin x) - (\sin 5x + \sin 3x) = 2 \sin 4x \cos 3x - 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x - \cos x)$.
 c) $C = (\cos 7x - \cos 3x) + (\sin 3x + \sin 2x) = -2 \sin 5x \sin 2x + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{5x}{2} \left(-2 \cos \frac{5x}{2} \sin 2x + \cos \frac{x}{2} \right)$.
 d) $D = (\sin 55^\circ + \sin 35^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 20^\circ) = 2 \sin 45^\circ \cos 10^\circ + 2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ = 2 \cos 10^\circ (\sin 45^\circ + \cos 30^\circ)$.

□

Bài 47. Chứng minh đẳng thức $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái, ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \cos^3 a \cdot \cos 3a - \sin^3 a \cdot \sin 3a \\
 &= (\cos a \cdot \cos 3a) \cdot \cos^2 a - (\sin a \cdot \sin 3a) \cdot \sin^2 a \\
 &= \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a] \cdot \cos^2 a - \frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 4a] \cdot \sin^2 a \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \cos 2a (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \cdot \cos 4a (\cos^2 a + \sin^2 a) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \cos^2 2a + \frac{1}{2} \cdot \cos 4a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 4a \\
 &= \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4} \\
 &= VP.
 \end{aligned}$$

□

Bài 48. Rút gọn các biểu thức sau

- a) $A = \cos 11x \cos 3x - \cos 17x \cos 9x$.
 b) $B = \sin 18x \cos 3x - \sin 19x \cos 4x$.
 c) $C = \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x$.
 d) $D = \sin 2x \sin 6x - \cos x \cos 3x$.
 e) $E = \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$.
 f) $F = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x$.

Lời giải.

- a) $A = \frac{1}{2} \cos 14x + \frac{1}{2} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 26x - \frac{1}{2} \cos 8x = \frac{1}{2} (\cos 14x - \cos 26x) = \sin 15x \sin 12x$.
 b) $B = \frac{1}{2} \sin 21x + \frac{1}{2} \sin 15x - \frac{1}{2} \sin 23x - \frac{1}{2} \sin 15x = \frac{1}{2} (\sin 21x - \sin 23x) = -\cos 22x \sin x$.

$$c) C = -\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 12x + \frac{1}{2} \cos 4x = \frac{1}{2} (\cos 12x + \cos 2x) = \cos 7x \cos 5x.$$

$$d) D = -\frac{1}{2} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) = -\cos 5x \cos 3x.$$

$$e) E = \sin x \cdot \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin x = \frac{1}{4} \sin 3x.$$

$$f) F = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 5x) = \sin \frac{9x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

□

Bài 49. Cho $\tan 3a = 2023$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} \\ &= \frac{(\sin 4a + \sin 2a) - \sin 3a}{(\cos 4a + \cos 2a) - \cos 3a} \\ &= \frac{2 \sin 3a \cdot \cos a - \sin 3a}{2 \cos 3a \cdot \cos a - \cos 3a} \\ &= \frac{\sin 3a \cdot (2 \cos a - 1)}{\cos 3a \cdot (2 \cos a - 1)} = \tan 3a. \end{aligned}$$

Vậy $P = \tan 3a = 2023$.

□

Bài 50. Rút gọn biểu thức $S = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$. Từ đó tính giá trị biểu thức

$$P = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot \cos 3x + 2 \sin x \cdot \cos 5x \\ &= \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x \\ &= \sin 6x. \end{aligned}$$

Vậy $S = \sin 6x$.

Áp dụng kết quả trên để tính $P = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

Vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} P &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \\ \Rightarrow 2P \cdot \sin \frac{\pi}{7} &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \\ \Rightarrow P &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{2}$.

□

Bài 51. Rút gọn các biểu thức sau đây:

$$\text{a) } A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a};$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a}.$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin a}{2 \cos 3a \sin a} = -\frac{\sin 3a}{\cos 3a} = -\tan 3a.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a} = \frac{(\sin 3a + \sin a) - 2 \sin 2a}{(\cos 3a + \cos a) - 2 \cos 2a} \\ &= \frac{2 \sin 2a \cos a - 2 \sin 2a}{2 \cos 2a \cos a - 2 \cos 2a} = \frac{2 \sin 2a (\cos a - 1)}{2 \cos 2a (\cos a - 1)} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a. \end{aligned}$$

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 38. Dạng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\cos 2x = 1 - 2 \cos^2 x.$

(B) $\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)].$

(C) $\sin^2 x = \frac{1 - 2 \cos x}{2}.$

(D) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Theo công thức lượng giác.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos a - \cos 5a}{\sin 4a + \sin 2a}$ (với $\sin 4a + \sin 2a \neq 0$) ta được

(A) $P = 2 \cot a.$

(B) $P = 2 \cos a.$

(C) $P = 2 \tan a.$

(D) $P = 2 \sin a.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos a - \cos 5a &= 2 \sin 3a \sin 2a \\ \sin 4a + \sin 2a &= 2 \sin 3a \cos a \end{aligned}$$

Do đó $P = \frac{\sin 2a}{\cos a} = 2 \sin a.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 40. Khi $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ thì tích số $16 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2}$ là một số nguyên. Số nguyên này bằng

(A) 6.

(B) 7.

(C) 5.

(D) 8.

Lời giải.

Ta có $16 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} = 8 (\cos \alpha - \cos 2\alpha) = 8 (\cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1) = 5.$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 41. Tìm khẳng định **sai**.

(A) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$

(B) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x.$

(C) $\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x.$

(D) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Suy ra đẳng thức $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x$ là sai.

Chọn đáp án (B)

Câu 42. Cho $\sin x \cdot \cos^5 x - \cos x \cdot \sin^5 x = \frac{1}{4}$. Khi đó $\cos 4x$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) 0.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos^5 x - \cos x \cdot \sin^5 x &= \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^4 x - \sin^4 x) \\ &= \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{\sin 2x}{2} \cdot \cos 2x = \frac{\sin 4x}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{\sin 4x}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow \cos 4x = 0$.

Chọn đáp án (C)

Câu 43. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$, $\cos b = \frac{2}{5}$. Tính $M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

(A) $M = -\frac{12}{25}$.

(B) $M = \frac{12}{25}$.

(C) $M = -\frac{13}{25}$.

(D) $M = \frac{13}{25}$.

Lời giải.

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} [\cos(a+b+a-b) + \cos(a+b-a+b)] \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos^2 a - 1 + 2 \cos^2 b - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{9}{25} - 1 + 2 \cdot \frac{4}{25} - 1 \right) \\ &= -\frac{12}{25}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 44. Cho $\sin \alpha = m$. Tính

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha + 2018\pi).$$

(A) $P = m^2 + 2$.

(B) $P = m^2 - 2$.

(C) $P = m^2 + 1$.

(D) $P = m + 1$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha = 1 + m^2$.

Chọn đáp án (C)

Câu 45. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$, $\cos b = \frac{2}{5}$. Tính $M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

(A) $M = -\frac{12}{25}$.

(B) $M = \frac{12}{25}$.

(C) $M = -\frac{13}{25}$.

(D) $M = \frac{13}{25}$.

Lời giải.

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} [\cos(a+b+a-b) + \cos(a+b-a+b)] \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) \\ &= \frac{1}{2} (2\cos^2 a - 1 + 2\cos^2 b - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{9}{25} - 1 + 2 \cdot \frac{4}{25} - 1 \right) \\ &= -\frac{12}{25}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 46. Giá trị của biểu thức $I = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x}$, biết $\tan x = \frac{1}{3}$ là

- (A) $I = \frac{1}{3}$. (B) $I = -\frac{1}{3}$. (C) $I = 3$. (D) $I = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 5x - \sin 3x} = \frac{2\cos 4x \cos x}{2\cos 4x \sin x} = \frac{1}{\tan x} = 3.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 47. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Biết $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1$. Tính giá trị $\sin 2\alpha$.

- (A) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. (B) $\frac{24}{25}$. (C) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$. (D) $-\frac{24}{25}$.

Lời giải.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} \sin \alpha + 2\cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 - 2\cos \alpha \\ 5\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ suy ra } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{24}{25}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 48. Cho $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{5}$ với $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$. Giá trị của $\sin 2x$ bằng

- (A) $\frac{4\sqrt{6}}{25}$. (B) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. (C) $-\frac{4\sqrt{6}}{25}$. (D) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{Vì } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2} \text{ nên } \cos x = \frac{2\sqrt{6}}{5}. \text{ Do đó } \sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 49. Nếu biết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) thì giá trị đúng của $\cos(\alpha - \beta)$ là

- (A) $\frac{16}{65}$. (B) $-\frac{18}{65}$. (C) $-\frac{16}{65}$. (D) $\frac{56}{65}$.

Lời giải.

$$\text{Có } \sin \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}. \text{ Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự có } \sin \beta = \pm \frac{4}{5}. \text{ Vì } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \beta = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Có } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 50. Nếu $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) thì $\sin 2\alpha$ bằng

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) 1.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 51. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$, $\cos b = \frac{2}{5}$. Tính $M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

(A) $M = -\frac{12}{25}$.

(B) $M = \frac{12}{25}$.

(C) $M = -\frac{13}{25}$.

(D) $M = \frac{13}{25}$.

Lời giải.

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} [\cos(a+b+a-b) + \cos(a+b-a+b)] \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos^2 a - 1 + 2 \cos^2 b - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{9}{25} - 1 + 2 \cdot \frac{4}{25} - 1 \right) \\ &= -\frac{12}{25}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 52. Cho hai góc nhọn x và y thỏa mãn $\begin{cases} 3 \sin 2x - \sin 2y = 0 \\ 6 \cos^2 x - 2 \sin^2 y = 5 \end{cases}$. Khi đó số đo góc $2x + y$ gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau

(A) 60° .

(B) 90° .

(C) 75° .

(D) 180° .

Lời giải.

$$\begin{cases} 3 \sin 2x - \sin 2y = 0 \\ 6 \cos^2 x - 2 \sin^2 y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \sin 2x = \sin 2y \\ 3 \cos 2x + \cos 2y = 3. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (3 \sin 2x)^2 + (3 \cos 2x)^2 = 9.$$

$$\text{Suy ra } \sin^2 2y + (3 - \cos 2y)^2 = 9 \Leftrightarrow \cos 2y = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 2y \approx 80,4^\circ \Rightarrow y \approx 40,2^\circ.$$

$$\text{Do } \cos 2y = \frac{1}{6} \text{ nên ta có } 3 \cos 2x = \frac{17}{6} \Rightarrow 2x \approx 19,2^\circ.$$

$$\text{Vậy } 2x + y \approx 59,4^\circ.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 53. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ và $0 < x < \pi$ thì $\tan x = -\frac{a + \sqrt{b}}{3}$, ($a; b \in \mathbb{Z}$). Tính $S = a + b$

(A) $S = 3$.

(B) $S = -11$.

(C) $S = 11$.

(D) $S = -3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{4} = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x,$$

$$\text{suy ra } \sin x \cos x = -\frac{3}{8}. \text{ Do đó}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{8}{3},$$

hay

$$3 \tan^2 x + 8 \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Từ đó, ta có $\tan x = -\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$. Suy ra $S = a + b = 4 + 7 = 11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Biết rằng $\tan \alpha, \tan \beta$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$. Giá trị của biểu thức $A = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng

(A) q .

(B) p .

(C) $\frac{p}{q}$.

(D) 1.

Lời giải.

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta) \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) + (\tan \alpha + \tan \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + (\tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot \sin^2(\alpha + \beta) \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) + \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) \cdot (\tan \alpha \cdot \tan \beta) \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

(A) $M = 1$.

(B) $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $M = \frac{1}{4}$.

(D) $M = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

(A) $M = \sqrt{3}$.

(B) $M = \frac{1}{2}$.

(C) $M = \frac{1}{4}$.

(D) $M = 0$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

(A) $M = 1$.

(B) $M = \frac{1}{2}$.

(C) $M = \frac{1}{4}$.

(D) $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot [(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha] \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha\right).\end{aligned}$$

Vậy $M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

(A) 1.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\begin{cases} \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \end{cases}$

Khi đó $\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Và $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Vậy $P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(C) $\sqrt{3}$.

(D) $-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} = \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} = \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ} = \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{8}$.

(D) $\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

Do đó $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}\right)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$ là

(A) $\frac{1}{32}$.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

(A) $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$.

(B) $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$.

(C) $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$.

(D) $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Lời giải.

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

(A) $M = 0$.

(B) $M = -\frac{1}{2}$.

(C) $M = 1$.

(D) $M = 2$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

Ta có

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot M = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7}$$

$$= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

Vậy giá trị biểu thức $M = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Rút gọn biểu thức $M = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$.

(A) $M = \sin 2\alpha$.

(B) $M = \cos 2\alpha$.

(C) $M = -\cos 2\alpha$.

(D) $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có

$$M = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$= \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}{2} - \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$= \sin 2\alpha.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

(A) $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$.

(B) $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x \right)$.

(C) $M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$.

(D) $M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$M^* = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1).$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 67. Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$.

(A) $\tan 2x$.

(B) $\sin x$.

(C) $2 \tan x$.

(D) $2 \sin x$.

Lời giải.

Ta có

$$M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 68. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

(A) $\cos x$.

(B) $2 \cos x - 1$.

(C) $2 \cos x$.

(D) $\cos x - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos 2x + \cos x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos 2x + \cos x)}{\cos 2x + \cos x} \\ &= 2 \cos x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 69. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} + \cos 2x$.

(A) 0.

(B) $2 \cos^2 x$.

(C) 2.

(D) $\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} + \cos 2x = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} + \cos 2x = -\cos 2x + \cos 2x = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 70. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

(A) $\sin 2\alpha$.

(B) $\cos 2\alpha$.

(C) $\tan 2\alpha$.

(D) $\cot 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \tan 2\alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 71. Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $\frac{1}{9}$.

(D) $\frac{1}{12}$.

Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{4\sin^4 \alpha}{4\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \tan^4 \alpha.$$

Với $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ta có $A = \tan^4 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{9}$.Chọn đáp án (C) □**Câu 72.** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.(A) $\tan \alpha$.(B) $2 \tan \alpha$.(C) $\tan 2\alpha + \tan \alpha$.(D) $\tan 2\alpha$.**Lời giải.**

Ta có

$$A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha}$$

$$= \frac{2\sin \alpha(\cos \alpha + 1)}{2\cos \alpha(\cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

Chọn đáp án (A) □**Câu 73.** Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

(A) 1.

(B) $\tan a$.(C) $\frac{5}{2}$.(D) $2 \tan a$.**Lời giải.**

Ta có

$$A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a} = \frac{2\sin^2 a - \sin a}{2\sin a \cos a - \cos a}$$

$$= \frac{\sin a(2\sin a - 1)}{\cos a(2\sin a - 1)} = \tan a.$$

Chọn đáp án (B) □**Câu 74.** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được(A) $\tan \frac{x}{2}$.(B) $\cot x$.(C) $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$.(D) $\sin x$.**Lời giải.**

Ta có

$$A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\sin \frac{x}{2} \left(2\cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{2\cos \frac{x}{2} \left(2\cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Dạng 4. Nhận dạng tam giác

☑ Một số lưu ý khi giả thiết cho A, B, C là ba góc của một tam giác

- $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow (A + B)$ và C bù nhau, tương tự với $(B + C)$ và $A, \dots$
- $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ và $\frac{C}{2}$ phụ nhau, tương tự với $\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ và $\frac{A}{2}, \dots$
- Các góc A, B, C đều có số đo trong khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$.
- Các góc $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn nên có các giá trị lượng giác đều dương.

☑ Phương pháp:

- Biến đổi, dẫn đến $\sin A = 1$ hoặc $\cos A = 0$ sẽ có $A = 90^\circ$.
- Nếu $a^2 + b^2 = c^2$ thì $C = 90^\circ$.
- Nếu $\sin(A - B) = 0$ hoặc $\cos(A - B) = 1$ thì $A = B$, suy ra tam giác cân.
- Tam giác cân mà có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 31. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông khi $\sin A \sin C = \cos A \cos C$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin C = \cos A \cos C &\Leftrightarrow \cos A \cos C - \sin A \sin C = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(A + C) = 0 \Leftrightarrow -\cos B = 0 \Leftrightarrow \cos B = 0 \Leftrightarrow B = 90^\circ.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại B . □

Ví dụ 32. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân khi $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. (1)

 **Lời giải.**

Ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}\cos(A - B) - \cos(A + B) &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) + \cos C &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) &= 1 \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow A = B.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C . □

Ví dụ 33. Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} &\Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \Leftrightarrow \sin A = \tan \frac{B+C}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(2 \cdot \frac{A}{2}\right) &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cot \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2}\end{aligned}$$

Do $0^\circ < \frac{A}{2} < 90^\circ$ nên $\cos \frac{A}{2} \neq 0$ và $\sin \frac{A}{2} > 0$.

$$\text{Từ đó } 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ.$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A . □

Bài tập rèn luyện

Bài 52. Trong tam giác ABC , biết: $3 \sin A + 4 \cos B = 6$ và $4 \sin B + 3 \cos A = 1$. Tính góc C .

Lời giải.

Bình phương hai vế 2 phương trình rồi cộng lại, ta được:

$$24(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = 12 \Leftrightarrow \sin(A+B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = 30^\circ \\ C = 150^\circ. \end{cases}$$

Nhưng nếu $C = 150^\circ \Rightarrow A < 30^\circ \Rightarrow 3 \sin A + 4 \cos B < \frac{3}{2} + 4 < 6$. (Mâu thuẫn). Vậy $C = 30^\circ$. □

Bài 53. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}.$$

Lời giải.

Ta có đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)] \cos C = \frac{1}{8} \Leftrightarrow [\cos(A-B) - \cos C] \cos C = \frac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \cos^2 C - \cos(A-B) \cos C = 0 \\ & \Leftrightarrow \cos^2 C - \cos(A-B) \cos C + \frac{\cos^2(A-B)}{4} + \frac{\sin^2(A-B)}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left[\cos C - \frac{1}{2} \cos(A-B) \right]^2 + \frac{1}{4} \sin^2(A-B) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(A-B) = 0 \\ \cos C = \frac{1}{2} \cos(A-B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos C = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.} \end{aligned}$$

Bài 54. Chứng minh ΔABC cân nếu: $\sin C = 2 \sin A \sin B \tan \frac{C}{2}$. □

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{Gt} & \Leftrightarrow [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ & \Leftrightarrow \cos(A-B) + \cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} = 1 + \cos C \\ & \Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Rightarrow A = B. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C . □

Bài 55. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông là:

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A &= \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \\ & \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \quad (\text{vì } \cos \frac{B-C}{2} \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (\text{vì } \frac{B+C}{2} + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2}) \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} &= \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \quad (\text{vì } \cos \frac{A}{2} \neq 0) \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} &= 1 \Leftrightarrow 1 - \cos A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \quad (\text{vì } 0 < A < \pi) \\ \Leftrightarrow \Delta ABC &\text{ vuông tại } A. \end{aligned}$$

Bài 56. Cho $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}$. Chứng minh ΔABC cân.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= \frac{2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)}{2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C.$$

Vậy tam giác ABC cân đỉnh A .

Bài 57. Chứng minh tam giác ABC vuông nếu: $\sin B + \sin C = \cos B + \cos C$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin B + \sin C &= \cos B + \cos C \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} &= \sin \frac{A}{2} \quad (\text{vì } \cos \frac{B-C}{2} > 0 \text{ và } \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) \\ \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} &= 1 \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{vì } 0 < A < \pi) \\ \Rightarrow A &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A. \end{aligned}$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 75. Cho ΔABC có các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ thỏa mãn hệ thức $\frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}$ là tam giác

- (A) Cân tại C . (B) Vuông tại B . (C) Cân tại A . (D) Đều.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} &\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2 \cdot 2R \sin A + 2R \sin C}{2 \cdot 2R \sin A - 2R \sin C} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2 \sin A + \sin C}{2 \sin A - \sin C} \\ \Leftrightarrow 2 \sin A + 2 \sin A \cos B - \sin C - \sin C \cos B &= 2 \sin A - 2 \sin A \cos B + \sin C - \sin C \cos B \\ \Leftrightarrow 4 \sin A \cos B &= 2 \sin C \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2 \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Vậy ΔABC cân tại C .

Chọn đáp án (A)

Câu 76. Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

(A) $-\frac{16}{25}$.

(B) $\frac{56}{65}$.

(C) $\frac{16}{65}$.

(D) $\frac{36}{65}$.

Lời giải.

Vì $0 < A, B < \pi$ nên $\sin A > 0, \sin B > 0$. Do đó

$$\begin{aligned}\cos C = -\cos(A+B) &= -[\cos A \cos B - \sin A \sin B] = -\cos A \cos B + \sqrt{1 - \cos^2 A} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 B} \\ &= -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{16}{65}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Nếu ba góc A, B, C của tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ thì tam giác này có tính chất gì?

(A) Không tồn tại tam giác ABC .

(B) Vuông tại A .

(C) Cân tại A và không đều.

(D) Tam giác đều.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} &\Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

(A) Cân tại B .

(B) Cân tại A .

(C) Cân tại C .

(D) Vuông tại B .

Lời giải.

Ta có $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin C \cdot \cos A = \sin(C+A) + \sin(C-A)$.

Mặt khác $A+B+C=\pi \Rightarrow B=\pi-(A+C) \Rightarrow \sin B = \sin(A+C)$.

Do đó, ta được $\sin(C-A) = 0 \Rightarrow A=C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác gì?

(A) Tam giác vuông.

(B) Tam giác cân.

(C) Tam giác đều.

(D) Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2A \Rightarrow \begin{cases} 2C = 2A \\ 2C = \pi - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (D) □

Bài số 3

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

⇒ **Định nghĩa 3.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$.

- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.



- ☑ Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- ☑ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

⇒ **Định nghĩa 3.2.** Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có

- ☑ $x + T \in \mathcal{D}$ và $x - T \in \mathcal{D}$;
- ☑ $f(x + T) = f(x)$.

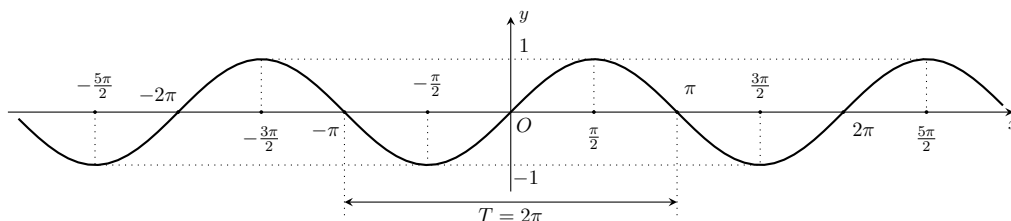
Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

2. Hàm số $y = \sin x$

⇒ **Định nghĩa 3.3.** Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\sin x$ được gọi là hàm số $y = \sin x$. Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là $\mathbb{R}$.

○ Tính chất 3.1.

- ☑ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O ;
- ☑ Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn chu kì 2π ;
- ☑ Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ và gọi là một **đường hình sin**.



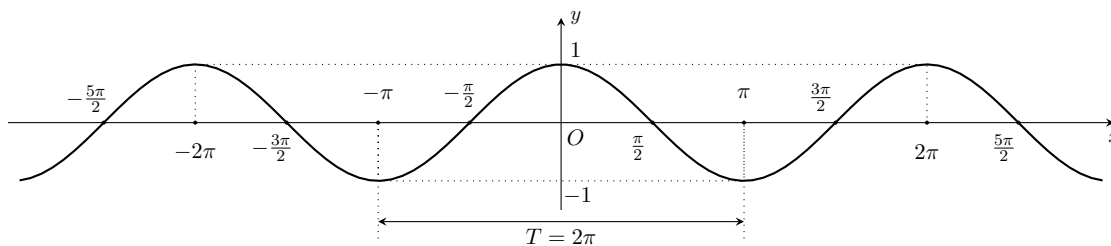
3. Hàm số $y = \cos x$

⇒ **Định nghĩa 3.4.** Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\cos x$ được gọi là hàm số $y = \cos x$. Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

○ Tính chất 3.2.

- ☑ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung;

- ☑ Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn chu kì 2π ;
- ☑ Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.

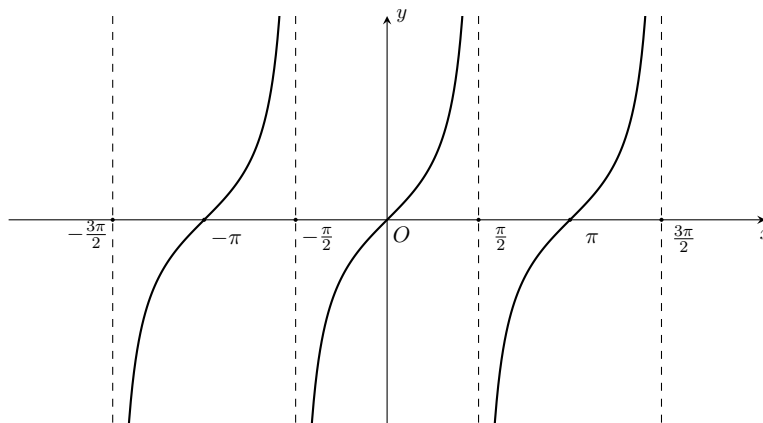


4. Hàm số $y = \tan x$

☞ **Định nghĩa 3.5.** Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathcal{D}$ với một số thực $\tan x$ được gọi là hàm số $y = \tan x$. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

○ Tính chất 3.3.

- ☑ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ;
- ☑ Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn chu kì π ;
- ☑ Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

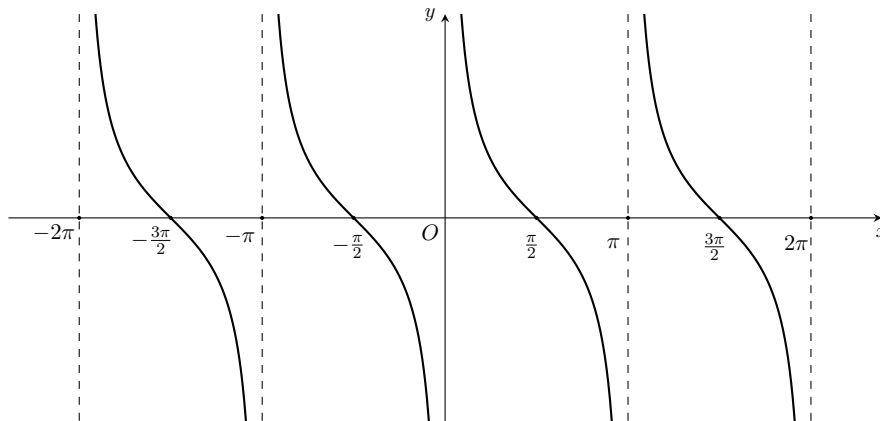


5. Hàm số $y = \cot x$

☞ **Định nghĩa 3.6.** Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in E$ với một số thực $\cot x$ được gọi là hàm số $y = \cot x$. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

○ Tính chất 3.4.

- ☑ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ;
- ☑ Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn chu kì π ;
- ☑ Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.



Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ

$$\textcircled{✓} y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{✓} y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$\textcircled{✓}$ Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:

$$\text{a) } y = \frac{1}{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \neq 0.$$

$$\text{b) } y = \sqrt[n]{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \geq 0.$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt[n]{P(x)}} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) > 0.$$

Khi tìm tập xác định, ta xem nó có mẫu không? có tan, cot không? có căn không?

$\textcircled{✓}$ Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

$$\text{a) } \begin{cases} + \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ + \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} + \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi. \\ + \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} + \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} + \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số

$$\text{a) } y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}.$$

$$\text{b) } y = \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \text{Hàm số xác định khi } \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Hàm số xác định khi $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Ví dụ 2. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Ví dụ 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$. (*).

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cos 2x + \frac{1}{\tan x} + 5$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Ví dụ 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{2 - \sin 2x}$.

b) $y = \frac{1 + \cot x}{\cos x}$.

Lời giải.

a) $y = \sqrt{2 - \sin 2x}$.

Vì $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên $2 - \sin 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) $y = \frac{1 + \cot x}{\cos x}$.

Điều kiện xác định của hàm số trên $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x + 1 \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + k2\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Bài 2. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1 - \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□

Bài 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 2x + 1 \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□

Bài 4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x = \frac{3}{\cos 2x} + \tan x.$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□

Bài 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Hàm số $y = \frac{2 \sin x + 1}{1 - \cos x}$ xác định khi

(A) $x \neq k\pi$.

(B) $x \neq k2\pi$.

(C) $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

(D) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 2. Hàm số $y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$ xác định khi

(A) $x \neq k\pi$.

(B) $x \neq k2\pi$.

(C) $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

(D) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B)

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy, tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 5. Hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ xác định khi

(A) $x \neq k2\pi$.

(B) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

(C) $x \neq k\pi$.

(D) $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Lời giải.

Điều kiện: $\sin x - \cos x \neq 0 \Rightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\cos x}$ là

(A) $\mathbb{R}$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

(B) $\mathbb{R}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi\}$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{\tan x - 5}{1 - \sin^2 x} = \frac{\tan x - 5}{\cos^2 x}$.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A)

Câu 8. Hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ xác định khi

(A) $x \neq \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

(B) $x \neq -k\pi$.

(C) $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

(D) $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Điều kiện: $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \geq 0$.

Ta có $\begin{cases} -1 \leq -\sin x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 - \sin x \leq 2 \\ 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Để $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Chọn đáp án (D)

Câu 9. Tập xác định hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}}$ là

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

(C) $\mathcal{D} = \{k2\pi\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $y = \sqrt{\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}} \geq 0$.

Ta có $\begin{cases} -1 \leq \sin 2x \leq 1 \\ -1 \leq -\cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq \sin 2x + 2 \leq 3 \\ 0 \leq 1 - \cos x \leq 2 \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Để $\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x} \geq 0 \Rightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

Vậy, tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 10. Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x + 1}}$ là

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x + 1 \geq 0 \end{cases} (*)$

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin x + 1 \leq 2$.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy, tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ là

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \neq 0 \\ \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \geq 0 \end{cases} (*)$

Ta có $\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq -\cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \\ 0 \leq 1 - \cos x \leq 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \neq 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy, tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \{ k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Ta có $1 - \sin x \geq 0; 1 + \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Chọn đáp án (A)

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}$ là

(A) $\mathbb{R}$.

(B) $[-2; +\infty)$.

(C) $(0; 2\pi)$.

(D) $[\arcsin(-2); +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\sin x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$ là

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(B) $\mathcal{D} = [0; 1]$.

(C) $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow 1 - \cos 2x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 15. Hàm số nào sau đây có tập xác định $\mathbb{R}$?

(A) $y = \sqrt{\frac{2 + \cos x}{2 - \sin x}}$.

(B) $y = \tan^2 x + \cot^2 x$.

(C) $y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cot^2 x}$.

(D) $y = \frac{\sin^3 x}{2 \cos x + \sqrt{2}}$.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1 \Rightarrow 2 + \cos x > 0; 2 - \sin x > 0$

Nên hàm số $\frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} > 0$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A)

Dạng 2. Tính chẵn lẻ của hàm số

Ta thực hiện các bước sau:

- Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
- Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
 - Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 6. Khảo sát tính chẵn lẻ của các hàm số sau

- a) $y = -2 \sin x$.
 b) $y = 3 \sin x - 2$.
 c) $y = \cos x + \sin^2 x$.
 d) $y = \sin x - \cos x$.
 e) $y = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$.
 f) $y = \cot |x|$.

Lời giải.

- a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $\forall x \in \mathcal{D}: f(-x) = -2 \sin(-x) = 2 \sin x = -f(x)$.
 Vậy $f(x) = -2 \sin x$ là hàm số lẻ.
- b) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $\exists x_0 = \frac{\pi}{2}$ ta có $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5 \\ -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$.
 Vậy hàm số $y = 3 \sin x - 2$ không có tính chẵn lẻ.
- c) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $\forall x \in \mathcal{D}: f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + \sin^2 x = f(x)$.
 Vậy $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.
- d) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $\exists x_0 = \frac{\pi}{4}$ ta có $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \\ -f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$.
 Vậy hàm số $y = \sin x - \cos x$ không có tính chẵn lẻ.
- e) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $\forall x \in \mathcal{D}: f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos^2(-x) + \tan(-x) = -\sin x \cdot \cos^2 x - \tan x = -f(x)$.
 Vậy $y = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$ là hàm số lẻ.
- f) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $\forall x \in \mathcal{D}: f(-x) = \cot |-x| = \cot |x| = f(x)$.
 Vậy $f(x) = 2 \cot |x|$ là hàm số chẵn.

□

Ví dụ 7. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số: $f(x) = \sin x + \tan x$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \in \mathcal{D}$ và

$$f(-x) = \sin(-x) + \tan(-x) = -\sin x - \tan x = -(\sin x + \tan x) = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \sin x + \tan x$ là hàm lẻ.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 6. Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

a) $y = 5 \sin^2 x + 1$;

b) $y = \cos x + \sin x$;

c) $y = \tan 2x$.

Lời giải.

a) Xét hàm số $y = 5 \sin^2 x + 1$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$;

$$y(-x) = 5 \sin^2(-x) + 1 = 5 \sin^2 x + 1 = y(x).$$

Vậy $y = 5 \sin^2 x + 1$ là hàm số chẵn.

b) Xét hàm số $y = \cos x + \sin x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ và $y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Như thế $y\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq y\left(\frac{\pi}{4}\right)$ và $y\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -y\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy $y = \cos x + \sin x$ không phải hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.

c) Xét hàm số $y = \tan 2x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) suy ra

$$-x \neq -\frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -x \neq \frac{\pi}{4} - (k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

tức là ta có $-x \in \mathcal{D}$.

Ngoài ra, với mọi $x \in \mathcal{D}$, $y(-x) = \tan(-2x) = -\tan(2x) = -y(x)$.

Vậy hàm $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ.

□

Bài 7. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số: $f(x) = \sin x + \tan x$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \in \mathcal{D}$ và

$$f(-x) = \sin(-x) + \tan(-x) = -\sin x - \tan x = -(\sin x + \tan x) = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \sin x + \tan x$ là hàm lẻ.

□

Bài 8. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = x \sin x$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc tập xác định $\mathcal{D}$.

Ta có $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy $f(x) = x \sin x$ là hàm số chẵn.

□

Bài 9. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số

a) $y = f(x) = \sin x \cos x$;

b) $y = f(x) = \tan x + \cot x$;

c) $y = f(x) = \sin^2 x$.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \in \mathcal{D}$ và

$$f(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là hàm lẻ.

- b) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \in \mathcal{D}$ và

$$f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$ là hàm lẻ.

- c) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \in \mathcal{D}$ và

$$f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là hàm chẵn.

□

Bài 10. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \tan 2x$

c) $y = \sin x \cos 2x$

b) $y = \cos x + \sin^2 x$;

d) $y = \sin x + \cos x$.

Lời giải.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc tập xác định $\mathcal{D}$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) + \tan(-2x) = -\sin 2x - \tan 2x = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy $y = \sin 2x + \tan 2x$ là hàm số lẻ.

- b) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc tập xác định $\mathcal{D}$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + \sin^2 x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

- c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc tập xác định $\mathcal{D}$.

Ta có $f(-x) = \sin(-x) \cos(-2x) = -\sin x \cos 2x = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ

- d) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc tập xác định $\mathcal{D}$.

Ta có $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Suy ra $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đã cho không là hàm số lẻ cũng không là hàm số chẵn.

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 16. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

(B) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

(C) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

(D) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

Theo định nghĩa thì trong bốn hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 17. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

(A) $y = \sin^2 x$.

(B) $y = x \cos 2x$.

(C) $y = x \sin x$.

(D) $y = \cos x$.

Lời giải.

Tất cả các hàm ở 4 đáp án đều có tập xác định là $\mathbb{R}$, nên để kiểm tra tính lẻ, ta chỉ cần kiểm tra tính chất $f(-x)$ có bằng với $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và hàm đó là $y = x \cos 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Hàm số nào là hàm số chẵn?

(A) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

(B) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

(C) $y = \sin 2x$.

(D) $y = \tan x - \sin 2x$.

Lời giải.

Xét $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Mặt khác $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ nên là hàm chẵn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

(A) $y = \frac{\tan x}{1 + x^2}$.

(B) $y = x \cdot \cos 2x$.

(C) $y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$.

(D) $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{\cos x}{1 + x^2} = f(x)$. Vậy hàm số $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

(B) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

(C) Hàm số đã cho có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(D) Hàm số đã cho là hàm số không chẵn, không lẻ.

Lời giải.

Ta có $2 \cos x - 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y(-x) = \frac{\sin(-2x)}{2 \cos(-x) - 3} = \frac{-\sin 2x}{2 \cos x - 3} = -y(x)$ nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) Hàm số $y = x + \cos x$ là hàm số chẵn.

(B) $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

(C) $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

(D) $y = x + \sin x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x + \cos x$. Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq y\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra hàm số $y = x + \cos x$ không phải là hàm chẵn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

(A) $y = \sin 3x$.

(B) $y = \cos x \tan 2x$.

(C) $y = x \cos x$.

(D) $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$, $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; l\pi\right\} \quad k, l \in \mathbb{Z}$.

☑ $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

☑ $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x)$.

Vậy $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn

(A) $y = \tan x + x^2$.

(B) $y = -|\sin 2x|$.

(C) $y = \cos(4x - x^2)$.

(D) $y = \cos x + x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -|\sin 2x|$.

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Khi đó $y(-x) = -|\sin(-2x)| = -|-\sin 2x| = -|\sin 2x| = y$.

Vậy hàm số $y = -|\sin 2x|$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 24. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

(A) $y = \cos^3 x$.

(B) $y = \sin x + \cos^3 x$.

(C) $y = \sin x + \tan^3 x$.

(D) $\tan^2 x$.

Lời giải.

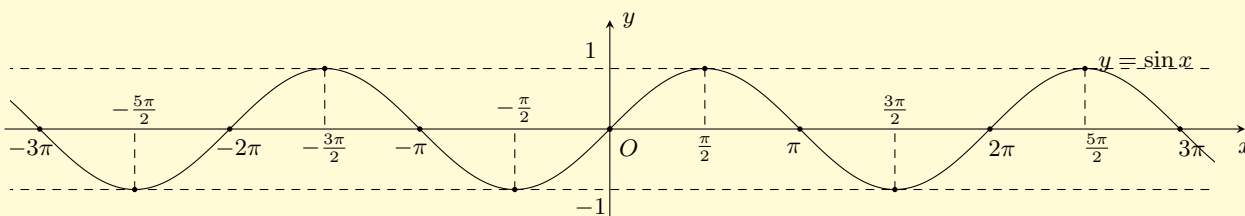
Đặt $f(x) = \sin x + \tan^3 x \Rightarrow f(-x) = \sin(-x) + \tan^3(-x) = -(\sin x + \tan^3 x) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (C)

Dạng 3. Sự biến thiên của hàm số lượng giác và các bài toán về đồ thị hàm số lượng giác

Hàm số $y = \sin x$

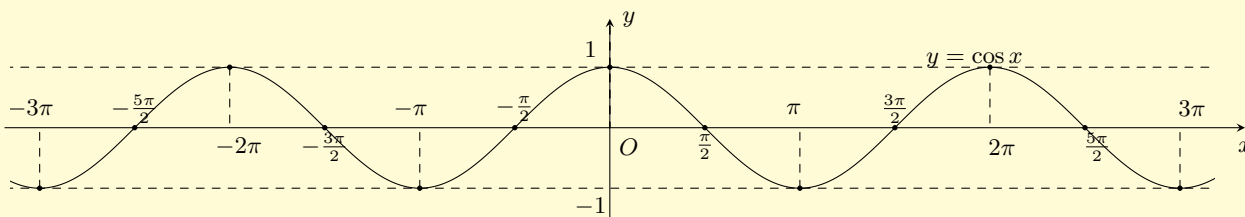
Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau



Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Hàm số $y = \cos x$

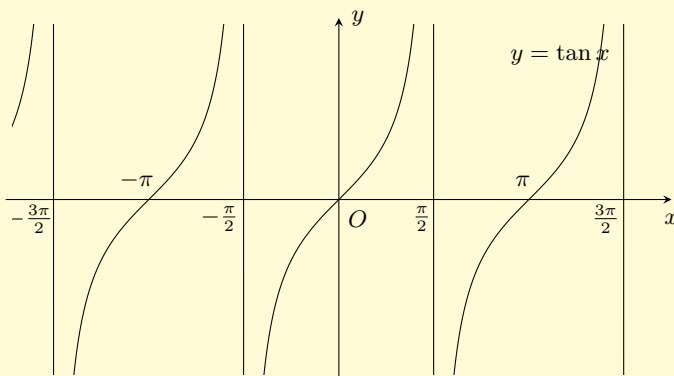
Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ như sau



Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

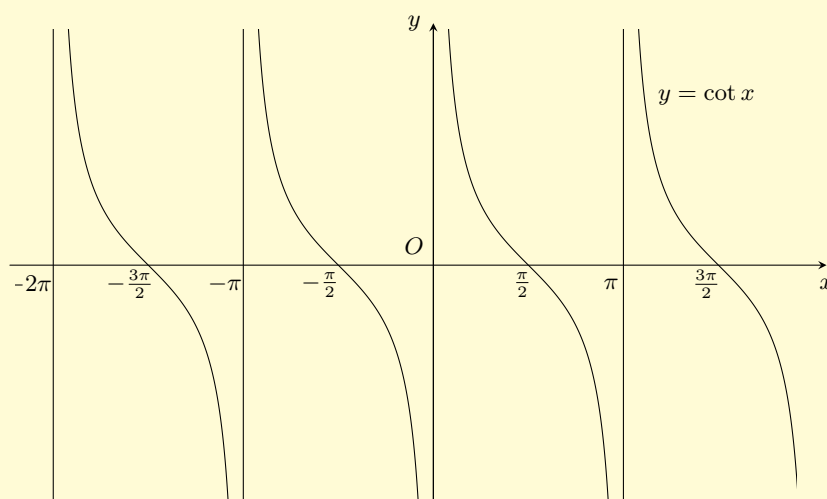
Hàm số $y = \tan x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ như hình bên. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Hàm số $y = \cot x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ như hình bên. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

**1. Ví dụ mẫu**

Ví dụ 8. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right)$?

Lời giải.

Do $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right)$. □

Ví dụ 9. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{25\pi}{3}; \frac{26\pi}{3}\right)$?

Lời giải.

Do $\left(\frac{25\pi}{3}; \frac{26\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} + 8\pi; \frac{2\pi}{3} + 8\pi\right)$ nên hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{25\pi}{3}; \frac{26\pi}{3}\right)$. □

Ví dụ 10. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải.

Ta thấy hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. □

Ví dụ 11. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$.

Lời giải.

Ta thấy $\left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right) = \left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi; 0 - 2\pi\right)$. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số $y = \sin x$ đồng biến nên suy ra hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$. □

Ví dụ 12. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên khoảng $\left(\frac{15\pi}{4}; \frac{19\pi}{5}\right)$.

Lời giải.

Trên khoảng $(-\pi; 0)$ hàm số $y = \cos x$ đồng biến nên suy ra hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi + 4\pi; 0 + 4\pi)$, hay hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(3\pi; 4\pi)$.

Ta có $\left(\frac{15\pi}{4}; \frac{19\pi}{5}\right) \subset (3\pi; 4\pi)$ nên suy ra hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{15\pi}{4}; \frac{19\pi}{5}\right)$. □

Ví dụ 13. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta thấy $\left(\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + 5\pi; \frac{\pi}{2} + 5\pi\right)$. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \tan x$ đồng biến nên suy ra hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right)$. □

2. Bài tập tự luyện

Bài 11. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos x + 1$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2 \cos x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Ngoài ra, $y = -1$ khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

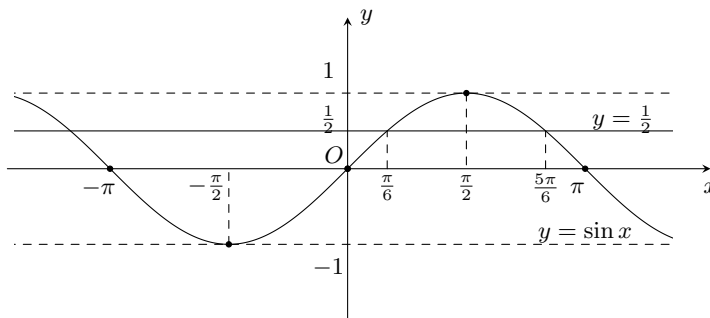
$y = 3$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos x + 1$ là $T = [-1; 3]$. □

Bài 12. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

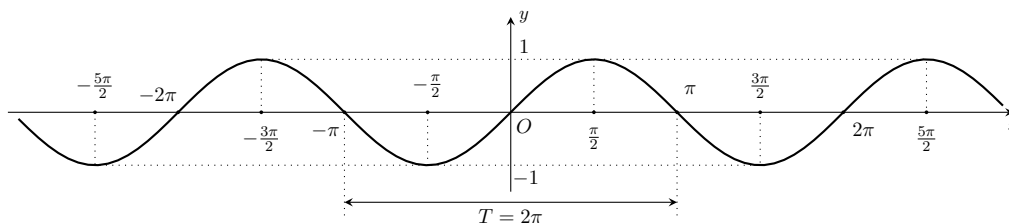
Vẽ đồ thị hàm $y = \sin x$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Quan sát hình vẽ ta thấy trên $[-\pi; \pi]$ đồ thị hàm số $y = \sin x$ cắt đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ tại hai điểm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy các giá trị cần tìm là $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$. □

Bài 13. Sử dụng đồ thị ở hình dưới, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ để hàm số $y = \sin x$



a) Nhận giá trị bằng 0;

b) Nhận giá trị dương.

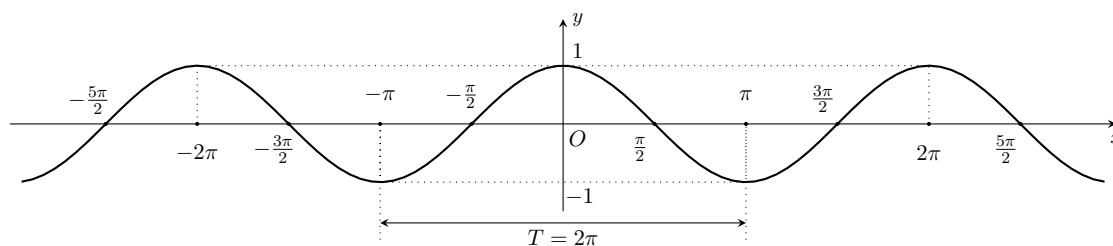
Lời giải.

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$, $y = 0$ khi $x = 0; x = \pi$.

b) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành.

Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$, thì $y > 0$ khi $x \in (0; \pi)$. □

Bài 14. Sử dụng đồ thị ở hình dưới, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ để hàm số $y = \cos x$



a) Nhận giá trị bằng 0;

b) Nhận giá trị âm.

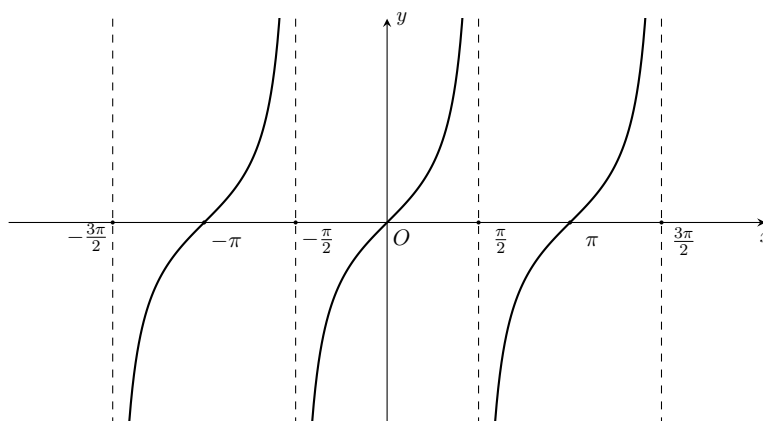
Lời giải.

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Hàm số nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành.

Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, thì $y < 0$ khi $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 15. Sử dụng đồ thị ở hình dưới, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$



a) Nhận giá trị bằng 0;

b) Nhận giá trị dương.

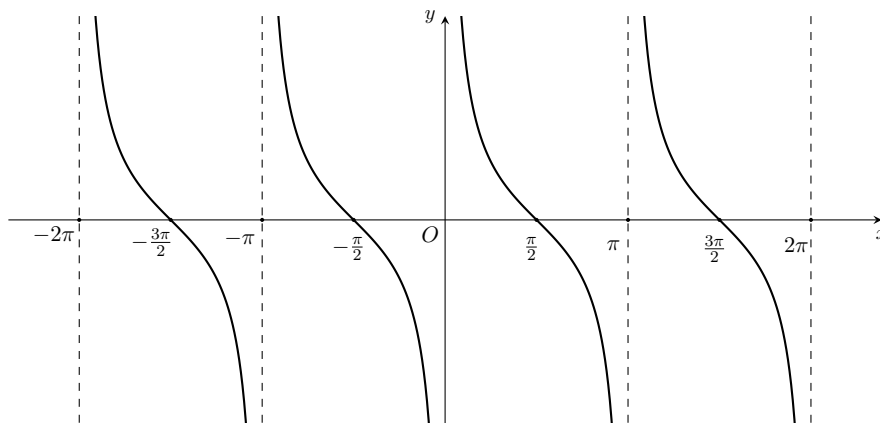
Lời giải.

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = -\pi$; $x = 0$; $x = \pi$.

b) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành.

Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ thì $y > 0$ khi $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Bài 16. Sử dụng đồ thị ở hình dưới, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số $y = \cot x$:



- a) Nhận giá trị bằng 0;
b) Nhận giá trị âm.

Lời giải.

- a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ $y = 0$ khi $x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$.
b) Hàm số nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành.
Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ thì $y < 0$ khi $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.

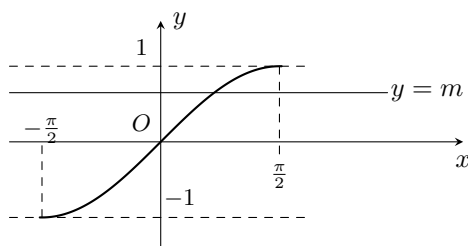
□

Bài 17. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

- a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sao cho $\sin \alpha = m$;
b) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$;
c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ sao cho $\tan \alpha = m$;
d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

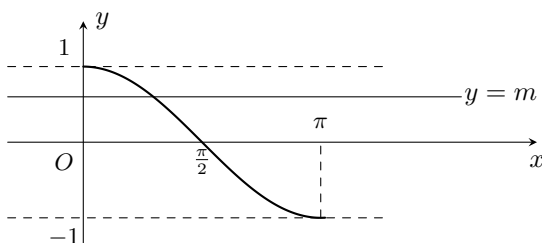
Lời giải.

a)



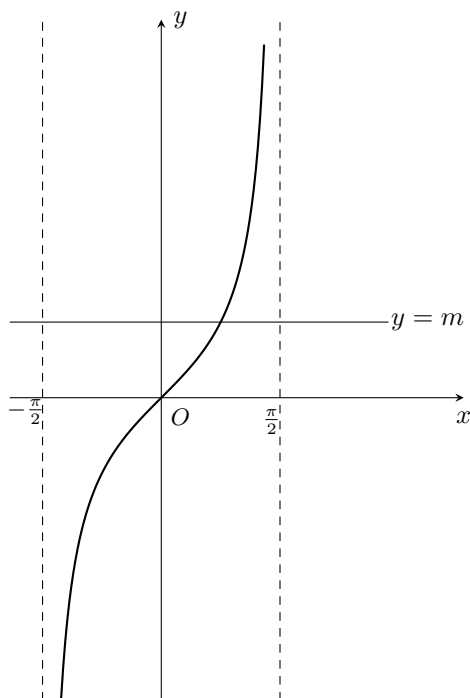
Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in [-1; 1]$, có một giá trị $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sao cho $\sin \alpha = m$.

b)



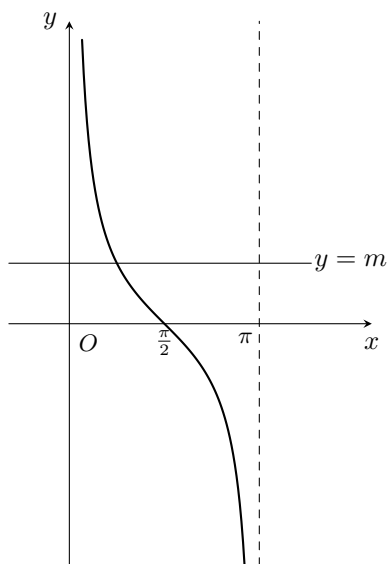
Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in [-1; 1]$, có một giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

c)



Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có một giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.

d)



Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có một giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

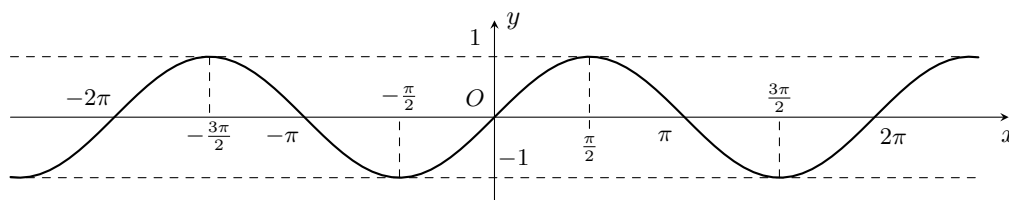
□

Bài 18. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ để

- | | |
|--|---|
| a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1; | b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0; |
| c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1; | d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0. |

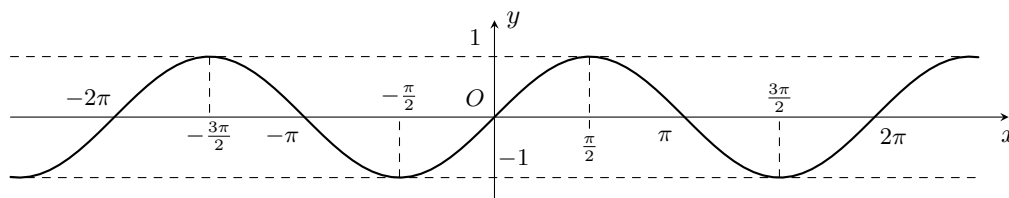
Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$



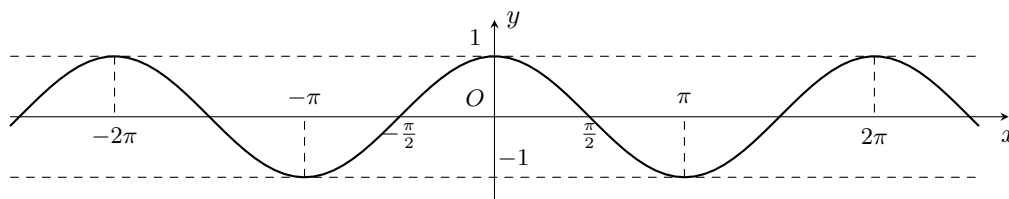
Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1 khi $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

b) Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$



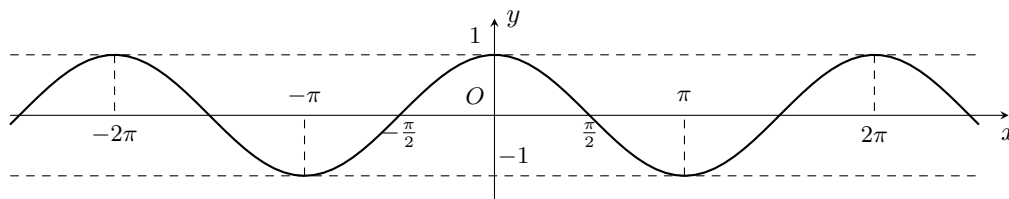
Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0 khi $x \in \{\pm 2\pi; \pm \pi; 0\}$.

c) Đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$



Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1 khi $x = \pm \pi$.

d) Đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$



Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0 khi $x \in \{\pm 2\pi; \pm \pi; 0\}$.

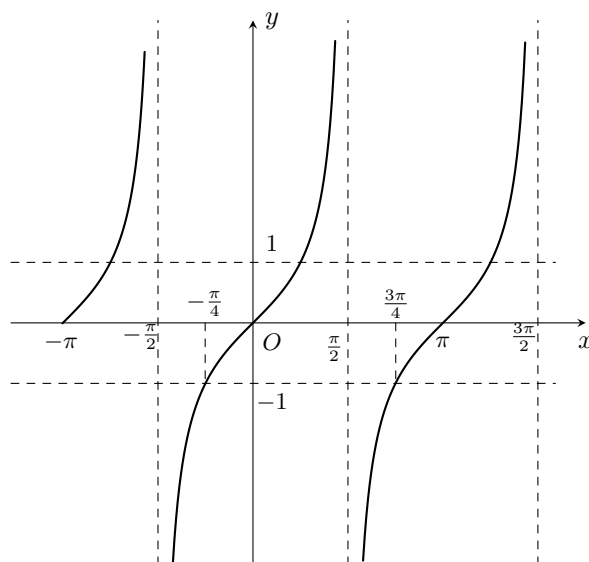
□

Bài 19. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ để

- | | |
|--|---|
| a) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng -1; | b) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0; |
| c) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1; | d) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 0. |

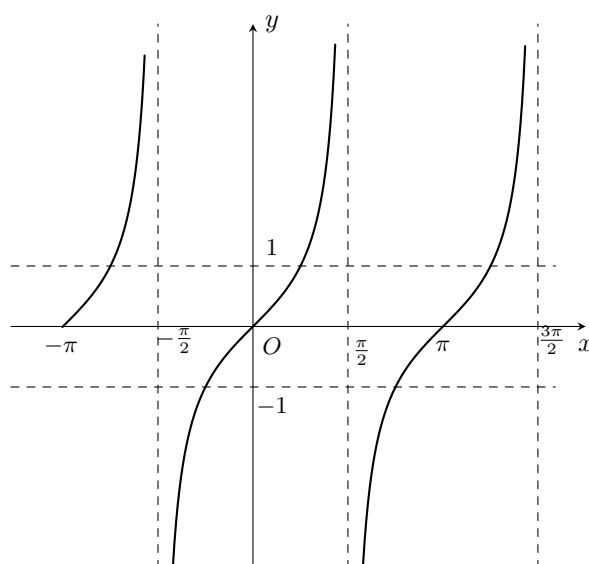
Lời giải.

a) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$



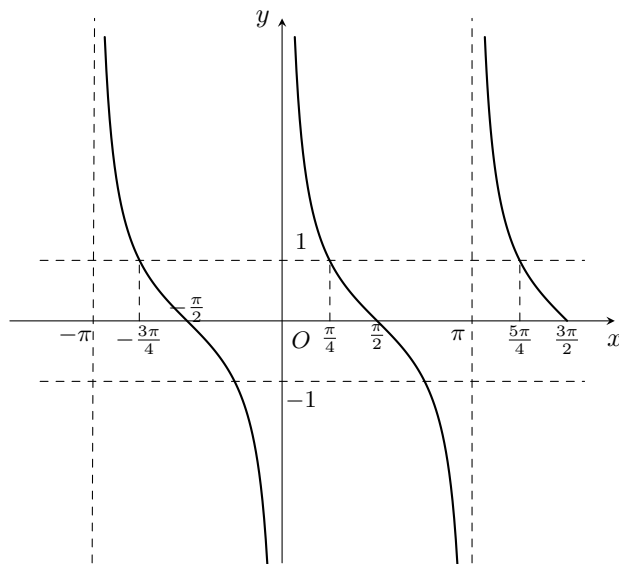
Dựa vào đồ thị ta thấy trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng -1 khi $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

b) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$



Dựa vào đồ thị ta thấy trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0 khi $x \in \{0; \pi\}$.

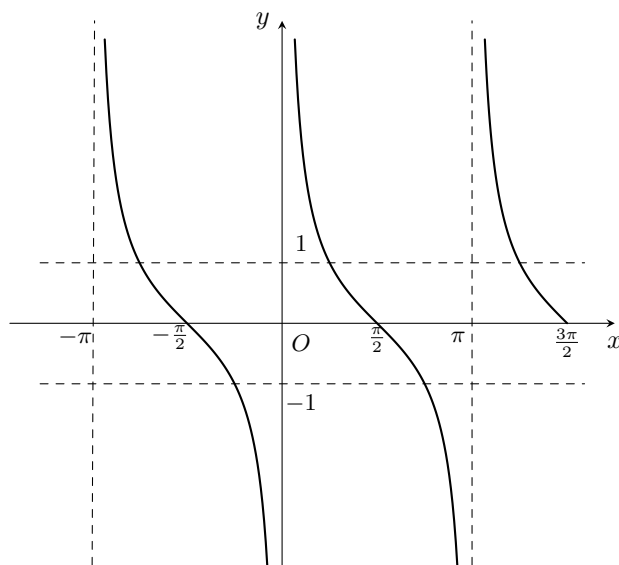
c) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1 khi

$$x \in \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}.$$

d) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1 khi $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

□

Bài 20. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Lời giải.

a) Do $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{\pi}{2} - 4\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$.
Do $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 10\pi; \frac{3\pi}{2} + 10\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$.

- b) Do $(-20\pi; -19\pi) = (-20\pi; \pi - 20\pi)$ nên hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-20\pi; -19\pi)$.
Do $(-9\pi; -8\pi) = (-\pi - 8\pi; -8\pi)$ nên hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-9\pi; -8\pi)$.

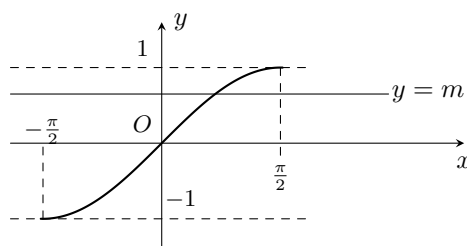
□

Bài 21. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

- a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$;
b) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$;
c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$;
d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

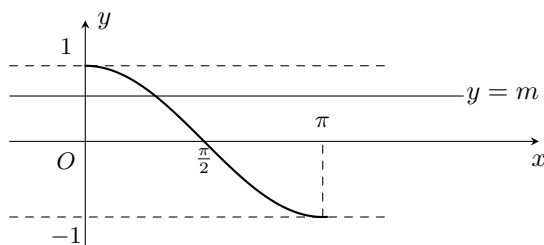
Lời giải.

a)



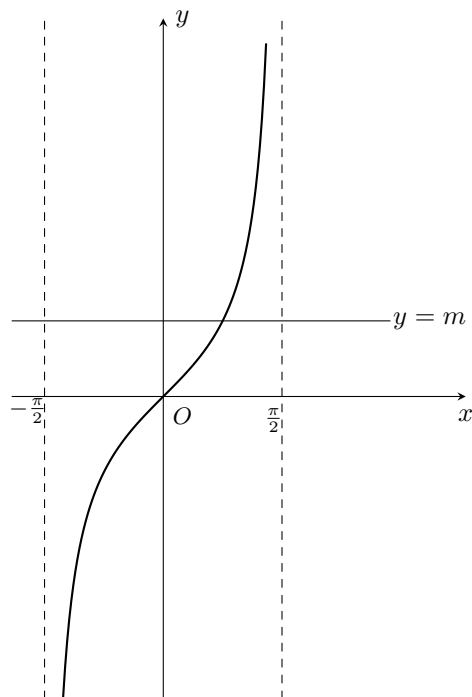
Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in [-1; 1]$, có một giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.

b)



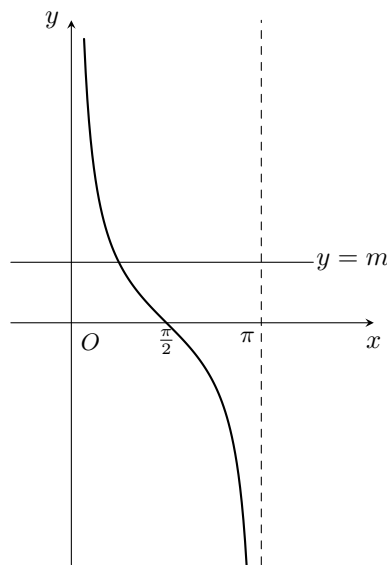
Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in [-1; 1]$, có một giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

c)



Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có một giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.

d)



Dựa vào đồ thị ta thấy với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có một giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

□

Bài 22. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3T}{4}$, $t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp

a) $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = 0$;

b) $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$;

c) $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

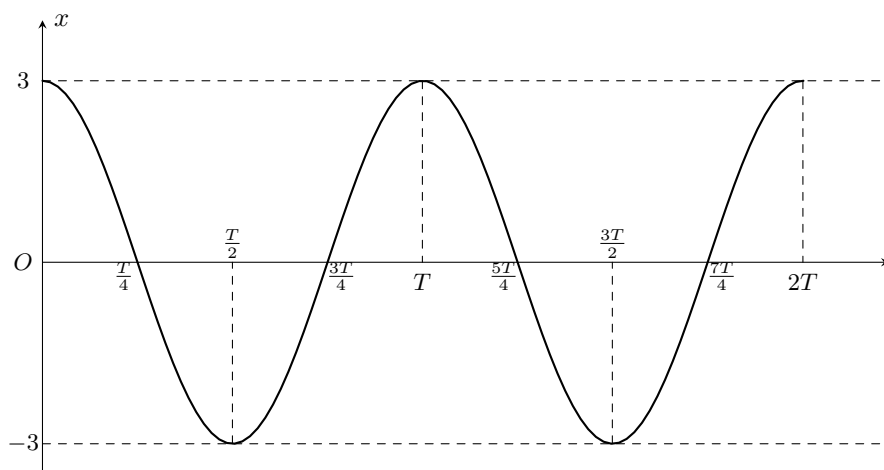
Lời giải.

a) Khi $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = 0$ thì phương trình li độ là

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 3 \cos(\omega t).$$

- ☑ Với $t = 0$ thì $x = 3 \cos(\omega \cdot 0) = 3$;
- ☑ Với $t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{T}{4}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- ☑ Với $t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega}\right) = 3 \cos \pi = -3$;
- ☑ Với $t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{6\pi}{4\omega}\right) = 3 \cos \frac{3\pi}{2} = 0$;
- ☑ Với $t = T$ thì $x = 3 \cos(\omega \cdot T) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) = 3 \cos 2\pi = 3$.

Đồ thị biểu diễn li độ của dao động trên đoạn $[0; 2T]$

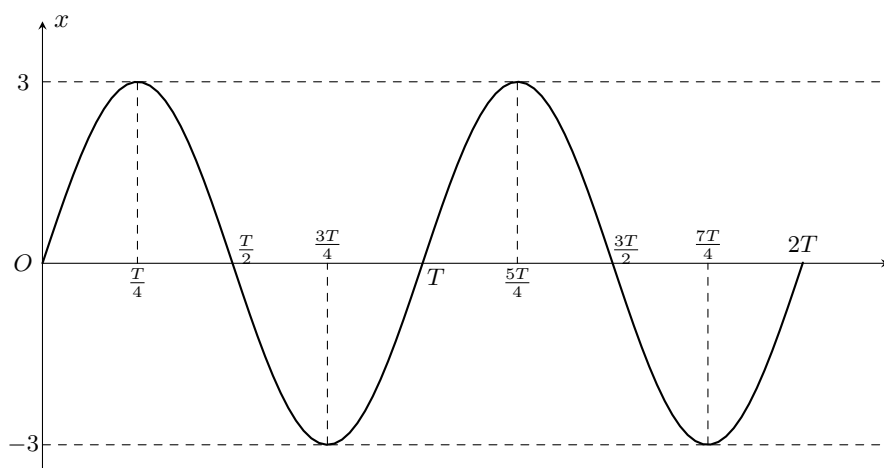


b) Khi $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ thì phương trình li độ là

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

- ☑ Với $t = 0$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- ☑ Với $t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{T}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos 0 = 3$;
- ☑ Với $t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{T}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- ☑ Với $t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{3T}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{6\pi}{4\omega} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos \pi = -3$;
- ☑ Với $t = T$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot T - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Đồ thị biểu diễn li độ của dao động trên đoạn $[0; 2T]$

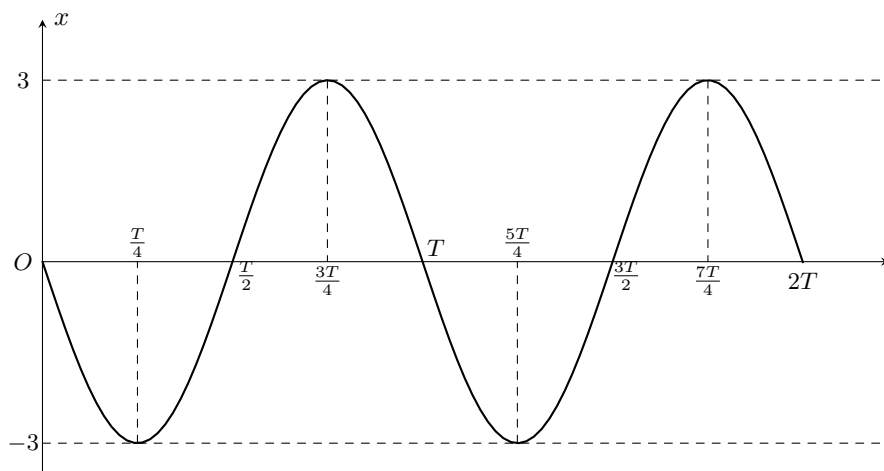


c) Khi $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thì phương trình li độ là

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

- ☑ Với $t = 0$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- ☑ Với $t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{T}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos \pi = -3$;
- ☑ Với $t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$;
- ☑ Với $t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{3T}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{6\pi}{4\omega} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos 2\pi = 3$;
- ☑ Với $t = T$ thì $x = 3 \cos\left(\omega \cdot T + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$.

Đồ thị biểu diễn li độ của dao động trên đoạn $[0; 2T]$



□

Bài 23. Giếng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.

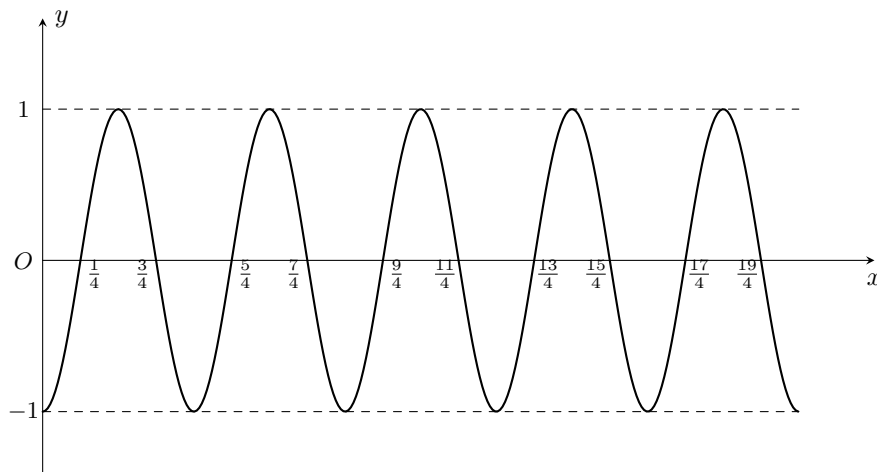
Một chiếc giếng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m. Khi giếng quay đều, khoảng cách h (m) từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của giếng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 2,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$, với x (phút) là thời gian quay của giếng ($x \geq 0$). Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước 2 m.

🗨 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} h = 2 &\Leftrightarrow \left| y = 2,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \right| = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = 2 \\ y = 2,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{5} \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Đồ thị



Dựa vào đồ thị ta thấy một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước 2 m là $x \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \frac{9}{4}; \frac{11}{4}; \frac{13}{4}; \frac{15}{4}; \dots \right\}$. □

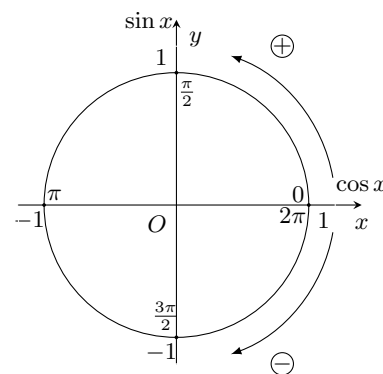
3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 25. Hàm số $y = \sin x$

- (A) đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- (B) đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2} + k2\pi; \frac{5\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- (C) đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- (D) đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



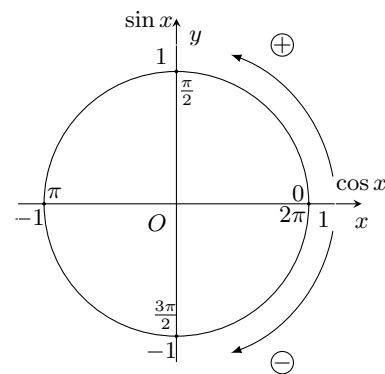
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Hàm số $y = \cos x$

- (A) đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- (B) đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- (C) đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- (D) đồng biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; 3\pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 27. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)** $(0; \frac{\pi}{2})$. **(B)** $(0; \pi)$. **(C)** $(\frac{\pi}{2}; 2\pi)$. **(D)** $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ luôn đồng biến trên các khoảng xác định, vậy nó đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 28. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)** $(0; 2\pi)$. **(B)** $(\frac{\pi}{2}; 2\pi)$. **(C)** $(-\pi; 0)$. **(D)** $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot x$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Chọn đáp án **(C)**

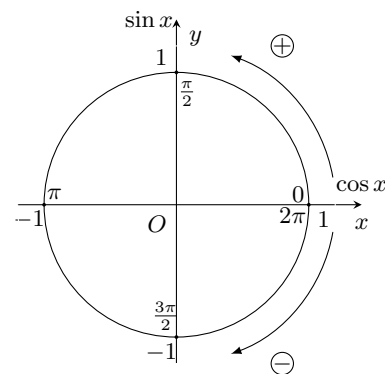
Câu 29. Hàm số $y = \sqrt{3} + 2 \cos x$ tăng trên khoảng

- (A)** $(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$. **(B)** $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$. **(C)** $(\frac{7\pi}{6}; 2\pi)$. **(D)** $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ nên hàm số $y = \sqrt{3} + 2 \cos x$ cũng đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $(\frac{7\pi}{6}; 2\pi) \subset (\pi; 2\pi)$ (với $k = 1$) nên hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{7\pi}{6}; 2\pi)$.



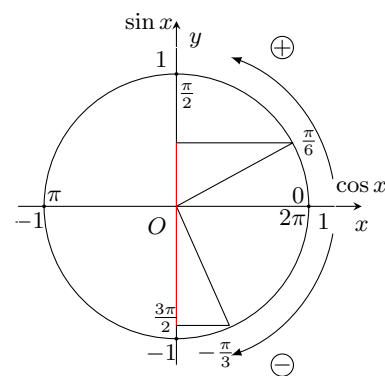
Chọn đáp án **(C)**

Câu 30. Hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6})$?

- (A)** $y = \cos x$. **(B)** $y = \cot 2x$. **(C)** $y = \sin x$. **(D)** $y = \cos 2x$.

Lời giải.

Quan sát trên đường tròn lượng giác, ta thấy trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ hàm số $y = \sin x$ tăng dần (tăng từ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ đến $\frac{1}{2}$).



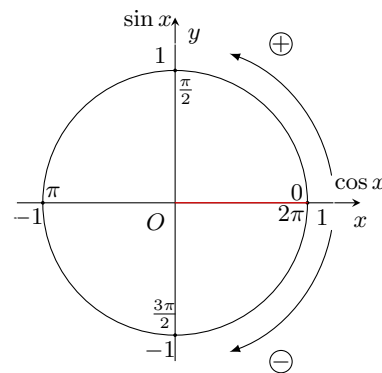
Chọn đáp án (C)

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) Hàm số $y = \sin x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 (B) Hàm số $y = \cot x$ giảm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 (C) Hàm số $y = \tan x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 (D) Hàm số $y = \cos x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Quan sát trên đường tròn lượng giác, trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta thấy hàm số $y = \cos x$ giảm dần.



Chọn đáp án (B)

Câu 32. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên

- (A) khoảng $(0; \pi)$.
 (B) các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
 (C) các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
 (D) khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mà $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với mỗi $k \in \mathbb{Z}$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

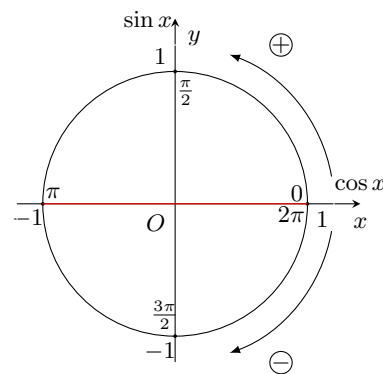
Chọn đáp án (B)

Câu 33. Hàm số $y = \cos x$

- (A) tăng trong $[0; \pi]$.
 (B) tăng trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và giảm trong $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
 (C) nghịch biến $[0; \pi]$.
 (D) Các khẳng định trên đều sai.

Lời giải.

Quan sát trên đường tròn lượng giác ta thấy: trên khoảng $[0; \pi]$ hàm số $y = \cos x$ giảm dần (giảm từ giá trị 1 đến -1).



Chọn đáp án (C)

Câu 34. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên đoạn nào dưới đây?

- (A) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (B) $[\pi; 2\pi]$. (C) $[-\pi; \pi]$. (D) $[0; \pi]$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, cho $k = 1 \Rightarrow (\pi; 2\pi)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 35. Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khác với các hàm số còn lại?

- (A) $y = \sin x$. (B) $y = \cos x$. (C) $y = \tan x$. (D) $y = -\cot x$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ba hàm số còn lại $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = -\cot x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 36. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng

- (A) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. (B) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. (C) $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$. (D) $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 37. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 (B) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 (C) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.
 (D) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, cho $k = 0 \Rightarrow (-\pi; 0)$ suy ra đồng biến trên $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 38. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- (A) $y = \sin x$. (B) $y = \cos x$. (C) $y = \tan x$. (D) $y = -\cot x$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 39. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

(A) $y = \sin x$.

(B) $y = \cos x$.

(C) $y = \cot x$.

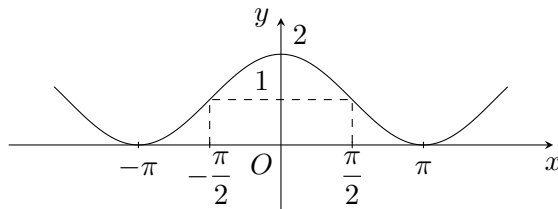
(D) $y = \tan x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, cho $k = 1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y = \cos x + 1$.

(B) $y = 2 - \sin x$.

(C) $y = 2 \cos x$.

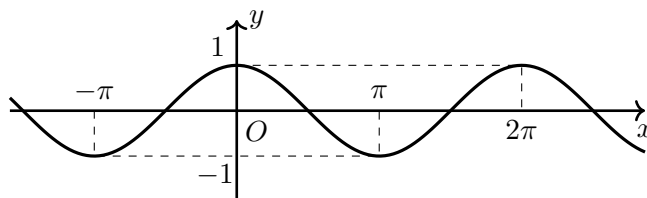
(D) $y = \cos^2 x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0, \pi)$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \cos x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 41. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = 1 + \sin x$.

(B) $y = 1 - \sin x$.

(C) $y = \sin x$.

(D) $y = \cos x$.

Lời giải.

Ta thấy $y(0) = 1$, do đó loại đáp án C.

Hàm số không đạt giá trị bằng 2 tại $x = \frac{\pi}{2}$ hay $x = -\frac{\pi}{2}$, loại đáp án A và B.

Do đó, hàm số cần tìm phải là $y = \cos x$.

Chọn đáp án **(D)** □

Dạng 4. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số lượng giác

Định nghĩa 3.7. Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có

☑ $x + T \in \mathcal{D}$ và $x - T \in \mathcal{D}$;

☑ $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn đó.

☑ Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ và $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.

Suy ra hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

☑ Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan(ax + b)$ và $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

⚠ Giả sử hàm số $f(x) = g(x) \pm h(x)$ có hàm $g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_1 và hàm $h(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_2 . Khi đó hàm số $f(x)$ sẽ tuần hoàn với chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của hai chu kỳ T_1 và T_2 .

1. Ví dụ mẫu**Ví dụ 14.** Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.**Lời giải.**Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{5}$. □**Ví dụ 15.** Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$.**Lời giải.**Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$. □**Ví dụ 16.** Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.**Lời giải.**Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$.Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{1}{3}$. □**Ví dụ 17.** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos^2 x - 1$.**Lời giải.**Ta biến đổi: $y = \cos^2 x - 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$.Do đó y là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. □**Ví dụ 18.** Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \sin 2x + \cos x$.**Lời giải.**Do $\sin 2x$ có chu kỳ $T_1 = \pi$, $\cos x$ có chu kỳ $T_2 = 2\pi$ nên $T = 2\pi$. □**Ví dụ 19.** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của hàm số sau $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.**Lời giải.**Ta biến đổi: $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$.Do đó y là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}$. □**2. Bài tập tự luyện****Bài 24.** Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.**Lời giải.**chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là $T = 2\pi$. □**Bài 25.** Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.**Lời giải.**Hàm số $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{5}$. □**Bài 26.** Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.**Lời giải.**Hàm số $y = \tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{1}{3}$. □

Bài 27. Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$. □

Bài 28. Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\frac{x+4\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Hàm số $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ 4π . □

Bài 29. Tìm chu kỳ của hàm số:

a) $y = f(x) = \tan \frac{x}{4}$

b) $y = \sin x - \cos 4x$.

Lời giải.

a) Chu kỳ của hàm số $y = \tan ax$ là $T = \frac{\pi}{a}$ nên chu kỳ của hàm số cần tìm là $T = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

b) Ta có hàm số $g(x) = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = 2\pi$. Ta có hàm số $g(x) = \cos 4x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{\pi}{2}$. Suy ra hàm số $y = \sin x - \cos 4x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi = m.T_1 = n.T_2$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và là số nhỏ nhất. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 42. Xác định chu kỳ của hàm số $y = \sin x$.

(A) 2π .

(B) $\frac{3\pi}{2}$.

(C) $\frac{\pi}{2}$.

(D) π .

Lời giải.

Chu kỳ của hàm số $y = \sin x$ là $T = 2\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Hàm số $y = \cot x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là

(A) π và 2π .

(B) $k\pi$ và $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(C) 2π và π .

(D) $k2\pi$ và $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π và hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Hàm số nào sau đây là hàm số tuần hoàn và có chu kỳ bằng π

(A) $y = \tan x$.

(B) $y = \tan \frac{x}{2}$.

(C) $y = \sin x$.

(D) $y = \sin \frac{x}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(x + \pi) = \tan x$ nên hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn, hơn nữa π là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên hàm số $y = \tan x$ có chu kỳ là $T = \pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Xét trên tập xác định của hàm số thì khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

(B) Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

(C) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

(D) Hàm số $y = \cot 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$. Do vậy khẳng định hàm số $y = \cot 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ là **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A) $T_0 = 2\pi$. (B) $T_0 = \frac{\pi}{2}$. (C) $T_0 = \pi$. (D) $T_0 = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A) $T_0 = \frac{\pi}{3}$. (B) $T_0 = \frac{\pi}{2}$. (C) $T_0 = 2\pi$. (D) $T_0 = \pi$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Hàm số $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A) $T_0 = 0$. (B) $T_0 = \frac{\pi}{2}$. (C) $T_0 = 2\pi$. (D) $T_0 = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Tìm chu kỳ T_0 của hàm số $f(x) = \tan 2x$.

- (A) $T_0 = \pi$. (B) $T_0 = \frac{\pi}{4}$. (C) $T_0 = 2\pi$. (D) $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $f(x + T_0) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x + T_0) = \tan 2x \Leftrightarrow T_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chọn $T_0 = \pi$, ta có $\tan(2x + \pi) = \tan 2x$ và $T_0 = \pi$ là số dương nhỏ nhất cần tìm. Nên hàm số $y = \tan 2x$ có chu kỳ $T_0 = \pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A) 5π . (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) 3π . (D) 4π .

Lời giải.

Ta có hàm số $\sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, hàm số $\cos \frac{3x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$.

Do đó hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Do T_1 là bội của T_2 ($\frac{T_1}{T_2} = 3$) nên $T_0 = T_1$.

Vậy hàm số $f(x)$ đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 4\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Tìm chu kỳ của hàm số $f(x) = \tan \frac{x}{4} + 2 \sin \frac{x}{2}$.

- (A) π . (B) 2π . (C) 4π . (D) 8π .

Lời giải.

Hàm số $\tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm $\tan \frac{x}{4}$ tuần hoàn với chu kỳ 4π .

Hàm $\sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên hàm $\sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ 4π .

Do đó hàm $f(x) = \tan \frac{x}{4} + 2 \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ 4π .

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Tìm m để hàm số $y = \cos mx$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.

- (A) $m = \pm 1$. (B) $m = \pm 2$. (C) $m = \pm \frac{\pi}{2}$. (D) $m = \pm \pi$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = \cos mx$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|m|}$.

Để hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$ thì $T = T_0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{|m|} = \pi \Leftrightarrow |m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn đáp án (B)

Câu 53. Trong các hàm số: $y = \sin 2x$; $y = \cos(x - \pi)$; $y = \tan(x - 1)$, có mấy hàm số có chu kỳ là π .

(A) 2.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \tan(x - 1)$ có chu kỳ tuần hoàn là $T = \frac{\pi}{1} = \pi$.

Chọn đáp án (A)

Câu 54. Tìm chu kỳ T của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2017$.

(A) $T = 3\pi$.

(B) $T = 2\pi$.

(C) $T = \pi$.

(D) $T = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có $y = 2\cos^2 x + 2017 = \cos 2x + 2018$. Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Chọn đáp án (C)

Dạng 5. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☑ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

③ $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

④ $0 \leq |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

⑤ Cô - si:

⑥ Bunhiacopxki:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ với mọi } a, b \geq 0$$

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

☑ Sử dụng điều kiện có nghiệm

① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

③ $\sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

☑ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5 - 3\cos 4x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos 4x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 3 &\geq -3\cos 4x \geq -3 \\ \Leftrightarrow 5 + 3 &\geq 5 - 3\cos 4x \geq 5 - 3 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq y \leq 8. \end{aligned}$$

☑ $\max y = 8$ khi $\cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

☑ $\min y = 2$ khi $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

Ví dụ 21. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 + 3 \cos x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -3 &\geq 3 \cos x \geq -3 \\ \Leftrightarrow -1 &\geq 2 + 3 \cos x \geq 5 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq y \leq 5. \end{aligned}$$

☑ $\max y = 5$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

☑ $\min y = -1$ khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$.

Ví dụ 22. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2 \sin 2x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin 2x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2 \sin 2x \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 3 - 2 \sin 2x \leq 5 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq y \leq 5. \end{aligned}$$

☑ $\max y = 5$ khi $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

☑ $\min y = 1$ khi $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Ví dụ 23. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2|\sin 2x|$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin 2x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2|\sin 2x| \leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 3 - 2|\sin 2x| \leq 3. \end{aligned}$$

☑ $\max y = 3$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

☑ $\min y = 1$ khi $\sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pm\pi}{4} + k\pi$.

Ví dụ 24. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1 + 4 \cos^2 x}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos^2 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 4 \cos^2 x \leq 4 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 1 + 4 \cos^2 x \leq 5 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &\leq \frac{1 + 4 \cos^2 x}{3} \leq \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

☑ $\max y = \frac{5}{3}$ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\textcircled{v} \min y = \frac{1}{3} \text{ khi } \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

□

Ví dụ 25. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sin^2 2x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &\leq -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\textcircled{v} \max y = 1 \text{ khi } \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$\textcircled{v} \min y = \frac{1}{2} \text{ khi } \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

□

Ví dụ 26. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sin(x + 2\pi/3)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, ta có

$$y = \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \leq -\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1.$$

$$\textcircled{v} \max y = 1 \text{ khi } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

$$\textcircled{v} \min y = -1 \text{ khi } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 2 \sin x + 3$

b) $y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{3}$

c) $y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$

d) $y = 4 \sin x \cos x + 1$;

e) $y = 4 - 3 \sin^2 2x$.

f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$

g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

h) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

Bài 31. Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 32. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 33. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

b) $y = \sin 2x - \cos 2x$

c) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

Bài 34. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$

b) $y = 2\cos^2 x + 3\cos x - 2$

c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$

Bài 35. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 y &= 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 \\
 &= 2\cos^2 x - 1 - \sqrt{3}\sin 2x + 2 \\
 &= \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2 \\
 &= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 2 \\
 &= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2.
 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } -1 \leq 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của hàm số là } 4 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của hàm số là } 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

□

Bài 36. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$.**Lời giải.**

Ta có $\sin x - \cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } y = \frac{\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2} \Leftrightarrow (1 - y)\sin x + (3 + y)\cos x = 2y - 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 &[(1 - y)\sin x + (3 + y)\cos x]^2 \leq [(1 - y)^2 + (3 + y)^2] \cdot [\sin^2 x + \cos^2 x] \\
 \Leftrightarrow &(2y - 1)^2 \leq (1 - y)^2 + (3 + y)^2 \\
 \Leftrightarrow &2y^2 - 8y - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{34}}{2} \leq y \leq \frac{4 + \sqrt{34}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Kiểm tra dấu bằng xảy ra, ta được } \min y = \frac{4 - \sqrt{34}}{2}; \max y = \frac{4 + \sqrt{34}}{2}.$$

□

Bài 37. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{2 - \sin x}$.**Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}
 &-1 \leq \sin x \leq 1 \\
 \Leftrightarrow &-1 \leq -\sin x \leq 1 \\
 \Leftrightarrow &1 \leq 2 - \sin x \leq 3 \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin x} \leq 1 \\
 \Leftrightarrow &\frac{4}{3} \leq \frac{4}{2 - \sin x} \leq 4.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} y = 4 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} \text{ và } \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{4}{3} \text{ khi } x = -\frac{\pi}{2}.$$

□

Bài 38. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{8}{3 - \cos^2 x}$.**Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos^2 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq -\cos^2 x \leq 0 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq 3 - \cos^2 x \leq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{8}{3} &\leq \frac{8}{3 - \cos^2 x} \leq 4. \end{aligned}$$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 4$ khi $x = 0$ và $\min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{8}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{2}$. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 55. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là

- (A) $(-1; 1)$. (B) $[-1; 1]$. (C) $\mathbb{R}$. (D) $[0; 1]$.

🗨️ **Lời giải.**

Do $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1; 1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Tập giá trị của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- (A) $[-2; 2]$. (B) $[0; 2]$. (C) $[-1; 1]$. (D) $[0; 1]$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $[-1; 1]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập giá trị của hàm số $y = 2 \sin(x + 3) - 1$?

- (A) $[-7; 5]$. (B) $[-3; 1]$. (C) $\mathbb{R}$. (D) $[0; 4]$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $-1 \leq \sin(x + 3) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 2 \sin(x + 3) - 1 \leq 1$.

Vậy tập giá trị của hàm số trên là $[-3; 1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x$ là

- (A) -2 . (B) -1 . (C) 0 . (D) 1 .

🗨️ **Lời giải.**

Có $-1 \leq \sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x$ là -1 .

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 2 \sin x$ là

- (A) -1 . (B) 3 . (C) 1 . (D) 2 .

🗨️ **Lời giải.**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 2 \sin x$ là -1 , đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos 3x + 1$. Giá trị của $M - 2m$ là

- (A) 2 . (B) 4 . (C) -5 . (D) 5 .

🗨️ **Lời giải.**

✔ Ta có $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2 \cos 3x + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

✔ Do đó, $M = 3; m = -1$ và $M - 2m = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Giá trị nhỏ nhất M của hàm số $y = 1 - 2 \cos x$ là

- (A) $M = 1$. (B) $M = -3$. (C) $M = 3$. (D) $M = -1$.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $-1 \leq 1 - 2 \cos x \leq 3$ suy ra $-1 \leq y \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, có $y(0) = -1$ nên $M = \min_{\mathbb{R}} y = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + 2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Khi đó $m^2 + M^2$ có giá trị là

- (A) 10. (B) 34. (C) 8. (D) 26.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ nên $0 \leq \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, do đó $3 \leq y \leq 5$.

Vậy $m = 3, M = 5, m^2 + M^2 = 34$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + 2$.

- (A) $\max y = 3$ và $\min y = 1$. (B) $\max y = 3$ và $\min y = 2$.
(C) $\max y = 3$ và $\min y = -2$. (D) $\max y = 3$ và $\min y = -1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 0\}$.

Ta có $0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1, \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{\cos x} + 2 \leq 3, \forall x \in \mathcal{D}$.

Ngoài ra khi $\cos x = 1$ thì $y = 3$ và khi $\cos x = 0$ thì $y = 2$. Vậy $\max y = 3$ và $\min y = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2 |\cos 3x|$.

- (A) $M = 3, m = -1$. (B) $M = 1, m = -1$. (C) $M = 2, m = -2$. (D) $M = 0, m = -2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos 3x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq |\cos 3x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\geq -2 |\cos 3x| \geq -2 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq 1 - 2 |\cos 3x| \geq -1 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq y \geq -1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$.

- (A) $m = \frac{1}{2}$. (B) $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (C) $m = 1$. (D) $m = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Ta có $\frac{1}{\cos x + 1}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x = 1$.

Khi $\cos x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x - 5$ là

- (A) -8 . (B) -20 . (C) 0 . (D) -9 .

Lời giải.

Với $t = \sin x, t \in [-1; 1]$ ta có hàm số $f(t) = t^2 - 4t - 5$. Lập bảng biến thiên như sau:

t	-1	1
$f(t)$	0	-8

Suy ra $\min y = \min_{[-1;1]} f(t) = f(1) = -8$.

Chọn đáp án (A)

Câu 67. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2 \cos x - \cos^2 x$ là

- (A) 2. (B) 5. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y = 1 - 2 \cos x - \cos^2 x = 2 - (\cos x + 1)^2$.

Nhận xét $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\cos x + 1)^2 \leq 4$.

Do đó $y = 2 - (\cos x + 1)^2 \leq 2 - 0 = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án (A)

Câu 68. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

- (A) $-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -1$. (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -2$. (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến nên

☑ $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

☑ $\min_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Chọn đáp án (B)

Câu 69. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x - \cos x + 3$. Tính $M \cdot m$.

- (A) 7. (B) -4. (C) -7. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $y = \sin x - \cos x + 3 = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$. Do đó $M = \sqrt{2} + 3$ và $m = -\sqrt{2} + 3$.

Vậy $M \cdot m = 7$.

Chọn đáp án (A)

Bài số 4

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

❖ **Định nghĩa 4.1.** Nếu phương trình (cùng ẩn) được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

Trong các phép biến đổi phương trình, đáng chú ý nhất là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình. Ta gọi chúng là các phép biến đổi tương đương. Như vậy, phép biến đổi tương đương một phương trình thành phương trình tương đương với nó.

Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng:

❖ **Định lí 4.1.** Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình tương đương.

- ✔ Công hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;
- ✔ Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

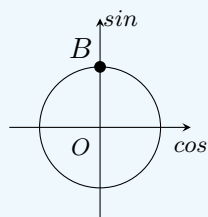
B – PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = M$

Phương trình $\sin x = m$

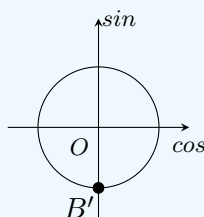
- Với $|m| > 1$, phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

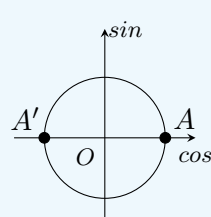
Các trường hợp đặc biệt :



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

- ✔ Ta có $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- ✔ Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau:

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

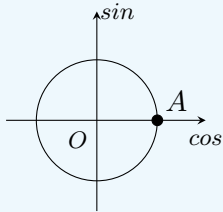
C – PHƯƠNG TRÌNH $\cos X = M$

Phương trình $\cos x = m$

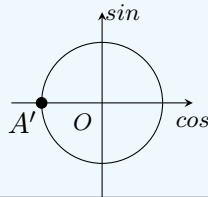
- Với $|m| > 1$, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$. Khi đó, ta có

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

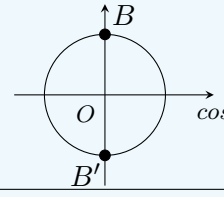
Các dạng phương trình đặc biệt :



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

a) Ta có $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

b) Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^\circ$ như sau:

$$\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D – PHƯƠNG TRÌNH $\tan X = M$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ sao cho $\tan \alpha = m$. Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a^\circ$ như sau:

$$\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

E – PHƯƠNG TRÌNH $\cot X = M$

Gọi α là số thực thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$. Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a^\circ$ như sau:

$$\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 1. Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

- ☑ Phương trình $\sin x = a$ có nghiệm $\Leftrightarrow |a| \leq 1$.
- ☑ Phương trình $\cos x = b$ có nghiệm $\Leftrightarrow |b| \leq 1$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (NB). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$. □

Ví dụ 2 (TH). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên phương trình $\sin x = m + 1$ có nghiệm khi: $-1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$. □

Ví dụ 3 (TH). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $3\sin^2 x = 2m - 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2m - 1}{3}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} \frac{2m-1}{3} \leq 1 \\ \frac{2m-1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2$. □

Ví dụ 4 (NB). Tìm m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm khi $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1. \end{cases}$ □

Ví dụ 5 (TH). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

Lời giải.

Phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán. □

2. Bài tập tự luyện

Bài 1 (TH). Tìm tất cả các tham số m sao cho trong tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1 + 2m$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $0 < 1 + 2m \leq 1 \Leftrightarrow -1 < 2m \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 0$.

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. □

Bài 2 (TH). Tìm m để phương trình $\sin 3x - 6 - 5m = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \leq 6 + 5m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \leq m \leq -1$ □

Bài 3 (TH). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

Lời giải.

Ta có $3\sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 - m}{3}$.

Để phương trình có nghiệm thì $-1 \leq \frac{1 - m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm. □

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$. □

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên phương trình $\sin x = m + 1$ có nghiệm khi: $-1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$. □

Bài 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $3\sin^2 x = 2m - 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2m - 1}{3}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} \frac{2m-1}{3} \leq 1 \\ \frac{2m-1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2$. □

Bài 7. Tìm m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm khi $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1. \end{cases}$ □

Bài 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

Lời giải.

Phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 9. Tìm tất cả các tham số m sao cho trong tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1 + 2m$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $0 < 1 + 2m \leq 1 \Leftrightarrow -1 < 2m \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 0$.

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. □

Bài 10. Tìm m để phương trình $\sin 3x - 6 - 5m = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \leq 6 + 5m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \leq m \leq -1$ □

Bài 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

Lời giải.

Ta có $3\sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 - m}{3}$.

Để phương trình có nghiệm thì $-1 \leq \frac{1 - m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm là

(A) $0 \leq m \leq 1$.

(B) $m \leq 0$.

(C) $m \geq 1$.

(D) $-2 \leq m \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Vậy để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm thì $-2 \leq m \leq 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Phương trình $\sin \frac{x}{2} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi.

(A) $m \in [-1; 1]$.

(B) $m \in [-2; 2]$.

(C) $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

(D) $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$. Vậy $m \in [-1; 1]$.

Chọn đáp án (A)

Câu 3. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - 2m = 1$ có nghiệm?

(A) $0 \leq m \leq 1$.

(B) $m \leq 0$.

(C) $m \geq 1$.

(D) $-1 \leq m \leq 0$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x - 2m = 1 \Leftrightarrow \sin x = 2m + 1$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 \leq 2m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

Chọn đáp án (D)

Câu 4. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + 2 = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

(A) 3.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x + 2 = m \Leftrightarrow \sin 2x = m - 2$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \leq m - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3 \Leftrightarrow m \in [1; 3].$$

Vậy $a + b = 4$.

Chọn đáp án (D)

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3 \sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

(A) 6.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$.

Vì $\sin 2x \in [-1; 1]$ nên $\frac{m^2 - 5}{3} \in [-1; 1] \Rightarrow m^2 \in [2; 8] \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq m \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$

Chọn đáp án (B)

Câu 6. Cho phương trình $4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để phương trình (1) có nghiệm.

(A) 5.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} &\Leftrightarrow 2 \left[\sin \frac{\pi}{2} + \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right] = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ &\Leftrightarrow 2 \left(1 + \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} \right) = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ &\Leftrightarrow 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ &\Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ &\Leftrightarrow 2 \cos 2x = a^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{a^2 - 2}{2} = \frac{a^2}{2} - 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{a^2}{2} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{a^2}{2} \leq 2 \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2.$$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số a .

Chọn đáp án (A)

Câu 7. Tìm tất cả giá trị thực của m để phương trình $\cos 2x - m = 0$ vô nghiệm.

(A) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

(B) $m \in (1; +\infty)$.

(C) $m \in [-1; 1]$.

(D) $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x - m = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = m$.

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $|m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm?

- (A) Không tồn tại m . (B) $m \in [-1; 3]$. (C) $m \in [-3; -1]$. (D) $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Tìm tất cả giá trị của a để phương trình sau có nghiệm $\cos^2 3x = 2a^2 - 3a + 1$.

- (A) $a \in [0; 1]$. (B) $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. (C) $a \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$. (D) $a \in [0; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos^2 3x = 2a^2 - 3a + 1 &\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 6x}{2} = 2a^2 - 3a + 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \cos 6x = 4a^2 - 6a + 2 \\ &\Leftrightarrow \cos 6x = 4a^2 - 6a + 1. \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 6a + 1 \geq -1 \\ 4a^2 - 6a + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 6a + 2 \geq 0 \\ 4a^2 - 6a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (B) □

Dạng 2. Phương trình lượng giác cơ bản

☑ $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 6 (NB). Giải phương trình $\sin x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$ □

Ví dụ 7 (NB). Giải phương trình $\cos x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$ □

Ví dụ 8 (TH). Giải phương trình $\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{9} + \frac{k8\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

Ví dụ 9 (NB). Giải phương trình $\tan x - 1 = 0$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

□

Ví dụ 10 (TH). Giải phương trình $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$.

🗨️ **Lời giải.**

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ thì phương trình

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

□

Ví dụ 11 (TH). Giải phương trình $\cot 3x = \cot x$.

🗨️ **Lời giải.**

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện ta được các nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

□

Ví dụ 12. Tìm góc lượng giác x sao cho:

a) $\sin x = \sin 55^\circ$;

c) $\tan x = \tan 67^\circ$;

b) $\cos x = \cos(-87^\circ)$;

d) $\cot x = \cot(-83^\circ)$.

🗨️ **Lời giải.**

a) $\sin x = \sin 55^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 55^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55^\circ + k360^\circ \\ x = 125^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

b) $\cos x = \cos(-87^\circ) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -87^\circ + k360^\circ \\ x = -(-87^\circ) + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -87^\circ + k360^\circ \\ x = 87^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

c) $\tan x = \tan 67^\circ \Leftrightarrow x = 67^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

d) $\cot x = \cot(-83^\circ) \Leftrightarrow x = -83^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

Ví dụ 13. Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x + 20^\circ) = \frac{1}{2}$;

b) $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$.

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có:

$$\begin{aligned}\sin(x + 20^\circ) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin(x + 20^\circ) = \sin 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 20^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ x + 20^\circ = 180^\circ - 30^\circ + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^\circ + k360^\circ \\ x = 130^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = x + 60^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = 180^\circ - (x + 60^\circ) + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -30^\circ = k360^\circ \text{ (vô nghiệm)} \\ 2x = 90^\circ + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 14. Giải phương trình $\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 60^\circ - 3x + k360^\circ \\ 2x = 180^\circ - (60^\circ - 3x) + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 60^\circ + k360^\circ \\ -x = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12^\circ + k72^\circ \\ x = -120^\circ - k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 15. Giải phương trình $\cos 2x = \cos(45^\circ - x)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\cos 2x = \cos(45^\circ - x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 45^\circ - x + k360^\circ \\ 2x = -(45^\circ - x) + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 12. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\sin x = -\frac{3}{2}$

c) $\sin 2x = \sin 3x$.

Lời giải.

a) Vì $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ nên phương trình $\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Vì $-\frac{3}{2} < -1$ nên phương trình $\sin x = -\frac{3}{2}$ vô nghiệm.

c) $\sin 2x = \sin 3x \Leftrightarrow 3x = 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $3x = \pi - 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 13. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$$

Lời giải.

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{b) } \sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = x + 60^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = 180^\circ - x - 60^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -30^\circ = k360^\circ (l) \\ x = 60^\circ + k180^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = 60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

□

Bài 14. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \cos 2x = \cos(x + 60^\circ).$$

$$\text{c) } \cos 3x = \sin x.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \text{Vì } -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \text{ nên phương trình } \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \text{ có các nghiệm là } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b) } \cos 2x = \cos(x + 60^\circ) \Leftrightarrow 2x = x + 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } 2x = -(x + 60^\circ) + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = -20^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -20^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{c) } \cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Vậy phương trình có các nghiệm là } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

□

Bài 15. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \cos x = -3$$

$$\text{b) } \cos x = \cos 15^\circ$$

$$\text{c) } \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \cos x = -3 \text{ Vì } |-3| > 1 \text{ nên phương trình } \cos x = -3 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{b) } \cos x = \cos 15^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x = -15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ Vậy phương trình có các nghiệm là } x = 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{12} = -\frac{3\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{Vậy phương trình}$$

có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{d) } \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{12} = -\frac{3\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

□

Bài 16. XGiải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$.

b) $\tan 2x = \tan \frac{\pi}{11}$.

Lời giải.

a) Vì $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ nên phương trình $\tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan 2x = \tan \frac{\pi}{11} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{11} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{22} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{22} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 17. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = 0$

b) $\tan(30^\circ - 3x) = \tan 75^\circ$

Lời giải.

a) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\tan(30^\circ - 3x) = \tan 75^\circ \Leftrightarrow 30^\circ - 3x = 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có các nghiệm là $x = -15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 18. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7}$.

Lời giải.

a) Vì $-\frac{\sqrt{3}}{3} = \cot \frac{2\pi}{3}$ nên phương trình $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \cot \frac{2\pi}{3}$ có các nghiệm là $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

c)

□

Bài 19. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = 1$

b) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ$.

Lời giải.

a) $\cot x = 1 \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ \Leftrightarrow 3x + 30^\circ = 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có các nghiệm là $x = 15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$

□

Bài 20. Giải phương trình $\cot 3x = \cot x$.**Lời giải.**

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện ta được các nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 21. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2};$

c) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

d) $2 \cos 3x + 5 = 3;$

e) $3 \tan x = -\sqrt{3};$

f) $\cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x).$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow & \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2x = k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{5}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k4\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k4\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

d) Ta có $2 \cos 3x + 5 = 3 \Leftrightarrow \cos 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

e) Ta có $3 \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x) \\
 \Leftrightarrow & \cot x - 3 = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cot x \\
 \Leftrightarrow & (1 + \sqrt{3}) \cot x = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \\
 \Leftrightarrow & \cot x = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

□

Bài 22. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$;

b) $\sin 2x = \cos 3x$;

c) $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2x = \cos 3x &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có } \cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & (1) \\ \cos 2x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{aligned} +) (2) \Leftrightarrow \cos 2x &= \cos\left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \\ 2x = -\left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

Bài 23. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2};$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7};$

c) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$

Lời giải.

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{b) } \sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{7} = \frac{2\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{6\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các

ng nghiệm là: $x = \frac{3\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{6\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 &\Leftrightarrow \sin 4x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 4x = \pi - x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ Vậy phương trình có các nghiệm là: } x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

Bài 24. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x = \tan 55^\circ$;

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Lời giải.

a) $\tan x = \tan 55^\circ \Leftrightarrow x = 55^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = 55^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 25. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

c) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $2\cos 3x + 5 = 3$;

e) $3\tan x = -\sqrt{3}$;

f) $\cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} &\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow &\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x = k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k4\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k4\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

d) Ta có $2 \cos 3x + 5 = 3 \Leftrightarrow \cos 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

e) Ta có $3 \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x) \\
 \Leftrightarrow & \cot x - 3 = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cot x \\
 \Leftrightarrow & (1 + \sqrt{3}) \cot x = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \\
 \Leftrightarrow & \cot x = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

□

Bài 26. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos 4x = \cos \frac{5\pi}{12}$.

c) $\cos^2 x = 1$.

Lời giải.

$$a) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \cos 4x = \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$c) \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 27. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

$$b) \cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải.

$$a) \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 = \cot \frac{-\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \cot \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

□

Bài 28. Giải các phương trình sau:

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$c) \sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1.$$

$$b) 2 \cos x = -\sqrt{2}.$$

$$d) \cot(2x - 1) = \cot \frac{\pi}{5}.$$

Lời giải.

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$b) 2 \cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$c) \sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \tan(30^\circ) \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

$$d) \cot(2x - 1) = \cot \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{5} + k\pi, x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{10} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 29. Giải phương trình $\cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{7}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x \in (0; 3\pi) \text{ nên } x \in \left\{\frac{6\pi}{7}; \frac{13\pi}{7}; \frac{20\pi}{7}\right\}.$$

Bài 30. Phương trình $\cot x = \sqrt{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2018\pi; 2018\pi]$?

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } k \in [-2018; 2017]. \text{ Do đó có } 4036 \text{ nghiệm.}$$

Bài 31. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ta có } \tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in [0; \pi) \text{ và kết hợp với điều kiện suy ra } x \in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

$$\text{Vậy tổng các nghiệm là } 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi.$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 10. Phương trình $\sin x = \sin a^\circ$ tương đương với

A $\begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k60^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B $\begin{cases} x = a^\circ + k60^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + 60^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C $x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

D $x = -a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án **B**

Câu 11. Hỏi $x = 45^\circ$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A $\sin x = 1.$

B $\cos x = 1.$

C $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}.$

D $\sin 2x = 0.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 90^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ.$$

$$\text{Do đó } x = 45^\circ \text{ là nghiệm của phương trình } \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 3x = \cos 45^\circ$.

(A) $S = \{15^\circ + k120^\circ; 45^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $S = \{-15^\circ + k120^\circ; 15^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $S = \{15^\circ + k360^\circ; 45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \{-15^\circ + k360^\circ; 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

$$\cos 3x = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ 3x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -15^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (B)

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(2x - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$.

(A) $S = \{-45^\circ + k360^\circ; 75^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $S = \{-45^\circ + k180^\circ; 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $S = \{-45^\circ + k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \{-75^\circ + k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(2x - 30^\circ) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 30^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ 2x - 30^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75^\circ + k180^\circ \\ x = -45^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (C)

Câu 14. Phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(B) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(C) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(D) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (C)

Câu 15. Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(B) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(C) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(D) $S = \left\{ \frac{1}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (A)

Câu 16. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B)

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = 0$ thỏa mãn $0 < x < 2\pi$ là?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Do $0 < x < 2\pi \Rightarrow 0 < k\frac{\pi}{2} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$ là

- (A) $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

- (A) $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 5\pi$ là

- (A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình $\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Mà $\pi \leq x \leq 5\pi$ nên $\pi \leq -\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq 5\pi \Leftrightarrow \frac{5}{8} \leq k \leq \frac{21}{8}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm trên $[\pi; 5\pi]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Phương trình $\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- (A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là

- (A) $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{1}{2}$ là

- (A) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (B) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{R})$.
(C) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (D) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ là

- (A) $\frac{5\pi}{3}$. (B) 0. (C) $\frac{5\pi}{6}$. (D) $-\frac{5\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}$, nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{\pi}{6}$.

Vậy tổng cần tìm là $S = \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 25. Số nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{2}{5}$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow x = \arccos \frac{2}{5}; x = -\arccos \frac{2}{5} + 2\pi$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (A)

Câu 26. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $5 \cos x - 2 = 0$ là

(A) $S = 3\pi$.

(B) $S = 2\pi$.

(C) $S = 0$.

(D) $S = 4\pi$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $5 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Xét trên $(0; 2\pi)$ phương trình có hai nghiệm $x = \arccos \left(\frac{2}{5}\right)$ và $x = -\arccos \left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi$.

Do vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng $\arccos \left(\frac{2}{5}\right) - \arccos \left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi = 2\pi$.

Chọn đáp án (B)

Câu 27. Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $2 \cos 3x = 1$

(A) $S = \frac{121\pi}{9}$.

(B) $S = \frac{120\pi}{9}$.

(C) $S = \frac{122\pi}{9}$.

(D) $S = \frac{20\pi}{3}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $2 \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Suy ra $S = \left(\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{13\pi}{9} + \frac{19\pi}{9} + \frac{25\pi}{9}\right) + \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{11\pi}{9} + \frac{17\pi}{9} + \frac{23\pi}{9}\right) = \frac{121\pi}{9}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 28. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$.

(A) $S = \left\{-\frac{\pi}{9} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(B) $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S = \{-\pi + k3\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{3} = \tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 29. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$ là

(A) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 30. Phương trình $\tan x = 1$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

(B) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

(C) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

(D) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 31. Phương trình $\sqrt{3}\tan 2x - 3 = 0$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). (B) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). (C) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). (D) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{3}\tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 32. Cho phương trình $\sqrt{3}\tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

- (A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. (B) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}$. (C) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\pm \frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{3}\tan 2x = 3 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

Suy ra $x_0 \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Do vậy $\cos x_0 \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right\}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 33. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

- (A) π . (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) 4π . (D) 2π .

🗨️ **Lời giải.**

Điều kiện xác định $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Khi đó $\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên $[-\pi; 2\pi]$ là 2π .

Chọn đáp án (D)

Câu 34. Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

- (A) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

🗨️ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ta có $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp điều kiện, khi đó phương trình có nghiệm là $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 35. Nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ là

- (A) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

🗨️ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ta có $\tan 2x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 36. Phương trình lượng giác $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 37. Phương trình $\cot\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1$ có nghiệm

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cot\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 38. Phương trình $\sin x = \sin a^\circ$ tương đương với

(A) $\begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k60^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $\begin{cases} x = a^\circ + k60^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + 60^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $x = -a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B)

Câu 39. Hỏi $x = 45^\circ$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\sin x = 1$.

(B) $\cos x = 1$.

(C) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$.

(D) $\sin 2x = 0$.

Lời giải.

Ta có $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 90^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ$.

Do đó $x = 45^\circ$ là nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 40. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 3x = \cos 45^\circ$.

(A) $S = \{15^\circ + k120^\circ; 45^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $S = \{-15^\circ + k120^\circ; 15^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $S = \{15^\circ + k360^\circ; 45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \{-15^\circ + k360^\circ; 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

$\cos 3x = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ 3x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -15^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B)

Câu 41. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(2x - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$.

(A) $S = \{-45^\circ + k360^\circ; 75^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $S = \{-45^\circ + k180^\circ; 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $S = \{-45^\circ + k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \{-75^\circ + k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(2x - 30^\circ) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 30^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ 2x - 30^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75^\circ + k180^\circ \\ x = -45^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn đáp án (C)

Câu 42. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan 25^\circ$ là

(A) $x = 25^\circ + k360^\circ$ và $x = 155^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x = 25^\circ + k180^\circ$ và $x = 155^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = 25^\circ + k360^\circ$ và $x = -25^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x = 25^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\tan x = \tan 25^\circ \Leftrightarrow x = 25^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 43. Phương trình $\tan(2x + 12^\circ) = 0$ có họ nghiệm là

(A) $x = -6^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = -6^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = -12^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = -6^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\tan(2x + 12^\circ) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -6^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 44. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin 3x = 0$ thuộc khoảng $(0; 180^\circ)$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k180^\circ}{3}.$

Xét bất phương trình $0 < \frac{k180^\circ}{3} < 180^\circ \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trong $(0; 180^\circ)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 45. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

(A) $S = \{120^\circ + k360^\circ; k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

(B) $S = \{120^\circ + k360^\circ; -180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

(C) $S = \{120^\circ + k180^\circ; k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

(D) $S = \{120^\circ + k180^\circ; -180^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

Lời giải.

Ta có $\cos(x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = -150^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -180^\circ + k360^\circ \\ x = 120^\circ + k360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 46. Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cot(x + 60^\circ) - 1 = 0.$

(A) $x = -30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = -30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cot(x + 60^\circ) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cot(x + 60^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow x &= k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 47. Cho phương trình $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ biết rằng $-90^\circ < x < 90^\circ$. Số nghiệm của phương trình là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có: $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Do $x \in (-90^\circ; 90^\circ) \Leftrightarrow -90^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1; 0\}.$

nên phương trình có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 48. Số nghiệm của phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ là

(A) 2.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 7.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - 40^\circ) = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x - 40^\circ = 180^\circ - 60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k180^\circ \\ x = 80^\circ + k180^\circ. \end{cases}$$

Do $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ nên $x \in \{-130^\circ; 50^\circ; -100^\circ; 80^\circ\}$.

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B)

Câu 49. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin(x + 30^\circ) \cdot \cos(x - 45^\circ) = 0$.

(A) $S = \{-30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $S = \{-30^\circ + k180^\circ; 135^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $S = \{135^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $S = \{45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin(x + 30^\circ) \cdot \cos(x - 45^\circ) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + 30^\circ) = 0 \\ \cos(x - 45^\circ) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = k \cdot 180^\circ \\ x - 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 135^\circ + k \cdot 180^\circ. \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-30^\circ + k180^\circ; 135^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án (B)

Dạng 3. Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

Lưu ý một số phương trình sau:

☑ $\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$.

☑ $\cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$.

☑ $\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.

☑ $\tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$.

☑ $\sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$.

☑ $\tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.

☑ $\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$.

☑ $\tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$.

☑ $\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 16. Giải phương trình: $\sin 2x = \cos 3x$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 2x = \cos 3x &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ví dụ 17. Giải phương trình: $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 4x &= \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow \sin 4x &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 18. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$.

b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 2x + \cos 4x = 0 &\Leftrightarrow -\sin 2x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 4x = -2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 6x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k}{3}\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 3x = -\cos 7x &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 7x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi - 7x + k2\pi \\ 3x = 7x - \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k}{5}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{4}\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 19. Giải phương trình: $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

Cách 1.

$$\text{Ta có: } \cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & (1) \\ \cos 2x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} +) (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +) (2) &\Leftrightarrow \cos 2x = \cos \left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + k2\pi \\ 2x = - \left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Cách 2. Dùng công thức hạ bậc, ta có:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 2x = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos 4x = \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = - \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 6x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 20. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin x + \sin 2x = 0 &\Leftrightarrow \sin x + 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 + 2 \cos x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 + 2 \cos x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 32. Giải phương trình: $\sin 3x = \cos 2x$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin 2x = \cos 3x &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Bài 33. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin 4x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 4x &= \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \\ \Leftrightarrow \sin 4x &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Bài 34. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - \sin 4x = 0$.

b) $\cos 3x = -\sin 7x$.

Lời giải.

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow -\sin 2x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 4x = -2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 6x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k}{3}\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos 3x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 7x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi - 7x + k2\pi \\ 3x = 7x - \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k}{5}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{4}\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

□

Bài 35. Giải phương trình: $\sin^2 2x = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

 **Lời giải.**

Cách 1.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos^2 2x = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) & (1) \\ \cos 2x = -\cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases} \\ +) (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \\ +) (2) &\Leftrightarrow \cos 2x = \cos \left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \\ 2x = -\left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Cách 2. Dùng công thức hạ bậc, ta có:

$$\begin{aligned} \cos^2 2x = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6}\right) &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos 4x = \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 6x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

Bài 36. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = 0$.

 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x = 0 &\Leftrightarrow \sin x + 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 + 2 \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 + 2 \cos x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 37. Giải phương trình: $\sin 3x - \cos 5x = 0$.

 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin 3x - \cos 5x = 0 &\Leftrightarrow \sin 3x = \cos 5x \\
 &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) = \cos 5x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = 5x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 3x = -5x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{16} - k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Bài 38. Giải phương trình $\sin 2x + \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin 2x + \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \left(-x - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.
 \end{aligned}$$

Bài 39. Giải phương trình: $\tan(2x + 1) + \cot x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \tan(2x + 1) + \cot x = 0 &\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = -\cot x \\
 &\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = \cot(-x) \\
 &\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = \tan \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \\
 &\Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{\pi}{2} + x + k\pi \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Bài 40. Tìm $x \in (-\pi; \pi)$ sao cho $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 &\Leftrightarrow -\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Cho $k = -1, 0$ ta được $x = -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

Bài 41. Giải phương trình: $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$.

 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x - \cos 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos 2x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + k2\pi \\ 3x = -2x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ 5x = k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Bài 42. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2\cos 2x \cdot \sin x + \cos 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos 2x \cdot (\sin x + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

□

Bài 43. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

 **Lời giải.**

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \\
 &\Leftrightarrow \sin 5x = \sin 3x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + k2\pi \\ 5x = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Bài 44. Giải phương trình: $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos x = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

□

Bài 45. Giải phương trình: $\tan^2 4x - \tan^2 \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 4x \neq 0 \\ \cos \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0. \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\tan 4x - \tan \left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot \left[\tan 4x + \tan \left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 4x = \tan \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \tan 4x = -\tan \left(3x - \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \tan 4x = \tan \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{v} \tan 4x = -\tan \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + \frac{k2\pi}{7}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Các nghiệm này thỏa mãn các điều kiện.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{21} + \frac{k2\pi}{7}, (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 46. Giải phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} &\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{7}{16} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{7}{16} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{7}{16} \\ &\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos 4x = \cos \frac{2\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

Bài 47. Giải phương trình $(2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) &= \sin 2x - \sin x \\ \Leftrightarrow \cos x (2 \cos x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} &\quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

Bài 48. Giải phương trình $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 &= \sin x \\ \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 2x) &= \sin 7x - \sin x \Leftrightarrow \cos 4x = 2\cos 4x \sin 3x \\ \Leftrightarrow \cos 4x (2\sin 3x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} &\quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

Bài 49. Giải phương trình $(\cos x - \sin x) \sin x \cos x = \cos x \cos 2x$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \cos x(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - \sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x - \sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} &\quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

Bài 50. Giải phương trình $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) &= \sin^2 x \\ \Leftrightarrow (2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) &= (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \Leftrightarrow (1 + \cos x)(2 \sin x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} &\quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 50. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\sin x + \sin 2x = 0$.

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\sin x (1 + 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

☑ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

☑ $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Do $x \in (-\pi; \pi) \Rightarrow x \in \left\{0, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 51. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 5x = 0$.

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 5x = \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x = x + \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in (0; \pi)$ nên $x \in \left\{\frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}.$

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 52. Phương trình $\tan 2x + \tan x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-4\pi; 5\pi]$?

- (A) 28. (B) 27. (C) 19. (D) 18.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}.$

Khi đó:

$$\tan 2x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\tan x \Leftrightarrow \tan 2x = \tan(-x) \Leftrightarrow 2x = -x + m\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x = m\pi \Leftrightarrow x = \frac{m\pi}{3}, m \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}.$$

Mà $x \in [-4\pi, 5\pi]$ nên $-4\pi \leq \frac{m\pi}{3} \leq 5\pi \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 15.$

Vậy số nghiệm của phương trình là 28.

Chọn đáp án (A)

Câu 53. Giải phương trình $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2.$

(A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Ta có: $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow 2 \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (D)

Câu 54. Họ nghiệm của phương trình $\tan 3x \cdot \tan x = 1$ là

(A) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}, m, n \in \mathbb{Z}.$

Khi đó:

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Leftrightarrow \tan 3x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}.$$

Nghiệm này thỏa mãn các điều kiện của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}.$

Chọn đáp án (C)

Câu 55. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{-1}{2\sqrt{2}\cos x}$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

(A) $\frac{9\pi}{8}.$

(B) $\frac{15\pi}{8}.$

(C) $5\pi.$

(D) $\frac{11\pi}{8}.$

Lời giải.

Phương trình tương đương với $\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Do đó, tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0; 2\pi]$ bằng

$$\frac{7\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} = 5\pi.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 56. Giải phương trình $\sin^2 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

(A) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Ta có:

$$\sin^2 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin 4x \cos x = \sin 5x \cos 2x$?

(A) 2 điểm.

(B) 5 điểm.

(C) 9 điểm.

(D) 14 điểm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x) = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x) \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Cung lượng giác $x = k\pi$ có 2 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

☑ Cung lượng giác $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ có 12 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác, trong đó không có điểm nào trùng với các điểm biểu diễn của cung $x = k\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 2x$?

(A) 2 điểm.

(B) 3 điểm.

(C) 4 điểm.

(D) 1 điểm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy có 3 điểm biểu diễn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Một vật thể chuyển động với vận tốc thay đổi có phương trình $v(t) = 2 + \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$ (t tính bằng giây, vận tốc tính bằng m/s²). Trong khoảng 1 giây đầu chuyển động, thời điểm vật thể đạt vận tốc 3 m/s² là

(A) 1 giây.

(B) $\frac{1}{4}$ giây.

(C) $\frac{1}{2}$ giây.

(D) $\frac{3}{4}$ giây.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 2 + \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \Leftrightarrow \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} + 2k (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ta có, } 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow k = 0. \text{ Suy ra } t = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = 0$.

(A) 6.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sin 2x \cos x + 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho phương trình $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$. Tính tổng S tất cả các nghiệm trong đoạn $(0; \pi)$ của phương trình đã cho.

(A) $S = \frac{3\pi}{4}$.

(B) $S = \frac{5\pi}{8}$.

(C) $S = \frac{17\pi}{12}$.

(D) $S = \frac{13\pi}{12}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sin 2x \cdot (\cos x + 1) &= \cos 2x \cdot (\cos x + 1) \\ \Leftrightarrow (\cos x + 1) \cdot (\sin 2x - \cos 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Do $x \in (0; \pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right\} \Rightarrow S = \frac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Cho phương trình $\sin x \cos x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{3}{2}$. Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình đã cho.

(A) $S = \frac{\pi}{2}$.

(B) $S = \frac{5\pi}{12}$.

(C) $S = \frac{\pi}{12}$.

(D) $S = \frac{5\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \cos 4x \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Suy ra các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}$. Vậy $S = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Phương trình $\tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = 1$ có nghiệm là

(A) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \neq 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) &= 1 \Leftrightarrow \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \cot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \\ &\Leftrightarrow \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \tan(-2x) \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 64. Nghiệm của phương trình $\tan 2x - \cot \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có dạng $x = \frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{m}, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m \cdot n$ bằng

(A) 8.

(B) 32.

(C) 36.

(D) 12.

Lời giải.

Ta có: $\tan 2x - \cot \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$.

Suy ra $n = 12, m = 3 \Rightarrow m \cdot n = 36$.

Chọn đáp án (C)

Dạng 4. Sự tương giao của các đồ thị hàm số lượng giác

Phương pháp: Hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm thì phương trình $f(x) = g(x)$ có bấy nhiêu nghiệm. hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình tương ứng.

1. Ví dụ mẫu

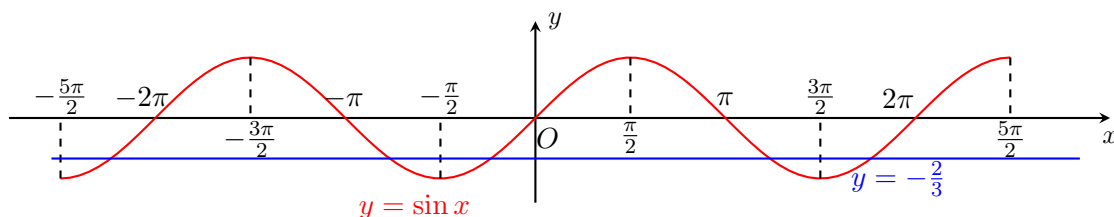
Ví dụ 21. Dùng đồ thị hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ để xác định số nghiệm của phương trình

a) $3 \sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$;

b) $\cos x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

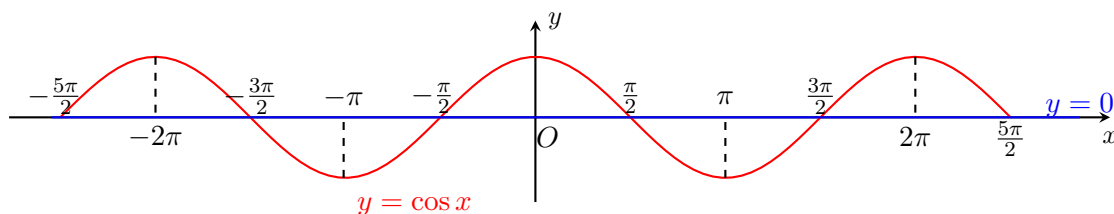
Lời giải.

a) $3 \sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.



Dựa đồ thị hàm số $y = \sin x$ ta thấy phương trình $3 \sin x + 2 = 0$ có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

b) $\cos x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ ta thấy phương trình $\cos x = 0$ có 6 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

2. Bài tập tự luyện

Bài 51. Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau?

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos x &= \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -x + \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

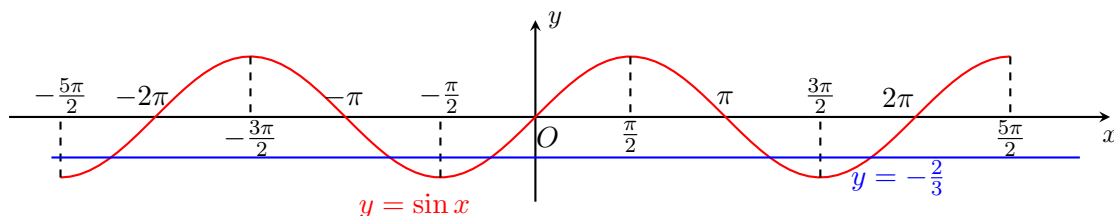
Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 52. Dùng đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ để xác định số nghiệm của phương trình

a) $3 \sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; b) $\cos x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

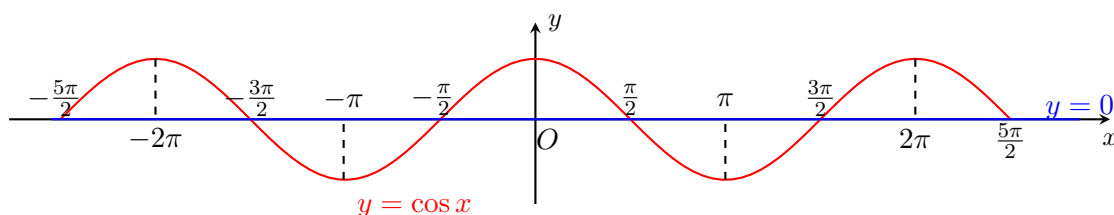
Lời giải.

a) $3 \sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.



Dựa đồ thị hàm số $y = \sin x$ ta thấy phương trình $3 \sin x + 2 = 0$ có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

b) $\cos x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ ta thấy phương trình $\cos x = 0$ có 6 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

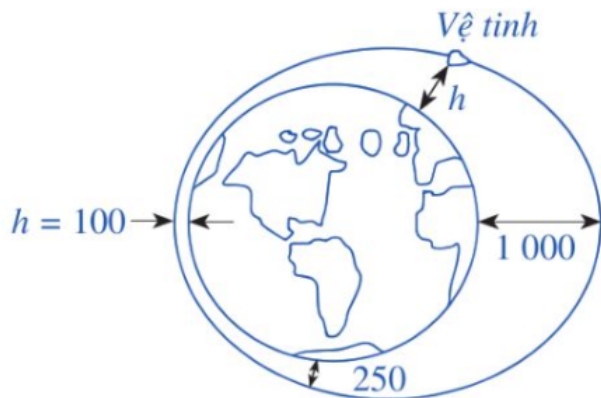
Dạng 5. Bài toán thực tế

Phương pháp: Mô tả dữ kiện dưới dạng phương trình lượng giác để giải quyết vấn đề.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 22.

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình 33). Độ cao h (km) của vệ tinh so với Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cos \frac{\pi}{50}t$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất 1 000 km; 250 km; 100 km?



Hình 33

💬 Lời giải.

Ta có $h = 550 + 450 \cos \frac{\pi}{50}t$

- Với $h = 1000$ km ta có

$$550 + 450 \cos \frac{\pi}{50}t = 1000 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50}t = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{50}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 25 + 100k.$$

□

Ví dụ 23. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

💬 Lời giải.

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
Ta giải phương trình

$$\begin{aligned} d(t) = 12 &\Leftrightarrow 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 = 12 \\ &\Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) = k\pi \\ &\Leftrightarrow t - 80 = 182k \\ &\Leftrightarrow t = 182k + 80 (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ta lại có

$$0 < 182k + 80 \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{80}{182} < k \leq \frac{285}{182} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1. \end{cases}$$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 (ứng với $k = 0$) và ngày thứ 262 (ứng với $k = 1$) trong năm.

- b) Vào ngày nào trong năm thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
Ta giải phương trình

$$\begin{aligned} d(t) = 9 &\Leftrightarrow 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 = 9 \\ &\Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow t - 80 = -91 + 364k \\ &\Leftrightarrow t = 364k - 11 (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ta lại có

$$0 < 364k - 11 \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1.$$

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

- c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời? Ta giải phương trình

$$\begin{aligned} d(t) = 15 &\Leftrightarrow 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 = 15 \\ &\Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow t - 80 = 91 + 364k \\ &\Leftrightarrow t = 364k + 171 (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ta lại có

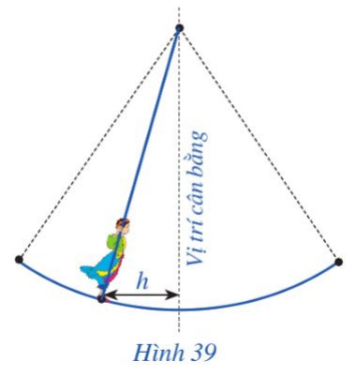
$$0 < 364k + 171 \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{171}{364} < k \leq \frac{196}{364} \Leftrightarrow k = 0.$$

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

□

Ví dụ 24. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu.

Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) với hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t - 1) \right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2022). Vào thời điểm t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?



Lời giải.

Khoảng cách h là 3 m khi

$$3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t - 1) \right] = -3 \Leftrightarrow \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t - 1) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t - 1) = -\pi + k2\pi \Leftrightarrow t = -1 + 3k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy vào thời điểm $t = -1 + 3k, k \in \mathbb{Z}$ nào thì khoảng cách h là 3 m.

Khoảng cách h là 0 m khi

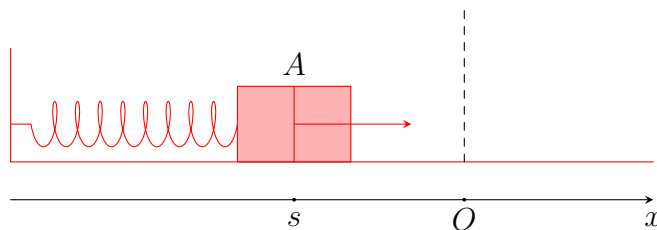
$$3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t - 1) \right] = 0 \Leftrightarrow \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t - 1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t - 1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy vào thời điểm $t = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ nào thì khoảng cách h là 0 m.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 53. Khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm ? (Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)



Lời giải.

$$\text{Khi } s = -5\sqrt{3} \text{ cm} \Leftrightarrow s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) = -5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{-\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $t = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ và $t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ □

Bài 54. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right).$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải.

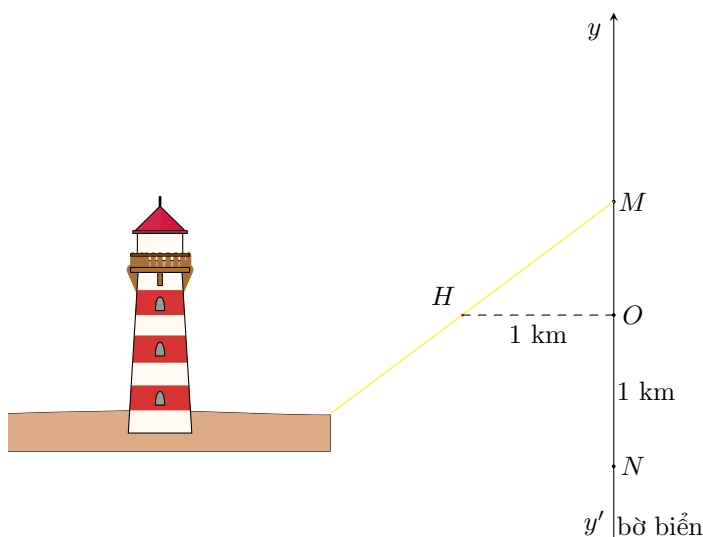
Vật đi qua vị trí cân bằng khi và chỉ khi

$$x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leq t \leq 6$ nên $0 \leq \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \leq 6 \Leftrightarrow -0,6 \leq k \leq 8,8$ mà $k \in \mathbb{Z}$. Do đó $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần. □

Bài 55. Ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ. (Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)



- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

 Lời giải.

- a) Khi đèn xoay $\alpha = \frac{\pi}{10}t(\text{rad}, \text{s})$.

$$y_M = OM = HO \cdot \tan \alpha = \tan \frac{\pi}{10} t.$$

- b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà. Khi đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà: $y_M = y_N = -1$ (km)

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{10} t = -1 = \tan \frac{-\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{10}t = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{10}t = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{-5}{2} + 10k, k \in \mathbb{N}^*.$$

Các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà $t = \frac{-5}{2} + 10k, k \in \mathbb{N}^*$

7

Bài 56. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

- a) Tính nhiệt độ lúc 12 giờ trưa.
- b) Tính thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

 Lời giải.

- a) Khi $t = 12$ thì $h(12) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (12 - 9) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{4} \approx 31,12$.

Vây nhiệt độ lúc 12 giờ trưa khoảng 31,12 độ C.

b) Ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \frac{\pi}{12} (t - 9) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -3 &\leq 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9) \leq 3 \\ \Leftrightarrow 26 &\leq 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9) \leq 32. \end{aligned}$$

Do đó nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26 độ C khi

$$\sin \frac{\pi}{12} (t - 9) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} (t - 9) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 3 + 24k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $0 \leq t \leq 24$ nên $k = 0$ suy ra $t = 3$.

Vậy lúc 3 giờ là thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

□

Bài 57. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} \cdot (t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq t \leq 365.$$

Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

Lời giải.

Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời nên

$$\begin{aligned} 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} \cdot (t - 80) \right] + 12 &= 12 \\ \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182} \cdot (t - 80) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{182} \cdot (t - 80) &= k\pi \Leftrightarrow t = 80 + 182k. \end{aligned}$$

Vì $0 \leq t \leq 365 \Leftrightarrow 0 \leq 80 + 182k \leq 365 \Leftrightarrow -0,43 \leq k \leq 1,57$ vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Khi đó $t = 80$ hoặc $t = 262$.

Vậy có hai ngày 80 và 262 thì thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời.

□

Bài 58. Giả sử một vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải.

Vật qua vị trí cân bằng khi $x = 0$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}. \end{aligned}$$

Mà $0 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \leq 6 \Leftrightarrow -0,67 \leq k \leq 8,88$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

□

Bài 59.

Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.

Lời giải.

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M , Xét phương trình $4,2 \cdot \cos \frac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{8} = \frac{5}{7}$.

Do $x \in [-4\pi; 4\pi]$ nên $\frac{x}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó, ta có $\cos \frac{x}{8} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{8} \approx \pm 0,775$, suy ra $\left|\frac{x}{8}\right| < 0,78 \Leftrightarrow |x| < 6,14$.

Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hóa là

$$2|x| < 12,48 < 12,5.$$

□

Bài 60. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lý, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 10$ m/s² là gia tốc trọng trường.

- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 25\,000 \sin 2\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tầm bay xa mà quả đạn đạt tới là $25\,000 \sin 2\alpha$ (m).

- Điều kiện $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m) thì

$$\begin{aligned} 25\,000 \sin 2\alpha = 22\,000 &\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{22}{25} \\ &\Rightarrow 2\alpha \approx 1,08 \Leftrightarrow \alpha \approx 0,54. \end{aligned}$$

Vậy góc bắn khoảng $0,54$ (rad) $\approx 30,82^\circ$ thì quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 65. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức $h(t) = 30 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 5)$. Với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ lúc 7 giờ sáng là bao nhiêu?

(A) 31,5 độ C.

(B) 32,5 độ C.

(C) 30 độ C.

(D) 37 độ C.

Lời giải.

Khi $t = 7$ thì $h(7) = 30 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (7 - 5) = 30 + 3 \sin \frac{\pi}{6} = 31,5$.

Vậy nhiệt độ lúc 7 giờ trưa là 31,5 độ C.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày là

(A) 13 giờ.

(B) 15 giờ.

(C) 12 giờ.

(D) 14 giờ.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \frac{\pi}{12} (t - 9) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -3 &\leq 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9) \leq 3 \\ \Leftrightarrow 26 &\leq 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9) \leq 32. \end{aligned}$$

Do đó nhiệt độ cao nhất trong ngày là 32 độ C khi

$$\sin \frac{\pi}{12} (t - 9) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} (t - 9) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 15 + 24k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $0 \leq t \leq 24$ nên $k = 0$ suy ra $t = 15$.

Vậy lúc 15 giờ là thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 4 \sin \left[\frac{\pi}{18} \cdot (t - 80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 \leq t \leq 365$. Số giờ nắng của ngày thứ 83 là

(A) 12.

(B) 11.

(C) 14.

(D) 8.

Lời giải.

Với $t = 83$ thì $d(83) = 4 \sin \left[\frac{\pi}{18} \cdot (83 - 80) \right] + 12 = 14$. Vậy ngày thứ 83 có 14 giờ nắng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 68. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t trong một năm không nhuận được cho bởi công thức

$$d(t) = 4 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 70) \right] + 16 \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít ánh sáng mặt trời nhất

(A) 353.

(B) 171.

(C) 161.

(D) 343.

Lời giải.

Ta có $12 = 16 - 4 \leq 4 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 70) \right] + 16 \leq 16 + 4 = 20$.

Do đó ngày có ít ánh nắng mặt trời nhất khi

$$\begin{aligned} dt = 12 &\Leftrightarrow 4 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 70) \right] + 16 = 12 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 70) \right] = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{182} (t - 70) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -21 + 364k \Rightarrow t = 343. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$.

(A) $t = 272$.

(B) $t = 182$.

(C) $t = 240$.

(D) $t = 210$.

Lời giải.

Mực nước cao nhất của kênh đạt được khi

$$\cos\left(\frac{\pi t_0}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t_0}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t_0 = 16k - 2, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $0 \leq t_0 \leq 24$ nên $k = 1$ và $t_0 = 14$. Vậy $P = 210$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Số giờ có ánh sáng của thành phố Hà Nội trong ngày thứ t của năm 2019 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin\left|\frac{\pi}{178}(t - 60)\right| + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

(A) 23 tháng 11.

(B) 24 tháng 11.

(C) 25 tháng 11.

(D) 22 tháng 11.

Lời giải.

Do $\sin x \geq -1$ nên số giờ thành phố Hà Nội có ít ánh sáng mặt trời nhất $\sin\left|\frac{\pi}{178}(t - 60)\right| \geq -1$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left|\frac{\pi}{178}(t - 60)\right| &= \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 60 \leq t \leq 365 \\ \frac{\pi}{178}(t - 60) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ 0 < t \leq 60 \\ \frac{\pi}{178}(60 - t) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 60 \leq t \leq 365 \\ t = 327 + k356 \\ 0 < t < 60 \\ t = -207 - k356 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t &= 327 \text{ (vì } k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy thành phố Hà Nội có ít giờ ánh sáng nhất trong năm là ngày thứ 327 của năm, tức là ngày 23 tháng 11 ($= 365 - 31 - 7$).

Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$.

(A) $t = 272$.

(B) $t = 182$.

(C) $t = 240$.

(D) $t = 210$.

Lời giải.

Mực nước cao nhất của kênh đạt được khi

$$\cos\left(\frac{\pi t_0}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t_0}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t_0 = 16k - 2, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $0 \leq t_0 \leq 24$ nên $k = 1$ và $t_0 = 14$. Vậy $P = 210$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Hằng ngày mực nước của con kênh lên, xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ), $0 \leq t \leq 24$ trong một ngày được tính bởi công thức $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 3$. Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất khi và chỉ khi

$$\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + k16.$$

Vì $0 \leq t \leq 24$ nên $0 \leq -2 + k16 \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{13}{6} \Rightarrow k = 1, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Giả sử một vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 2 \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong 3 giây đầu.

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 8.

Lời giải.

Vật qua vị trí cân bằng khi $x = 0$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} &= k\pi \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5}. \end{aligned}$$

Mà $0 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5} \leq 3 \Leftrightarrow -0,17 \leq k \leq 4,61$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy vật đi qua vị trí cân bằng 5 lần.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lý, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 10$ m/s² là gia tốc trọng trường. Góc bắn α để quả đạn bay xa nhất là

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 25\,000 \sin 2\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tầm bay xa mà quả đạn đạt tới là $25\,000 \sin 2\alpha$ m.

Vậy đạn bay xa nhất khi $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vì $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Vậy góc bắn bằng 45° thì đạn bay xa nhất. □

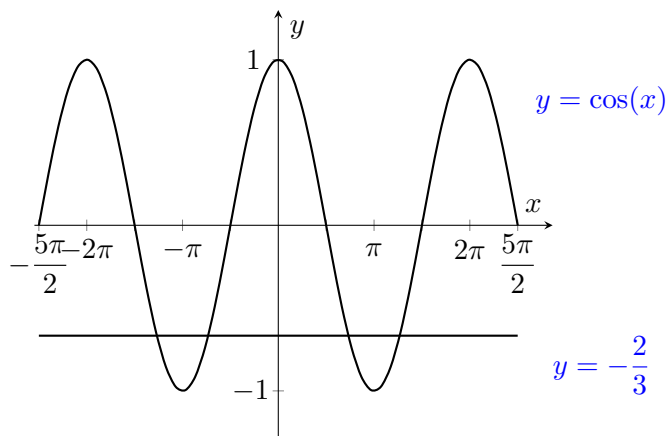
Bài số 5

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ rồi xác định số nghiệm của phương trình $3\cos x + 2 = 0$ trên đoạn đó.

Lời giải.



Ta có $3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{2}{3}$. Từ đồ thị ta có số nghiệm của phương trình $3\cos x + 2 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là 4. □

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

b) $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$

c) $\sin 3x - \cos 5x = 0;$

d) $\cos^2 x = \frac{1}{4};$

e) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0;$

f) $\sin x + \cos x = 0.$

Lời giải.

$$\text{a) } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c)

$$\begin{aligned} \sin 3x - \cos 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 3x &= \cos 5x \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) &= \cos 5x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = 5x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 3x = -5x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{16} - k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} &\quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

 Toán 11 theo chương trình GDPT2018

$$t = 4\pi - \frac{6}{\pi} + 12k.$$

$$\text{Do } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq 4\pi - \frac{6}{\pi} + 12k < 24 \Rightarrow -0,89 < k < 1,12 \Rightarrow k \in \{0; 1\}.$$

$$t = -4\pi - \frac{6}{\pi} + 12k.$$

$$\text{Do } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq -4\pi - \frac{6}{\pi} + 12k < 24 \Rightarrow 1,2 < k < 3,21 \Rightarrow k \in \{2; 3\}.$$

Vậy mực nước sâu 10,5 m ở thời gian $t = 4\pi - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 0 \approx 10$ giờ 39 phút,

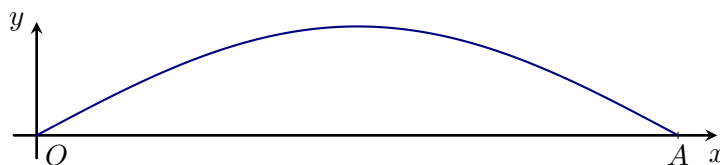
$$t = -\frac{6}{\pi} + 12 \cdot 1 \approx 22 \text{ giờ 39 phút, } t = -4\pi - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 2 \approx 9 \text{ giờ 31 phút,}$$

$$t = -4\pi - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 3 \approx 21 \text{ giờ 31 phút.}$$



Bài 4.

Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên.



- Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.
- Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 4,3 m.

Lời giải.

- Ta có hoành độ của A là giá trị thực dương nhỏ nhất của x để $4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} = 0$.

$$\text{Ta có } 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi \Leftrightarrow x = 9\pi.$$

Khi đó giá trị thực dương nhỏ nhất là $x = 9\pi$ nên $A(9\pi; 0)$.

Do đó độ dài đoạn thẳng $OA = 9\pi \approx 28,3$ nên chiều rộng là khoảng 28,3 m.

- Đầu tiên ta tìm khoảng cách từ vị trí chân cầu làm gốc tọa độ đến vị trí trên sông mà tại đó độ cao của cây cầu là 3,6 m.

Do đó ta cần tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 9\pi)$ của phương trình

$$4,8 \sin \frac{x}{9} = 3,6 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \arcsin \frac{3}{4} + k2\pi \\ \frac{x}{9} = \pi - \arcsin \frac{3}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \arcsin \frac{3}{4} + 18k\pi \\ x = 9\pi - 9 \arcsin \frac{3}{4} + 18k\pi. \end{cases}$$

Khi đó tập nghiệm thỏa mãn là $S = \left\{ 9 \arcsin \frac{3}{4}; 9\pi - 9 \arcsin \frac{3}{4} \right\}$.

Do đó độ rộng tối đa của sà lan khi đi qua cầu là

$$9\pi - 9 \arcsin \frac{3}{4} - 9 \arcsin \frac{3}{4} \approx 13,01 < 13,1 \text{ m.}$$

Vậy ta đã chứng minh được yêu cầu của đề bài.

- c) Đầu tiên, ta cũng tìm khoảng cách từ vị trí chân cầu làm gốc độ đến vị trí trên sông nơi mà xà lan gần chân cầu đó nhất.

Ta tính được $\frac{28,3}{2} - \frac{9}{2} = 9,65$ m.

Chiều cao tại vị trí đó là $h = 4,8 \sin \frac{9,65}{9} \approx 4,22 < 4,3$ m. Vậy ta đã chứng minh được chiều cao khối hàng hóa phải nhỏ hơn 4,3 m.



B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

1. Đề số 1

Câu 1. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

- (A) $(0; \pi)$. (B) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$. (C) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. (D) $(-\pi; 0)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ nên ứng với $k = 0$ ta có hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (C)



Câu 2. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$ là

- (A) $y = \sin x$. (B) $y = \cos x$. (C) $y = \tan x$. (D) $y = \cot x$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ nên ứng với $k = 1$ ta có hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.

Chọn đáp án (D)



Câu 3. Nếu $\tan(a + b) = 3$, $\tan(a - b) = -3$ thì $\tan 2a$ bằng

- (A) 0. (B) $\frac{3}{5}$. (C) 1. (D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(a + b) = 3 \Leftrightarrow \tan a + \tan b = 3 - 3 \tan a \tan b$ (1)

và $\tan(a - b) = -3 \Leftrightarrow \tan a - \tan b = -3 - 3 \tan a \tan b$. (2)

Lấy vế trừ vế của (1) và (2) ta được $2 \tan b = 6 \Leftrightarrow \tan b = 3$.

Thay $\tan b = 3$ vào (1) ta được $\tan a = 0$.

Khi đó $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = 0$.

Chọn đáp án (A)



Câu 4. Nếu $\cos a = \frac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng

- (A) $\frac{7}{8}$. (B) $-\frac{7}{8}$. (C) $\frac{15}{16}$. (D) $-\frac{15}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 5. Nếu $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ thì $\cos(a + b) \cos(a - b)$ bằng

- (A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Do $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ nên $\cos 2a = -\frac{7}{25}$ và $\cos 2b = \frac{7}{25}$.

Ta có $2 \cos(a + b) \cos(a - b) = \cos 2a + \cos 2b = -\frac{7}{25} + \frac{7}{25} = 0$.

Do đó $\cos(a + b) \cos(a - b) = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 6. Nếu $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ thì $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a + \sin a - \cos a = 2\sin a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do đó $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

- (A) 5. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Do $0 \leq x \leq 10\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{19}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 9 (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó phương trình $\cos x = 0$ có 10 nghiệm.

Chọn đáp án (C)

Câu 8. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

- (A) 10. (B) 6. (C) 5. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Do $0 \leq x \leq 10\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 10$.

Do đó phương trình $\sin x = 0$ có 11 nghiệm.

Chọn đáp án (D)

Câu 9. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

- (A) $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (B) $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. (C) $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. (D) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\cot x = -1 \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A)

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in [0; \pi]$ nên $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C)

2. Đề số 2

Câu 1. Đổi 225° sang radian.

- (A) $\frac{4\pi}{5}$. (B) $\frac{6\pi}{5}$. (C) $\frac{3\pi}{5}$. (D) $\frac{5\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $225^\circ = \frac{225}{180}\pi = \frac{5\pi}{4}$ (radian).

Chọn đáp án (D)

Câu 2. Một đường tròn có bán kính $R = 10$ cm. Độ dài cung 40° trên đường tròn gần bằng

- (A) 11 cm. (B) 13 cm. (C) 7 cm. (D) 9 cm.

Lời giải.

Ta có $40^\circ = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$ radian.

Độ dài cung $l = \frac{2\pi}{9} \cdot 10 = \frac{20\pi}{9} \approx 7$ cm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 6 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được bao nhiêu độ?

- (A) 60° . (B) 72° . (C) 240° . (D) 120° .

Lời giải.

Trong 6 giây, bánh xe quay được $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$.

Trong 1 giây, bánh xe quay được $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho góc α thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cos \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha > 0$. (C) $\tan \alpha > 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$ và $\cot \alpha < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos \alpha$ có giá trị là

- (A) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. (B) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $\cos \alpha = \frac{8}{9}$. (D) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Do đó $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- (A) $\sin(B + C) = \sin A$. (B) $\cos(B + C) = -\cos A$. (C) $\tan(B + C) = \tan A$. (D) $\cot(B + C) = -\cot A$.

Lời giải.

Ta có $B + C = 180^\circ - A$.

Suy ra $\tan(B + C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tính giá trị biểu thức $P = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$.

- (A) $P = -1$. (B) $P = 0$. (C) $P = 1$. (D) $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \frac{7\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$ và $\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \cos^2 \frac{3\pi}{8} \Rightarrow P = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)$.

Vì $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

Do đó $P = 2 \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right) = 2 \cdot 1 = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho $\sin a + \cos a = -\frac{5}{4}$, khi đó giá trị của $\sin a \cos a$ bằng

- (A) 1. (B) $\frac{5}{4}$. (C) $\frac{3}{16}$. (D) $\frac{9}{32}$.

Lời giải.

$$\sin a \cos a = \frac{(\sin a + \cos a)^2 - 1}{2} = \frac{9}{32}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 9. Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(A) 2.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) 6.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 10. Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?

(A) β và γ .

(B) α , β , γ .

(C) β , γ , δ .

(D) α và β .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \beta + 8\pi = \frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{25\pi}{3} = \gamma.$$

Do đó, β và γ có điểm biểu diễn trùng nhau trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A)

Câu 11. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

(A) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

(B) $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha$.

(C) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.

(D) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ nên $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (B)

Câu 12. Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

(A) $\frac{16\pi}{5}$.

(B) $\left(\frac{16}{5}\right)^\circ$.

(C) 1152° .

(D) 1152π .

Lời giải.

Chuyển động quay ngược chiều kim đồng hồ là quay theo chiều dương; góc tương ứng là

$$3\frac{1}{5} \cdot 2\pi = \frac{32\pi}{5}, \text{ tương ứng với } 1152^\circ.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

(B) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

(C) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

(D) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải.

Ta có $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ nên $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (A)

Câu 14. Trong trường hợp nào dưới đây $\cos \alpha = \cos \beta$ và $\sin \alpha = -\sin \beta$?

(A) $\beta = -\alpha$.

(B) $\beta = \pi - \alpha$.

(C) $\beta = \pi + \alpha$.

(D) $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Lời giải.

Trong trường hợp hai cung đối nhau thì các giá trị $\cos$ của chúng bằng nhau, các giá trị $\sin$ của chúng đối nhau.

Chọn đáp án (A)

Câu 15. Nếu $\cos a = \frac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng

(A) $\frac{7}{8}$.

(B) $-\frac{7}{8}$.

(C) $\frac{15}{16}$.

(D) $-\frac{15}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 16. Nếu $\tan(a+b) = 3$, $\tan(a-b) = -3$ thì $\tan 2a$ bằng

(A) 0.

(B) $\frac{3}{5}$.

(C) 1.

(D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(a+b) = 3 \Leftrightarrow \tan a + \tan b = 3 - 3 \tan a \tan b$ (1)

và $\tan(a-b) = -3 \Leftrightarrow \tan a - \tan b = -3 - 3 \tan a \tan b$. (2)

Lấy vế trừ vế của (1) và (2) ta được $2 \tan b = 6 \Leftrightarrow \tan b = 3$.

Thay $\tan b = 3$ vào (1) ta được $\tan a = 0$.

Khi đó $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 17. Nếu $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ thì $\cos(a+b) \cos(a-b)$ bằng

(A) 0.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 5.

Lời giải.

Do $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ nên $\cos 2a = -\frac{7}{25}$ và $\cos 2b = \frac{7}{25}$.

Ta có $2 \cos(a+b) \cos(a-b) = \cos 2a + \cos 2b = -\frac{7}{25} + \frac{7}{25} = 0$.

Do đó $\cos(a+b) \cos(a-b) = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 18. Rút gọn biểu thức $M = \cos(a+b) \cos(a-b) - \sin(a+b) \sin(a-b)$, ta được

(A) $M = \sin 4a$.

(B) $M = 1 - 2 \cos^2 a$.

(C) $M = 1 - 2 \sin^2 a$.

(D) $M = \cos 4a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \cos(a+b) \cos(a-b) - \sin(a+b) \sin(a-b) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) + \frac{1}{2} (\cos 2a - \cos 2b) \\ &= \cos 2a \\ &= 1 - 2 \sin^2 a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 19. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{3}{8}$.

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 20. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x)$.

(B) $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 8x - \cos 2x)$.

(C) $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x)$.

(D) $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 2x)$.

Lời giải.

Ta có $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} [\cos(3x+5x) + \cos(3x-5x)] = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 21. Giả sử $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ thì $\sin^4 x + 3 \cos^4 x$ có giá trị bằng

(A) 2.
Lời giải.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

$$\begin{aligned} 3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 6 \sin^4 x - 2 \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow 6 \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 \alpha)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \sin^4 x - 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 \sin^2 \alpha + 3)(2 \sin^2 \alpha - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ta có $\sin^4 x + 3 \cos^4 x = \sin^4 \alpha + 3(1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{4} + 3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

(A) $(0; \pi)$.

(B) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

(C) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

(D) $(-\pi; 0)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ nên ứng với $k = 0$, ta có hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$ là

(A) $y = \sin x$.

(B) $y = \cos x$.

(C) $y = \tan x$.

(D) $y = \cot x$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ nên ứng với $k = 1$, ta có hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

(C) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

(D) Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?

(A) $y = \tan x + x$.

(B) $y = x^2 + 1$.

(C) $y = \cot x$.

(D) $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 27. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

(B) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

(C) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

(D) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn; các hàm số còn lại là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (B)

Câu 28. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

(C) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

(B) Hàm số $y = \tan 2x - \sin x$ là hàm số lẻ.

(D) Hàm số $y = \tan x \cdot \sin x$ là hàm số lẻ.

☞ **Lời giải.**

Xét hàm số $y = f(x) = \tan 2x - \sin x$.

Hàm số xác định khi $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = \tan(-2x) - \sin(-x) = -\tan 2x + \sin x = -f(x)$.

Do đó hàm số $y = \tan 2x - \sin x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (B)

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

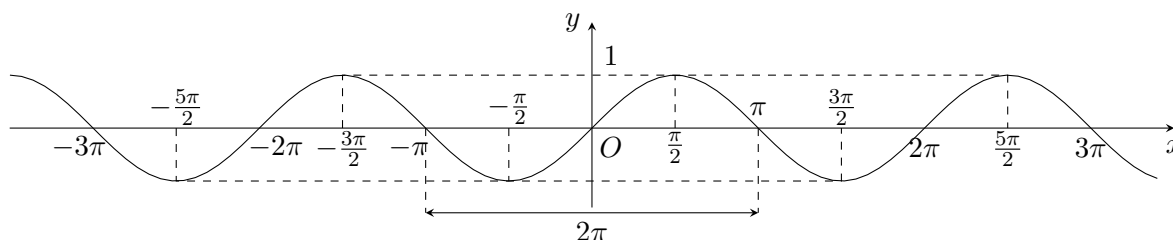
☞ **Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ sau



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số $y = \sin x$ tăng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

(B) Hàm số $y = \sin x$ giảm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

(C) Hàm số $y = \sin x$ giảm trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$.

(D) Hàm số $y = \sin x$ tăng trên khoảng $(0; \pi)$.

☞ **Lời giải.**

☑ Hàm số $y = \sin x$ tăng trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và giảm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

☑ Vậy trên khoảng $(0; \pi)$, hàm số $y = \sin x$ vừa tăng vừa giảm nên khẳng định hàm số $y = \sin x$ tăng trên khoảng $(0; \pi)$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (D)

Câu 31. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

(B) Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì π .

(C) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

(D) Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

☞ **Lời giải.**

Ta xét $y = \sin x$ suy ra $y' = \cos x$. Dễ thấy $\cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 32. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

(A) 5.

(B) 6.

(C) 4.

(D) 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $\sin x = \cos x$.

Nếu $\cos x = 0$ thì $\sin x = 0$ nên vô lý.

Do đó, $\cos x \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\sin x = \cos x &\Leftrightarrow \tan x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}-2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{2} &\Leftrightarrow -2\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow -2 \leq \frac{1}{4} + k \leq \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{-9}{4} \leq k \leq \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại 5 điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos 3x + 1$.

(A) $[-3; 1]$.(B) $[-3; -1]$.(C) $[-1; 3]$.(D) $[1; 3]$.

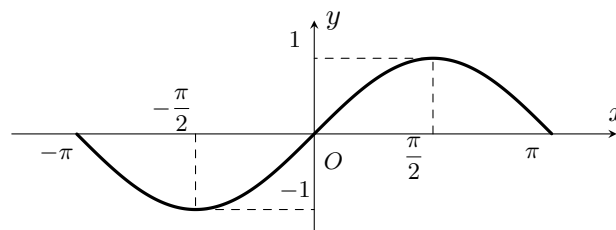
Lời giải.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}-1 &\leq \cos 3x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq 2 \cos 3x \leq 2 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq 2 \cos 3x + 1 \leq 3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Đường cong trong hình bên là đồ thị trên đoạn $[-\pi; \pi]$ của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \sin x$.(B) $y = \cos x$.(C) $y = \tan x$.(D) $y = \cot x$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 0)$, $(\pi; 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ và nhận O làm tâm đối xứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

(A) $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.(B) $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.(C) $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.(D) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\cot x = -1 \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào **sai**?

(A) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$

(D) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, nên đáp án $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ là

(A) $x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Ta có $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Họ nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Phương trình $\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x$ có các họ nghiệm là

(A) $x = \frac{k2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = \frac{k\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = \frac{k\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = \frac{k2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2x \cos x &= \sin 7x \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 11x + \sin 3x) \\ &\Leftrightarrow \sin 11x = \sin x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

(A) 5.

(B) 9.

(C) 10.

(D) 11.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Do $0 \leq x \leq 10\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{19}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 9 (k \in \mathbb{Z}).$

Do đó phương trình $\cos x = 0$ có 10 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

(A) 10.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 11.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Do $0 \leq x \leq 10\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 10.$

Do đó phương trình $\sin x = 0$ có 11 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in [0; \pi]$ nên $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Phương trình $\sin 2x + 3 \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin 2x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Do } x \in (0; \pi) \text{ nên có một nghiệm là } x = \frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

- (A) 40° . (B) 50° . (C) 60° . (D) 30° .

Lời giải.

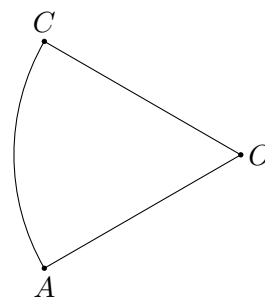
1 bánh răng tương ứng với $\frac{360^\circ}{72} = 5^\circ \Rightarrow 10$ bánh răng là 50° .

Chọn đáp án (B) □

Câu 45.

Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt có bán kính là a , độ dài cung tròn là b và có chu vi là 80 cm (như hình vẽ). Khi diện tích cánh điều đạt giá trị lớn nhất, tổng $a + b$ bằng

- (A) 50 cm. (B) 40 cm. (C) 70 cm. (D) 60 cm.



Lời giải.

Gọi φ (rad) là số đo cung của hình quạt. Khi đó $\varphi = \frac{b}{a}$.

Chu vi cánh điều bằng $b + 2a = 80$.

$$\text{Diện tích cánh điều bằng } S = \frac{\varphi a^2}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{1}{4}(b \cdot 2a) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b+2a}{2}\right)^2 = 400.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} b = 2a \\ b + 2a = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 40 \\ a = 20. \end{cases}$$

Do vậy $a + b = 60$ cm.

Chọn đáp án (D) □

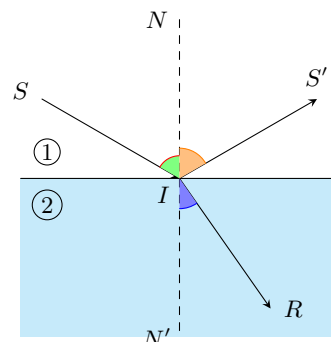
Câu 46.

Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như hình bên. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng với chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$ và chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33. Khi đó góc khúc xạ gần với kết quả nào sau đây.

- (A) $35,17^\circ$. (B) $55,47^\circ$. (C) $31,42^\circ$. (D) $12,35^\circ$.



Lời giải.

Ta có $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \frac{\sin 50^\circ}{\sin r} = \frac{1,33}{1} \Leftrightarrow \sin r = \frac{\sin 50^\circ}{1,33} \Rightarrow r \approx 35,17^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Giả sử a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện với ba góc A, B, C của tam giác ABC thỏa điều kiện $2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$. Tính góc A của tam giác ABC .

(A) 30° .(B) 45° .(C) 60° .(D) 90° .**Lời giải.**

Đặt $2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$ (*). Ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \sin \frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \sin \frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \left(\text{vì } \sin \frac{A}{2} > 0, \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Phương trình $2\sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 1$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.(B) $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.(C) $x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, x = \frac{5\pi}{16} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.(D) $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} &2\sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 + \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$ là

(A) $\frac{\pi}{6}$.(B) $\frac{\pi}{3}$.(C) $2\frac{\pi}{3}$.(D) $\frac{\pi}{4}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 & \sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x \\
 \Leftrightarrow & \sin x + 2 \sin x \cos x = \cos x (2 \cos x + 1) \\
 \Leftrightarrow & \sin x (2 \cos x + 1) = \cos x (2 \cos x + 1) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \cos x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Khi đó nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án **(D)**

