

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Nếu hệ có một trong hai phương trình ta đưa về dạng : $f(x)=f(y)$ với x,y thuộc T thì khi đó ta khảo sát một hàm số đặc trưng : $y=f(t)$ trên T . Nếu $f(t)$ là đơn điệu thì để $f(x)=f(y)$ chỉ xảy ra khi $x=y$. Trong phương pháp này khó nhất là các em phải xác định được tập giá trị của x và y , nếu tập giá trị của chúng khác nhau thì các em không được dùng phương pháp trên mà phải chuyển chúng về dạng tích : $f(x)-f(y)=0$ hay : $(x-y).A(x;y)=0$

Khi đó ta xét trường hợp : $x=y$, và trường hợp $A(x,y)=0$.

Sau đây là một số bài mà các em tham khảo .

Bài 1 Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

- Phương trình (1) khi $x=0$ và $y=0$ không là nghiệm (do không thỏa mãn (2)).

- Chia 2 về phương trình (1) cho $x^3 \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3$

- Xét hàm số : $f(t) = 2t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 2 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số $f(t)$ đồng biến . Để phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi : $\frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$. -thay vào (2) :

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x^2+1+2x) \Leftrightarrow t^2 - (x+2)t + 2x = 0 \Rightarrow t = 2; t = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

Do đó hệ có hai nghiệm : $(x;y) = (-\sqrt{3};3), (\sqrt{3};3)$

Bài 2. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - y\sqrt{x-2y} - 6y^2 = 0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-2y} + 2y)(\sqrt{x-2y} - 3y) = 0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $\sqrt{x-2y} = -2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x - 2y = 4y^2 \end{cases}$

Thay vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2y} = 4y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow -2y = 4y^2 + 5y - 2 \Rightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$

- Trường hợp : $\sqrt{x-2y} = 3y \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x - 2y = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = 9y^2 + 2y \end{cases} (*)$

Thay vào (2) : $\Leftrightarrow \sqrt{9y^2 + 2y + 3y} = 9y^2 + 2y + 3y - 2 \Leftrightarrow \sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{9y^2 + 5y} \geq 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \sqrt{9y^2 + 5y} = 2 \end{cases} \Rightarrow 9y^2 + 5y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow x = 9 - 2 = 7 \\ y = \frac{4}{9} \rightarrow 9 \frac{16^2}{91} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{264}{9} = \frac{88}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm : $(x; y) = (7; -1), \left(\frac{88}{3}; \frac{4}{9}\right)$

Bài 3 Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Giải

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1(1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y(2) \end{cases}$. Từ (2) viết lại : $\sqrt{x+y} + x + y = x^2 + x \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^2 + \sqrt{x+y} = x^2 + x$

Ta xét hàm số $f(t) = t^2 + t (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0 \forall t \geq 0$. Chứng tỏ $f(t)$ là một hàm số đồng biến, cho nên ta có : $\sqrt{x+y} = x \Leftrightarrow y = x^2 - x$. (*)

Thay vào (1) : $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - x)^2 + \frac{2x(x^2 - x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 + x^2(x-1)^2 + 2(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1+x^2(x-1)+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^3 - x^2 + x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ (x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} (**)$

Thay vào (*) : $\Leftrightarrow y = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; y=2 \\ x=1; y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 2), (1; 0)$

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Từ . $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) (1) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} (2) \end{cases}$. - Điều kiện : $x, y \geq 0$ - Từ (1) : $\Leftrightarrow 2.2^{(\sqrt{x})^4} + 3\sqrt{x} = 2.2^{(2\sqrt{y})^4} + 3(2\sqrt{y})$

- Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + 3t (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 3 > 0$. Chứng tỏ $f(t)$ luôn đồng biến.

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y$ (*)

- Thay vào (2) : $2^{(\sqrt{5y})^4} + \frac{3}{2}(\sqrt{5y}) = \frac{7}{2}$. Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + \frac{3}{2}t \Rightarrow f'(t) = 4t^3.2^4 + \frac{3}{2} > 0$.

- Nhận xét : $f(1) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất. $\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ \sqrt{5y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$

Bài 5. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$$

Từ . $\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2}) = (-y + \sqrt{1+(-y)^2}) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$. (nhân liên hợp)

Xét hàm số : $f(t) = t + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2}} > \frac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$

Chứng tỏ hàm số đồng biến . Để $f(x)=f(-y)$ chỉ xảy ra $x=-y$ (*)

- Thay vào phương trình (2) :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1} = -4x^2+6x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1} - \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{25}{4}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \end{cases}$$

$$* \text{ Trường hợp : } \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+6x+1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2-6x-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=1; y=-1$$

$$* \text{ Trường hợp : } \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2+6x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2-6x-1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{3-\sqrt{11}}{2}; y = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}. \text{ Vậy hệ có hai nghiệm : } (x;y)=(1;-1), \left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \right)$$

Bài 6 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

Giải

Từ :
$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \quad (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (2) \end{cases} \quad (\text{KA-2011})$$

- PT(1): $4x^3 + x = -(y-3)\sqrt{5-2y}$ (3). Đặt $t = \sqrt{5-2y} \Rightarrow y = \frac{5-t^2}{2} \Leftrightarrow -\left(\frac{5-t^2}{2} - 3\right)t = \frac{t^3+t}{2}$

- Khi đó (2) : $4x^3 + x = \frac{t^3+t}{2} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = t^3 + t$

- Xét hàm số : $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1 > 0 \forall u$ suy ra $f(u)$ luôn đồng biến . Do đó để $f(x)=f(t)$ chỉ xảy ra khi : $2x=t \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow 4x^2 = 5-2y \Leftrightarrow 2y = 5-4x^2$ (4)

- Thay vào (2) : $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0 \quad : x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$. Ta thấy $x=0$ và $x=\frac{3}{4}$ không là

ng nghiệm . $g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0 \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$

- Mặt khác : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất , thay vào (4) tìm được $y=2$.

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x;y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$

Giải :

Từ :
$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \quad (1) \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \quad (2) \end{cases}$$

- Điều kiện : $y \geq 2; x \geq -\frac{1}{2}$ (*)

- Đặt : Từ (2) : $4x + 2y + 6 = 36 \Leftrightarrow 2x + y = 15 \Rightarrow 2x + 1 = 16 - y$
- Từ (1):Đặt : $\sqrt{y-2} = t \Rightarrow y = t^2 + 2 \Leftrightarrow 2y - 3 = 2(t^2 + 2) - 3 = 2t^2 + 1$
- Cho nên về phải (1) : $\Leftrightarrow (2t^2 + 1)t = 2t^3 + t \Leftrightarrow (1): 2(x+1)^3 + (2x+1) = 2t^3 + t$
- Xét hàm số : $f(u) = 2u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 2u^2 + 1 > 0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến . Để $f(x)=f(t)$ chỉ xảy ra khi : $x=t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{y-2} \\ 2x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{y-2} \\ 15 - y = \sqrt{y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 15 \\ y^2 - 31y + 227 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{31 - \sqrt{53}}{2} \\ y = \frac{31 + \sqrt{53}}{2} > 15 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{53} - 1}{4}; \frac{31 - \sqrt{53}}{2} \right)$

Bài 8 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1)(1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0(2) \end{cases}$$

Từ :
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1)(1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0(2) \end{cases}$$

- Điều kiện : $y^2 + 2x > 0(*)$
- Phương trình (1) : $\Leftrightarrow 2(x^3 + 2x) = 2(y + 1) + x^2(y + 1) \Leftrightarrow 2x(x^2 + 2) = (y + 1)(x^2 + 2)$
- Do : $x^2 + 2 > 0 \Rightarrow 2x = y + 1(**)$
- Thay vào (2) : $y^3 + 2(y + 1) + 1 + \ln(y^2 + y + 1) = 0 \Leftrightarrow f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$
- Ta có : $f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y + 1}{y^2 + y + 1} > 0$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến .
- Mặt khác : $f(-1) = 0$, do đó phương trình có nghiệm duy nhất : $(x; y) = (0; -1)$

Bài 9 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (8x - 3)\sqrt{2x - 1} - y - 4y^3 = 0 \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Giải

Từ :
$$\begin{cases} (8x - 3)\sqrt{2x - 1} - y - 4y^3 = 0 \quad (1) \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0(2) \end{cases}$$

- Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$.
- Từ (1) : $(8x - 3)\sqrt{2x - 1} = y + 4y^3(*)$
- Đặt : $t = \sqrt{2x - 1} \Rightarrow 2x = t^2 + 1 \Leftrightarrow (8x - 3)\sqrt{2x - 1} = [4(t^2 + 1) - 3]t = (4t^2 + 1)t = 4t^3 + t$
- Do đó (*) : $4t^3 + t = 4y^3 + y$
- Xét hàm số : $f(u) = 4u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 12u^2 + 1 > 0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến . Do đó phương trình có nghiệm khi : $f(t) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = y \Leftrightarrow 2x = y^2 + 1(**)$
- Thay vào (2) : $(y^2 + 1)^2 - 4(y^2 + 1) + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 0$
- $\Leftrightarrow y(y^3 + 2y^2 - y - 2) = 0 \Leftrightarrow y(y - 1)(y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y(y - 1)(y + 2)(y + 1) = 0$

- Vậy : $\begin{cases} y=0 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow (x;y)=\left(\frac{1}{2};0\right), \begin{cases} y=0 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow (x;y)=(1;1)$

$\begin{cases} y=-1 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow (x;y)=(1;0), \begin{cases} y=-2 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow (x;y)=\left(\frac{5}{2};-2\right)$

Bài 10. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \frac{3}{2} \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 \end{cases}$$

Giải :

Từ :
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \frac{3}{2} & (1) \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

- Từ (2) : $(x^2y + 2x)^2 - 2(x^2y + 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow [(x^2y + 2x) - 1]^2 = 0 \Rightarrow x^2y + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2y = 1 - 2x$

- Hay : $\begin{cases} y = \frac{1-2x}{x^2} (*) \\ xy = \frac{1-2x}{x} \end{cases}$, thay vào (1) : $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x}} = -\left(\frac{1-2x}{x}\right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ (3)

- Nhận xét : $\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{x^2-2x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$.

Gọi : $a = \frac{1-x^2}{x^2}, b = \frac{1-2x}{x^2} \Rightarrow b - a = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$

- Cho nên (3) $\Leftrightarrow 2^a - 2^b = 2(b - a) \Leftrightarrow 2^a + 2a = 2^b + 2b$.

- Xét hàm số : $f(t) = 2^t + 2t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến, vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : $a=b$, tức $b-a=0$, hay : $\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Thay vào (*) ta tìm được

$y = -\frac{3}{4} \Rightarrow (x;y) = \left(2; -\frac{3}{4}\right)$

Bài 11 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \end{cases}$$

Giải

Đ/K : $x \leq 2; y \geq \frac{1}{2}$.

Từ (2) $[1+(2-x)]\sqrt{2-x} = [1+(2y-1)]2y\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow (\sqrt{2-x})^3 + \sqrt{2-x} = (\sqrt{2y-1})^3 + \sqrt{2y-1}$

Ta xét hàm số : $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó để $f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1})$, chỉ xảy ra khi : $\sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3-x \\ x = 3-2y \end{cases}$

Thay vào (1) $\Leftrightarrow x^3 - (3-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1; y = 3-1 = 2$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (1;2)$

Bài 12. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} \end{cases}$$

Giải

Đ/K : $x - y \geq 0; y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y \geq 0$

Từ (2) : $\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} - y^2 = -y^2 + 2xy - x^2 + \sqrt{(x-y)^2+1} + \sqrt{y} \Leftrightarrow$
 $\sqrt{y^2+1} - \sqrt{y} - y^2 = +\sqrt{(x-y)^2+1} - \sqrt{x-y} - (x-y)^2$

Xét hàm số : $f(t) = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{t} - t^2 \quad (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = t \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2 \right) - \frac{1}{2\sqrt{t}} < 0$

(Vì : $\sqrt{t^2+1} \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2 < 0$ với mọi $t > 0$)

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y = x - y$ hay $x = 2y$.

Thay vào (1) : $(2y)^2 y - 2(2y)^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^3 - 10y^2 + 5y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(4y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ vì : $4y^2 - 2y + 1 = 0$ vô nghiệm .

Vậy hệ có nghiệm : $(x;y) = (4;2)$

Bài 13. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} = 6-y \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $y \geq -2; x \geq -6$

Từ (2) : $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{(x-2)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+2}{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{(x-2)^2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{(x-2)^2}$. Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t}} \quad (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} \right)' = -\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}} < 0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến

Để $f(x-2) = f(y+1)$ chỉ xảy ra khi : $y+1 = (x-2)^2$. Thay vào (1) ta được phương trình :

(1) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2(x-2)\sqrt{x+6} - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x-2 \geq 0 \\ t^2 + 2t\sqrt{t+8} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x-2 \geq 0 \\ 2t\sqrt{t+8} = 7-t^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x-2 \leq \sqrt{7} \\ 4t^2(t+8) = (7-t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x-2 \leq \sqrt{7} \\ t^4 - 4t^3 - 46t^2 + 49 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x-2 \leq \sqrt{7} \\ (t-1)(t^3 - 3t^2 - 49t - 49) = 0 \end{cases}$

+/ Trường hợp : $t=1$ hay $x-2=1$ suy ra $x=3$ và $y+1=1$ hay $y=0$. Vậy nghiệm hệ là $(x;y) = (3;0)$

+/ Trường hợp : $f(t) = t^3 - 3t^2 - 49t - 49 = 0 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t - 49 = 3(t-1)^2 - 52 < 0 \forall t \in [0; \sqrt{7}]$

Hàm số nghịch biến và $f(0) = -49 < 0$ chứng tỏ $f(t) < 0$ với mọi $t \in [0; \sqrt{7}]$. Phương trình vô nghiệm .

Bài 14. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2y(4y^2 + 3x^2) = x^4(x^2 + 3) \\ 2012^x (\sqrt{2y-2x+5} - x + 1) = 4024 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $2y - 2x + 5 \geq 0$

+ / Nếu $x=0$ suy ra $y=0$ nhưng lại không thỏa mãn (2) vậy x khác 0 . Từ (1) (chia hai vế cho $x^2 \neq 0$)
 Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2y(4y^2 + 3x^2)}{x^3} = \frac{x^4(x^2 + 3)}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x}\right) \left[\left(\frac{2y}{x}\right)^2 + 3\right] = x^3 + 3x \Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{2y}{x}\right) = x^3 + 3x$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi t thuộc $\mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số đồng biến

Để $f\left(\frac{2y}{x}\right) = f(x)$, chỉ xảy ra khi : $\frac{2y}{x} = x \Leftrightarrow 2y = x^2$. Thay vào (2) ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 2012^x \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x + 1 \right) = 4024 \Leftrightarrow 2012 \cdot 2012^{x-1} \left(\sqrt{(x-1)^2 + 4} - (x-1) \right) = 4024$$

$$\text{Lại đặt } t=x-1 \text{ suy ra : } \Leftrightarrow 2012 \cdot 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t \right) = 4024 \Leftrightarrow g(t) = 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t \right) = 2$$

$$\text{Lại xét hàm số : } g(t) = 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t \right) \Rightarrow g'(t) = 2012^t \ln 2012 \left(\sqrt{t^2 + 4} - t \right) + 2012^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} - 1 \right)$$

$$\text{Hay : } g'(t) = 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t \right) \left[\ln 2012 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} \right]$$

Vì : $\sqrt{t^2 + 4} - t > 0$ và $\frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} < 1 < \ln 2012$ suy ra $g'(t) > 0$ với mọi t thuộc $\mathbb{R}$ mà $g(0)=2$ cho nên với $t=0$ là

$$\text{nghiệm duy nhất và : } t = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x; y) = \left(1; \frac{1}{2} \right)$$

Bài 15. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + 6 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } -2 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 4. \text{ Khi đó hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2) \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^3 - 12t \quad t \in [-2; 2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0 \forall t \in [-2; 2]$$

Chứng tỏ hàm số nghịch biến . Cho nên để $f(x)=f(y-2)$ chỉ xảy ra khi : $x=y-2$, thay vào (2) ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4(x+2)-(x+2)^2} + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4-x^2} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 6 = 3\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ 4(4-t^2) + 6 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ 4t^2 + 3t - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ t = \frac{-3-19}{8} = -\frac{11}{4} < 0; t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Leftrightarrow (x; y) = (0; 2). \text{ Vậy hệ có nghiệm : } (x; y) = (0; 2)$$

Bài 16. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} + x + y = 5 \\ \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} - x - y = 2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} + x + y = 5(1) \\ \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} - x - y = 2(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + x + \sqrt{y^2 + 3} + y = 5(1) \\ \sqrt{x^2 + 2} - x + \sqrt{y^2 + 3} - y = 2(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x} + \frac{3}{\sqrt{y^2+3}-y} = 5(1) \\ \sqrt{x^2+2}-x + \sqrt{y^2+3}-y = 2(2) \end{cases} \text{ . Do : } \begin{cases} (\sqrt{x^2+2}+x)(\sqrt{x^2+2}-x) = 2 \\ (\sqrt{y^2+3}+y)(\sqrt{y^2+3}-y) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

- Suy ra : $\sqrt{x^2+2}-x = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$; $\sqrt{y^2+3}-y = \frac{3}{\sqrt{y^2+3}+y}$. Cho nên (1) chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}-x=1 \\ \sqrt{y^2+3}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2}=x+1 \\ \sqrt{y^2+3}=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2=x^2+2x+1 \\ y^2+3=y^2+2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x;y)=(\frac{1}{2};1)$.

Bài 17 . Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} x^2y^2-8x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+10+y^3=0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ : } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2-8x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+10+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{8x}{x^2+1} \leq \frac{8x}{2x} = 4 \\ y^3+8=-2(x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ y \leq -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

Bài 18. Giải hệ :
$$\begin{cases} x^3-3x = \sqrt{(y-1)^3} - \sqrt{9(y-1)} & (1) \\ 1+\sqrt{x-1} = \sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$$

Giải

- Từ điều kiện và từ phương trình (2) có $x \geq 1$; $\sqrt{y-1} \geq 1$
- (1) $\Leftrightarrow x^3-3x = (\sqrt{y-1})^3 - 3\sqrt{y-1}$, xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[1; +\infty)$
- Hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$, ta có $f(x) = f(\sqrt{y-1}) \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$
- Với $x = \sqrt{y-1}$ thay vào (2) giải được $x=1$; $x=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Bài 19 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (4x^2+1)2x + (2y-6)\sqrt{5-2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2x)^2+1](2x) = \left[(\sqrt{5-2y})^2+1 \right] \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3+2x = (\sqrt{5-2y})^3 + \sqrt{5-2y}$$

$$\Leftrightarrow (2x) = f(\sqrt{5-2y}) \text{ với } f(t) = t^3 + t. f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow (t) \text{ ĐB trên } \mathbb{R}. \text{ Vậy}$$

$$f(2x) = f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow y = \frac{5-4x^2}{2}, x \geq 0$$

$$\text{Thế vào pt (2) ta được } 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Với $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7, x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$. CM hàm $g(x)$ nghịch biến.

Ta có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

Bài 20. (Thử ĐT 2012) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Giải

TH1 : Xét $y = 0$ thay vào hệ thấy không thỏa mãn.

TH2 : Xét $y \neq 0$, chia 2 vế của (1) cho y^5 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t \Rightarrow f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến.

Từ (3) $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2$

Thay vào (2) ta có PT $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Rightarrow x = 1$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Bài 21. (Thi thử ĐT 2013) Giải hệ :
$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

(2) $\Leftrightarrow x^2 + (y-7)x + y^2 - 6y + 14 = 0$. $\exists x \Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$

(2) $\Leftrightarrow y^2 + (x-6)y + x^2 - 7x + 14 = 0$. $\exists y \Leftrightarrow \Delta_y \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 4t - 3, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4} < 1$

Vì vậy trên $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ hàm số $f(t)$ đồng biến

TH 1. $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 6$ Kết hợp với $y \geq 1$

$\Rightarrow f(y) \geq f(1) = 3 \Rightarrow f(x).f(y) = (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) > 18$.

TH 2. $x = 2$ hệ trở thành $\begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 22. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$. Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó lấy (1) trừ cho nó ta có hệ :

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x - 1 + 2)\sqrt{2x - 1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 3 = (\sqrt{2x - 1})^3 + 2\sqrt{2x - 1} - 4y \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + (2 + 2y) = (\sqrt{2x - 1})^3 + 2\sqrt{2x - 1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 1)^3 + 2(y + 1) = (\sqrt{2x - 1})^3 + 2\sqrt{2x - 1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases}$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đề $f(y + 1) = f(\sqrt{2x - 1})$ chỉ xảy ra khi : $y + 1 = \sqrt{2x - 1}$.. Thay vào (2) ta có :

$$2x^2 - 11x + 9 + 2 = 2y + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 11 = 2(y + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 11 = 2\sqrt{2x - 1} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x - 1} \Rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{2} > 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2\left(\frac{t^2 + 1}{2}\right)^2 - 11\left(\frac{t^2 + 1}{2}\right) + 11 = 2t$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 + 1 - 11t^2 - 11 + 22 = 4t \Leftrightarrow t^4 - 9t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 3)(t^2 + 4t + 4) = 0$$

$$\text{Suy ra : Với } \begin{cases} t = 1 \\ y + 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 0)$$

$$\text{Với } \begin{cases} t = 3 \\ y + 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 1} = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 9 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (5; 2)$$

Vậy hệ có hai nghiệm : $(x; y) = (1; 0), (5; 2)$ (vì $t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2 > 0 \forall t \geq 0$)

$$\text{Bài 23. Giải hệ phương trình sau : } \begin{cases} x(x + y) + y^2 = 4x - 1 \\ x(x + y)^2 - 2y^2 = 7x + 2 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ : } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 1 = 4x \\ x(x + y)^2 - 2y^2 = 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{y^2 + 1}{x} = 4 \\ (x + y)^2 - 2\frac{y^2 + 1}{x} = 7 \end{cases} \text{ . Đặt : } \begin{cases} u = \frac{y^2 + 1}{x} \\ v = x + y \end{cases} \text{ , thì hệ trở thành :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 - 2(4 - v) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1; v = 3 \\ u = 9; v = -5 \end{cases}$$

$$* \text{ Với : } \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2 + 1}{x} = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 1 = x \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ x = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (2; 1), (5; -2) * \text{ Với : } \begin{cases} u = 9 \\ v = -5 \end{cases} \text{ . Hệ vô}$$

nghiệm

$$\text{Câu 8 : (1 điểm) Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 + y^3 = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \ln(\sqrt{y^2 + 1} - y) \\ x(x + 1) = (2 - y) \cdot \sqrt{y^2 + 2y + 3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Câu 8: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 + y^3 = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \ln(\sqrt{y^2 + 1} - y) \quad (1) \\ x(x + 1) = (2 - y) \cdot \sqrt{y^2 + 2y + 3} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -y^3 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1} + y}\right) \quad \text{Xét } f(t) = t^3 - \ln(\sqrt{t^2+1} - t), D = \mathbb{R} \quad (0.25)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = (-y)^3 - \ln(\sqrt{(-y)^2+1} - (-y))$$

$$f'(t) = 3t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y \quad (0.25)$$

$$\text{Thay vào (2)} \Rightarrow x^2 + x = (x+2) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(x+2) \geq 0 \\ (x^2 + x)^2 = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x+2)^2 \end{cases} \quad (0.25)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(x+2) \geq 0 \\ x^2 - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7}$$

$$\text{KL: nghiệm hpt: } (1+\sqrt{7}; -1-\sqrt{7}); (1-\sqrt{7}; -1+\sqrt{7}) \quad (0.25)$$

Câu 8 (0,75 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 & (1) \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y) (*)$.

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{t + |t|}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra: $f(x) = f(-2y) \Rightarrow x = -2y$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = (x^3 + 1) + 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \quad (**)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ ta thấy $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên từ $(**)$ suy ra

$$x+1 = \sqrt[3]{x^3 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy hệ có hai nghiệm là } (-1; \frac{1}{2}); (0; 0).$$

Câu 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 7\sqrt{x+1}-1=y(\sqrt{x+1}+1) \\ (x+1)y^2+y\sqrt{x+1}=13x+12 \end{cases}$$

Giải hệ:
$$\begin{cases} 7\sqrt{x+1}-1=y(\sqrt{x+1}+1) & (1) \\ (x+1)y^2+y\sqrt{x+1}=13x+12 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq -1, x, y \in \mathbb{R}$

$PT(1) \Leftrightarrow (7-y)\sqrt{x+1}=y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{y+1}{7-y}$ (Do $y=7$ không là nghiệm của phương trình)

Thay $\sqrt{x+1}=\frac{y+1}{7-y}$ vào (2) ta được phương trình:

$$\begin{aligned} y^2 \cdot \left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2 + y \cdot \frac{y+1}{7-y} &= 13 \cdot \left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow y^2(y+1)^2 + y(y+1)(7-y) &= 13(y+1)^2 - (7-y)^2 \\ \Leftrightarrow y^4 + y^3 - 5y^2 - 33y + 36 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)(y^2+5y+12)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Với $y=1 \Rightarrow x=-\frac{8}{9}$

Với $y=3 \Rightarrow x=0$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y)$ là $\left(-\frac{8}{9}; 1\right), (0; 3)$.

Ta kí hiệu các phương trình trong hệ như sau:

$$\begin{cases} x-y\sqrt{2-x}+2y^2=2 & (1) \\ 2(\sqrt{x+2}-4y)+8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y}=34-15x & (2) \end{cases}$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2-x+\sqrt{2-x} \cdot y-2y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x}=y \\ \sqrt{2-x}=-2y \end{cases}.$$

+ Với $\sqrt{2-x}=y$ thay vào (2) ta được

$$2(\sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x})+8\sqrt{4-x^2}=34-15x \quad (3).$$

Đặt $t=\sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2=34-15x-8\sqrt{4-x^2}$

Khi đó (3) trở thành $2t=t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}=0 \\ \sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{30}{17} \Rightarrow y=\frac{2\sqrt{17}}{17} \\ x=2 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

+ Với $\sqrt{2-x}=-2y$. Vì $y \geq 0 \Rightarrow -2y \leq 0$ mà $\sqrt{2-x} \geq 0$ nên chỉ

Câu 9 (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y\sqrt{2-x}+2y^2=2 \\ 2(\sqrt{x+2}-4y)+8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y}= \end{cases}$$

có thể xảy ra khi $x=2$ và $y=0$ thử vào (2) thấy thỏa mãn.

Kết luận: Hệ phương trình có hai nghiệm:
$$\begin{cases} x = \frac{30}{17} \\ y = \frac{2\sqrt{17}}{17} \end{cases}$$

và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - y^2 + 2y - x - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ...

Điều kiện: $x \geq 0, 1 \leq y \leq 6, 2x+3y-7 \geq 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{x} \neq 0$

Khi đó, PT (1) $\Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow (y-1)(x-y+1) = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1) \left(y-1 + \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1 \text{ (do (*))}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ ĐK: $4/5 \leq x \leq 5$ (**)

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} - (7-x) + 3(\sqrt{5x-4} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4}+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4+5x-x^2) \left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4}+x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \text{ (do (**))}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*), (**))}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (1;2), (4;5).

Câu 8 (1.0 điểm). Giải hệ PT
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Giải hệ PT
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

ĐKXD $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^2 - xy + x - y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=x^2+1 \end{cases}$$

Với $y = x^2 + 1$ thay vào PT thứ 2 ta được

$$3(x^2+1)(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x^2+6)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0. \text{ Dễ thấy PT vô nghiệm.}$$

Với $y = x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0$

$$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{9x^2+3})=-(2x+1)(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{9x^2+3})=(-2x-1)(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2)$$

Xét hàm số $f(t)=t(\sqrt{t^2+2}+2)$ ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+2}+2+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$ suy ra hàm số đồng biến.

Từ đó suy ra $3x=-2x-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}. \text{ Thay vào (2) ta được } 3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}.$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+2\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \frac{5 - 2\sqrt{13}}{9} \end{cases}$$

Ta có $y = \frac{x^2}{x+1} - 1$

Với $x = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \Rightarrow y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = \left(3 + 2\sqrt{3}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

& $(x; y) = \left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9}; -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$.

Bài 1. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases}$

Giải

$$\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2^{2x} - 2^{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2^{2x} = 2^{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2 - 2^{x-1} = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 3 - 2x = 2^{x-1} \end{cases}$$

- Khi $x=y$, thì $x=-1$. Vậy nghiệm của hệ là : $(x;y)=(-1;-1)$
- Khi $x+y=1$, (2) có nghiệm duy nhất : $x=1$, do đó hệ có nghiệm : $(x;y)=(1;0)$

Chú ý : Tại sao ta không đưa chúng về dạng : $x^2 - x = y^2 - y$, sau đó xét hàm số $y = f(t) = t^2 - t$?

Bài 2. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + xy + \frac{3}{2} = 2^y & (1) \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y - 4x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ (2) : $\Leftrightarrow (x^2y + 2x)^2 - 2(x^2y + 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow [x^2y + 2x - 1]^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-2x}{x^2} \\ xy = \frac{1-2x}{x} \end{cases} (*)$

Thay vào phương trình (1): $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$. Phương trình này đã biết cách giải ở phần phương pháp giải phương trình mũ. Phương trình có dạng :

$$b-a = \frac{1-x^2}{x^2} - \frac{1-2x}{x^2} = -1 + \frac{2}{x} = -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = -\frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

Do đó phương trình trở thành : $2^b - 2^a = -\frac{b}{2} + \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2^b + \frac{b}{2} = 2^a + \frac{a}{2}$

Xét hàm số : $f(t) = 2^t + \frac{t}{2} \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{1}{2} > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do vậy để xảy

ra f(b)=f(a) chỉ xảy ra khi a=b : $\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2} \Leftrightarrow 1-x^2 = 1-2x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (vì x khác 0) và } y = \frac{1-2 \cdot 2}{4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow (x; y) = \left(2; -\frac{3}{4} \right)$$

Chú ý : Vì ta sử dụng được phương pháp hàm số vì a, b thuộc $\mathbb{R}$

Bài 3. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \\ \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \end{cases}$

Giải

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \\ \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(x-10y) = 0 \\ \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \end{cases}$$

Từ (2) : $\ln(1+x) - (x+1) = \ln(1+y) - (y+1) \Leftrightarrow f(t) = \ln t - t; f'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} (t > 0)$.

Hàm số đồng biến với mọi t thuộc $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $t > 1$ đạt GTLN tại $t=1$
Cho nên ta phải sử dụng phương pháp " Phương trình tích "

- Nếu thay vào (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \ln(1+2y) - \ln(1+y) = 2y - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \ln\left(\frac{1+2y}{1+y}\right) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \left(\frac{1+2y}{1+y}\right) = e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \frac{1}{1+y} = 2 - e^y \end{cases}$$

Xét hàm số : $f(y) = \frac{1}{1+y} + e^y \Rightarrow f'(y) = -\frac{1}{(1+y)^2} + e^y$ chỉ có nghiệm duy nhất : $y=0$

- Nếu : $\begin{cases} x=10y \\ x=y \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (0; 0)$. Tương tự như trên ta cũng có nghiệm $y=0$.

Bài 4. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2 \\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right) + \log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right) = (x-3)^2 \end{cases}$

Giải

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2(1) \\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right) + \log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right) = (x-3)^2(2) \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 - 3y + 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = y^3 - 3y + 3(x-1) \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3(x-1) = y^3 - 3y (*)$$

Đặt : $x-1=t$ suy ra (*) trở thành : $t^3 - y^3 - 3(t-y) = 0 \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + ty + y^2 - 3) = 0$

+/- Trường hợp chỉ khi : $x-1=y$, hay : $x=y+1$, $x-2=y-1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{y-1} = 1$

Thay vào (2) ta có : $\log_y 1 + \log_x 1 = (x-3)^2 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Do đó nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y)=(3;2)$.

+/- Trường hợp : $t^2 + ty + y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2+1)^2 + (x-2+1)y + y^2 - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (2+y)(x-2) + y^2 + y - 2 = 0$

Bài 5 Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Giải

$$\cdot \begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2(y-x^2) + y^3 - (x^2)^3 = 0 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x^2)(2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4) = 0 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

-Trường hợp 1: $y = x^2$, thay vào (2) : $(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x^2+1+2x) \Leftrightarrow t^2 - (x+2)t + 2x = 0 \Rightarrow t = 2; t = x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$

-Trường hợp : $2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + yx^2 + (2x^2 + x^4) = 0$

$\Rightarrow \Delta_y = x^4 - 4(2x^2 + x^4) = -3x^4 - 8x^2 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta_y < 0$

$\Rightarrow f(y) = 2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 > 0 \forall x, y$. Phương trình vô nghiệm.

Do đó hệ có hai nghiệm : $(x;y) = (-\sqrt{3}; 3), (\sqrt{3}; 3)$

*** Chú ý : Ta còn có cách giải khác**

- Phương trình (1) khi $x=0$ và $y=0$ không là nghiệm (do không thỏa mãn (2)).

- Chia 2 vế phương trình (1) cho $x^3 \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3$

- Xét hàm số : $f(t) = 2t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 2 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số $f(t)$ đồng biến. Để phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi : $\frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$. Đến đây ta giải như ở phần trên

Bài 6. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - y\sqrt{x-2y} - 6y^2 = 0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-2y} + 2y)(\sqrt{x-2y} - 3y) = 0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $\sqrt{x-2y} = -2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x - 2y = 4y^2 \end{cases}$

Thay vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2y} = 4y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow -2y = 4y^2 + 5y - 2 \Rightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$

- Trường hợp : $\sqrt{x-2y} = 3y \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x-2y = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = 9y^2 + 2y \end{cases} (*)$.

Thay vào (2) : $\Leftrightarrow \sqrt{9y^2 + 2y + 3y} = 9y^2 + 2y + 3y - 2 \Leftrightarrow \sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{9y^2 + 5y} \geq 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \sqrt{9y^2 + 5y} = 2 \end{cases} \Rightarrow 9y^2 + 5y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow x = 9 - 2 = 7 \\ y = \frac{4}{9} \rightarrow 9 \frac{16^2}{91} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{264}{9} = \frac{88}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm : $(x; y) = (7; -1), \left(\frac{88}{3}; \frac{4}{9}\right)$

Bài 7 Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Giải

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1(1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y(2) \end{cases}$. Từ (2) viết lại : $\sqrt{x+y} + x + y = x^2 + x \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^2 + \sqrt{x+y} = x^2 + x$

Ta xét hàm số $f(t) = t^2 + t (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0 \forall t \geq 0$. Chứng tỏ $f(t)$ là một hàm số đồng biến, cho nên ta có : $\sqrt{x+y} = x \Leftrightarrow y = x^2 - x$. (*)

Thay vào (1) : $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - x)^2 + \frac{2x(x^2 - x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 + x^2(x-1)^2 + 2(x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1+x^2(x-1)+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^3 - x^2 + x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ (x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} (**)$$

Thay vào (*) : $\Leftrightarrow y = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; y=2 \\ x=1; y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 2), (1; 0)$

Chú ý : Các em có nhận xét gì không khi tôi giải như trên. Bây giờ tôi nêu thêm hai cách nữa để các em kiểm nghiệm nhé :

Cách 2.

Đặt : $x+y=u; xy=v \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 1$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2v + \frac{2v}{u} = 1 \Leftrightarrow u^3 - u - 2uv + 2v = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 1) - 2v(u-1) = 0 \Leftrightarrow (u-1)[u(u+1) - 2v] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ u^2 + u - 2v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^2 + (x+y) - 2xy = 0 \end{cases}$$

* Nếu $x+y=1$ thay vào (2) ta được :

$$1 = x^2 - (1-x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \leftrightarrow y=0 \\ x=-2 \rightarrow y=3 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 0), (-2; 3)$$

+/ Với $(x+y)^2 + (x+y) - 2xy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$ vô nghiệm vì $(x^2 + y^2 > 0; x + y \geq 0)$

Bài 8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Giải

Từ .
$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) & (1) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} & (2) \end{cases} \quad . \text{ - Điều kiện : } x, y \geq 0$$

- Từ (1) : $\Leftrightarrow 2.2^{(\sqrt{x})^4} + 3\sqrt{x} = 2.2^{(2\sqrt{y})^4} + 3(2\sqrt{y})$

- Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + 3t (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 3 > 0$. Chứng tỏ $f(t)$ luôn đồng biến .

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y$ (*)

- Thay vào (2) : $2^{(\sqrt{5y})^4} + \frac{3}{2}(\sqrt{5y}) = \frac{7}{2}$. Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + \frac{3}{2}t \Rightarrow f'(t) = 4t^3.2^4 + \frac{3}{2} > 0$.

- Nhận xét : $f(1) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất . $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{5y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1 = 6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y \end{cases} \quad \left(x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

Giải

Từ .
$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} & (1) \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1 = 6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y & (2) \end{cases} \quad : x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

- Từ (1) : $\frac{e^x}{e^y} = \frac{\sin x}{\sin y} \Leftrightarrow \frac{e^x}{\sin x} = \frac{e^y}{\sin y} \Rightarrow f(t) = \frac{e^t}{\sin t} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{\sin^2 t} > 0 \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

- Chứng tỏ hàm số $f(t)$ luôn đồng biến . Phương trình có nghiệm khi $x=y$.

- Thay vào (2) : $3\sqrt{8x^2+3}+1 = 6\sqrt{2x^2-2x+1}+8x \Leftrightarrow 3\sqrt{8x^2+3}+1-6\sqrt{2x^2-2x+1} = 8x-1$

$\Leftrightarrow \frac{9(8x^2+3)-36(2x^2-2x+1)}{3\sqrt{8x^2+3}+6\sqrt{2x^2-2x+1}} = 8x-1 \Leftrightarrow \frac{9(8x-1)}{3\sqrt{8x^2+3}+6\sqrt{2x^2-2x+1}} = 8x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x-1=0 \\ 3\sqrt{8x^2+3}+6\sqrt{2x^2-2x+1}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ \sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}=3 \end{cases}$

- Với $x = \frac{1}{8} \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$.

- Ta có : với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ suy ra $\begin{cases} \sqrt{8x^2+3} \geq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{8x^2+3} + 2\sqrt{2x^2-2x+1} > 3$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x; y) = \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$

Bài 10. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$$

Giải

Từ : $\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2}) = (-y + \sqrt{1+(-y)^2}) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases} . \text{ (nhân liên hợp)}$

Xét hàm số : $f(t) = t + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2}} > \frac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0 \forall t \in R$

Chúng tỏ hàm số đồng biến . Để $f(x)=f(-y)$ chỉ xảy ra $x=-y$ (*)

- Thay vào phương trình (2) :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1} = -4x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1} - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \end{cases}$$

* Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+6x+1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2-6x-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=1; y=-1$

* Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2+6x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2-6x-1 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow x = \frac{3-\sqrt{11}}{2}; y = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}$. Vậy hệ có hai nghiệm : $(x;y)=(1;-1), \left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$

Bài 11. Giải hệ phwpng trình : $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

Giải

Từ : $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0(1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases} \text{ (KA-2011)}$

- PT(1): $4x^3 + x = -(y-3)\sqrt{5-2y}(3)$. Đặt $t = \sqrt{5-2y} \Rightarrow y = \frac{5-t^2}{2} \Leftrightarrow -\left(\frac{5-t^2}{2}-3\right)t = \frac{t^3+t}{2}$

- Khi đó (2) : $4x^3 + x = \frac{t^3+t}{2} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = t^3 + t$

- Xét hàm số : $f(u)=u^3+u \Rightarrow f'(u)=3u^2+1 > 0 \forall u$ suy ra $f(u)$ luôn đồng biến . Do đó để $f(x)=f(t)$ chỉ xảy ra khi : $2x=t \Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow 4x^2=5-2y \Leftrightarrow 2y=5-4x^2(4)$

- Thay vào (2) : $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0 : x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$. Ta thấy $x=0$ và $x=\frac{3}{4}$ không là

nghiệm . $g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0 \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$

- Mặt khác : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhắy , thay vào (4) tìm được $y=2$.

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Bài 12. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2y^3 + 3xy^3 = 8 \\ x^3y - 2y = 6 \end{cases}$$

Giải :

- Đặt : $t = \frac{2}{y} \Rightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3x = t^3 (1) \\ x^3 - 2 = 3t (2) \end{cases}$. Lấy (1) + (2) : $\Rightarrow x^3 + 3x = t^3 + 3t$

- Xét hàm số : $y = f(u) = u^3 + 3u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 3 > 0 \forall u \in R$

- Chứng tỏ hàm số đồng biến. Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : $x=t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ x^3y - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ \frac{8}{y^3}y - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^3 + 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ (y-1)(y+2)^2 = 0 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm : $(2; 1); (-1; -2)$

Bài 13. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$$

Giải :

Từ :
$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} (1) \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 (2) \end{cases}$$

- Điều kiện : $y \geq 2; x \geq -\frac{1}{2} (*)$

- Đặt : Từ (2) : $4x + 2y + 6 = 36 \Leftrightarrow 2x + y = 15 \Rightarrow 2x + 1 = 16 - y$

- Từ (1): Đặt : $\sqrt{y-2} = t \Rightarrow y = t^2 + 2 \Leftrightarrow 2y - 3 = 2(t^2 + 2) - 3 = 2t^2 + 1$

- Cho nên vế phải (1) : $\Leftrightarrow (2t^2 + 1)t = 2t^3 + t \Leftrightarrow (1) : 2(x+1)^3 + (2x+1) = 2t^3 + t$

- Xét hàm số : $f(u) = 2u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 6u^2 + 1 > 0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến. Để $f(x) = f(t)$ chỉ xảy ra khi : $x=t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{y-2} \\ 2x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{y-2} \\ 15 - y = \sqrt{y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 15 \\ y^2 - 31y + 227 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{31 - \sqrt{53}}{2} \\ y = \frac{31 + \sqrt{53}}{2} > 15 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{53}-1}{4}; \frac{31-\sqrt{53}}{2}\right)$

Bài 14 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y+1) (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 (2) \end{cases}$$

Từ :
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y+1) (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 (2) \end{cases}$$

- Điều kiện : $y^2 + 2x > 0 (*)$

- Phương trình (1) : $\Leftrightarrow 2(x^3 + 2x) = 2(y+1) + x^2(y+1) \Leftrightarrow 2x(x^2 + 2) = (y+1)(x^2 + 2)$
- Do : $x^2 + 2 > 0 \Rightarrow 2x = y+1(**)$
- Thay vào (2) : $y^3 + 2(y+1) + 1 + \ln(y^2 + y + 1) = 0 \Leftrightarrow f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$
- Ta có : $f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2 + y + 1} > 0$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến.
- Mặt khác : $f(-1) = 0$, do đó phương trình có nghiệm duy nhất : $(x; y) = (0; -1)$

Bài 15. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Giải

Từ :
$$\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$.
- Từ (1) : $(8x-3)\sqrt{2x-1} = y + 4y^3 (*)$
- Đặt : $t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow 2x = t^2 + 1 \Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1} = [4(t^2 + 1) - 3]t = (4t^2 + 1)t = 4t^3 + t$
- Do đó (*) : $4t^3 + t = y + 4y^3$
- Xét hàm số : $f(u) = 4u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 12u^2 + 1 > 0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến. Do đó phương trình có nghiệm khi : $f(t) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = y \Leftrightarrow 2x = y^2 + 1(**)$
- Thay vào (2) : $(y^2 + 1)^2 - 4(y^2 + 1) + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 0$
 $\Leftrightarrow y(y^3 + 2y^2 - y - 2) = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y+2)(y+1) = 0$
- Vậy : $\begin{cases} y = 0 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right), \begin{cases} y = 0 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (x; y) = (1; 1)$
 $\begin{cases} y = -1 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (x; y) = (1; 0), \begin{cases} y = -2 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow (x; y) = \left(\frac{5}{2}; -2\right)$

Bài 16. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \frac{3}{2} \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 \end{cases}$$

Giải :

Từ :
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \frac{3}{2} & (1) \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

- Từ (2) : $(x^2y + 2x)^2 - 2(x^2y + 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow [(x^2y + 2x) - 1]^2 = 0 \Rightarrow x^2y + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2y = 1 - 2x$

- Hay : $\begin{cases} y = \frac{1-2x}{x^2} (*) \\ xy = \frac{1-2x}{x} \end{cases}$, thay vào (1) : $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = -\left(\frac{1-2x}{x}\right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ (3)

- Nhận xét : $\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{x^2-2x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$.

Gọi : $a = \frac{1-x^2}{x^2}, b = \frac{1-2x}{x^2} \Rightarrow b-a = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$

- Cho nên (3) $\Leftrightarrow 2^a - 2^b = 2(b-a) \Leftrightarrow 2^a + 2a = 2^b + 2b$.

- Xét hàm số : $f(t) = 2^t + 2t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến, vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : $a=b$, tức $b-a=0$, hay : $\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Thay vào (*) ta tìm được

$y = -\frac{3}{4} \Rightarrow (x; y) = \left(2; -\frac{3}{4}\right)$

Bài 17. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$

Giải :

Từ : $\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 (2) \end{cases}$

- Phương trình (1) : $\Leftrightarrow \frac{(1+4^{2x-y})5}{5^{2x-y}} = 1+2.2^{2x-y} \Leftrightarrow 5+5.4^a = 5^a + 2.10^a (a = 2x-y)$

$\Leftrightarrow 5^a + 2.10^a - 54^a = 5 \Leftrightarrow f(a) = \frac{1}{5}5^a + \frac{2}{5}10^a - 4^a - 1 = 0$

- Xét : $f'(a) = \frac{1}{5}5^a \ln 5 + \frac{2}{5}10^a \ln 10 - 4^a \ln 4 > 0 \left(\rightarrow \frac{2}{5}10^a \ln 10 > 10^a \ln 10 > 4^a \ln 4 \right)$

- Chứng tỏ hàm số đồng biến. Mặt khác : $f(1)=0$, đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình.

- Với $a=1$ suy ra $2x-y=1$, hay $2x=y+1$. Thay vào (2) : $\Rightarrow y^3 + 2(y+1) + \ln(y^2 + y+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(y) = y^3 + 2y + 2 + \ln(y^2 + y+1) = 0 \Rightarrow f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2 + y+1} (*)$

- Xét : $g(y) = \frac{2y+1}{y^2 + y+1} \Rightarrow g'(y) = \frac{1-2(y^2 + y)}{(y^2 + y+1)^2} = \frac{\frac{3}{2} - 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{(y^2 + y+1)^2}$

- Nhận xét : $\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(y) > 0 \\ y < -\frac{1}{2} \Rightarrow g'(y) > 0 \Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow f'(y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(y) > 0 \forall y \in \mathbb{R}$

- Chứng tỏ $f(y)$ đồng biến. Mặt khác $f(-1)=0$ suy ra $y=-1$ là nghiệm duy nhất của PT.

- Kết luận : hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$.

Bài 18 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \end{cases}$$

Giải

Đ/K : $x \leq 2; y \geq \frac{1}{2}$.

Từ (2) $[1+(2-x)]\sqrt{2-x} = [1+(2y-1)]2y\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow (\sqrt{2-x})^3 + \sqrt{2-x} = (\sqrt{2y-1})^3 + \sqrt{2y-1}$

Ta xét hàm số : $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó để $f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1})$, chỉ xảy ra khi : $\sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3-x \\ x = 3-2y \end{cases}$

Thay vào (1) $\Leftrightarrow x^3 - (3-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1; y = 3-1 = 2$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;2)$

Bài 19. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x+y)^3 + 8xy = 2(x+y)(8+xy) \\ \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{x^2-y} \end{cases} \quad (\text{Ngô Trung Hiếu})$$

Giải

Đ/K : $\begin{cases} x+y > 0 \\ x^2-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ y < x^2 \end{cases} (*)$

Hệ $\begin{cases} (x+y)^3 + 8xy = 2(x+y)(8+xy) \\ x^2-y = \sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 + 8xy = 2(x+y)(8+xy) \\ x^2+x = (y+x) + \sqrt{x+y} \end{cases}$

Từ (2) : $t = \sqrt{x+y} > 0 \Rightarrow x^2+x = t^2+t \Leftrightarrow x^2-t^2+(x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x+t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-t=0 \\ x+t+1=0 \end{cases}$

+/- Trường hợp : $x=t \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = x \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - x \\ x > 0 \end{cases}$

thay vào (1) $x^6 + 8(x^2-x)x = 2y^2[8+(x^2-x)x] \Leftrightarrow x^6 + 8x^3 - 8x^2 = 2x^2[8+x^3-x^2]$

$\Leftrightarrow x^6 + 8x^3 - 8x^2 = 16x^2 + 2x^5 - 2x^4 \Leftrightarrow x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 24x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 8x - 24) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)(x+2)(x^2-2x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow y=2 \\ x=-2 \rightarrow y=6 \\ x^2-2x+6=0 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;2), (-2;6)$

+/- Trường hợp : $x+1+\sqrt{x+y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = -(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+y = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y = x^2+x+1 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow (x+y)^3 + 8xy = 16(x+y) + 2xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)^3 - 16(x+y) + 8xy - 2xy(x+y) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 16(x+y) + 2xy[4-2(x+y)] = 0$

Thay vào (1) : $(x+1)^6 + 8x(x^2+x+1) = 2(x+1)^2[8+x(x^2+x+1)]$

$(x+1)^6 + 8x(x^2+x+1) = 2(x+1)^2[8+x(x^2+x+1)]$

Bài 20. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x - y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} \end{cases}$$

Giải

Đ/K : $x - y \geq 0; y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y \geq 0$

Từ (2) : $\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x - y} - y^2 = -y^2 + 2xy - x^2 + \sqrt{(x - y)^2 + 1} + \sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{y} - y^2 = +\sqrt{(x - y)^2 + 1} - \sqrt{x - y} - (x - y)^2$

Xét hàm số : $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - \sqrt{t} - t^2 \quad (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = t \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2 \right) - \frac{1}{2\sqrt{t}} < 0$

(Vì : $\sqrt{t^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2 < 0$ với mọi $t > 0$)

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y = x - y$ hay $x = 2y$.

Thay vào (1) : $(2y)^2 y - 2(2y)^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^3 - 10y^2 + 5y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 2)(4y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ vì : $4y^2 - 2y + 1 = 0$ vô nghiệm .

Vậy hệ có nghiệm : $(x; y) = (4; 2)$

Bài 21. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2(x - 2)\sqrt{x + 6} = 6 - y \\ (x - 2)\sqrt{y + 2} = \sqrt{y + 1} \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 5} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $y \geq -2; x \geq -6$

Từ (2) : $(x - 2)\sqrt{y + 2} = \sqrt{y + 1} \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y + 2}}{\sqrt{y + 1}} = \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}{(x - 2)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y + 2}{y + 1}} = \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}{(x - 2)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y + 1) + 1}{y + 1}} = \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}{(x - 2)}$. Xét hàm số $f(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{t}} \quad (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t}} \right)' = -\frac{1}{2t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t}}} < 0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến

Đề $f(x - 2)^2 = f(y + 1)$ chỉ xảy ra khi : $y + 1 = (x - 2)^2$. Thay vào (1) ta được phương trình :

(1) $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 2(x - 2)\sqrt{x + 6} - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - 2 \geq 0 \\ t^2 + 2t\sqrt{t + 8} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - 2 \geq 0 \\ 2t\sqrt{t + 8} = 7 - t^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x - 2 \leq \sqrt{7} \\ 4t^2(t + 8) = (7 - t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x - 2 \leq \sqrt{7} \\ t^4 - 4t^3 - 46t^2 + 49 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t = x - 2 \leq \sqrt{7} \\ (t - 1)(t^3 - 3t^2 - 49t - 49) = 0 \end{cases}$

+ / Trường hợp : $t = 1$ hay $x - 2 = 1$ suy ra $x = 3$ và $y + 1 = 1$ hay $y = 0$. Vậy nghiệm hệ là $(x; y) = (3; 0)$

+ / Trường hợp : $f(t) = t^3 - 3t^2 - 49t - 49 = 0 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t - 49 = 3(t - 1)^2 - 52 < 0 \forall t \in [0; \sqrt{7}]$

Hàm số nghịch biến và $f(0) = -49 < 0$ chứng tỏ $f(t) < 0$ với mọi $t \in [0; \sqrt{7}]$. Phương trình vô nghiệm .

Bài 22. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2y(4y^2 + 3x^2) = x^4(x^2 + 3) \\ 2012^x (\sqrt{2y - 2x + 5} - x + 1) = 4024 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $2y - 2x + 5 \geq 0$

+/- Nếu $x=0$ suy ra $y=0$ nhưng lại không thỏa mãn (2) vậy x khác 0 . Từ (1) (chia hai vế cho $x^2 \neq 0$)
Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2y(4y^2 + 3x^2)}{x^3} = \frac{x^4(x^2 + 3)}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x}\right) \left[\left(\frac{2y}{x}\right)^2 + 3\right] = x^3 + 3x \Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{2y}{x}\right) = x^3 + 3x$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi t thuộc $\mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số đồng biến

Đề $f\left(\frac{2y}{x}\right) = f(x)$, chỉ xảy ra khi : $\frac{2y}{x} = x \Leftrightarrow 2y = x^2$. Thay vào (2) ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 2012^x \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x + 1\right) = 4024 \Leftrightarrow 2012 \cdot 2012^{x-1} \left(\sqrt{(x-1)^2 + 4} - (x-1)\right) = 4024$$

$$\text{Lại đặt } t = x-1 \text{ suy ra : } \Leftrightarrow 2012 \cdot 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t\right) = 4024 \Leftrightarrow g(t) = 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t\right) = 2$$

$$\text{Lại xét hàm số : } g(t) = 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t\right) \Rightarrow g'(t) = 2012^t \ln 2012 \left(\sqrt{t^2 + 4} - t\right) + 2012^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} - 1\right)$$

$$\text{Hay : } g'(t) = 2012^t \left(\sqrt{t^2 + 4} - t\right) \left[\ln 2012 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}}\right]$$

Vì : $\sqrt{t^2 + 4} - t > 0$ và $\frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} < 1 < \ln 2012$ suy ra $g'(t) > 0$ với mọi t thuộc $\mathbb{R}$ mà $g(0) = 2$ cho nên với $t=0$ là

$$\text{nghiệm duy nhất và : } t = x-1 = 0 \Rightarrow x = 1; y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$$

Bài 23. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + 6 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } -2 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 4. \text{ Khi đó hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2) \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^3 - 12t \quad t \in [-2; 2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0 \forall t \in [-2; 2]$$

Chứng tỏ hàm số nghịch biến . Cho nên đề $f(x) = f(y-2)$ chỉ xảy ra khi : $x = y-2$, thay vào (2) ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4(x+2) - (x+2)^2} + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4-x^2} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 6 = 3\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ 4(4-t^2) + 6 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ 4t^2 + 3t - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{4-x^2} \geq 0 \\ t = \frac{-3-19}{8} = -\frac{11}{4} < 0; t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Leftrightarrow (x; y) = (0; 2). \text{ Vậy hệ có nghiệm : } (x; y) = (0; 2)$$

Bài 24. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} + x + y = 5 \\ \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} - x - y = 2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} + x + y = 5(1) \\ \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} - x - y = 2(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + x + \sqrt{y^2 + 3} + y = 5(1) \\ \sqrt{x^2 + 2} - x + \sqrt{y^2 + 3} - y = 2(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x} + \frac{3}{\sqrt{y^2+3}-y} = 5(1) \\ \sqrt{x^2+2}-x + \sqrt{y^2+3}-y = 2(2) \end{cases} \text{ Do : } \begin{cases} (\sqrt{x^2+2}+x)(\sqrt{x^2+2}-x) = 2 \\ (\sqrt{y^2+3}+y)(\sqrt{y^2+3}-y) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

- Suy ra : $\sqrt{x^2+2}-x = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$; $\sqrt{y^2+3}-y = \frac{3}{\sqrt{y^2+3}+y}$. Cho nên (1) chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}-x=1 \\ \sqrt{y^2+3}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2}=x+1 \\ \sqrt{y^2+3}=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2=x^2+2x+1 \\ y^2+3=y^2+2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x;y)=(\frac{1}{2};1)$.

Bài 25 . Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} x^2y^2 - 8x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 10 + y^3 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ : } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 - 8x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 10 + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{8x}{x^2+1} \leq \frac{8x}{2x} = 4 \\ y^3 + 8 = -2(x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ y \leq -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

Bài 26. Giải hệ:
$$\begin{cases} x^3 - 3x = \sqrt{(y-1)^3} - \sqrt{9(y-1)} & (1) \\ 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$$

Giải

- Từ điều kiện và từ phương trình (2) có $x \geq 1$; $\sqrt{y-1} \geq 1$
- (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x = (\sqrt{y-1})^3 - 3\sqrt{y-1}$, xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[1; +\infty)$
- Hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$, ta có $f(x) = f(\sqrt{y-1}) \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$
- Với $x = \sqrt{y-1}$ thay vào (2) giải được $x=1$; $x=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Bài 27. (A – 2010) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x + (2y-6)\sqrt{5-2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2x)^2 + 1](2x) = \left[(\sqrt{5-2y})^2 + 1 \right] \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{5-2y})^3 + \sqrt{5-2y}$$

$$\Leftrightarrow (2x) = f(\sqrt{5-2y}) \text{ với } f(t) = t^3 + t. f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow (t) \text{ ĐB trên } \mathbb{R}. \text{ Vậy}$$

$$f(2x) = f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow y = \frac{5-4x^2}{2}, x \geq 0$$

$$\text{Thế vào pt (2) ta được } 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Với $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7, x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$. CM hàm $g(x)$ nghịch biến.

Ta có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

Bài 28.) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Giải

TH1 : Xét $y = 0$ thay vào hệ thấy không thỏa mãn.

TH2 : Xét $y \neq 0$, chia 2 vế của (1) cho y^5 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t \Rightarrow f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến.

Từ (3) $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2$

Thay vào (2) ta có PT $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Rightarrow x = 1$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Bài 29. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^y \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 3^x \end{cases}$$

Giải

Trừ vế hai pt ta được $x + \sqrt{x^2 + 1} - (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 3^y - 3^x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} + 3^x = y + \sqrt{y^2 + 1} + 3^y$

$f(x) = f(y)$ với $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$. $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào pt thứ nhất ta được

$x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^x \Leftrightarrow 1 = 3^x (\sqrt{x^2 + 1} - x) \Leftrightarrow g(0) = g(x)$

Với $g(x) = 3^x (\sqrt{x^2 + 1} - x)$. $g'(x) = 3^x \ln 3 (\sqrt{x^2 + 1} - x) + 3^x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1\right)$

$= 3^x (\sqrt{x^2 + 1} - x) \left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ và $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 0$

Bài 30. (Thi thử ĐT 2013) Giải hệ :

$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + (y-7)x + y^2 - 6y + 14 = 0. \exists x \Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow y^2 + (x-6)y + x^2 - 7x + 14 = 0. \exists y \Leftrightarrow \Delta_y \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2t^2 - 3t + 4, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 4t - 3, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4} < 1$$

Vì vậy trên $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ hàm số $f(t)$ đồng biến

TH 1. $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 6$ Kết hợp với $y \geq 1$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(1) = 3 \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) > 18.$$

$$\text{TH 2. } x = 2 \text{ hệ trở thành } \begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm

$$\text{Bài 31. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$. Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó lấy (1) trừ cho nó ta có hệ :

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x-1+2)\sqrt{2x-1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 3 = (\sqrt{2x-1})^3 + 2\sqrt{2x-1} - 4y \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + (2 + 2y) = (\sqrt{2x-1})^3 + 2\sqrt{2x-1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^3 + 2(y+1) = (\sqrt{2x-1})^3 + 2\sqrt{2x-1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases}$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đề $f(y+1) = f(\sqrt{2x-1})$ chỉ xảy ra khi : $y+1 = \sqrt{2x-1}$.. Thay vào (2) ta có :

$$2x^2 - 11x + 9 + 2 = 2y + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 11 = 2(y+1) \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 11 = 2\sqrt{2x-1} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2} > 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 - 11\left(\frac{t^2+1}{2}\right) + 11 = 2t$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 + 1 - 11t^2 - 11 + 22 = 4t \Leftrightarrow t^4 - 9t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3)(t^2 + 4t + 4) = 0$$

$$\text{Suy ra : Với } \begin{cases} t=1 \\ y+1=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (1;0)$$

$$\text{Với } \begin{cases} t=3 \\ y+1=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=3 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=9 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (5;2)$$

Vậy hệ có hai nghiệm : $(x;y)=(1;0),(5;2)$ (ví $t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2 > 0 \forall t \geq 0$)