

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{3-ab} + \frac{1}{3-bc} + \frac{1}{3-ca}.$$

Câu 2. (3,0 điểm) Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định bởi $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ và với mỗi $n \geq 1$, các số hạng a_{n+1}, b_{n+1} được xác định theo a_n, b_n bởi một trong hai cách

$$i) a_{n+1} = \frac{2024a_n}{2025}, b_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2025}$$

$$ii) a_{n+1} = a_n^2, b_{n+1} = a_n.$$

a) Chứng minh rằng nếu $a_1 \in (-1; 1)$ thì dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

b) Giả sử $a_{2025} \leq a_1$, tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = b_2 + \dots + b_{2025}$.

Câu 3. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(yf(x)) + f(xf(y)) = 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4. (5,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc ngoài nhau tại D . Từ một điểm A bất kì trên (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O') ($B, C \in (O')$). Gọi I là giao điểm của AD và BC . M là trung điểm BC . Đường tròn đường kính AI cắt lại đường tròn (O) tại P (P khác A).

a) Chứng minh đường thẳng AP, IM và tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) đồng quy tại một điểm.

b) Chứng minh P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

c) Gọi G là giao điểm của PD và BC . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác GPM tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2024; 2025\}$. Một tập con A của X được gọi là có tính chất “đẹp” nếu ba phần tử bất kì của A là độ dài các cạnh của một tam giác. Tìm số phần tử lớn nhất có thể có của A .

Câu 6. (3,0 điểm) Cho số nguyên $n \geq 3$. Một dãy số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được gọi là dãy đặc biệt nếu thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Giá trị các số hạng không vượt quá n .

ii) Tồn tại số hạng a_i sao cho $a_i < a_{i-1}$ với $1 < i \leq n$.

iii) Tồn tại số hạng a_j sao cho $a_j > a_{j-1}$ với $1 < j \leq n$.

Tính số dãy đặc biệt theo n .

—————HẾT—————

Ghi chú: Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.