

ẤN PHẨM ĐẶC BIỆT KỶ NIỆM 40 NĂM THÀNH LẬP KHOA TOÁN - TIN

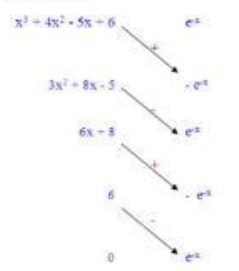
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH TOÁN TRẮC NGHIỆM BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI PHẦN I

TRAC NGHIỆM TOÁN - THPT QG
<https://facebook.com/tracnghiemToan12>

Hàm nào là hàm ngược của hàm $y = \cosh x$

Biên soạn: Nguyễn Vũ Thụ Nhân
Cựu sinh viên Khóa 24 (98 – 02)

Ví dụ 2: Cần tính: $\int (x^3 + 4x^2 - 5x + 6)e^{-x} dx$
Ta có sơ đồ sau:



Vậy, dựa vào sơ đồ trên, ta có kết quả của bài toán là:

$-(x^3 + 4x^2 - 5x + 6)e^{-x} - (3x^2 + 8x - 5)e^{-x} - (6x - 8)e^{-x} - 8e^{-x}$
Hay:

A. $f(x)$ B. $g(x)$ C. $h(x)$ D. Em không biết

■ $f(x)$ ■ $g(x)$ ■ $h(x)$



LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tác giả chân thành cảm ơn các Thầy Cô cộng tác viên: Bùi Quốc Long – cựu Sv Khoa Vật lý; Đỗ Hồng Thắm – GV Toán Trường Hermann Gmeiner – Bến Tre; Cao Văn Trọng Nghĩa – GV Toán Trường THPT Ten-lơ-man (Tp.HCM); Vũ Đại Hội – GV Vật lý Trường THPT Võ Thị Sáu (Tp.HCM); Trần Trí Dũng – GV Khoa Toán – Tin – ĐHSP Tp.HCM; Bùi Thế Anh – cựu GV Khoa Toán – Tin – ĐHSP Tp.HCM đã đồng hành cùng trang [Trắc nghiệm Toán THPT - QG](https://facebook.com/tracnghiemToan12) (<https://facebook.com/tracnghiemToan12>) trong suốt thời gian qua để kịp thời ra mắt ấn phẩm đặc biệt: **MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH TOÁN TRẮC NGHIỆM BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI - PHẦN I: GIẢI TÍCH và SỐ PHỨC** trong dịp kỷ niệm 40 năm thành lập khoa Toán – Tin – Trường ĐH Sư phạm Tp.HCM (10/1976 – 10/2016).

Bên cạnh đó, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô là cựu sinh viên Khoa Toán – khóa 22, 23, 24 đã ủng hộ kinh phí để in **400 ấn phẩm đặc biệt (bản đẹp)** nhân dịp kỷ niệm **40 năm thành lập Khoa Toán - Tin** để gửi đến các Thầy Cô khóa 22, 23, 24 và các đại biểu về dự lễ kỷ niệm vào sáng ngày 12/11/2016 tại hội trường B. Phần kinh phí còn dư (hoặc Quý Thầy Cô có nhã ý ủng hộ thêm), tác giả đề nghị 2 hình thức như sau:

- **Hình thức 1:** mua máy tính bỏ túi tặng cho các em học sinh có hoàn cảnh gia đình khó khăn tại trường các Thầy Cô đang công tác với danh nghĩa Hội Cựu sinh viên Khoa Toán – Tin trao tặng.
- **Hình thức 2:** đóng góp cho quỹ Học bổng Vượt khó do các giảng viên trẻ của Khoa Toán – Tin điều hành (từ năm 2014) để trao học bổng cho các em sinh viên Khoa Toán gặp khó khăn trong cuộc sống.

Do thời gian có hạn, và là phiên bản đầu tiên nên chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Nếu Thầy Cô phát hiện những chỗ sai sót, hoặc muốn đóng góp thêm những phương pháp hay nhằm giúp Học sinh có thể học và thi tốt trắc nghiệm môn Toán, hay cần tác giả hỗ trợ tập huấn cho HS, tác giả rất mong Quý Thầy Cô gửi các ý kiến đóng góp về địa chỉ: nhannvt@hcmup.edu.vn hoặc gửi tin nhắn trên trang [Trắc nghiệm Toán THPT - QG](https://facebook.com/tracnghiemToan12).

Mọi đóng góp quý báu của Quý Thầy Cô sẽ được tác giả tôn trọng bản quyền và đính kèm Watermark tên (hoặc nickname) của Quý Thầy Cô trên bài viết khi trang chia sẻ. Nếu không được Quý Thầy Cô đồng ý, tác giả sẽ không tự tiện chuyển giao công nghệ cho đối tác thứ 3 (trung tâm phát triển kỹ năng sư phạm hoặc trường THPT).

Xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô,

Tp.HCM, ngày 10/11/2016

Nguyễn Vũ Thụ Nhân

MỘT SỐ KỸ THUẬT CƠ BẢN CỦA MÁY TÍNH CASIO FX – 570 MS (và các loại tương đương)

1. Sử dụng ô nhớ:

- Để gán một số vào ô nhớ A ta gõ:
SỐ CẦN GÁN → Shift → RCL (STO) → (-) [A]
- Để truy xuất số trong ô nhớ A ta gõ:
ALPHA → (-) A → =
- Hàng phím thứ 6 và hàng phím thứ 5 từ dưới lên lưu các ô nhớ A, B, C, D, E, F, X, Y, M tương ứng như sau:



2. Tính năng bảng giá trị: Mode 7

- f(X) = Nhập hàm cần lập bảng giá trị trên đoạn [a; b]
- Start? Nhập giá trị bắt đầu a
- End? Nhập giá trị kết thúc b
- Step? Nhập bước nhảy h: $h_{min} = \frac{b-a}{25}$; $h_{max} = \frac{b-a}{2}$

3. Tính năng tính toán số phức: Mode 2

4. Tính năng giải phương trình bậc 2, bậc 3, hệ 2 phương trình 2 ẩn, hệ 3 phương trình 3 ẩn: Mode 5

5. Tính năng tính các bài toán vecto: Mode 8

Chủ đề 1: MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Tìm giới hạn

1.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Tính $f(x_0 + 0.0001)$, chọn kết quả gần nhất.

- Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{4x + 5} - 3}$. Ta tính $\frac{(1.0001)^2 - 4 \cdot (1.0001) + 3}{\sqrt{4 \cdot (1.0001) + 5} - 3} = -2.99988$. Chọn đáp án - 3.

1.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$: Nếu là $+\infty$ thì tính $f(10^6)$, nếu là $-\infty$ thì tính $f(-10^6)$ chọn kết quả gần nhất.

Dạng 2: Định a để hàm số liên tục tại x_0 . Tính $f(x_0 + 0.0001)$, chọn giá trị a gần nhất.

Dạng 3: $f(x)$ là Hàm số chẵn, hàm số lẻ? Tính $f(-1)$ và $f(1)$. So sánh dấu. Nếu $f(-1) = f(1)$ thì hàm số chẵn, nếu $f(-1) = -f(1)$ là hàm lẻ.

Dạng 4: Định m để $f(x)$ là hàm chẵn (hoặc lẻ). Giải $f(-1) = f(1)$ (hoặc $f(-1) = -f(1)$), chọn m.

Dạng 5: tìm đạo hàm $y'(x_0)$. Chỉ cần tính biểu thức:

$$\frac{y(x_0 + 0.0001) - y(x_0)}{0.0001} = [y(x_0 + 0.0001) - y(x_0)] \cdot 10^4, \text{ chọn giá trị gần nhất.}$$

Ví dụ: Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Giá trị $y'(0)$ bằng bao nhiêu? A. -1 B. -3 C. 0 D. 3

- Ta tính $\left[\frac{2(0.0001)+1}{0.0001-1} - (-1) \right] \cdot 10^4 = -3.0003....$ Chọn đáp án B.

Dạng 6: phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) $y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ thuộc (C). Kiểm tra biểu thức: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$, Với hàm tính y' phức tạp thì tính với $y'(x_0)$ như dạng 5.

- Ví dụ: Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = x^3 - 2x$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là: A. $y = -x + 2$. B. $y = -x - 2$ C. $y = x - 2$ D. $y = x + 2$
- Bài này y' đơn giản, $Y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(-1) = 1$. Loại A, B.
- $X = -1$ thì $Y = 1$. Thế X, Y vào C, sai. Loại C, chọn D.

Dạng 6 : hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$?

Dùng tính năng bảng giá trị TABLE, chọn điểm bắt đầu, điểm kết thúc, bước nhảy thích hợp, sao cho phủ hết các phương án trả lời để xét dấu hàm $F(X)$

Ví dụ: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2016$ đồng biến trên các khoảng ?

- A. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$
- B. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$
- C. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Cả 3 đáp án trên đều sai.

CHỦ ĐỀ 2. KIỂM TRA NHANH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Dạng 1 : Nghiệm phương trình lượng giác $F(\sin ; \cos ; \tan ; \cot)=0$

Để kiểm tra nghiệm của phương trình lượng giác, chỉ cần máy tính **có chức năng tính bằng giá trị (TABLE)** (hầu như tất cả máy tính đều có tính năng này, chỉ trừ mấy máy tính chỉ có 4 phép tính cơ bản thì đành bó tay thôi). Kiểm tra máy có chức năng **TABLE** bằng cách nhấn phím **MODE**.

Khi làm việc với hàm lượng giác, máy tính phải để **chế độ RAD (R)** thay vì DEG (D). (**Shift -> Mode -> 4**)

Phương pháp:

- Khi dùng tính năng bảng giá trị thì có bước: **Nhập hàm** (Phương trình); **Giá trị bắt đầu** (Start); **Giá trị kết thúc** (End?); **Bước nhảy** (step?)
- **Nhập hàm**: chuyển hết phương trình sang về trái, về phải luôn bằng 0
- Nhận xét trước các phương án đáp án để chọn khoảng xét:
 - + Nếu các nghiệm đều dương thì chọn khoảng xét là: **[0; 2π]**
 - + Nếu có nghiệm âm thì chọn **$[-\pi ; \pi]$**
 - + Chọn 1 vòng đường tròn lượng giác là để xét ($+k2\pi$) hay ($+k\pi$) hay ($+k\pi/2$)
- Nhận xét các giá trị nghiệm để chọn bước nhảy thích hợp.
- Sau khi có bảng giá trị, **nhìn vào cột F(X) nếu giá trị bằng 0**, thì giá trị **X bên trái là nghiệm**.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sin 3x + \sin x = \cos 3x + \cos x$ có nghiệm là:

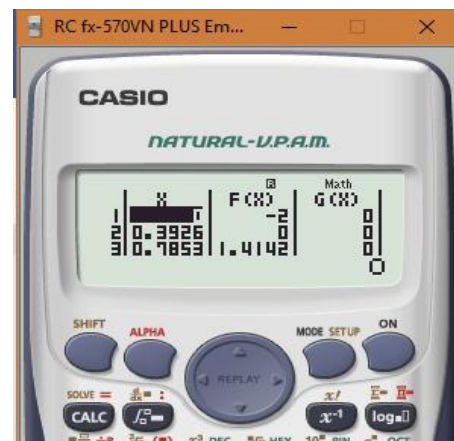
A. $\pi/2 + 2k\pi$ v $\pi/4 + k\pi$ B. $\pi/2 + k\pi$ v $\pi/4 + k\pi$

C. $\pi/2 + k\pi$ v $\pi/8 + k\pi/2$; D. $k\pi/$ v $\pi/8 + k\pi$

- Mode $\rightarrow 7$

Nhập hàm: $f(X) = \sin(3X) + \sin(X) - \cos(3X) - \cos(X)$. $\rightarrow =$

Start? **0** (do nghiệm dương); End? **2π** ; Step? **$\pi/8$** (do các phương án là $\pi/8$; $\pi/4$; $\pi/2$)



Nhìn vào cột F(X) có $X_2 = 0 + \pi/8$ là nghiệm; $X_5 = 0 + 4\pi/8 = \pi/2$; $X_6 = 0 + 5\pi/8 = \pi/8 + \pi/2$ là nghiệm. Ta nhanh chóng có đáp án: $\pi/8 + k\pi/2$ và $\pi/2$ là nghiệm.

Chọn đáp án C

Ví dụ 2: Gpt: $4(\sin^6 x + \cos^6 x) + 2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 8 - 4\cos^2 2x$

A. $\pm\pi/3 + k\pi/2$ B. $\pm\pi/24 + k\pi/2$ C. $\pm\pi/12 + k\pi/2$; D. $\pm\pi/6 + k\pi/2$

Nhập hàm: $4 * (\sin(X)^6 + \cos(X)^6) + 2 * (\sin(X)^4 + \cos(X)^4) - 8 + 4 * \cos(2 * X)^2$

Do nghiệm đối xứng và nghiệm dương nằm trong khoảng $(0; \pi/2)$ và các nghiệm cách đều nên chọn **Start = 0 ; End = $\pi/2$; Step = $\pi/24$** (nếu nhận xét nhanh hơn thì có thể chọn **Start = $\pi/24$; End = $\pi/3$ và Step = $\pi/24$** . Như vậy sẽ rút ngắn thời gian). **Ta có đáp án C**

Dạng 2: Giải bất phương trình lượng giác

Để giải bất phương trình lượng giác ta đưa về dạng $F(\sin x; \cos x; \tan x) \leq 0$ (hoặc ≥ 0). Tức chuyển tất cả biểu thức sang về trái.

Ứng dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để xét dấu hàm F. Từ đó, suy ra khoảng nghiệm của bất phương trình.

Phương pháp: Chuyển máy tính sang chế độ RAD: rồi sang tính năng TABLE **Mode 7 (hoặc 4)**. **F(x) =**. Nhập phương trình vào (nhớ chuyển hết phương trình sang về trái, để vế phải bằng 0).

Do bộ nhớ của Casio fx570 không đủ nên chạy 2 lần cho 2 đoạn $[0; \pi]$ và $[\pi; 2\pi]$

Start? 0 (π) End? π ($2*\pi$) Step? $\pi/24$

Có thể phân tích trước các phương án trả lời để chọn bước nhảy tốt hơn (hoặc thu gọn khoảng xét nghiệm), để máy tính tính nhanh hơn. (Nên tham khảo thêm phương pháp giải nhanh phương trình lượng giác, để tham khảo cách chọn khoảng xét và bước nhảy thích hợp)

- **Nhìn vào cột F(X), lựa khoảng $F(x) < 0$ (hoặc > 0) và so với phương án trả lời để chọn phương án đúng.**
- **Chú ý: $X_1 = 0 (\pi)$; $X_i = X_1 + (i-1) \cdot \pi/24 = X_1 + (i-1) \cdot \text{step}$**

Ví dụ 1: Xét bất phương trình: $\sin x + \sin 3x < \sin 2x$

Nhấn Shift -> Mode -> 4, chuyển sang RAD. Nhấn Mode -> 7, chọn TABLE

Nhập hàm $f(X) = \sin(x) + \sin(3 * x) - \sin(2 * x)$

Lần 1: Start? 0; End? π ; Step? $\pi/24$

Dựa vào bảng giá trị:

+ $F(X_9) = F(X_{13}) = 0$; $F(X_i) < 0$, $i = 10, 11, 12$. Vậy $F < 0 : \frac{(9-1)\pi}{24} < X < \frac{(13-1)\pi}{24}$

Lần 2 (nhấn AC): Start? π ; End? 2π ; Step? $\pi/24$

+ $F(X_1) = F(X_{13}) = 0$; $F(X_i) < 0$. Nghĩa là: từ $(\pi; \pi + \frac{(13-1)\pi}{24}) \equiv (\pi; \frac{3\pi}{2})$

+ $F(X_{17}) = F(X_{25}) = 0$; $F(X_i) < 0$. Nghĩa là: $(\pi + \frac{(17-1)\pi}{24}; \pi + \frac{(25-1)\pi}{24}) \equiv (\frac{5\pi}{3}; 2\pi)$

Ví dụ 2 : Giải bất phương trình : $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$

Nhập hàm $f(X) = \cos(x) - \sin(x) - \cos(2 * x)$. Xét dấu > 0

Lần 1: Start? 0; End? π ; Step? $\pi/24$

Dựa vào bảng giá trị: $F(X_7) = F(X_{13}) = 0$; $F(X_i) > 0$. Vậy: $X \in (\frac{(7-1)\pi}{24}; \frac{(13-1)\pi}{24})$

Lần 2: Start? π ; End? 2π ; Step? $\pi/24$ ta cũng sẽ có: $X \in (\pi + \frac{\pi}{4}; 2\pi)$

Chủ đề 3. Kiểm tra nhanh biểu thức nào là đạo hàm của $f(x)$

Bài toán: Đạo hàm của biểu thức $f(x)$ là: A. $g(x)$ B. $h(x)$ C. $k(x)$ D. $l(x)$

Kiến thức toán học: $y(x)$ là đạo hàm của $f(x)$ nếu: $f'(x) = y(x), \forall x \in D$. Vậy phải đúng với x_0 bất kỳ thuộc D .

Phương pháp:

Cần nhớ: $f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+0.0001)-f(x_0)}{0.0001} = [f(x_0 + 10^{-4}) - f(x_0)].10^4$

Vậy chỉ cần bấm máy để **tính $f'(x_0)$ và kiểm tra $g(x_0), h(x_0), k(x_0), l(x_0)$** . Đáp án nào gần $f'(x_0)$ thì đó là đáp án cần tìm.

Thường chọn x_0 là 1 trong 4 giá trị: 0; 1; 2; 3 (tùy bài để chọn và phải đảm bảo các giá trị đó thuộc miền xác định). Nếu hàm lượng giác thì thường chọn 0; $\pi/4$; $\pi/2$ (rad)

Lưu ý:

1. chỉ dùng khi hàm $f(x)$ quá phức tạp thôi nha. Vẫn khuyến khích các bạn làm theo phương pháp chính thống, không phụ thuộc máy tính.
2. Nếu thử x_0 mà có 2 kết quả gần giống nhau thì chọn thêm x_0 khác nhé

Ví dụ: Đạo hàm của $(x-1).\ln x$ là:

- A. $\ln x$ B. $\frac{(x-1)}{x}$ C. $\frac{(x-1)}{x} - \ln x$ D. $\frac{(x-1)}{x} + \ln x$

Hàm này không kiểm tra với $x = 0$ (vì không xác định). $x = 1$ thì tất cả đều bằng 0.

Kiểm tra $x = 2$: $y'(2) \approx \frac{y(2.0001)-y(2)}{0.0001} = \frac{(1.0001).\ln(2.0001)-\ln 2}{0.0001}$. Bấm máy: **1.19318468**

Kết quả các đáp án: A. $\ln 2 = 0.693$ B. 0.5 C. -0.193147 D. **1.1931471**

Vậy đáp án D

Ví dụ: Đạo hàm của $y = \frac{2\sin x + \cos x}{2\cos x - \sin x}$ là:

- A. $\frac{\sin x + \cos x}{(2\cos x - \sin x)^2}$ B. $\frac{-\sin x + 3\cos x}{(2\cos x - \sin x)^2}$ C. $\frac{5}{(2\cos x - \sin x)^2}$ D. $\frac{5(\sin x)^2 - 5(\cos x)^2}{(2\cos x - \sin x)^2}$

Kiểm tra với $x_0 = 0$ (rad).

Lưu ý: hàm lượng giác thì máy tính phải để chế độ Rad thay vì Deg.

$y'(0) \approx \frac{y(0.0001)-y(0)}{0.0001} = \frac{\frac{2\sin(0.0001)+\cos(0.0001)}{2\cos(0.0001)-\sin(0.0001)} - \frac{2\sin 0 + \cos 0}{2\cos 0 - \sin 0}}{0.0001}$. Bấm máy: **1.250062507**

Kết quả các đáp án: A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. **$\frac{5}{4} = 1.25$** D. $-\frac{5}{4}$

Vậy đáp án C

Chủ đề 4. NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ HÀM BẬC 3 ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

Đồ thị có dạng:

$a > 0$ và $\Delta < 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	y'		$+$	y	$-\infty$	$+\infty$	Các giá trị hoành độ đặc biệt là $x_I, \dots$ nên lấy các hoành độ nguyên và đối xứng qua x_I .																					
x	$-\infty$	$+\infty$																														
y'		$+$																														
y	$-\infty$	$+\infty$																														
$a < 0$ và $\Delta < 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	y'		$-$	y	$+\infty$	$-\infty$	Các giá trị hoành độ đặc biệt là $x_I, \dots$ nên lấy các hoành độ nguyên và đối xứng qua x_I .																					
x	$-\infty$	$+\infty$																														
y'		$-$																														
y	$+\infty$	$-\infty$																														
$a > 0$ và $\Delta = 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{3a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$	y'	$+$	0	$+$	y	$-\infty$		$+\infty$	Các giá trị hoành độ đặc biệt là $x_I, \dots$ nên lấy các hoành độ nguyên và đối xứng qua x_I .																		
x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$																													
y'	$+$	0	$+$																													
y	$-\infty$		$+\infty$																													
$a < 0$ và $\Delta = 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{3a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$	y'	$-$	0	$-$	y	$+\infty$		$-\infty$	Các giá trị hoành độ đặc biệt là $x_I, \dots$ nên lấy các hoành độ nguyên và đối xứng qua x_I .																		
x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$																													
y'	$-$	0	$-$																													
y	$+\infty$		$-\infty$																													
$a > 0$ và $\Delta > 0$ ($y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>y_{CT}</td><td>y_{CD}</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	0	$-$	y	$+\infty$		y_{CT}	y_{CD}	$-\infty$	Bảng giá trị <table><tr><td>x</td><td>$2x_1 - x_I$</td><td>x_1</td><td>$x_I \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$</td><td>$x_2$</td><td>$2x_2 - x_I$</td></tr><tr><td>$y$</td><td>$y_{CD}$</td><td>$y_{CT}$</td><td>$\frac{y_{CT} + y_{CD}}{2}$</td><td>$y_{CD}$</td><td>$y_{CT}$</td></tr></table>	x	$2x_1 - x_I$	x_1	$x_I \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$	x_2	$2x_2 - x_I$	y	y_{CD}	y_{CT}	$\frac{y_{CT} + y_{CD}}{2}$	y_{CD}	y_{CT}	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																												
y'	$-$	0	$+$	0	$-$																											
y	$+\infty$		y_{CT}	y_{CD}	$-\infty$																											
x	$2x_1 - x_I$	x_1	$x_I \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$	x_2	$2x_2 - x_I$																											
y	y_{CD}	y_{CT}	$\frac{y_{CT} + y_{CD}}{2}$	y_{CD}	y_{CT}																											
$a < 0$ và $\Delta > 0$ ($y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>y_{CD}</td><td>y_{CT}</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	y'	$+$	0	$-$	0	$+$	y	$-\infty$		y_{CD}	y_{CT}	$+\infty$	Bảng giá trị <table><tr><td>x</td><td>$2x_1 - x_I$</td><td>x_1</td><td>$x_I \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$</td><td>$x_2$</td><td>$2x_2 - x_I$</td></tr><tr><td>$y$</td><td>$y_{CT}$</td><td>$y_{CD}$</td><td>$\frac{y_{CD} + y_{CT}}{2}$</td><td>$y_{CT}$</td><td>$y_{CD}$</td></tr></table>	x	$2x_1 - x_I$	x_1	$x_I \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$	x_2	$2x_2 - x_I$	y	y_{CT}	y_{CD}	$\frac{y_{CD} + y_{CT}}{2}$	y_{CT}	y_{CD}	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																												
y'	$+$	0	$-$	0	$+$																											
y	$-\infty$		y_{CD}	y_{CT}	$+\infty$																											
x	$2x_1 - x_I$	x_1	$x_I \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$	x_2	$2x_2 - x_I$																											
y	y_{CT}	y_{CD}	$\frac{y_{CD} + y_{CT}}{2}$	y_{CT}	y_{CD}																											

Trong đó : x_I là hoành độ điểm uốn ; x_1, x_2 là hoành độ điểm cực trị :

$$a > 0 : x_1 = x_{CD} < x_{CT} = x_2 ; a < 0 : x_1 = x_{CT} < x_{CD} = x_2$$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$: $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$: $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$
- Hàm số có cực đại và cực tiểu: $b^2 - 3ac > 0$
- Phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $a \neq 0$ (1)
 - o Nếu $a + b + c + d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 1$
 - o Nếu $a - b + c - d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -1$
 - o Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p là ước số của d và q là ước số của a .

- Hàm số bậc 3 luôn **nhận điểm uốn I (x_I ; $y(x_I)$) làm tâm đối xứng**: x_I thỏa:

$$y''(x_I) = 0 \text{ và } x_I = \frac{x_{CD} + x_{CT}}{2}; y_I = \frac{y_{CD} + y_{CT}}{2}; x_I = -\frac{b}{3a}; y_I = d + c\left(-\frac{b}{3a}\right) - 2a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3$$

- **Đường thẳng nối 2 điểm CD và CT luôn đi qua điểm uốn I.**
- Phương trình đường thẳng nối 2 điểm CD và CT:
 - o lấy y chia y' . Phần dư của phép chia chính là đường thẳng cần tìm.
 - o phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị :

$$y = \frac{2}{3}\left(c + b\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)x + d - \frac{bc}{9a} \quad (1)$$

- Chỉ có duy nhất **điểm uốn I(x_I ; $y(x_I)$) là từ đó kẻ được duy nhất 1 tiếp tuyến với đồ thị**. Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm uốn:

$$y = \left[c + b\left(-\frac{b}{3a}\right)\right]x + \left[d + a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3\right] \quad (2)$$

- Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị có: **hệ số góc nhỏ nhất ($a > 0$); hệ số góc lớn nhất ($a < 0$)**. Khi đó hệ số góc tiếp tuyến: $k = c + b\left(-\frac{b}{3a}\right)$ (3)

- **Tiếp tuyến tại điểm cực trị song song với trục hoành.**

- Cho (C): $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Điểm A trên (C) có hoành độ $x = x_0$. Tiếp tuyến của (C) tại A lại cắt (C) tại A'. Hoành độ của A' là: $-2x_0 - \frac{b}{a}$ (4)

- Định m để phương trình $f(x) = a(m)x^3 + b(m)x^2 + c(m)x + d(m) = 0$ có **3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng (3 điểm cách đều nhau)**. Bài toán tương đương với việc định m để **điểm uốn nằm trên trục hoành** hay:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{b(m)}{3a(m)}\right) = 0 \\ b^2(m) - 3a(m) \cdot c(m) > 0 \end{cases} \quad (5) \text{ (gặp câu này nếu 4 hệ số phức tạp, thế 4}$$

phương án vào kiểm tra bằng máy tính nhanh hơn)

- **Định m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $y = kx + e$** : Do điểm uốn I là tâm đối xứng của hàm số nên

ta chỉ cần định m để: điểm uốn I thuộc (d) và phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị vuông góc với (d). Hay: định m để:

$$\begin{cases} y_I = kx_I + e \\ \frac{2}{3}\left(c + b\left(-\frac{b}{3a}\right)\right) = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

Ví dụ: Định m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ta có: tọa độ điểm uốn: $x_I = -\frac{b}{3a} = m \rightarrow y_I = m^3 - 3mm^2 + 4m^3 = 2m^3$

$$\frac{2}{3}\left(c + b\left(-\frac{b}{3a}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(0 + (-3m)\left(-\frac{-3m}{3}\right)\right) = -2m^2$$

Vậy ta tìm m để: $\begin{cases} 2m^3 = m \\ -2m^2 = -1 \end{cases} \leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2}$

KỸ THUẬT KIỂM TRA NHANH PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3 CÓ 3 NGHIỆM LẬP THÀNH CẤP SỐ CỘNG BẰNG MÁY TÍNH

Kiến thức Toán học:

Để phương trình $ax^3 + b*x^2 + c*x + d = 0$ có **3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng (3 điểm cách đều nhau)**. Bài toán tương đương với việc **điểm uốn nằm trên trục hoành** hay **$x = -b/3a$** là nghiệm phương trình.

Dùng máy tính: máy tính CASIO fx-570 ES có tính năng giải phương trình bậc 3.

Ta chỉ cần cho máy tính giải :

- Nếu X_1, X_2 là nghiệm phức thì loại;
- **X_1, X_2 là nghiệm thực và khác $X_3, X_3 = -b/3a$** thì phương trình đó có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Ví dụ: Trong các phương trình sau, phương trình nào có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng: a. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ b. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ c. $x^3 + x = 0$

Dùng chức năng giải phương trình bậc 3: Mode $\rightarrow 5 \rightarrow 4$

Kiểm tra pt a: Nhập $a = 1, b = -6, c = 11, d = -6$. $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2$ (nhận)

Kiểm tra pt b: Nhập $a = 1, b = -3, c = -6, d = 8, X_1 = -2; X_2 = 4; X_3 = 1$ (nhận)

Kiểm tra pt c: Nhập $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0, X_1 = i; X_2 = -i; X_3 = 0$ (loại)

Dạng 2: Định giá trị tham số m để phương trình $f(x) = a(m)x^3 + b(m)x^2 + c(m)x + d(m) = 0$ có **3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng**

Việc giải điều kiện: $\begin{cases} f\left(-\frac{b(m)}{3a(m)}\right) = 0 \\ b^2(m) - 3 \cdot a(m) \cdot c(m) > 0 \end{cases}$ tốn nhiều thời gian.

Đề cho 4 phương án ứng với các giá trị m, chỉ cần thay m vào và kiểm tra phương trình có nghiệm $x_3 = -b/3a$ như ở dạng trên không?

Ví dụ: với giá trị nào của m thì pt: $x^3 - 6m(2 - m^2)x^2 + 11m(2 - m)x - 6 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt cách đều nhau (lập thành CSC): A. m = -1 B. 0 C. 1 D. 2

- Lần lượt gán các giá trị -1, 1, 0, 2 cho các phím A, B, C, D trên máy tính: -1 Shift STO A; 1 Shift STO B; 0 Shift STO C; 2 Shift STO D

- Giải A: Mode -> 5 -> 4: 1 -> $-6 \cdot (1-A^2)$ -> $11 \cdot A \cdot (A-1)$ -> -6 (loại)
- Giải B: Mode -> 5 -> 4: 1 -> $-6 \cdot (1-B^2)$ -> $11 \cdot B \cdot (B-1)$ -> -6 (loại)
- Giải C: Mode -> 5 -> 4: 1 -> $-6 \cdot (1-C^2)$ -> $11 \cdot C \cdot (C-1)$ -> -6 (nhận)
- Giải D : Mode -> 5 -> 4: 1 -> $-6 \cdot (1-D^2)$ -> $11 \cdot D \cdot (D-1)$ -> -6 (loại)

@ Thay vì gán giá trị m cho 4 biến A, B, C, D có thể thế trực tiếp m vô phương trình để giải.

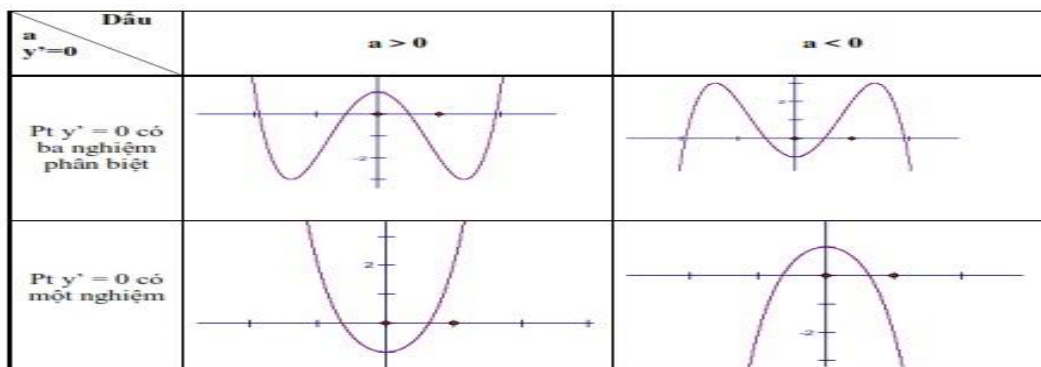
Dạng toán tương đương : thay vì định m để phương trình có 3 nghiệm cách đều (3 nghiệm lập thành CSC) thì có thể cho như sau : Định giá trị m để trục hoành cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt sao cho diện tích giới hạn bởi (C) và phía trên trục hoành bằng phần diện tích giới hạn bởi (C) và phía dưới trục hoành.

Chủ đề 5. NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG

$$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$f(x)$ là hàm chẵn. Đồ thị đối xứng qua trục Oy.

Đồ thị có dạng:



Khi nào hàm số có **1 điểm cực trị**? Khi **$ab > 0$**

- Hàm số có cực tiểu, không có cực đại: **$a > 0, b > 0$**
- Hàm số có cực đại, không có cực tiểu: **$a < 0, b < 0$**

Khi nào có **3 điểm cực trị**?

$$Y' = 2x(2ax^2 + b) = 0 \text{ có 3 nghiệm} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$$

3 điểm cực trị lần lượt là A, B, C thì :

- **$a > 0, b < 0$** : x_A, x_C là **2 điểm cực tiểu** ; $x_B = 0$ là **điểm cực đại**.
- **$a < 0, b > 0$** : x_A, x_C là **2 điểm cực đại** ; $x_B = 0$ là **điểm cực tiểu**.

Tọa độ 3 điểm A, B, C : $A\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$; $B(0; c)$; $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

Tổng bình phương các hoành độ của 3 điểm cực trị: $-\frac{b}{a}$

Luôn có **$\triangle ABC$ cân tại B**. $\overrightarrow{BA} = \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{b^2}{4a}\right)$; $\overrightarrow{BC} = \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right)$

A, C luôn nằm trên đường thẳng: $y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ và độ dài $|AC| = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

$\triangle ABC$ vuông cân thì chỉ có vuông tại B. Khi đó: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$

$\triangle ABC$ đều thì $|AC| = |AB| \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$

$\triangle ABC$ nhận $O(0;0)$ làm trọng tâm tam giác $\begin{cases} 3x_O = x_A + x_B + x_C \\ 3y_O = y_A + y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow b^2 = 6ac$

$\triangle ABC$ có 1 góc bằng 120° thì $\hat{B} = 120^\circ \Leftrightarrow b^3 + \frac{8}{3}a = 0$

Bài toán 1: Định tham số để hàm số $ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng. Tức là: pt $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng: Chỉ cần định tham số thỏa $b^2 = \frac{100}{9}ac$

Bài toán 2: Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành có diện tích phần phía trên và phần phía dưới bằng nhau.

Để giải bài toán này ta chỉ cần định tham số sao cho: $b^2 = \frac{36}{5}ac$

Bài toán 3: Tìm những điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được 1 hoặc 3 tiếp tuyến đến đồ thị.

Chỉ có điểm $(0; c)$ là mới có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị và hệ số góc tiếp tuyến được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow k = 0; \\ x = -\sqrt{-\frac{b}{3a}} \rightarrow k = -\frac{2b}{3} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3a}}; \\ x = \sqrt{-\frac{b}{3a}} \rightarrow k = \frac{2b}{3} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3a}} \end{cases}$$

Chỉ có điểm $(0; \frac{-b^2+4ac}{4a})$ là mới có thể kẻ được 1 tiếp tuyến đến đồ thị và tiếp tuyến là: $y = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

PHƯƠNG PHÁP QUI ĐỔI TRONG TRƯỜNG HỢP HỆ SỐ $a = \pm 1$.

Kiến thức Toán học :

Nếu $a = 1$:

Thực hiện phép tịnh tiến : theo trục (OY) : $Y = y - c = x^4 + bx^2$ (ngắt bỏ hệ số tự do)

Khi đó : để có 3 điểm cực trị thì $b < 0$ nên luôn viết được b dưới dạng : $-2d^2$ ($d > 0$)

Nếu $a = -1$: $Y = c - y = x^4 - bx^2$

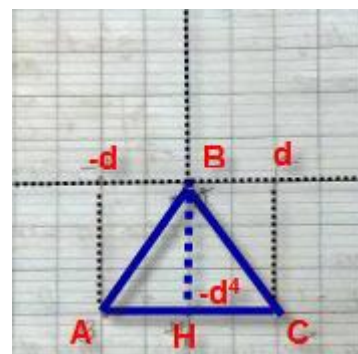
Khi đó : để có 3 điểm cực trị thì $-b < 0$ nên luôn viết được -b dưới dạng : $-2d^2$ ($d > 0$)

Vậy hàm số viết được dưới dạng : $Y = x^4 - 2d^2x^2$

- Phép tịnh tiến không làm thay đổi hình dáng và tính chất của các hình.

Khi đó, 3 điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(-d; -d^4)$; $B(0; 0)$; $C(d; -d^4)$

$\triangle ABC$ cân tại B.



Cạnh đáy $AC = 2d$; Chiều cao $BH = d^4$. $S_{ABC} = d^5$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$: $r = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{1+d^6}{2d^2}$

Khi đó, việc tính toán sẽ khá đơn giản và nhanh chóng hơn.

Ví dụ 1: Tìm giá trị m để hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + m^4 + m^2 + 2$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

Cách 1 : $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0 \Leftrightarrow -64(m-1)^3 + 24 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^3 = \frac{3}{8}$. $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Cách 2 : Qui đổi: $-4(m-1) = -2d^2 \Leftrightarrow m = 1 + d^2/2$ ($d > 0$) (1)

$\triangle ABC$ đều khi: $BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC \Leftrightarrow d^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2d \Leftrightarrow d^3 = \sqrt{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Ví dụ 2: Tìm giá trị m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 3$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Cách 1 : $\triangle ABC$ vuông khi và chỉ khi $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow (-2m)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Cách 2 : Qui đổi : $-2m = -2d^2 \Leftrightarrow m = d^2$ ($d > 0$) (*)

$\triangle ABC$ vuông (thì chỉ vuông tại B) khi: $BH = \frac{1}{2} \cdot AC \Leftrightarrow d^4 = \frac{1}{2} \cdot 2d \Leftrightarrow d^3 = 1 \Leftrightarrow d = 1$ (**)

Từ (*), (**) ta có : $m = 1$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + m + 10$. Tìm giá trị m để bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác (có 3 đỉnh là 3 điểm cực trị) bằng 1 ?

Qui đổi : $-2m = -2d^2 \Leftrightarrow m = d^2$ ($d > 0$)

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $r = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{1+d^6}{2d^2} = 1 \Leftrightarrow d^6 - 2d^2 + 1 = 0$

Từ đó : $d^2 = 1$; $d^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (loại) ; $d^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (3)

Cách 2 : Vì $\triangle ABC$ cân tại B(0 ;0) và $r = 1$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp sẽ là : I(0 ; -1)

Vậy : $IA = IB = IC = 1$, mà C (d ; $-d^4$) nên: $d^2 + (1-d^4)^2 = 1$ (*). Giải (*) ta cũng có kq (3)

Bằng phương pháp này, ta sẽ giải nhanh được các kết quả. Tuy nhiên, phương pháp này có điểm hạn chế là, nếu **hệ số $a \neq \pm 1$** sẽ **không giải quyết được**.

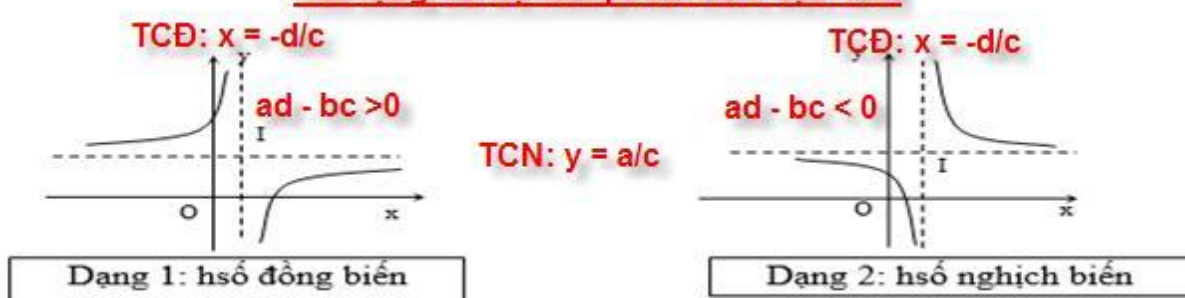
Chủ đề 6. NHỮNG KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT (HÀM PHÂN THỨC BẬC NHẤT)

(H): $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$). Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

- $ad - bc > 0$: hàm đồng biến trên D; $ad - bc < 0$: hàm nghịch biến trên D.
- $y = \frac{a}{c}$: là tiệm cận ngang; $x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng

Hai dạng đồ thị hàm phân thức bậc nhất



- Đồ thị (H) nhận **giao điểm 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng**. Tâm đối xứng I có tọa độ $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$
- **Quỹ tích tâm đối xứng của**: $y = \frac{a(m)x+b(m)}{c(m)x+d(m)}$.
 - o Điều kiện: $a(m).d(m) - b(m).c(m) \neq 0. (*)$
 - o Tâm đối xứng là giao điểm 2 đường tiệm cận: $\begin{cases} x = -\frac{d(m)}{c(m)} \\ y = \frac{a(m)}{c(m)} \end{cases} (**)$
 - o Khử mất m từ hệ (**), có phương trình quỹ tích (trừ những điểm ở điều kiện (*))
- Không có bất kỳ đường tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số (H) đi qua tâm đối xứng I.
- Giả sử M là điểm tùy ý thuộc (H). Nếu **tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B** thì:
 - o Phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}x + \frac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{(cx_0+d)^2}$
 - o M là trung điểm A, B: $A\left(-\frac{d}{c}; 2y_0 - \frac{a}{c}\right); B\left(2x_0 + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$
 - o Tam giác IAB có diện tích không đổi: $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB = \frac{2}{c^2}|ad - bc|$

- Tích khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là hằng số:

$$d_1 = d(M, TCĐ) = \frac{1}{2}IB; d_2 = d(M, TCN) = \frac{1}{2}IA \rightarrow d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{4}IA \cdot IB = \frac{1}{c^2} |ad - bc|$$

- Hai tiếp tuyến của (H) không bao giờ vuông góc nhau.
- Hai tiếp tuyến song song của (H) có các tiếp điểm đối xứng nhau qua tâm I của (H).
- Chỉ có 2 điểm $A\left(0; \frac{b}{d}\right)$ và $B\left(0; \frac{a}{c}\right)$ trên trục tung mà từ mỗi điểm đó chỉ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị. TT qua A: $y = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}x + \frac{b}{d}$; TT qua B: $y = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}x + \frac{a}{c}$
- Nếu đồ thị hàm số (H) cắt trục hoành tại $x = x_0$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = x_0$ là: $k = \frac{a^2}{ad-bc}$
- Nếu một đường tròn (C) cắt (H) tại 4 điểm sao cho 2 trong 4 điểm đó là các đầu mút đường kính đường tròn, thì 2 điểm còn lại đối xứng qua tâm I của (H).

Chủ đề 7. NHỮNG KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ BẬC HAI TRÊN BẬC NHẤT

(H): $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$; ($d \neq 0; ae^2 + cd^2 - bde \neq 0$). Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{e}{d}\right\}$

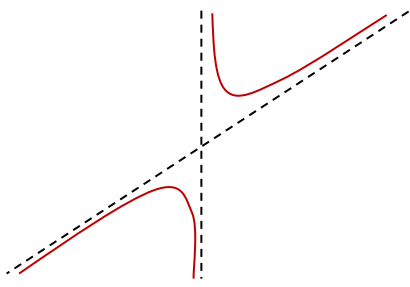
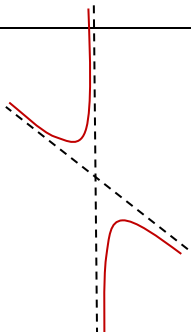
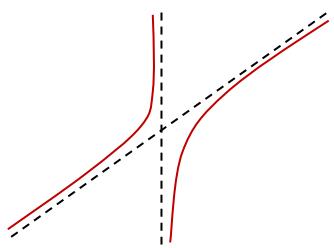
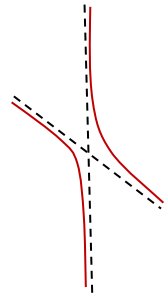
Đại lượng rất quan trọng của hàm bậc hai trên bậc nhất : $H = ae^2 + cd^2 - bde$

Câu nhảm nhảm để nhớ: Anh Em Ế (+) Có Đi Đâu Trừ Bộ Đôi Ếm

Viết lại: $y = \left(\frac{a}{d}x + \frac{bd-ae}{d^2}\right) + \frac{H}{d^2(dx+e)}$ (chỉ cần thực hiện phép chia đa thức, khỏi nhớ)

Đạo hàm: $y' = \frac{a}{d} - \frac{\frac{H}{d}}{(dx+e)^2} = \frac{\frac{a}{d}(dx+e)^2 - \frac{H}{d}}{(dx+e)^2} = \frac{1}{(dx+e)^2} \cdot \frac{a}{d} \cdot \left[(dx+e)^2 - \frac{H}{a}\right]$

- Dấu của y' phụ thuộc dấu của tam thức $g(x) = \frac{a}{d} \left[(dx+e)^2 - \frac{H}{a}\right]$.
 - o Do $ae^2 + cd^2 - bde \neq 0$ nên $y' = 0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có 2 nghiệm phân biệt.
 - o $\frac{H}{a} > 0$: Hàm số **có 2 cực trị**: $x_{CT} = -\frac{e}{d} \pm \frac{1}{d} \sqrt{\frac{H}{a}}$ ($ad > 0$: $x_{CD} < x_{CT}$; $ad < 0$: $x_{CT} < x_{CD}$)
 - o $\frac{H}{a} < 0$: Hàm số **không có cực trị**: $ad > 0$: luôn đồng biến; $ad < 0$: luôn nghịch biến
- $x = -\frac{e}{d}$ là tiệm cận đứng; $y = \frac{a}{d}x + \frac{bd-ae}{d^2}$: là tiệm cận xiên.

y'	$ad > 0$	$ad < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
	$x_{CD} + x_{CT} = 2x_I; y_{CD} + y_{CT} = 2y_I; y_{CD} = \frac{2ax_{CD}+b}{d}; y_{CT} = \frac{2ax_{CT}+b}{d}$	
$y' = 0$ vô nghiệm		

- Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng : $y = \frac{1}{d}(2ax + b)$
- Đồ thị (H) nhận **giao điểm 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng**. Tâm đối xứng I có tọa độ $I\left(-\frac{e}{d}; \frac{bd-2ae}{d^2}\right)$
- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm tùy ý thuộc (H).
 - Tích khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là hằng số: $\frac{|H|}{d^2 \cdot \sqrt{a^2 + d^2}} = T$
- $d_1 = d(M, TCD) = \left| \frac{dx_0 + e}{d} \right|$; $d_2 = d(M, TCX) = \left| \frac{H}{d(dx_0 + e)\sqrt{a^2 + d^2}} \right| \rightarrow d_1 \cdot d_2 = T$
- Phương trình tiếp tuyến tại M:

$$y = \frac{adx_0^2 + 2aex_0 + (be - cd)}{(dx_0 + e)^2}x + \frac{(bd - ae)x_0^2 + 2cdx_0 + ce}{(dx_0 + e)^2}$$
- Nếu **tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt tại A, B** thì:
 - M là trung điểm A, B: $A\left(-\frac{e}{d}; \frac{bd-2ae}{d^2} + \frac{2H}{d^2(dx_0+e)}\right); B\left(2x_0 + \frac{e}{d}; \frac{2ax_0+b}{d}\right)$
 - Diện tích ΔIAB không đổi: $S_{IAB} = 2 \left| \frac{H}{d^3} \right|$
 - ΔIAB có chu vi nhỏ nhất khi: $IA = IB \Leftrightarrow (dx_0 + e)^2 = \frac{|H|}{\sqrt{1+d^2}}$
 - Góc tạo bởi 2 đường tiệm cận: $\cos I = \frac{|a|}{\sqrt{1+d^2}}$
- Tại **các cặp điểm đối xứng nhau qua I** thì **các tiếp tuyến tại đó song song với nhau**
 - Thật vậy: $y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{a}{d} - \frac{H}{d(dx_1+e)^2} = \frac{a}{d} - \frac{H}{d(dx_2+e)^2}$
 - $\Leftrightarrow (dx_1 + e)^2 = (dx_2 + e)^2$. Vậy: $x_1 + x_2 = -\frac{2e}{d} = 2x_I$
- Tìm hoành độ 2 điểm C, D thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị để khoảng cách CD là nhỏ nhất:
 - $x_C = -\frac{e}{d} - x_1; x_D = -\frac{e}{d} + x_2 \ (x_1, x_2 > 0)$
 - $CD_{min} = \frac{8}{a^2} (a \cdot H + |H| \cdot \sqrt{a^2 + d^2}) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \cdot \sqrt{|d \cdot H|}$
- Điều kiện để tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 vuông góc với tiệm cận:
 - Hệ số góc tiếp tuyến tại x_0 : $y'(x_0) = \frac{a}{d} - \frac{H}{d(dx_0+e)^2}$
 - Vuông góc với TCD: $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{e}{d} \pm \frac{1}{d} \sqrt{\frac{H}{a}} \ (aH > 0)$ (x_0 là điểm cực trị)
 - Vuông góc với TCX: $\frac{a}{d} \cdot y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{e}{d} \pm \frac{1}{d \cdot \sqrt{a^2 + d^2}} \sqrt{aH} \ (aH > 0)$

Ví dụ: với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của $y = \frac{-3x^2+mx+4}{4x+m}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ vuông góc với tiệm cận?

- Có: $H = ae^2 + cd^2 - bde = -3m^2 + 4.4^2 - m.4.m = -7m^2 + 64$
- Vuông góc TCĐ: $0 = -\frac{m}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{-7m^2+64}{-3}} \rightarrow 4m^2 = 64 \rightarrow m = \pm 4$
- Vuông góc TCX: $0 = -\frac{m}{4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} \sqrt{-3(-7m^2+64)} \rightarrow m^2 = -48$ (VN)

Ví dụ: với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của $y = \frac{x^2+(m-2)x+m+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ vuông góc với tiệm cận?

- Có: $H = ae^2 + cd^2 - bde = 1 + (m+1) - (m-2) = 4$
- Vuông góc TCĐ: $0 = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{1}}$ (loại); Vuông góc TCX: $0 = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4}$ (loại).
- Vậy không có m .
- Tại các điểm có hoành độ: $x_0 = -3; 1; -1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}$ thì tiếp tuyến vuông góc với 2 TC

Ví dụ: Tìm trên (C) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ các điểm sao cho tiếp tuyến tại đó vuông góc với tiệm cận.

- Có: $H = ae^2 + cd^2 - bde = 1.1^2 + 2.1^2 - 2.1.1 = 1$
- Vuông góc TCX: $x = -1 \pm \frac{1}{1.\sqrt{2}} \sqrt{1.1} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Điều kiện để tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ vuông góc với đường thẳng nối điểm M với tâm đối xứng I : $(dx_0 + e)^2 = \frac{|H|}{\sqrt{a^2+d^2}}$ (coi chừng lộn với điều kiện ΔIAB có chu vi nhỏ nhất)

Thật vậy: phương trình đường thẳng nối điểm $M(x_0; y_0)$ với $I\left(-\frac{e}{d}; \frac{bc-2ae}{d^2}\right)$ là:

$$y = \left[\frac{a}{d} + \frac{H}{d(dx_0 + e)^2} \right] x + \frac{bd - ae}{d^2} + \frac{eH}{d^2(dx_0 + e)^2}$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại M : $y'(x_0) = \frac{a}{d} - \frac{H}{d(dx_0 + e)^2}$

Để thỏa điều kiện thì: $\left[\frac{a}{d} + \frac{H}{d(dx_0 + e)^2} \right] \cdot \left[\frac{a}{d} - \frac{H}{d(dx_0 + e)^2} \right] = -1$

Hay: $\frac{1}{d^2} \cdot \left[a^2 - \frac{H^2}{(dx_0 + e)^4} \right] = -1 \rightarrow a^2 - \frac{H^2}{(dx_0 + e)^4} = -d^2 \rightarrow a^2 + d^2 = \frac{H^2}{(dx_0 + e)^4}$

Tức là: $(dx_0 + e)^4 = \frac{H^2}{a^2 + d^2} \rightarrow (dx_0 + e)^2 = \frac{|H|}{\sqrt{a^2 + d^2}}$

Chủ đề 8. **PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH CÁC BÀI**

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT TRÊN ĐOẠN [a;b]

Kiến thức Toán học: Hàm $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm trong $(a;b)$:

1. Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc $[a;b]$
2. Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$
3. Số lớn nhất trong các số trên là GTLN (max) trên $[a;b]$. Số nhỏ nhất trong các số trên là GTNN (min) trên $[a;b]$

Dùng máy tính: Ta sẽ sử dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $[a;b]$. Từ đó, chọn giá trị thích hợp.

Phương pháp (với CASIO fx-570): 1 Nhấn Mode $\rightarrow$ 7 2. $f(X) =$. **Nhập hàm**

3. Start ? **Nhập giá trị a** 4. End ? **Nhập giá trị b** 5. Step? **Nhập giá trị (b-a)/25**

Máy tính sẽ tính bảng giá trị. Ta ghi nhanh giá trị đầu tiên, ghi nhận giá trị $F(X)$ tăng hay giảm đến bao nhiêu cho đến $F(X)$ cuối cùng. Từ đó có nhanh kết quả.

Ví dụ 1: Tìm GTNN của $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$: A. 6 B. -2 C. -3 D. $19/3$

Nhấn Mode 7. $F(X) = (X^2+3)/(X-1)$. Start ? **2** End ? **4** Step ? **(4-2)/25**

Từ bảng giá trị ta có $F(X1) = 7$ giảm dần về 6.0008 rồi lại tăng dần đến $F(X26) = 19/3 = 6.3333$

Vậy GTNN trong 4 phương án trả lời sẽ là 6 gần với 6.0008 nhất. **Chọn A.** Nếu đề hỏi GTLN thì có ngay max = 7 tại $X1 = 2$.

Ví dụ 2: Tìm GTNN, GTLN của $y = \sqrt[3]{(2x-1)(1-x)^2}$ trên đoạn $[0;3]$

Nhấn Mode 7. $F(X) = \sqrt[3]{(2 * X - 1) * (1 - X)^2}$. Start ? **0** End ? **3** Step ? **3/24** (không nên máy móc lấy $(b-a)/25$ lấy **3/24 = 1/8** cho đẹp)

Từ bảng giá trị **$F(X1) = -1$** tăng dần đến **0.3275** rồi giảm dần đến **0** rồi lại tăng dần đến **$F(X25) = 2.7144$**

Vậy **min = $F(X1) = y(0) = -1$** và **max = $F(X25) = y(3) = \sqrt[3]{20}$** . Từ đó chọn phương án thích hợp.

Ví dụ 3: Tìm GTNN, GTLN của $y = \cos x(1 + \sin x)$ trên đoạn $[0;2\pi]$

Hàm lượng giác nên máy tính chuyển sang chế độ **RAD** (shift-> mode $\rightarrow$ 4)

Nhấn Mode 7. $F(X) = \cos(X) * (1 + \sin(X))$. Start ? 0 End ? $2*\pi$ Step ? $2*\pi/24 = \pi/12$ (hàm lượng giác luôn chia 24 cho cung đẹp)

Từ bảng giá trị **$F(X1) = 1$** tăng dần đến **$F(X3) = 1.299$** rồi giảm dần đến **$F(X11) = -1.299$** rồi tăng dần đến **$F(X25) = 1$** .

Vậy trong 4 phương án, phương án nào gần -1.299 nhất (tại $X_{11} = 0 + 10\pi/12 = 5\pi/6$) là GTNN và phương án nào gần 1.299 nhất (tại $X_3 = 0 + 2\pi/12 = \pi/6$) là GTLN

Chủ đề 9. PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH CÁC BÀI

ĐỊNH THAM SỐ m ĐỂ HÀM $F(x)$ ĐẠT CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT

Dạng 1: Định tham số m để hàm số đạt GTLN – GTNN trên đoạn $[a;b]$

Bài toán thường cho 4 giá trị m. Tận dụng việc máy tính CASIO – FX 570 ES có thể tính bằng giá trị của 2 hàm $F(x)$ và $G(x)$ cùng lúc, ta sẽ giải bằng cách thế 2 tham số vào đề bài được 2 hàm $F(X)$ và $G(X)$ và dùng phương pháp ở bài trước để giải nhanh. Ở đây có thêm kỹ thuật gán số cho các biến trên máy tính CASIO – fx570ES.

Ví dụ: Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 6mx^2 + m^2$ có $\max_{-2 \leq x \leq 1} y(x) = \frac{4}{9}$

- A. 0 B. 2/3 C. 1 D. 4/3

Ta gán lần lượt gán giá trị 0; 2/3; 1; 4/3 cho các biến A, B, C, D trên máy tính như sau:

Nhấn 0; nhấn Shift; nhấn STO; nhấn A (lưu ý không nhấn Shift). Nhấn đúng trên màn hình sẽ hiện $0 \rightarrow A$

Tương tự: 2/3 Shift STO B; 1 Shift STO C; 4/3 Shift STO D

Giờ kiểm tra 2 phương án A, B trước.

Nhấn Mode 7.

$$F(x) = X^4 - 6 * \text{Alpha } A * X^2 + (\text{Alpha } A)^2$$

$$G(x) = X^4 - 6 * \text{Alpha } B * X^2 + (\text{Alpha } B)^2$$

Start? -2 End? 1 Step? 1-(-2)/12

Phương án A, max = 9 (loại); phương án B: **max = 0.444444 $\cong$ 4/9 (nhận)**

Nếu sai thì chỉ cần kiểm tra thêm phương án C để có kết quả.

Nhận xét:

Bài này mà tính trực tiếp thì khá khó khăn, mất khoảng gần 10 phút để giải.

Nếu máy chỉ nhập được 1 hàm $F(X)$ thì làm lần lượt 3 lần sẽ có kết quả (trong trường hợp xui nhất. Nếu may mắn thì chỉ 1 hoặc 2 lần kiểm tra).

Dạng 2: Định m để hàm số $f(X)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0

Kiến thức Toán học: Hàm $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 nếu: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0), \forall \Delta x$ (1)

Hàm $f(x)$ đạt cực tiểu x_0 nếu: $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0), \forall \Delta x$ (2)

Dùng máy tính : Ta sẽ sử dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $[x_0 - 0.5; x_0 + 0.5]$ với 4 giá trị tham số m mà đề cho.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2mx^2 + 3m^2x - 3m$ đạt cực tiểu tại $x = -1$:
A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = 1/3$ D. $m = -1/3$

Lần lượt gán 4 giá trị $-1, 1, 1/3, -1/3$ cho 4 biến A, B, C, D. Ta kiểm tra biểu thức (2)

-1 Shift STO A 1 Shift STO B; 1/3 Shift STO C; -1/3 Shift STO D

Nhấn Mode 7.

Gán **$F(X) = \frac{x^3}{3} - 2 * Alpha A * X^2 + 3 * Alpha A^2 * X - 3 * Alpha A$**

Start? **-1-0.5** End? **-1 + 0.5** Step **1/20**

-> F(-1) = 1.66666 nhỏ hơn tất cả các giá trị còn lại. (2) thỏa. Nhận A.

Quá may mắn vì chỉ 1 lần nhấn máy là nhận được kết quả

Ví dụ 2: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 3mx + 2m$ đạt cực đại tại $x = 2$

A. $m = 4$ B. $m = -4$ C. $m = 0$ D. không có giá trị m

Lần lượt gán 3 giá trị $4, -4, 0$ cho 3 biến A, B, C. Ta kiểm tra biểu thức (1)

4 Shift STO A -4 Shift STO B 0 Shift STO C

Nhấn Mode 7.

Gán **$F(X) = X^3 - 3 * Alpha A * X + 2 * Alpha A$**

Start? **2-0.5** End? **2 + 0.5** Step **1/20**. **F(2) < F(2.05)**. Loại A

Nhấn AC, thay A bằng B. Gán **$F(X) = X^3 - 3 * Alpha B * X + 2 * Alpha B$**

Start? **2-0.5** End? **2 + 0.5** Step **1/20**. **F(2) < F(2.05)**.. Loại B

Nhấn AC, thay B bằng C. Gán **$F(X) = X^3 - 3 * Alpha C * X + 2 * Alpha C$**

Start? **2-0.5** End? **2 + 0.5** Step **1/20**. **F(2) < F(2.05)**.. Loại C

Vậy đáp án là **D**

**Chủ đề 10. NHỚ NHANH CÔNG THỨC HÀM LOGARIT KHÔNG CẦN MÁY TÍNH
BẰNG NHỮNG CÂU VUI VUI**

Kiến thức Toán học: Với $(a > 0, \neq 1) \log_a x = b \leftrightarrow x = a^b$

- $\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a x$ (loga x mũ beta bằng loga x nhân beta lần)

- $a = \log_b(b^a)$ (lốc bê bê mũ a bằng a)

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (lốc của tích bằng tổng lốc)

- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (lốc của thương bằng hiệu lốc)

- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ (lốc của nghịch đảo bằng trừ lốc)

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (qui tắc hiệu vecto: $AB = CB - CA$)

- $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ (qui tắc đường chéo ; hay qui tắc tổng vecto)

- $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ (lốc anh của chị bằng nghịch đảo lốc chị của anh)

- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ (anh đội mũ lốc bê cô giống cô đội mũ lốc bê anh)

- $\log_a^M b^N = \frac{M}{N} \log_a b$ (lốc a mũ em của b mũ anh bằng anh chia em nhân lốc a bê)

Qui tắc so sánh 2 logarit cùng cơ số:

“Cơ số lớn hơn 1 thì cùng chiều, cơ số nhỏ hơn 1 thì ngược chiều”

Ví dụ 1: $2\log 3 + \frac{1}{2}\log 16 - 5\log 2 = \log 3^2 + \log 16^{\frac{1}{2}} - \log 2^5$

$$= \log 9 + \log 4 - \log 32 = \log 9 \cdot 4 - \log 32 = \log 36 - \log 32 = \log \left(\frac{36}{32}\right) = \log \left(\frac{9}{8}\right)$$

Ví dụ 2 : $\log_3 \left(\frac{9x^4}{\sqrt{y}}\right) = \log_3(9x^4) - \log_3(\sqrt{y}) = \log_3 9 + \log_3 x^4 - \log_3 y^{\frac{1}{2}}$

$$= \log_3 3^2 + 4\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 y = 2 + 4\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 y$$

Ví dụ 3 : Giải phương trình : $\log_2(x^2 - 6x) = 3 + \log_2(1 - x)$.

Đk : $x^2 - 6x > 0$; $1 - x > 0$

$\log_2(x^2 - 6x) = \log_2 2^3 + \log_2(1 - x) = \log_2 8(1 - x)$ (dùng công thức : $a = \log_b b^a$)

Suy ra: $x^2 - 6x = 8 - 8x \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$ (loại); $x = -4$ (nhận)

Ví dụ 4: Cho $\log_2 3 = a$; $\log_5 3 = b$. Tìm $\log_6 45$

$$\log_6 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3^2 \cdot 5)}{\log_3 (3 \cdot 2)} = \frac{2 + \log_3 5}{1 + \log_3 2} = \frac{2 + \frac{1}{\log_5 3}}{1 + \frac{1}{\log_2 3}} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{(2b + 1)a}{b(a + 1)}$$

Chủ đề 11. PHƯƠNG PHÁP KIỂM TRA NHANH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔ-GA-RÍT BẰNG MÁY CASIO fx – 570ES

NHẤN MẠNH: CHỈ DÙNG ĐỂ TRỊ NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP THÔI NHA. KHÔNG LẠM DỤNG VỚI NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN.

Ví dụ: Phương trình này mà bấm máy tính thì quá phí: $\log_6 (3x + 14) - \log_6 5 = \log_6 2x$

Câu này giải bình thường trong vòng 4 nốt nhạc:

$$\log_6 (3x + 14) = \log_6 5 + \log_6 2x = \log_6 10x. \text{ Suy ra: } 3x + 14 = 10x \rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2$$

Tương tự, pt: $6^x = 2^{x-3}$ giải tay vẫn nhanh hơn: $\ln 6^x = \ln 2^{x-3} \rightarrow x \ln 6 = (x - 3) \ln 2 \rightarrow x \ln 2 - x \ln 6 = 3 \ln 2 \rightarrow x \ln \left(\frac{2}{6}\right) = \ln 8 \rightarrow -x \ln 3 = \ln 8 \rightarrow x = -\frac{\ln 8}{\ln 3} = -\log_3 8 = \log_3 \left(\frac{1}{8}\right)$

Trong trường hợp, biểu thức khá phức tạp thì ta dùng máy tính để trị:

Dạng 1: tìm nghiệm của phương trình mũ, phương trình log:

- Nhận xét các nghiệm được cung cấp trong đáp án để chọn khoảng nghiệm, bước nhảy thích hợp.
- Chuyển hết phương trình sang về trái. Về phải bằng 0.
- Dùng tính năng bảng giá trị của CASIO – fx 570 ES để kiểm tra.

Ví dụ: Nghiệm của phương trình: $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$

A. $x = 1; x = 2$ B. $x = -1; x = 1$ C. $x = 0; x = 1$ D. $x = -1; x = 0$

Nhận xét: các phương án nghiệm là -1; 0; 1; 2. Bắt đầu -1; Kết thúc: 2. Bước nhảy 1.

Máy tính chuyển sang chế độ TABLE: Mode 7

Nhập hàm $f(X) = 4^{(X^2-X)} + 2^{(X^2-X+1)} - 3$. Start: -1; End: 2; Step: 1. Sau 5 giây có ngay $x = 0; x = 1$ là nghiệm. Đáp án C

Ví dụ: Nghiệm của phương trình: $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$ là: A. 0 B. PTVN C. 3 D. ± 1

Nhận xét: phương án nghiệm: -1, 0, 1, 3. Bắt đầu: -1; Kết thúc: 3. Step: 1

Máy tính chuyển sang chế độ **TABLE: Mode 7**

Nhập hàm $f(X) = 3^{(2+X)} + 3^{(2-X)} - 30$. Start: -1; End: 3; Step: 1. Sau 5 giây có ngay không có $F(X)$ nào bằng 0. Vậy Đáp án B.

Ví dụ: Nghiệm phương trình: $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 15$ là: A. 1 B. 2; $-\log_2 5$ C. 4; $-\log_2 5$ D. 2; $\log_3 5$

Có 3 phương án chứa $-\log_2 5$ và $\log_3 5$ nhưng ta sẽ kiểm tra sau.

Các phương án nghiệm 1; 2; 4. Vậy Bắt đầu: 1; Kết thúc: 4; Step: 1

Tương tự 2 ví dụ trên, nhập dữ kiện, sau 5 giây có ngay $F(2) = 0$. Vậy đáp án B hoặc D

Chỉ cần kiểm tra 1 trong 2 bằng cách: (Giả sử kiểm tra $\log_3 5$)

Nhấn AC. Giữ nguyên $f(X)$ bằng cách nhấn dấu =. Nhập Start = $\log_3 5$; End = $2 \cdot \log_3 5$; Step = 1. Nếu máy không có tính năng nhập $\log_a b$ thì thay bằng $\log(b)/\log(a)$. Sau 5' thì $\log_3 5$ không là nghiệm. Vậy đáp án B

Lưu ý: không nhập Start = a; End = a; Step = 0. Máy sẽ báo Error.

Ví dụ: nghiệm của phương trình: $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là: A. 2 B. 4. C. 8 D. 16

Máy tính chuyển sang chế độ **TABLE: Mode 7**

Nhập hàm $f(X) = \log_4(\log_2 X) + \log_2(\log_4 X) - 2$. Start: 2; End: 16; Step: 2. Sau 10 giây có ngay $F(16) = 0$. Vậy Đáp án D.

Ví dụ: nghiệm của phương trình: $\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3$ là:

A. 0 ; -3 B. -4 ; -3 C. -5 ; -4 D. 0; -5

Máy tính chuyển sang chế độ **TABLE: Mode 7**

Nhập hàm $f(X) = \log_2(X^2 + 3 \cdot X + 2) + \log_2(X^2 + 7 \cdot x + 12) - 3 - \log_2 3$. Start: -5; End: 0; Step: 1. Sau 10 giây có ngay $F(-5) = 0$; $F(0) = 0$. Vậy Đáp án D.

Ví dụ: nghiệm của phương trình: $\log_x(x+1) = \log\left(\frac{3}{2}\right)$ là: A. VN B. 1/2 C. 2 D. 3

Máy tính chuyển sang chế độ **TABLE: Mode 7**

Nhập hàm $f(X) = \log_x(X+1) - \log_{10}(3/2)$. Start: 1/2; End: 3; Step: 1/2. Sau 5 giây có ngay không có $F(X)$ nào bằng 0. Vậy Đáp án A

Ví dụ: nghiệm của phương trình: $2^x + 2^{x-1} = 4$ là:

A. 0 ; -3 B. -4 ; -3 C. -5 ; -4 D. 0; -5

Máy tính chuyển sang chế độ **TABLE: Mode 7**

Nhập hàm $f(X) = \log_2(X^2 + 3 * X + 2) + \log_2(X^2 + 7 * x + 12) - 3 - \log_2 3$. Start: -5; End: 0; Step: 1. Sau 10 giây có ngay $F(-5) = 0$; $F(0) = 0$. Vậy Đáp án D.

**Ví dụ: nghiệm của phương trình: $4\log_{25}x + \log_x 5 = 3$ là: A. $5; \sqrt{5}$ B. $1; 1/2$
C. $1/5; 5$ D. $1/5; \sqrt{5}$**

Máy tính chuyển sang chế độ TABLE: Mode 7

Nhập hàm $f(X) = 4 * \log_{25}X - \log_x 5 - 3$.

Do có $\sqrt{5}$ và khoảng chia lớn, còn bộ nhớ máy tính chỉ tính được 25 giá trị nên ta kiểm tra trước $1/5; 1/2; 1$ với bước nhảy $1/10$. Nghiệm 5 và $\sqrt{5}$ kiểm tra sau

Start: $1/5$; End: 1; Step: $1/10$. Sau 5 giây có ngay không có $F(X)$ nào bằng 0. Vậy loại các phương án chứa $1/5; 1/2; 1$. Đáp án A

Nếu cẩn thận thì Kiểm tra 5 với $\sqrt{5}$

Nhấn AC. Giữ nguyên $f(X)$ bằng cách nhấn dấu =. Nhập Start = $\sqrt{5}$; End = 5; Step = $(5+\sqrt{5})/2$. Sau 5 giây, cả hai đều có $F(X) = 0$.

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức: Cứ nhập biểu thức vào máy tính, sau 5 – 10 giây, sẽ có ngay đáp án.

Dạng 3: Cho $\log_a b = A$; $\log_c d = B$; Tính $\log_e f$ theo A, B

Dạng này nếu không thuộc tính chất hàm log và nếu không biết kỹ thuật thì cực khó. Nhiều khi sẽ khá rối. Nhưng chỉ cần bấm máy là trong 1 phút 30 giây sẽ xử nó dễ dàng với kỹ thuật gán giá trị cho các biến.

- Máy tính ở chế độ tính toán bình thường: Mode 1
- Đầu tiên gán giá trị $\log_a b$ cho phím A: $\log_a b \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow A$ (không nhấn Alpha nhé)
- Gán giá trị $\log_c d$ cho phím B: $\log_c d \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow B$
- Gán giá trị $\log_e f$ cho phím C: $\log_e f \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow$
- Chỉ cần lần lượt kiểm tra C trừ cho 3 biểu thức ở 3 phương án A, B, C. Nếu bằng 0 thì đó là đáp án. Nếu may mắn thì chỉ 1 lần kiểm tra, nếu xui lắm thì cũng chỉ 3 lần kiểm tra. Đảm bảo trong 1 phút 30 giây, có ngay đáp án.

Ví dụ: Cho $a = \log_3 15$. Khi đó $\log_{25} 15$ là: A. $\frac{a}{2(a-1)}$ B. $\frac{a}{a-1}$ C. $\frac{a}{2(a+1)}$ D. $\frac{a}{a+1}$

- $\log_3 15 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow A$ $\log_{25} 15 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow B$
- Alpha B – (Alpha A)/2*(Alpha A – 1) = 0. **Đáp án A. Quá hên !!!**

Chuyên đề: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI

Bài này mà giải tay thì là như sau : Do A liên quan đến cơ số 3 nên chèn 3 vào

$$\log_{25} 15 \text{ theo qui tắc trừ vecto : } \log_{25} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 25} = \frac{a}{2 \log_3 5} = \frac{a}{2 \log_3 \left(\frac{15}{3}\right)} = \frac{a}{2(\log_3 15 - \log_3 3)} = \frac{a}{2(a-1)}$$

Ví dụ: Cho $a = \log_{12} 6$; $b = \log_{12} 7$. Khi đó $\log_2 7$ là: A. $\frac{a}{1-b}$ B. $\frac{a}{a-1}$ C. $\frac{a}{b+1}$ D. $-\frac{b}{a-1}$

$\log_{12} 6 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{A}$ $\log_{12} 7 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{B}$ $\log_2 7 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{C}$

- Alpha C – (Alpha A)/(1 – Alpha B) = -0.5..... **Loại A.**
- Alpha C – (Alpha A)/(1 + Alpha B) = 2.4.... **Loại C**
- Alpha C – (Alpha A)/(Alpha A -1) = 5.39.... **Loại B. Vậy đáp án D**

Bài này mà giải tay thì là như sau : Do a, b liên quan đến cơ số 12 nên chèn 12 vào

$$\log_2 7 \text{ theo qui tắc trừ vecto : } \log_2 7 = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 2} = \frac{b}{\log_{12} \left(\frac{12}{6}\right)} = \frac{b}{\log_{12} 12 - \log_{12} 6} = \frac{b}{1-a} = -\frac{b}{a-1}$$

Ví dụ: Cho $a = \log_2 5$. Khi đó $\log_4 1250$ là: A. $\frac{1}{2}(1+4a)$ B. $2(1+4a)$ C. $1+4a$ D. $2+4a$

- $\log_2 5 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{A}$ $\log_4 1250 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{B}$
- Alpha B – $0.5 \cdot (1+4 \cdot \text{Alpha A}) = 0$. **Đáp án A. Quá hên !!!**

Bài này thì ta có: $\log_4 1250 = \log_{2^2} (2.5^4) = \log_{2^2} 2 + \log_{2^2} 5^4 = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{4}{2} \log_2 5 = \frac{1}{2}(1+4a)$

Ví dụ: Cho $a = \log_{27} 5$; $b = \log_8 7$; $c = \log_2 3$. Khi đó $\log_{12} 35$ là: A. $\frac{3b+2ac}{c+2}$ B. $\frac{3b+3ac}{c+2}$ C. $\frac{3b+2ac}{c+3}$ D. $\frac{3b+3ac}{c+1}$

- $\log_{27} 5 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{A}$ $\log_8 7 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{B}$
- $\log_2 3 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{C}$ $\log_{12} 35 \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \text{D}$
- Alpha D – $(3 \cdot \text{Alpha B} + 2 \cdot \text{Alpha A} \cdot \text{Alpha C}) / (\text{Alpha C} + 2) = 0.21.....$ **Loại A.**
- Alpha D – $(3 \cdot \text{Alpha B} + 3 \cdot \text{Alpha A} \cdot \text{Alpha C}) / (\text{Alpha C} + 2) = 0$. **Đáp án B**

Bài này mà giải tay thì là như sau : Do mẫu số liên quan c nên chèn cơ số 2 vào

$$\log_{12} 35 \text{ theo qui tắc trừ vecto : } \log_{12} 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (5 \cdot 7)}{\log_2 (3 \cdot 2^2)} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + 2 \log_2 2} = \frac{\log_2 5 + 3 \frac{1}{3} \log_2 7}{c+2} = \frac{\log_2 5 + 3 \log_{(2^3)} 7}{c+2} = \frac{3b + \log_2 5}{c+2} = \frac{3b + \log_2 27 \cdot \log_{27} 5}{c+2} (*) = \frac{3b + \log_2 3^3 \cdot \log_{27} 5}{c+2} = \frac{3b + 3 \cdot ca}{c+2}$$

(*): áp dụng qui tắc đường chéo

Dạng 4: Phương pháp tìm nghiệm của bất phương trình mũ – log: $F(X) > 0$ (< 0)

Thường khi giải bất phương trình mũ, log thì kết quả sẽ là 1 khoảng giá trị thỏa bất phương trình. Ta sẽ xét các phương án để chọn các khoảng đánh giá và bước nhảy thích hợp để tận dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để xét dấu của $F(X)$. Từ đó, chọn phương án thích hợp. Lưu ý: chuyển hết bpt sang về trái, VP luôn là 0

Quan trọng nhất ở đây là kỹ năng đánh giá các phương án để chọn khoảng xét dấu và bước nhảy thích hợp. Cái này cần tập luyện nhiều để có nhãn quan chiến thuật tốt.

NHẤN MẠNH: CHỈ DÙNG ĐỂ TRỊ NHỮNG BẤT PHƯƠNG TRÌNH BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP THÔI NHA. KHÔNG LẠM DỤNG VỚI NHỮNG BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN.

Ví dụ: Nghiệm bpt: $32 \cdot 4^x - 18 \cdot 2^x + 1 < 0$ là:

- A. $1 < x < 4$ B. $1/16 < x < 1/2$ C. $2 < x < 4$ D. $-4 < x < -1$

Ta có các khoảng $(-4; 1)$; $(2; 4)$; $(1; 4)$. Nếu xét luôn khoảng $(1/16; 1/2)$ thì bước nhảy sẽ khá nhỏ, vượt quá bộ nhớ máy tính nên khoảng $(1/16; 1/2)$ để xét riêng.

Với 3 khoảng trên thì ta chọn Start = -4; End = 4; Step = $[4 - (-4)]/25$ (vì bộ nhớ máy tính tính được tối đa 25 giá trị khác nhau)

Nhấn Mode 7. Nhập hàm $32 \cdot 4^x - 18 \cdot 2^x + 1$. Start = -4 ; End = 4 ; Step = 8/25
 $F(-4) = 0$ và giá trị $F(X) < 0$ cho tới $F(-1.12)$ và từ $F(-0.8)$ thì giá trị luôn > 0 cho tới $F(4)$.

Vậy đáp án D (khỏi cần kiểm tra B).

Ví dụ 2: Nghiệm bpt $\log_{0.4}(x-4) + 1 > 0$ là:

- A. $(4; 13/2]$ B. $(-\infty; 13/2)$ C. $[13/2; +\infty)$ D. $(4; +\infty)$

Do có 4 khoảng $(-\infty; 13/2)$; $[13/2; +\infty)$; $(4; 13/2)$; $(4; +\infty)$. Nên ta chọn điểm bắt đầu trong khoảng $(-\infty; 13/2)$ và điểm kết thúc trong $[13/2; +\infty)$. Bước nhảy đi qua 4 và 6.5 -> Step 0.5. Vậy có thể chọn Start = 0; End = 10. Step = 0.5 (20 giá trị cần tính)

Nhấn Mode 7. Nhập hàm $\log_{0.4}(x-4) + 1$. Start = 0 ; End = 10 ; Step = 0.5
Hàm ERROR từ 0 đến 4. $F(4.5)$ đến $F(6) > 0$. $F(6.5) = 0$. Từ $F(6.5)$ đến $F(10)$ thì $F(X) < 0$.

Vậy đáp án A.

Ví dụ 3: Nghiệm bpt $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x - 1}{16}\right) \leq \frac{3}{4}$ là:

- A. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ B. $[1; 2]$ C. $(0; 1]$ D. $(0; 1] \cup [2; +\infty)$

Như vậy, cần chọn điểm bắt đầu thuộc $(-\infty; 1]$ và điểm kết thúc thuộc $[2; +\infty)$. Bước nhảy đi qua 0; 1; 2. Vậy chọn Start = -2; End = 4; Step = 0.25 (24 giá trị cần tính để xét dấu cho đẹp, bước nhảy càng nhỏ vì việc xét dấu càng chính xác).

Nhấn Mode 7. Nhập hàm $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x - 1}{16}\right) - \frac{3}{4}$. Start = -2 ; End = 4 ; Step = 0.25

Giá trị F(X) ERROR từ F(-2) đến F(0). Giá trị âm từ F(0.25) đến F(0.75); F(1) = 0. F(X) > 0 từ F(1.25) đến F(1.75); F(2) = 0 và F(X) < 0 từ F(2.25) đến F(4)

Vậy đáp án D

Chủ đề 12. Kiểm tra biểu thức nào là nguyên hàm của $f(x)$
(dùng cho máy tính không có chức năng tính nguyên hàm, tích phân)

Bài toán: Nguyên hàm của biểu thức $f(x)$ là: (hoặc $\int f(x)dx$ là)

- A. $g(x) + C$ B. $h(x) + C$ C. $k(x) + C$ D. $l(x) + C$

Kiến thức toán học: $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ ($F(x) + C = \int f(x)dx$) nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in D. \text{ Vậy phải đúng với } x_0 \text{ bất kỳ thuộc } D.$$

Phương pháp:

Cần nhớ: $g'(x_0) \cong \frac{g(x_0 + 0.0001) - g(x_0)}{0.0001} = 10^4 \cdot [g(x_0 + 0.0001) - g(x_0)]$

Vậy chỉ cần bấm máy để **tính lần lượt $g'(x_0)$, $h'(x_0)$, $k'(x_0)$, $l'(x_0)$** . Đáp án nào gần $f(x_0)$ thì đó là đáp án cần tìm.

Thường chọn x_0 là 1 trong 3 giá trị: 1; 2; 3 (tùy bài để chọn và phải đảm bảo các giá trị đó thuộc miền xác định của các hàm). Nếu hàm lượng giác thì thường chọn 0; $\pi/4$; $\pi/2$ (rad)

Lưu ý: 1. Chỉ dùng khi việc tính tích phân $\int f(x)dx$ quá phức tạp thôi nha. Vẫn khuyến khích các bạn làm theo phương pháp chính thống, không phụ thuộc máy tính.

2. Cũng có thể thế cận a, b bất kỳ (sao cho $f(x)$ xác định) vào để thành tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ và dùng phương pháp tính gần đúng tích phân xác định bằng cách bấm máy (đã có bài hướng dẫn) rồi kiểm tra $g(b) - g(a)$; $h(b) - h(a)$; $k(b) - k(a)$; $l(b) - l(a)$ để chọn kết quả

Ví dụ: (Nguồn :Collegeboard) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$ là (đã bỏ bớt phương án E)

- A. $-\frac{1}{3} \ln e^{x^3} + C$ B. $-\frac{e^{x^3}}{3} + C$ C. $-\frac{1}{3e^{x^3}} + C$ D. $\frac{x^3}{3e^{x^3}} + C$

Kiểm tra với $x = 1$: $f(1) = \frac{1^2}{e^{1^3}} = \frac{1}{e} = \mathbf{0.36787944117}$

A: $y'(1) \approx [y(1.0001) - y(1)] * 10^4 = \left[-\frac{1}{3} \ln e^{(1.0001)^3} - \left(-\frac{1}{3} \ln e^1 \right) \right] 10^4 = -1.0001$

B: $y'(1) \approx [y(1.0001) - y(1)] * 10^4 = \left[-\frac{1}{3} e^{(1.0001)^3} - \left(-\frac{1}{3} e^1 \right) \right] 10^4 = -2.71896$

C: $y'(1) \approx [y(1.0001) - y(1)] * 10^4 = \left[-\frac{1}{3e^{(1.0001)^3}} - \left(-\frac{1}{3e^1} \right) \right] 10^4 = \mathbf{0.36786 \text{ (nhận)}}$

(ra C rồi thì khỏi tính D cho đỡ tốn thời gian)

Việc bấm máy tính kiểm tra 4 phương án dạng này cũng không dễ phải không nào. Trong khi bài này tính trực tiếp thì đơn giản vô cùng. Này nhé:

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx = \int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{-x^3} (3x^2 dx) = \frac{1}{3} \int e^{-t} (dt) = -\frac{1}{3} e^{-t}, \text{ với } t = x^3. \text{ Đáp án C.}$$

Nói chung đối để lắm mới dùng cách bấm máy tính cho dạng này nhé. Chỉ dùng trong trường hợp hàm lấy tích phân bất định quá lắt léo, không thể giải ra đáp số trong 1 phút 30 giây thôi, kéo gậy ông đập lưng ông nhen.

Chủ đề 13. Tìm nhanh kết quả tích phân không cần biết cách tính tích phân.

Dạng này chỉ áp dụng cho những bài tính tích phân phức tạp.

Công thức Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)], \text{ Với } h = \frac{b-a}{8} \quad (1)$$

$$\text{Với } y_0 = f(a), y_1 = f(a+h), y_2 = f(a+2h), \dots, y_i = f(a+ih), y_8 = f(a+8h) = f(b)$$

Với đề thi trắc nghiệm thì chỉ cần tính :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2], \text{ Với } h = \frac{b-a}{4} \quad (2)$$

Với câu tích phân thì cần dùng tính năng tính bảng giá trị của máy tính cầm tay. Với Casio fx-570ES, ta chọn Mode -> 7 (Table).

Màn hình hiện f(X) = . Ta nhập hàm tính tích phân f(x) vào. Xong nhấn dấu =.

Màn hình hiện Start ? Nhập giá trị a. Nhấn =

Màn hình hiện End ? Nhập giá trị b. Nhấn =

Màn hình hiện Step ? Nhập giá trị h. Nhấn =

Màn hình hiện bảng tính. Ghi các giá trị f(x_i) ở cột phải, thế vào biểu thức (1) hoặc (2) để tìm kết quả.

Ví dụ : (đề thi năng lực VNU HN) Tích phân $\int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2} dx$ có giá trị bằng :

A. $2\ln 2 + \ln 3$ B. $2\ln 2 + 3\ln 3$ C. $2\ln 3 + 3\ln 2$ D. $2\ln 3 + \ln 4$

Tính trước giá trị đáp án: **A. 2.48490665 B. 4.682131227 C. 4.276666119 D. 3.583518938**

$$h = (2 - 0)/4 = 0.5$$

Nhập Mode -> 4 (Table). Nhập $(5.X+7)/(X^2+3.X+2)$. = Start ? 0, End ? 2 ; Step ? 0.5

Có y₀ = 3.5 ; y₁ = 2.5333; y₂ = 2; y₃ = 1.6571; y₄ = 1.4166

Nhấn Mode 1

Lấy $((y_0 + y_4) + 4(y_1+y_3) + 2y_2) \times h/3 = 4.2797$. **Chọn đáp án C.**

Ví dụ : (đề thi năng lực VNU HN) Tích phân $\int_1^2 x^2 \cdot \ln x dx$ có giá trị bằng :

A. $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$ B. $8\ln 2 - 7/3$ C. $24\ln 2 - 7$ D. $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{3}$

Tính trước giá trị đáp án: **A. 1.070... B. 3.211... C. 9.63... D. -0.4849...**

Dùng (2), với start = 1 ; end = 2, h = 0.25

Có y₀ = 0 ; y₁ = 0.3486; y₂ = 0.9122; y₃ = 1.7138; y₄ = 2.7725

Nhấn Mode -> 1. Lấy $((y_0 + y_4) + 4(y_1+y_3) + 2y_2) \times h/3 = 1.070541$. **Chọn đáp án A.**

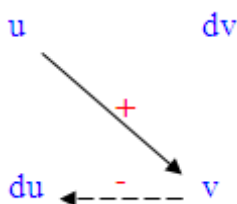
Chủ đề 14. MẸO TÍNH NHANH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 1

Trước tiên, ta nhắc lại một chút về kiến thức của phép lấy tích phân theo từng phần: Giả sử u và v là hai hàm số khả vi của x . Khi đó, như ta đã biết, vi phân của tích uv được tính theo công thức: $d(uv) = u dv + v du$

Từ đó, lấy tích phân ta được: $uv = \int u dv + \int v du$. Hay là: $\int u dv = uv - \int v du$ (1)

Công thức này gọi là công thức lấy tích phân từng phần. Công thức này thường được dùng để lấy tích phân các biểu thức có thể biểu diễn dưới dạng tích của hai nhân tử u và dv , sao cho việc tìm hàm số v theo vi phân dv của nó và việc tính tích phân $\int v du$ là những bài toán đơn giản hơn so với việc tính trực tiếp tích phân $\int u dv$. Ý nghĩa tách biểu thức dưới dấu tích phân thành các thừa số u và dv thường xảy ra trong quá trình giải các bài toán có dạng sau:

$\int P_n(x) \cdot \sin ax \cdot dx$, $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$, $\int P_n(x) \cdot e^{ax} \cdot dx$ (*), trong đó P_n là đa thức bậc n . Với các dạng trên, thì thông thường vai trò của u luôn là đa thức P_n , và dv là phần còn lại. Như vậy, ta có sơ đồ sau:

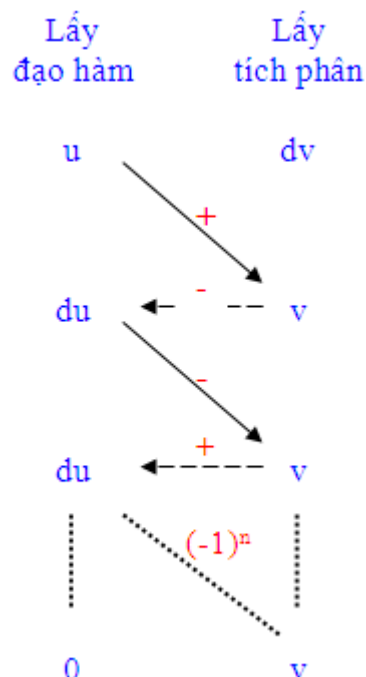


Khi được tích phân mới, ta lại được một tích phân lại là một trong các dạng, và phần đa thức mới lại đóng vai trò là u , còn phần còn lại tiếp tục đóng vai trò là v ...

Cứ thế cho đến khi bậc của đa thức là bậc 0 thì sẽ có kết quả. \

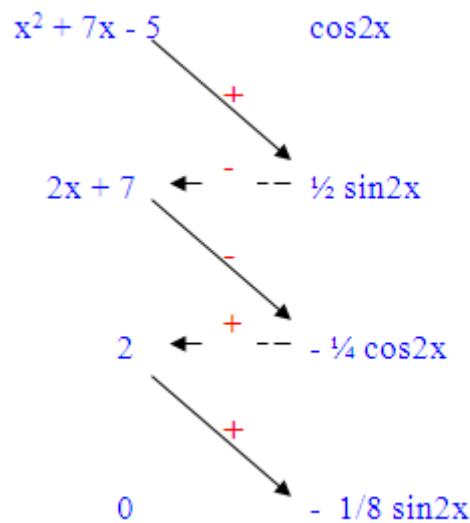
Như vậy, **các đa thức luôn đóng vai trò u** (nghĩa là lấy đạo hàm), còn **phần còn lại luôn là dv** (lấy tích phân), nên ta sẽ xây dựng thuật toán gồm 2 cột:

- Cột trái chuyên lấy đạo hàm của đa thức cho đến khi giá trị bằng 0;
- Cột phải luôn lấy tích phân tương ứng với cột kia.
- Sau đó, ghép các giá trị uv lại ta sẽ có kết quả. Hay ta có sơ đồ như hình bên phải.



Ví dụ: Tính: $\int (x^2 + 7x - 5) \cdot \cos 2x \cdot dx$

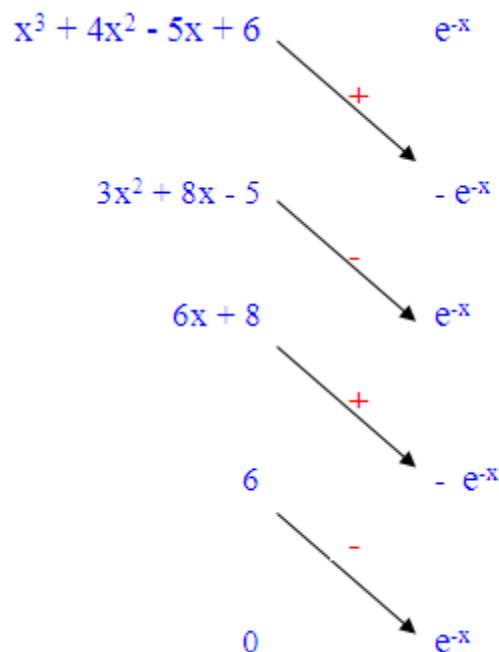
Ta lập sơ đồ như sau:



Khi đó, kết quả của tích phân này sẽ là: $(x^2 + 7x - 5) \cdot \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \cdot \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4}$

Ví dụ 2: Cần tính: $\int (x^3 + 4x^2 - 5x + 6) \cdot e^{-x} \cdot dx$

Ta có sơ đồ sau:



Vậy, dựa vào sơ đồ trên, ta có kết quả của bài toán là:

$$-(x^3 + 4x^2 - 5x + 6)e^{-x} - (3x^2 + 8x - 5)e^{-x} - (6x + 8)e^{-x} - 6e^{-x} + C$$

Hay: $-(x^3 + 7x^2 + 9x + 15)e^{-x} + C$

Chủ đề 15. KỸ THUẬT VIẾT NHANH PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG QUA 2 ĐIỂM A(a;b); B(c;d) và PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG QUA 3 ĐIỂM A, B, C

Phương pháp bấm máy:

Dạng1: Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(a;b) và B(c;d):

- Chỉ cần dùng máy tính giải hệ 2 phương trình, 2 ẩn:
$$\begin{cases} ax + by = -1 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$$
 - o Mode -> 5 -> 1
 - o Nhập a, b, -1 vào dòng 1; Nhập c, d -1 vào dòng 2. Nhấn =
 - o Được nghiệm hpt. Giả sử $X = M$; $Y = N$
- Phương trình đường thẳng (AB) có dạng: $Mx + Ny + 1 = 0$

Ví dụ 1: Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(1; 2); B(3;4)

- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1x + 2y = -1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$
 được $X = 1$; $Y = -1$
- Vậy phương trình (AB): $X - Y + 1 = 0$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(1; 2); B(4;3)

- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1x + 2y = -1 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$$
 được $X = 1/5$; $Y = -3/5$
- Vậy phương trình (AB): $X/5 - 3Y/5 + 1 = 0$. Hay (AB): $X - 3Y + 5 = 0$

Lưu ý: một số máy tính giải hệ 2 phương trình, 2 ẩn dạng: $a_nX + b_nY + c_n = 0$. Khi đó nhớ chuyển hệ phương trình thành:
$$\begin{cases} ax + by + 1 = 0 \\ cx + dy + 1 = 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm A(a;b;c) và B(d;e;f) và C(g;h;i)

- Chỉ cần dùng máy tính giải hệ 3 phương trình, 3 ẩn:
$$\begin{cases} ax + by + cz = -1 \\ dx + ey + fz = -1 \\ gx + hy + iz = -1 \end{cases}$$
 - o Mode -> 5 -> 2
 - o Nhập a, b, c; -1 vào dòng 1; Nhập d, e, f, -1 vào dòng 2; Nhập g, h, i, -1 vào dòng 3. Nhấn =
 - o Được nghiệm hpt. Giả sử $X = M$; $Y = N$; $Z = P$
- Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $Mx + Ny + Pz + 1 = 0$

Vén màn bí mật:

Kiến thức Toán học: Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(a; b); B(c;d) có dạng:

$$\frac{x-a}{c-a} = \frac{y-b}{d-b} \rightarrow (d-b)(x-a) = (y-b)(c-a) \rightarrow (d-b)x + (a-c)y + bc - ad = 0$$

Hay: $\frac{d-b}{bc-ad}x + \frac{a-c}{bc-ad}y + 1 = 0$.

Trong đó: $M = \frac{d-b}{bc-ad}$; $N = \frac{a-c}{bc-ad}$ chính là nghiệm hpt: $\begin{cases} ax + by = -1 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$

Lưu ý:

1. Với pt đt qua (AB): Trong trường hợp: $ad - bc = 0$. Hệ 2 pt, 2 ẩn sẽ không giải được, máy tính sẽ báo ERROR.
 - Khi đó, 2 điểm A, B sẽ có dạng: $A(a; b)$; $B(ka; kb)$. Lúc này, pt đt (AB) có dạng: **$y = bx/a$** .
 - Câu thần chú: YÊU BÀ XÃ CHIA ANH.
2. Với pt mp (ABC): Nếu máy báo ERROR, nghĩa là hệ số tự do của mặt phẳng bằng 0. Khi đó, ta xử lý như sau:
 - Có 3 điểm A, B, C. Suy ra: 2 vectơ AB, AC.
 - Suy ra vectơ pháp tuyến n là tích hữu hướng của AB với AC.
 - Giả sử là $n = (M; N; P)$
 - Vậy phương trình mặt phẳng (ABC): **$Mx + Ny + Pz = 0$**

Chủ đề 16. GIẢI TOÁN SỐ PHỨC BẰNG MÁY TÍNH CASIO fx – 570 ES

Tóm tắt lý thuyết số phức :

- $i^2 = -1$
- **Dạng đại số của số phức:** $z = a + bi$; Số phức liên hợp: $\bar{z} = a - bi$
 - Cộng, trừ, nhân 2 số phức giống cộng, trừ, nhân 2 đa thức bậc nhất.
 - Chia 2 số phức: nhân liên hợp. Với chú ý: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.
 - Modun số phức: $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Dạng hình học:**
 - Số phức $z = a + bi$ tương ứng với điểm $Z(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.
 - $z + \bar{z} = 2a$; $z - \bar{z} = 2bi$
 - $|z - (c + di)| = r \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 = r^2$: Tập hợp tất cả các điểm nằm trên đường tròn tâm $(c; d)$ bán kính r .
- **Dạng lượng giác:** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; trong đó:
 - $r > 0$ là môđun của số phức: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$;
 - φ được gọi là Argument của số phức: $\tan\varphi = b/a$
 - $\varphi \in [0; 2\pi]$ được gọi là Argument chính ($\text{Arg}z$);
 - $\varphi = \text{Arg}z + k.2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
 - Mối liên hệ giữa dạng đại số và lượng giác:
$$a = r \cdot \cos\varphi ; b = r \cdot \sin\varphi ; r = \sqrt{a^2 + b^2} ; \tan\varphi = \frac{b}{a}$$
- Chú ý:
 - $a > 0; b > 0$: $\varphi \in (0; \pi/2)$; $a < 0; b > 0$: $\varphi \in (\pi/2; \pi)$;
 - $a < 0; b < 0$: $\varphi \in (\pi; 3\pi/2)$; $a > 0; b < 0$: $\varphi \in (3\pi/2; 2\pi)$
- Quy tắc:
 - Tích 2 số phức dạng lượng giác thì: modun bằng tích modun; argument bằng tổng argument
 - Thương 2 số phức dạng lượng giác thì: modun bằng thương modun; argument bằng hiệu argument
 - Căn bậc 2 của số phức dạng lượng giác: modun bằng căn modun; argument bằng $\frac{1}{2}$ argument.

Sau khi đã nắm vững kiến thức lý thuyết về số phức, bạn có thể nhờ máy tính bỏ túi thực hiện việc tính toán nhanh 1 số vấn đề liên quan đến số phức. Với máy tính

Casio fx – 570 ES, thì việc tính toán số phức đơn giản như việc tính toán với số thực. Tất nhiên, có 1 số dạng không thể “khoán trắng” cho máy tính bỏ túi được.

Dạng 1 : Tính toán số phức dạng đại số: Nhấn Mode 2

- Nhập số phức dạng đại số $a + bi$: $a \rightarrow + \rightarrow b \rightarrow \text{ENG}$
- Cộng, trừ, nhân, chia số phức: thực hiện bình thường. Lưu ý: **máy không hiểu lũy thừa của số phức** nên nếu muốn tính z^2 thì chịu khó nhập $z \times z$ nha. Nghĩa là cần tính z^4 thì phải nhập: $z \times z \times z \times z$

Ví dụ: Thực hiện phép tính: $z = (1 + i) \cdot \frac{2-i}{3+2i}$

$(1 + \text{ENG}) \times (2 - \text{ENG}) / (3 + 2 \text{ENG})$ Kết quả: $11/13 - 3i/13$

- Số phức liên hợp: $\bar{z}$: Nhập số phức z (không nhấn dấu $=$). Nhấn Shift 2 $\rightarrow$ 2

Ví dụ: Cần số phức liên hợp của VD1. VD1 ra kết quả, $z = 11/13 - 3i/13$. Nhấn Shift $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 2. Có: $11/13 + 3i/13$

- Cần tìm modun z :
 - o Cách 1: Chọn chức năng Abs bằng cách nhấn Shift $\rightarrow$ hyp (phím phía trên phím “(“ á). Hiện $| |$. Nhập số phức vào ô giữa 2 dấu $| |$
 - o Cách 2: liên quan đến dạng lượng giác, sẽ đề cập sau.

Ví dụ: modun của $\bar{z}$: ở ví dụ 2 sẽ là: - Shift $\rightarrow$ hyp $\rightarrow$ Ans = . Ra kết quả $\frac{\sqrt{130}}{13}$.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Nếu $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ thì số phức z_1/z_2 nằm ở góc phần tư nào ?

Mode 2 $\rightarrow (\sqrt{3} + \text{ENG}\sqrt{3}) / (\sqrt{3} + \text{ENG}) = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}i$. Vậy góc phần tư thứ I

Ví dụ 2: Giả sử $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x + iy$. Tìm giá trị (x ;y)

Nhập vào biểu thức: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$. Nhấn = . Ta được -2i. Vậy $x = 0$; $y = 2$

Ví dụ 3: Nếu $f(z) = \frac{7-z}{1-z^2}$, với $z = 1 + 2i$ thì $|f(z)|$ là : $|z|/2$ b. $|z|$ c. $2|z|$ d. Tất cả đều sai

Ta lập kiểm tra tỉ số $|f(z)|/|z|$: Shift $\rightarrow$ hyp $\rightarrow \frac{7-(1+2\text{ENG})}{1-(1+2\text{ENG})^2} \rightarrow / \rightarrow$ shift $\rightarrow$ hyp $\rightarrow 1+2\text{ENG}$

Ta có kết quả là $\frac{1}{2}$ Vậy đáp án A.

Ví dụ 4: Tìm số phức liên hợp của : $\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$?

Nhập biểu thức $\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$ vào máy. Nhấn =. Máy báo ERROR. Sao kỳ vậy

ta. Không sao. Tại máy không hiểu biểu thức: $\sqrt{a+bi}$ thôi. Các bạn an tâm. Dạng này mình xử sau.

Dạng 2 : Tìm nghiệm của phương trình bậc 4 : $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, ($A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$) biết phương trình có 1 nghiệm phức $z = a + bi$.

Lưu ý : Nếu $z = a + bi$ là nghiệm thì $z = a - bi$ là nghiệm.

Khi đó : $(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$

Vậy ta thực hiện phép chia $P(x)$ cho $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

Xét ví dụ : Tìm giá trị của biểu thức $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41$, khi $x = -2 - i\sqrt{3}$

Ta có : $(x + (2 + i\sqrt{3}))(x + (2 - i\sqrt{3})) = x^2 + 4x + 7$

Lưu ý : Ta sẽ thực hiện phép chia $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41$ cho $x^2 + 2x + 7$.

Lập sơ đồ sau :

	2	5	7	-1	41
-4	0				0
-7	0	0			
	2				

4 vị trí màu đỏ luôn cố định là 0 nha.

Bước tiếp theo :

	2	5	7	-1	41
-4	0	$(-4) \times 2$			0
-7	0	0			
	2	$5 - 8 = -3$			

Bước 3 :

	2	5	7	-1	41
-4	0	$(-4) \times 2$	$(-4) \times (-3)$		0
-7	0	0	$(-7) \times 2$		
	2	$5 - 8 = -3$	$7 + 12 - 14 = 5$		

Bước 4:

	2	5	7	-1	41
-4	0	$(-4) \times 2$	$(-4) \times (-3)$	$(-4) \times 5$	0
-7	0	0	$(-7) \times 2$	$(-7) \times (-3)$	$(-7) \times 5$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & 5-8=-3 & 7+12-14=5 & -1-20+21=0 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Vậy : $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41 = (x^2 + 2x + 7)(2x^2 + x - 9) + 6$. **Có ngay kết quả bằng 6**

Ví dụ 2: $-2 + i$ là nghiệm của phương trình: $z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10 = 0$. Tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

Có $-2 + i$ là nghiệm thì $-2 - i$ cũng là nghiệm và là 2 nghiệm của ph.trình: $z^2 + 4z + 5$

Thực hiện phép chia $z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10$ cho $z^2 + 4z + 5$

	1	2	-1	-2	10
-4	0	$(-4).1$	$(-4).(-2)$	$(-4).2$	0
-5	0	0	$(-5).1$	$(-5).(-2)$	$(-5).2$
	1	-2	2	0	0

Rõ ràng mình thực hiện phép chia đúng. Giờ chỉ cần giải phương trình: $z^2 - 2z + 2 = 0$

Mode 5 2. Ta có thêm 2 nghiệm **$1 + i$, $1 - i$**

Ví dụ tự giải : Giải phương trình : $z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8 = 0$ biết nó có 1 nghiệm là $2i$.

Đ/S : 1 ; -2 ; $2i$; $-2i$

Dạng 3 : Tính toán số phức dạng lượng giác, khai căn số phức:

3.1 Chuyển số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác:

- Chuyển máy tính về chế độ Radian Rad: Shift → Mode → 4
- Chuyển máy tính về chế độ tính số phức: Mode → 2.
- Nhập số phức dạng đại số. Nhấn =
- Nhấn Shift → 2 → 3 → =

Ví dụ: Tìm dạng lượng giác của số phức: $\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$

Shift → Mode → 4 → Mode → 2. $(1+ENG)/(1-ENG*\sqrt{3}) \rightarrow =$ Shift → 2 → 3 → =

$\frac{\sqrt{2}}{2} \angle \frac{7}{12}\pi$. Vậy dạng lượng giác là: $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) \right)$

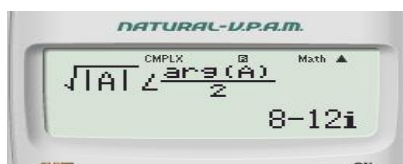
3.2 Khai căn bậc 2 của số phức:

- Lưu số phức dạng đại số vào phím nhớ A.
- $\sqrt{} \rightarrow Shift \rightarrow hyp \rightarrow A \gg \rightarrow Shift \rightarrow (-) \rightarrow Shift \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow A \rightarrow)/2 \rightarrow =$

Ví dụ: Tính $\sqrt{-80 - 192i}$

$-80-ENG*192 \rightarrow Shift \rightarrow RCL (STO) \rightarrow (-)$

$\sqrt{\quad} \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{hyp} \rightarrow A \gg \rightarrow \text{Shift} \rightarrow (-) \rightarrow - \rightarrow \text{Shift} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \text{Alpha} \rightarrow A \rightarrow) /$

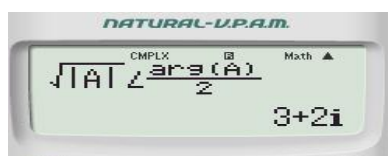


2 $\Rightarrow$ =

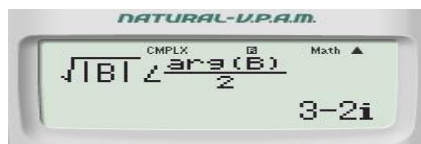
Khi đó: có 2 giá trị $\pm(8 - 12i)$

Ví dụ: Tìm số phức liên hợp của: $\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$?

- Gán $5 + 12i$ cho biến nhớ A; gán $5 - 12i$ cho biến nhớ B.



- Tính $\sqrt{5 + 12i}$:
- Gán kết quả cho biến nhớ C.



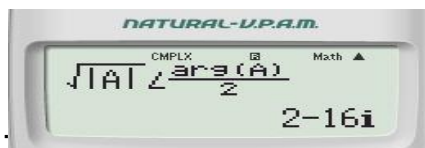
- Tính $\sqrt{5 - 12i}$:
- Gán kết quả cho biến nhớ D
- Thực hiện phép tính: $\frac{C+D}{C-D} = -\frac{3}{2}i \rightarrow \text{Shift} \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow \text{Ans} \rightarrow)$
- Ta có kết quả cần tìm: $\frac{3}{2}i$

3.3 Giải phương trình bậc 2, hệ số phức: $az^2 + bz + c = 0$

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Dùng các bước ở 3.2 để tính $\sqrt{\Delta}$
- Thế vào công thức nghiệm: $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ví dụ: Giải phương trình: $z^2 + 8(1 - i)z + 63 - 16i = 0$

- Tính $[8^2 \cdot (1 - i) \cdot (1 - i)] - 4 \cdot (63 - 16i) = -252 - 64i$
- Gán kết quả cho phím nhớ A.



- Tính $\sqrt{-252 - 64i}$:
- Vậy có 2 nghiệm là: $\frac{-8(1-i) + (2-16i)}{2} = -3 - 4i$ và $\frac{-8(1-i) - (2-16i)}{2} = -5 + 12i$

----- (còn tiếp) -----