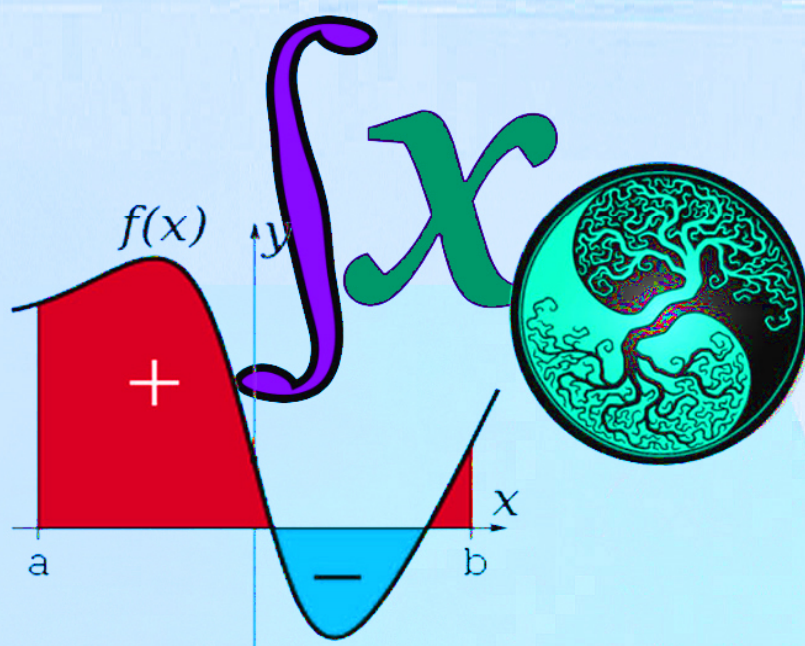


ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CHUYÊN ĐỀ

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐIỂN HÌNH

MỨC ĐỘ VD - VDC



ÔN THI TN THPT

MỤC LỤC

DẠNG 1: ÁP DỤNG CÁC QUY TẮC VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP	TRANG
QUY TẮC ĐẠO HÀM TÍCH	3
QUY TẮC ĐẠO HÀM THƯƠNG	7
ÁP DỤNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM CHỨA CĂN	15
ÁP DỤNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM MŨ	18
ÁP DỤNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM LÔGARIT	19
ÁP DỤNG CÁC CÔNG THỨC ĐẠO HÀM KHÁC	21
DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN	22
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1	22
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2	28
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3	39
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4	49
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5	51
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6	53
DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN	55
TRƯỜNG HỢP RIÊNG	68
DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1	78

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1: ÁP DỤNG CÁC QUY TẮC VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

QUY TẮC ĐẠO HÀM TÍCH

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ thì

$$(uv)' = u'v + uv';$$

Nếu $[f(x).g(x)]' = h(x)$ thì $f(x).g(x) = \int h(x)dx$.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 3$ và $x(4 - f'(x)) = f(x) - 1, \forall x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} &+) \text{ Từ giả thiết, ta có } x(4 - f'(x)) = f(x) - 1 \Rightarrow xf'(x) + f(x) = 4x + 1 \\ &\Rightarrow [xf(x)]' = 4x + 1 \Rightarrow xf(x) = \int (4x + 1)dx \Rightarrow xf(x) = 2x^2 + x + C. \end{aligned}$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 5.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ và thỏa mãn đẳng thức $2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ với mọi $x \in (-1; +\infty)$. Giá trị của $f(0)$ bằng

- A. $f(0) = 2 - \sqrt{3}$. B. $f(0) = e - \sqrt{3}$. C. $f(0) = \sqrt{3}$. D. $f(0) = 1 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} &+) \text{ Từ giả thiết, ta có } 2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow 2f(x) + (x - 1)(x + 1)f'(x) = \\ &\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \frac{2f(x)}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x+1}f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'f(x) + \frac{x-1}{x+1}f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1} \cdot f(x)\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) = \sqrt{x^2+3} + C (*) \\ &+) \text{ Lại có } (*) \text{ thỏa mãn với mọi } x \in (-1; +\infty) \text{ nên thay } x = 1 \text{ vào } (*) \text{ ta có } C = -2. \\ &\text{Suy ra } \frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2. \text{ Do đó } f(0) = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 4x^3 + 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{16}{15}$. D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} &\text{Ta có: } [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = [f(x).f'(x)]'. \text{ Từ giả thiết ta có: } [f(x).f'(x)]' = 4x^3 + 2x \\ &\text{Suy ra: } f(x).f'(x) = \int (4x^3 + 2x)dx = x^4 + x^2 + C. \text{ Với } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \\ &\text{Nên ta có: } f(x).f'(x) = x^4 + x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x).f'(x)dx = \int_0^1 (x^4 + x^2)dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{8}{15} \Rightarrow f^2(1) = \frac{16}{15}.$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(1; +\infty)$, thỏa mãn $(x - 1)f'(x) + f(x) = xe^{x+1}$, biết $f(2) = e^3$. Tính $\int_5^7 \frac{f(x)}{e^x} dx$

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} &\text{Ta biến đổi: } (x - 1)f'(x) + f(x) = xe^{x+1} \text{ (bên vế trái gọi ý ta đưa về đạo hàm } (u.v)') \\ &\Rightarrow (x - 1).f'(x) + (x - 1)' \cdot f(x) = x.e^{x+1} \\ &\Rightarrow [(x - 1).f(x)]' = x.e^{x+1}, \text{ ta lấy nguyên hàm hai vế được:} \end{aligned}$$

$$(x-1) \cdot f(x) = \int x e^{x+1} dx \Rightarrow (x-1)f(x) = x \cdot e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = e^{x+1}(x-1) + C.$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x+1} + \frac{C}{x-1}, \text{ ta có } f(2) = e^3 \Leftrightarrow e^3 + C = e^3 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x+1}.$$

$$\text{Tính } \int_5^7 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_5^7 dx = x \Big|_5^7 = 2.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$ với $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Nhận xét: } [f(x) \cdot f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x)$$

Từ đó suy ra: $[f(x)f'(x)]' = 15x^4 + 12x$. Tiến hành lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$f(x)f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + C$$

Mà $f(0) = f'(0) = 1$ nên suy ra $C = 1$

$$\Rightarrow f(x)f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int f(x)f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + x + C'$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào hai vế ta được: } \frac{f^2(0)}{2} = C' \Rightarrow C' = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1 \Rightarrow f^2(1) = 8$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$.

B. $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$.

C. $f^2(2) = \ln 2 + 1$.

D. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } [xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]; x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)] \Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2. \text{ Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2\ln 2 + 2.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) - f(x) = x^2\sqrt{x}\cos x \forall x \in (0; +\infty)$, $f(4\pi) = 0$. Giá trị của biểu thức $f(9\pi)$ là

A. 0.

B. $-3\sqrt{\pi}$.

C. $-\sqrt{\pi}$.

D. $-2\sqrt{\pi}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Do } x \in (0; +\infty) \text{ phương trình đã cho tương đương: } f'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} f(x) = \frac{x}{2} \cos x$$

$$\Rightarrow \int_{4\pi}^{9\pi} \left[f'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} f(x) \right] dx = \int_{4\pi}^{9\pi} \frac{x}{2} \cos x dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot f(x) \Big|_{4\pi}^{9\pi} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{\pi}} f(9\pi) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} f(4\pi) = -1 \Rightarrow f(9\pi) = 3\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot 0 - 1 \right) = -3\sqrt{\pi}.$$

- Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 5$ và $2xf'(x) + f(x) = 6x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_4^9 f(x) dx$.
A. 71. **B.** 59. **C.** 136. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2xf'(x) + f(x) = 6x \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x) = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}f(x)\right)' = 3\sqrt{x}.$$

$$\text{Do đó } \sqrt{x}f(x) = \int 3\sqrt{x}dx = 2x\sqrt{x} + C.$$

$$\text{Từ } f(1) = 5 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Vậy } \int_4^9 f(x) dx = \int_4^9 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = 71.$$

- Câu 9.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn: $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2 \cdot f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{21}{10}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2 \cdot f^2(x) \Leftrightarrow 3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)}\right)' = 2x$$

$$\int \left(\frac{x^3}{f(x)}\right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C$$

$$\text{Do } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{1+C} = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2. \text{ Vậy } f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$$

$$\text{Tìm được } M = f(2) = \frac{4}{3}, m = f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow M + m = \frac{5}{3}.$$

- Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $R \setminus \{0; -1\}$, thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$ với mọi $x \in R \setminus \{0; -1\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in Q$, tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = \frac{3}{4}$. **C.** $P = \frac{13}{4}$. **D.** $P = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{x}{x+1}f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}, \forall x \in R \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Nhận thấy } \frac{x}{x+1}f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} = \left[f(x) \frac{x}{x+1}\right]', \forall x \in R \setminus \{0; -1\}.$$

Do đó giả thiết tương đương với

$$\left[f(x) \frac{x}{x+1}\right]' = \frac{x}{x+1}, \forall x \in R \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \frac{x}{x+1} = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -2\ln 2 \Rightarrow C = -1 \rightarrow f(x) \frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| - 1.$$

$$\text{Cho } x = 2 \text{ ta được } f(2) \frac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}; b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{9}{2}.$$

- Câu 11.** Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và
- $$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2017x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$
- Tính tích phân $I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx$.
- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = 1$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} g(x) - \frac{x+1}{x} f'(x) = -2017 \\ \frac{x}{x+1} g'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 2018 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

Suy ra:

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2} g(x) + \frac{x}{x+1} g'(x) \right] - \left[\frac{x+1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) \right] = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} g(x) \right]' - \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}.$$

- Câu 12.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.
- A. $P = -\frac{4}{9}$. B. $P = -\frac{2}{9}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{14}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta có $\cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow [\sin x \cdot f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}$.

Suy ra $\sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

Với $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \ln 2 + C \Rightarrow \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - 2\ln 2 + 2C$.

Với $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 + C \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{9} \cdot \pi\sqrt{3} + \ln 3 - 2\ln 2 + 2C$.

Suy ra $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{9}\pi\sqrt{3} - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = -\frac{4}{9}.$

- Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + x \cdot f'(x) \geq x^{2018} \forall x \in [0; 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$.

B. $\frac{1}{2019.2020}$.

C. $\frac{1}{2020.2021}$.

D. $\frac{1}{2019.2021}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $g(x) = x^3 \cdot f(x) - \frac{x^{2021}}{2021}$ trên $[0; 1]$.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) - x^{2020} = x^2 \cdot [3f(x) + x \cdot f'(x) - x^{2018}] \geq 0 \forall x \in [0; 1]$.

Do đó $g(x)$ là hàm số không giảm trên $[0; 1]$, suy ra $g(x) \geq g(0) \forall x \in [0; 1]$

Hay $x^3 \cdot f(x) - \frac{x^{2021}}{2021} \geq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021} \geq 0, \forall x \in [0; 1].$

Vậy: $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \frac{1}{2019.2021}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}$.

QUY TẮC ĐẠO HÀM THƯỜNG

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ thì $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ với $v \neq 0$.

- Nếu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = h(x)$ thì $\frac{f(x)}{g(x)} = \int h(x) dx$.

Hệ quả: Nếu $u = u(x)$ thì $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ với $u \neq 0$.

- Nếu $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = g(x)$ thì $\frac{1}{f(x)} = \int g(x) dx$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{19}{36}$.

D. $-\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn B

+) Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -2x \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int 2x dx$
 $\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C$.

+) Lại có $f(2) = -\frac{2}{9} \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x^2 f'(x) + f(x) = 0$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$. Tính $f(2)$ biết $f(1) = e$.

A. $f(2) = e^2$.

B. $f(2) = \sqrt[3]{e}$.

C. $f(2) = 2e^2$.

D. $f(2) = \sqrt{e}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$
 $\Rightarrow f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(1; 2) \Rightarrow f(1).f(2) > 0, \forall x \in (1; 2)$.

Mà $f(1) = e > 0$ nên $f(2) > 0$.

Do đó $x^2 f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Suy ra $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\ln|f(x)| \Big|_1^2$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -(\ln|f(2)| - \ln|f(1)|) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -[\ln f(2) - \ln e]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\ln f(2) + 1 \Leftrightarrow \ln f(2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$ và $f'(x) = [xf(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết, ta có $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -x^2 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C$.

+) Lại có $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{-x^3 + 10}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(2)} = \frac{2}{3} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 2, f(x) \neq 0, \forall x > 0$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $-\frac{2}{5}$.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \quad \forall x \in [1; 2] (*)$

Lấy tích phân 2 vế (*) trên $[1; 2]$ ta được

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \int_1^2 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2) = \frac{5}{2}.$$

- Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x \cdot f(x)$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $f(0) = 1$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{1+\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\ln \frac{1+\pi}{4}$. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Từ $f'(x) = \tan x \cdot f(x)$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, ta có:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \tan x, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \tan x dx, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\ln(\cos x) + C, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \text{ nên suy ra } \ln f(0) = -\ln(\cos 0) + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Như vậy } \ln f(x) = -\ln(\cos x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\text{Từ đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4}.$$

- Câu 19.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $(x^2 + 3)^2 f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$; $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(3)$ bằng
- A. 9. B. 6. C. 2019. D. 12.

Lời giải

Chọn D

Vì $(x^2 + 3)^2 f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$; $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} dx \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{f^2(x)} = \int \frac{d(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^3 = -\frac{1}{x^2 + 3} \Big|_1^3 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{f(3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow f(3) = 12.$$

- Câu 20.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = x \cdot f'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.
- A. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$. B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. C. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$. D. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = x \cdot f'(x) - 1$

$$\Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x) (*)$$

$$\text{Đặt } h(x) = xf(x) + 1 \Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x)$$

Khi đó (*) có dạng

$$h^2(x) = h'(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)} dx = \int 1 \cdot dx \Rightarrow -\frac{1}{h(x)} = x + C$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow x \cdot f(x) + 1 = -\frac{1}{x+C}$$

Vì $f(1) = -2$, nên $-2 + 1 = -\frac{1}{1+C} \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra $f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln|x|\right) \Big|_1^2 = -\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

- Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1; f'(x) < 0$ và $[f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0; 1]$. Giá trị của $f(0) - f(1)$ thuộc khoảng nào?
A. $(1; 2)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } [f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = \int dx.$$

$$\Leftrightarrow \int [f'(x)]^{-2} d[f'(x)] = x + C \Leftrightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + C.$$

$$\text{Mà } f'(0) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{-1} = C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x+1}.$$

$$\text{Ta có } f(0) - f(1) = \int_1^0 f'(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 \in (0; 1)$$

- Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A. $T = 2 + 9\ln 2$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = \frac{1}{2} + 9\ln 2$. **D.** $T = 2 - 9\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Rightarrow 9(f''(x) - 1) = -[f'(x) - x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế } -\int \frac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2} dx = \int \frac{1}{9} dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x)-x} = \frac{x}{9} + C.$$

$$\text{Do } f'(0) = 9 \text{ nên } C = \frac{1}{9} \text{ suy ra } f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x$$

$$\text{Vậy } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x\right) dx = \left(9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = 9\ln 2 + \frac{1}{2}.$$

- Câu 23.** Cho hàm số $y = f(x), \forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \\ f'(0) = 0; f(0) = 1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)} = -x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right]' = -x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{f'(0)}{f^2(0)} = -\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = \left(-\frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow -\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{6}{7}.$$

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = x \cdot f'(x) - 1$ với đồng thời $f(1) = 2$. Tính $\int_1^4 f(x) dx$.

A. $-2\ln 2 - \frac{1}{4}$.

B. $-2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

C. $-\ln 2 - \frac{3}{4}$.

D. $-\ln 2 - \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $(xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x)$.

$$\text{Đặt } u = x \cdot f(x) + 1 \Rightarrow u^2 = u' \Rightarrow \frac{u'}{u^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{u'}{u^2} dx = x + C \Rightarrow \frac{-1}{u} = x + C.$$

$$\text{Vậy } x \cdot f(x) = \frac{-1}{x+C} - 1, \text{ mà } f(1) = -2 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = -2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2)f^2(x), \forall x \in [1; 2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x) dx$ bằng

A. $\ln \frac{4}{3}$.

B. $\ln \frac{3}{4}$.

C. $\ln 3$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{+) Từ giả thiết, ta có } f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2)f^2(x) \Rightarrow \frac{f(x) + xf'(x)}{[xf(x)]^2} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{xf(x)} \right]' = -2x - 1 \Rightarrow \frac{1}{xf(x)} = \int (-2x - 1) dx \Rightarrow \frac{1}{xf(x)} = -x^2 - x + C.$$

$$\text{+) Lại có } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow xf(x) = -\frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow \int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 \frac{-1}{x(x+1)} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x} \Big|_1^2 = \ln \frac{3}{4}.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện: $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. (6; 7).

B. (5; 6).

C. (12; 13).

D. (11; 12).

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \Rightarrow \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\cos x\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\cos x + c$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + cx$$

Khi đó:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx = -4 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x + cx)\sin x dx = -4$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \sin x dx + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x dx = -4 \Leftrightarrow 0 + c(-2) = -4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + 2x \Rightarrow f(\pi) = 2\pi - 1 \in (5; 6).$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; e]$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $x \cdot f'(x) = xf^2(x) - 3f(x) + \frac{1}{x}, \forall x \in [1; e]$. Tính giá trị của $f(e)$.

A. $\frac{3}{2e}$.

B. $\frac{4}{3e}$.

C. $\frac{3}{4e}$.

D. $\frac{2}{3e}$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có:

$$x \cdot f'(x) = xf^2(x) - 3f(x) + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{x^2 \cdot f^2(x) - 2x \cdot f(x) + 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow [x \cdot f(x)]' = \frac{[x \cdot f(x) - 1]^2}{x} \Leftrightarrow \frac{[x \cdot f(x)]'}{[x \cdot f(x) - 1]^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{[x \cdot f(x)]'}{[x \cdot f(x) - 1]^2} dx = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{1}{1 - x \cdot f(x)} = \ln|x| + c.$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(e) = \frac{2}{3e}.$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x + 3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x + 3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C. \text{ Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$$

$$\text{Vậy } a = -1009; b = 2020. \text{ Do đó } b - a = 3029.$$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x + 3)f^2(x) = 0, f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = \frac{1}{6}$. Tính $P = 1 + f(1) + f(2) + \dots + f(2018)$.

A. $P = \frac{1009}{2020}$.

B. $P = \frac{2019}{2020}$.

C. $P = \frac{3029}{2020}$.

D. $P = \frac{4039}{2020}$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } f'(x) + (2x + 3)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x + 3) \text{ (do } f(x) > 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = - \int (2x + 3) dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 3x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - C}.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{4-C} = \frac{1}{6} \Rightarrow C = -2.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

$$\text{Suy ra } P = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2020} = \frac{3029}{2020}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x), \forall x \in [1; 2]$. Giá trị của $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. $1 + \ln 2$.

B. $1 - \ln 2$.

C. $\frac{1}{2} - \ln 2$.

D. $\frac{1}{2} + \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

+) Từ giả thiết, ta có $f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x) \Rightarrow \frac{f(x) - (x+1)f'(x)}{f^2(x)} = 2x$

$$\Rightarrow \left[\frac{x+1}{f(x)} \right]' = 2x \Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = \int 2x dx \Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = x^2 + C.$$

+) Lại có $f(1) = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

$$= \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{3}$ và $f(x) - f'(x) = [f(x)]^2$ với mọi $x \in [0; 1]$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 1$.

A. $\ln 2$.

B. $\ln \frac{4}{3}$.

C. $\ln 12$.

D. $\ln \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

+) Ta có $f(x) - f'(x) = [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f(x) - f'(x)}{[f(x)]^2} = 1 \Rightarrow \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{[f(x)]^2} = e^x \Rightarrow \frac{(e^x)' f(x) - e^x f'(x)}{[f(x)]^2} =$

$$e^x \Rightarrow \left[\frac{e^x}{f(x)} \right]' = e^x \Rightarrow \frac{e^x}{f(x)} = \int e^x dx = e^x + C.$$

+) Lại có $f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{e^x}{f(x)} = e^x + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}.$

+) Do đó $S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2 + e^x} dx = \ln(2 + e^x) \Big|_0^{\ln 2} = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}.$

$$= 1e - 2.$$

Câu 32. Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)) \ln x = x^3 - f(x), \forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12; \frac{25}{2}\right).$

B. $\left(13; \frac{27}{2}\right).$

C. $\left(\frac{23}{2}; 12\right).$

D. $\left(14; \frac{29}{2}\right).$

Lời giải

Chọn C

Vì $x \in (1; +\infty)$ nên ta có

$$(x^2 f'(x) - 2xf(x)) \ln x = x^4 - xf(x) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} \right) \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x dx = \int \left(1 - \frac{f(x)}{x^3} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} - \int \frac{f(x)}{x^3} dx = x - \int \frac{f(x)}{x^3} dx + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2(x+C)}{\ln x}.$$

Theo bài ra $f(\sqrt[3]{e}) = 3e \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$.

Do đó $f(2) = \frac{8}{\ln 2} \in \left(\frac{23}{2}; 12\right)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; 1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; 1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0; 1)$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx$ theo a và b .

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$.

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}$.

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}$.

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Lời giải

Chọn D

$\forall x \in (0; 1)$ ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2f'(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'$$

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 4 \sin x \cos x}{f^2(\sin x)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \text{ đổi cận } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$$

Câu 34. Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 0; f(0) = 1$ và $f''(x) \cdot f(x) + \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2 = [f'(x)]^2$. Tính $T = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

A. $T = \frac{3}{4}$.

B. $T = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $T = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f''(x) \cdot f(x) + \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2 = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = -\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\tan x + C. \text{ Vì } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ nên } C = 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{f'(x)}{f(x)} = -\tan x. \text{ Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\tan x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ \Leftrightarrow \ln f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln f(0) = \ln \frac{1}{2} - \ln 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = xf'(x) - 1 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

A. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$.

B. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$.

C. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

D. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) - f(x) = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = xf'(x) + f(x) (*)$$

$$\text{Xét } xf(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = -1 \text{ (không thỏa mãn).}$$

$$\text{Xét } xf(x) + 1 \neq 0, \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) + f(x)}{[xf(x) + 1]^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{[xf(x) + 1]'}{[xf(x) + 1]^2} = 1.$$

$$\Rightarrow \int \frac{[xf(x) + 1]'}{[xf(x) + 1]^2} dx = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + C.$$

Cho $x = 1$ ta được : $-\frac{1}{1f(1)+1} = 1 + C \Rightarrow -\frac{1}{-2+1} = 1 + C \Rightarrow C = 0.$

$\Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1} = x \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x}$ (vì $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

Vậy $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{x}\bigg|_1^2 - \ln x\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} - \ln 2.$

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x).f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 = f(0)$. Biết rằng $I = \int_0^{\frac{1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1)f(x)dx = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính $T = a - 2b$.

A. $T = 12277.$

B. $T = 6127.$

C. $T = 12281.$

D. $T = 6125.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3f^2(x).f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}}{e^x} - 4xe^{2x^2+1} = \frac{e^{f^3(x)}}{e^x}$

$$\Leftrightarrow \frac{3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)} - e^{f^3(x)}}{e^x} = 4xe^{2x^2+1} \Leftrightarrow \left[\frac{e^{f^3(x)}}{e^x} \right]' = 4xe^{2x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{f^3(x)}}{e^x} = \int 4xe^{2x^2+1} dx = \int e^{2x^2+1} d(2x^2+1) = e^{2x^2+1} + C.$$

Do $f(0) = 1$ nên $C = 0$.

Khi đó $\frac{e^{f^3(x)}}{e^x} = e^{2x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = 2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x + 1}.$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\frac{1+\sqrt{4089}}{4}} (2x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} d(2x^2 + x + 1) = \frac{3}{4} (2x^2 + x + 1)^{\frac{4}{3}} \bigg|_0^{\frac{1+\sqrt{4089}}{4}} = \frac{12285}{4} = \frac{a}{b}$$

Vậy $T = a - 2b = 12285 - 8 = 12277.$

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = e$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 - 4e + 4.$

B. $4e^2 - 2e + 1.$

C. $2e^3 - 2e + 2.$

D. $4e^2 + 4e - 4.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (x+2)f(x)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right]' = e^{-x}$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 \left[\frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right]' dx = \int_1^2 e^{-x} dx \Leftrightarrow \frac{e^{-2}f(2)}{2^2} - \frac{e^{-1}f(1)}{1^2} = -[e^{-2} - e^{-1}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-2}f(2)}{4} - \frac{e^{-1}f(1)}{1} = e^{-1} - e^{-2} \Leftrightarrow f(2) = 4[ef(1) + e - 1] = 4e^2 + 4e - 4.$$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; 1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; 1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0; 1)$. Tính tích phân $I =$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx \text{ theo } a \text{ và } b.$$

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}.$

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}.$

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}.$

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}.$

Lời giải

Chọn D

$\forall x \in (0; 1)$ ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)} \right)'$$

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 4 \sin x \cos x}{f^2(\sin x)} dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, đổi cận $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$$

Câu 39. Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x))\ln x = x^3 - f(x)$, $\forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$. B. $\left(13; \frac{27}{2}\right)$. C. $\left(\frac{23}{2}; 12\right)$. D. $\left(14; \frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x \in (1; +\infty)$ nên ta có

$$\begin{aligned} (x^2 f'(x) - 2xf(x))\ln x &= x^4 - xf(x) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} \right) \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3} \\ \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x &= 1 - \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x dx = \int \left(1 - \frac{f(x)}{x^3} \right) dx \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)\ln x}{x^2} - \int \frac{f(x)}{x^3} dx &= x - \int \frac{f(x)}{x^3} dx + C \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)\ln x}{x^2} &= x + C \Leftrightarrow \frac{f(x)\ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2(x+C)}{\ln x}. \end{aligned}$$

Theo bài ra $f(\sqrt[3]{e}) = 3e \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$.

Do đó $f(2) = \frac{8}{\ln 2} \in \left(\frac{23}{2}; 12\right)$.

ÁP DỤNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM CHỨA CĂN

Nếu $u = u(x)$ thì $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ với $u > 0$.

- Nếu $[\sqrt{f(x)}]' = h(x)$ thì $\sqrt{f(x)} = \int h(x) dx$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f'(x) = 2\sqrt{f(x)}$, $\forall x \in [0; 1]$ và $f(0) = 1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. 7. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

+) Từ giả thiết, ta có $f'(x) = 2\sqrt{f(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{f(x)})' = 1 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \int dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = x + C$

+) Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 \Big|_0^1 = \frac{7}{3}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = 25$ và $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_2^3 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{1073}{15}$. B. $\frac{458}{15}$. C. $\frac{838}{15}$. D. $\frac{1016}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta suy ra được: $f'(x) \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ không nghịch biến trên bất kì khoảng con nào của $(0; +\infty)$.

Từ đó suy ra $f(x) \geq f(2) = 25 > 0 \forall x \in [2; +\infty)$.

Xét trên $[2; +\infty)$ ta có: $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int 2x dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C$.

Mà $f(2) = 25$ nên ta suy ra được $\sqrt{25} = 2^2 + C \Leftrightarrow C = 1$.

Từ đó ta có: $f(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1, \forall x \in [2; +\infty)$.

Do đó $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_2^3 = \frac{838}{15}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $[f'(x)]^2 - 16x^2 \cdot f(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{28}{15}$. B. $\frac{8}{15}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

+) Từ giả thiết, ta có $[f'(x)]^2 = 16x^2 \cdot f(x) \Rightarrow \frac{[f'(x)]^2}{4f(x)} = 4x^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x \Rightarrow \left[\sqrt{f(x)} \right]' = 2x \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \int 2x dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C$.

+) Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \frac{28}{15}$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn: $g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt, g(x) = f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$.

- A. $\frac{1011}{2}$. B. $\frac{1009}{2}$. C. $\frac{2019}{2}$. D. 505.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 2018f(x) = 2018\sqrt{g(x)}$

$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2018 \int dx \Rightarrow 2(\sqrt{g(x)}) \Big|_0^t = 2018x \Big|_0^t$

$\Rightarrow 2(\sqrt{g(t)} - 1) = 2018t \quad (\text{do } g(0) = 1) \Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)} dt = \left(\frac{1009}{2} t^2 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{1011}{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (12; 13). B. (9; 10). C. (11; 12). D. (13; 14).

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x) > f(0), \forall x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{f(x)} \cdot e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \Big|_0^2 = e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2 \Leftrightarrow \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(0)} = e - 1$

$\Rightarrow f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \in (9; 10)$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $[f(x) + xf'(x)]^2 = 4f(x), \forall x \in [1; 4]$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

- A. $4 - 2\ln 2$. B. $4 + 2\ln 2$. C. $4 + \ln 2$. D. $4 - \ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}
 &+) \text{ Ta có } (f(x) + xf'(x))^2 = 4f(x) \Rightarrow \frac{(f(x) + xf'(x))^2}{4f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{(f(x) + xf'(x))^2}{4xf(x)} = \frac{1}{x} \\
 &\Rightarrow \frac{f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{(x)f'(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{(xf'(x))'}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{xf(x)})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 &\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \sqrt{xf(x)} = 2\sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \sqrt{xf(x)} = 2\sqrt{x} - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x}.$$

$$+) \text{ Do đó } S = \int_1^4 \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int_1^4 \left(4 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = 4x \Big|_1^4 - 8\sqrt{x} \Big|_1^4 + \ln x \Big|_1^4 = 4 + 2\ln 2.$$

Câu 46. Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3.$$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$?

A. $I = \frac{1186}{45}.$

B. $I = \frac{1174}{45}.$

C. $I = \frac{1222}{45}.$

D. $I = \frac{1201}{45}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x}, \forall x \in [1; 4].$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C. \text{ Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}.$$

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1 + f^2(x)}$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0) = \sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ ta có } f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1 + f^2(x)} \Rightarrow \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = \cos x (*).$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + C.$$

$$\text{Ta có } f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2, \text{ dẫn đến } f(x) = \sqrt{(\sin x + 2)^2 - 1}. \text{ Vậy } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

ÁP DỤNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM MŨ

4) Quy tắc: Nếu $u = u(x)$ thì $(e^u)' = u' \cdot e^u$;

- Nếu $(e^{f(x)})' = g(x)$ thì $e^{f(x)} = \int g(x)dx$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) \cdot e^{f(x)-x^2-1} = 2x, \forall x \in [0; 1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. 2.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $f'(x) \cdot e^{f(x)-x^2-1} = 2x \Rightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2xe^{x^2+1} \Rightarrow (e^{f(x)})' = 2xe^{x^2+1}$
 $\Rightarrow e^{f(x)} = \int 2xe^{x^2+1}dx \Rightarrow e^{f(x)} = e^{x^2+1} + C$.

+) Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow e^{f(x)} = e^{x^2+1} \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$.

+) Do vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$.

Câu 50. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$, tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x)dx$.

A. $I = \frac{9}{2}$.

B. $I = \frac{45}{8}$.

C. $I = \frac{11}{2}$.

D. $I = \frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) \cdot \frac{e^{f^3(x)}}{e^{x^2+1}} = \frac{2x}{f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2+1} \Leftrightarrow (e^{f^3(x)})' = (e^{x^2+1})' \Leftrightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C (*)$.

Thế $x = 0$ vào $(*)$ ta được $e = e + C \Leftrightarrow C = 0$.

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Vậy $I = \int_0^{\sqrt{7}} x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{3}{8} (16 - 1) = \frac{45}{8}$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f'(x)(1 + e^{f(x)}) = 1 + e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

A. 4.

B. 2.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $f'(x)(1 + e^{f(x)}) = 1 + e^x \Rightarrow f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 1 + e^x \Rightarrow [f(x) + e^{f(x)}]' = 1 + e^x$

$\Rightarrow f(x) + e^{f(x)} = x + e^x + C$.

+) Lại có $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) + e^{f(x)} = x + e^x$.

Xét hàm số $g(t) = t + e^t$ với $t \in \mathbb{R}$. $g'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x) + e^{f(x)} = x + e^x \Rightarrow f(x) = x$. Do đó $S = \int_1^3 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = 4$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x) \cdot f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 = f(0)$. Biết rằng $I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1)f(x) dx = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a - 3b$

A. $T = 6123$.

B. $T = 12279$.

C. $T = 6125$.

D. $T = 12273$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$3f^2(x) \cdot f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 = f(0) \Leftrightarrow (f^3(x))'e^{f^3(x)} - e^{f^3(x)} \\ = (4x+1) \cdot e^{2x^2+x+1} - e^{2x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow [f^3(x) - x]'e^{f^3(x)-x} = (2x^2+1)' \cdot e^{2x^2+1} \Rightarrow e^{f^3(x)-x} = e^{2x^2+1} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f^3(x) - x = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^3(x) = 2x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1)f(x) dx = \frac{12285}{4}.$$

ÁP DỤNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM LÔGARIT

Nếu $u = u(x)$ nhận giá trị dương trên K thì $[\ln u]' = \frac{u'}{u}$ trên K .

- Nếu $[\ln(f(x))]' = g(x)$ thì $\ln(f(x)) = \int g(x) dx$.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$. B. $f(-1) = e^3$. C. $f(-1) = e^4$. D. $f(-1) = 3$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi:

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{df(x)}{f(x)} = -4 \\ \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_{-1}^1 = -4$$

$$\ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^{-4} \Leftrightarrow f(-1) = f(1) \cdot e^4 = e^4.$$

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f'(x) = 2xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 2$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 x^3 f(x) dx$.

A. $I = 1$. B. $I = e$. C. $I = \frac{1+e}{2}$. D. $I = e - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int 2x dx \Rightarrow \ln f(x) = x^2 + C \Rightarrow \ln f(0) = C \Rightarrow \ln 2 = C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x^2 + \ln 2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2 + \ln 2} \Leftrightarrow f(x) = 2e^{x^2}.$$

$$\text{Vì vậy, } I = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \int_0^1 2x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} d(x^2) = \int_0^1 te^t dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = e^x dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = dt \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = (te^t - e^t) \Big|_0^1 = 1.$$

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $f'(x) = (3x - 2)f(x)$, khi đó giá trị của $f(1)$ bằng

A. $e^{-\frac{1}{2}}$. B. $e^{\frac{1}{2}}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = (3x - 2)f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 3x - 2.$$

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta có:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (3x - 2) dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

$$\text{Ta có: } \ln(f(0)) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + C \Leftrightarrow C = \ln(1) = 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{3}{2}x^2 - 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{3}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}, \forall x \geq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 < f(5) < 2$. B. $2 < f(5) < 3$. C. $4 < f(5) < 5$. D. $3 < f(5) < 4$.

Lời giải

Chọn D

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 1 \Rightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2\sqrt{3x+1}-4}{3} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79.$$

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f'(x) = 2x[1 + f(x)], \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^1 2xf(x)dx$ bằng

- A. $e - 2$. B. $e - 1$. C. $e + 2$. D. e .

Lời giải

Chọn A

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } \frac{f'(x)}{1+f(x)} = 2x \Rightarrow \frac{[1+f(x)]'}{1+f(x)} = 2x \Rightarrow [\ln(1+f(x))]' = 2x$$

$$\Rightarrow \ln[1+f(x)] = \int 2x dx \Rightarrow \ln[1+f(x)] = x^2 + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln[1+f(x)] = x^2 \Rightarrow 1+f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - 1.$$

$$+) \text{ Vậy } \int_0^1 2xf(x)dx = \int_0^1 2x(e^{x^2} - 1)dx = e^{x^2} \Big|_0^1 - x^2 \Big|_0^1 = e - 2.$$

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f'(x) = \frac{1}{x}f(x), \forall x \in [1; 2]$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ quay quanh trục hoành.

- A. 7π . B. $\frac{7\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{3}$. D. 3π .

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } f'(x) = \frac{1}{x}f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln f(x) = \ln x + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow V = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7\pi}{3}.$$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^x f(x)$ với $f(x) \neq 0, \forall x$ và $f(0) = 1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

- A. $e + 1$. B. e^{e-2} . C. $e - 1$. D. e^{e+1} .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết: } f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^x f(x), \text{ ta có}$$

$$f'(x) = f(x)(e^x - 2x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^x - 2x \text{ (vì } f(x) \neq 0, \forall x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (e^x - 2x) dx \Rightarrow \ln|f(x)| = e^x - x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \text{ nên } C = -1. \text{ Khi đó, ta được: } \ln|f(x)| = e^x - x^2 - 1.$$

$$\text{Thế } x = 1, \text{ ta có: } \ln|f(1)| = e - 2 \Rightarrow |f(1)| = e^{e-2}.$$

ÁP DỤNG CÁC CÔNG THỨC ĐẠO HÀM KHÁC

Câu 60. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(0) = 1$, tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) \cdot dx$.

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{45}{8}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$3 \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} = \frac{2x}{f^2(x)} \Leftrightarrow 3 \cdot f'(x) \cdot f^2(x) \cdot e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \cdot 2x \Leftrightarrow [e^{f^3(x)}]' = (e^{x^2+1})'$$

$$\Leftrightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C. \text{ Do } f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$I = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{7}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} =$$

$$\frac{3}{8} (8^{\frac{4}{3}} - 1) = \frac{45}{8}.$$

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: $x^6 \cdot [f'(x)]^3 + 27 \cdot [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -7 .

B. 1 .

C. -1 .

D. 7 .

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$x^6 \cdot [f'(x)]^3 + 27 \cdot [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$x^6 \cdot [f'(x)]^3 = -27 \cdot [f(x) - 1]^4.$$

$$\Rightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^4} = -\frac{27}{x^6} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)-1} \cdot [f(x)-1]} = -\frac{3}{x^2}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)-1} \cdot [f(x)-1]} dx = \int -\frac{3}{x^2} dx \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{f(x)-1} \Rightarrow t^3 = f(x)-1 \Rightarrow 3t^2 dt = f'(x) dx$$

$$(*) \Rightarrow \int \frac{3}{t^2} dt = \int \frac{-3}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{3}{t} = \frac{3}{x} + C \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = \frac{3}{x} + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt[3]{f(1)-1}} = \frac{3}{1} + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{f(x)-1} = -x \Rightarrow f(x) = 1 - x^3 \Rightarrow f(2) = -7.$$

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1:

Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] \cdot dx$, tính $\int_a^b f(x) \cdot dx$. Hoặc cho $\int_a^b f(x) \cdot dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] \cdot dx$.
 Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$ và lưu ý cho học sinh tích phân của hàm số thì không phụ thuộc vào biến số.

Câu 1. Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x)dx$

A. 16.

B. 4.

C. 32.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $\int_0^2 f(2x)dx$. Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\int_0^2 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x)dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)dx$.

A. $I = 16$.

B. $I = 32$.

C. $I = 4$.

D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int_0^1 f(2x)dx = 8$, đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 8$.

Xét $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)dx$, đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 2$.

Suy ra $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 8$.

Câu 3. Cho $\int_0^9 f(x)dx = 3021$. Tính tích phân $I = \int_0^3 [f(3x) + f(9-3x)]dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 4036$.

C. $I = 2014$.

D. $I = 1009$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3}dt$.

+) $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

+) $x = 3 \Rightarrow t = 9$.

Ta có: $\int_0^3 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t)dt$.

Đặt $t = 9 - 3x \Rightarrow dt = -3dx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{3}dt$.

+) $x = 0 \Rightarrow t = 9$.

+) $x = 3 \Rightarrow t = 0$.

Ta có: $\int_0^3 f(9-3x)dx = -\frac{1}{3} \int_9^0 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t)dt$.

Suy ra $I = \int_0^3 [f(3x) + f(9-3x)]dx = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t)dx + \frac{1}{3} \int_0^9 f(t)dx = \frac{2}{3} \int_0^9 f(t)dt$.

$= \frac{2}{3} \int_0^9 f(x)dx = \frac{2}{3} \cdot 3021 = 2014$.

Câu 4. Cho $\int_1^2 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ bằng

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 4$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$; đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 4 \Rightarrow t = 2$

$I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 f(t)2dt = 2 \int_1^2 f(t)dt = 2 \cdot 2 = 4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Tính $\int_{-2}^2 f(5|x| + 2)dx$.

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x)dx = 2$. Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du \Rightarrow \int_0^2 f(u)du = 4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

Nên $14 = \int_0^2 f(6x)dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v)dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v)dv = 84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f(5|x| + 2)dx = \int_{-2}^0 f(5|x| + 2)dx + \int_0^2 f(5|x| + 2)dx$.

* Tính $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x| + 2)dx$.

Đặt $t = 5|x| + 2$. Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t)dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16$.

* Tính $I_1 = \int_0^2 f(5|x| + 2)dx$.

Đặt $t = 5|x| + 2$. Khi $0 < x < 2$, $t = 5x + 2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t)dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16$.

Vậy $\int_{-2}^2 f(5|x| + 2)dx = 32$.

Hoặc: Do hàm $f(5|x| + 2)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-2}^2 f(5|x| + 2)dx = 2 \int_0^2 f(5|x| + 2)dx = 2 \cdot 16 = 32$.

Câu 6. Cho $I = \int_1^2 f(x)dx = 2$. Giá trị của $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot f(\sqrt{3\cos x + 1})}{\sqrt{3\cos x + 1}} dx$ bằng

A. 2.

B. $-\frac{4}{3}$.C. $\frac{4}{3}$.

D. -2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{3\cos x + 1} \Rightarrow dt = \frac{-3\sin x}{2\sqrt{3\cos x + 1}} dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó: $J = \int_2^1 -\frac{2}{3} f(t)dt = \int_1^2 \frac{2}{3} f(t)dt = \frac{2}{3} \int_1^2 f(x)dx = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x)dx$.

A. $I = 3 + 2\ln^2 2$.B. $I = 2\ln^2 2$.C. $I = \ln^2 2$.D. $I = 2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$.

Xét $K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx$.

Đặt $2\sqrt{x} - 1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \Rightarrow K = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(x)dx$.

Xét $M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^4 = 2\ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x)dx = 2\ln^2 2$.

Câu 8. Cho $\int_0^1 f(2x+1)dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x)dx$.

A. 26.

B. 22.

C. 27.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } 2x+1=t \Rightarrow 12 = \int_1^3 f(t) d\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 24.$$

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot f(\sin^2 x) d(\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) d(\sin^2 x) = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = 3$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 3 + 24 = 27.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$. Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.B. $I = \frac{7}{2}$.C. $I = \frac{9}{2}$.D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x) = f(x), \forall x[a; b]$. Khi đó $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow dx = -dt$, với $x \in [a; b]$. Đổi cận: khi $x = a \Rightarrow t = b$; khi $x = b \Rightarrow t = a$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_a^b xf(x)dx &= \int_a^b xf(a+b-x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt \\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \\ \Rightarrow 2 \int_a^b xf(x)dx &= (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx}. \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trên với $a = 1, b = 3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x) = f(x)$.

$$\text{Khi đó } \int_1^3 xf(x)dx = \frac{1+3}{2} \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t = 4-x$, với $x \in [1; 3]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 xf(x)dx &= \int_1^3 xf(4-x)dx = \int_1^3 (4-t)f(t)dt = 4 \int_1^3 f(t)dt - \int_1^3 tf(t)dt \\ \Rightarrow 5 &= 4 \int_1^3 f(t)dt - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $f(4-x) = f(x), \forall x \in [1; 3]$ và $\int_1^3 xf(x)dx = -2$. Giá trị $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Xét $I = \int_1^3 xf(x)dx$ (1).

Đặt $x = 4 - t$, ta có $dx = -dt$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$, $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $I = \int_1^3 (4 - t)f(4 - t)dt = \int_1^3 (4 - t)f(t)dt$, hay $I = \int_1^3 (4 - x)f(x)dx$ (2).

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $2I = \int_1^3 4f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{I}{2} = -1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^4 f(x)dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 9$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

• Xét $I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$, đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 16 \Rightarrow t = 4$ nên $I = 2 \int_1^4 f(t)dt = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(t)dt = \frac{6}{2} = 3$.

• $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$, đặt $\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \Rightarrow J = \int_0^1 f(u)du = 3$

Vậy $I = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = 3 + 3 = 6$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

* $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\cos^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx$.

Đặt $\cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x dx = -dt$.

Đổi cận

$$x \rightarrow 0 \quad \frac{\pi}{4}$$

$$t \rightarrow 1 \quad \frac{1}{2}$$

Khi đó $I_1 = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt$

.

* $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx$.

Đặt $\ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} dx = dt$.

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt$

.

* Tính $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$. Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8.$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$

A. 4

B. 6

C. 7

D. 10

Lời giải

Chọn C

+) Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx$

Đổi cận:

Khi đó $\int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t^3} 3t^2 dt = 3 \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 2$

+) Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \cos x \sin x dx \Rightarrow dt = -2 \cos^2 x \tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{1}{2t} dt$

Đổi cận:

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 12$

+) Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow dt = 2x^2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{dt}{t}$

Đổi cận:

Khi đó $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt \right) = \frac{2+12}{2} = 7$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.B. $I = 2$.C. $I = 3$.D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; Ta đặt $t = \tan x$ ta được $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1} dt = 4$

Từ $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1)f(x)}{x^2+1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx = 2 + 4 = 6.$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$, $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [1; 3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2 = [(f(x))^2(x-1)]^2$ và $f(1) = -1$.

Biết rằng $\int_1^3 f(x) dx = a \ln 3 + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, tính tổng $S = a + b^2$.

A. $S = 0$.B. $S = -1$.C. $S = 2$.D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)(1+f(x))^2 = [(f(x))^2(x-1)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)} = (x-1)^2.$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\int \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)} dx = \int (x-1)^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{(1+2f(x)+f^2(x))f'(x)}{f^4(x)} dx = \int (x-1)^2 dx$

$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{f^4(x)} + 2 \frac{1}{f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} \right) d(f(x)) = \frac{(x-1)^3}{3} + C$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)} - \frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{(x-1)^3}{3} + C \Leftrightarrow -\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)} = \frac{(x-1)^3}{3} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = -1 \text{ nên } -\frac{1-3+3}{-3} = C \Rightarrow C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } -\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)} = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)} + \frac{1}{3} = -\frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+f(x))^3}{f^3(x)} = -(x-1)^3 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x}.$$

$$\text{Vậy: } \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_1^3 = -\ln 3. \text{ Suy ra } a = -1; b = 0 \text{ hay } a + b = -1.$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ sao cho $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{(\ln x)f(x)}{x} dx$.

A. $I = -\frac{1}{8}.$

B. $I = -\frac{2}{3}.$

C. $I = \frac{1}{12}.$

D. $I = \frac{3}{8}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } x \in (0; +\infty) \text{ ta có } x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1 \Rightarrow f(e^x) = \frac{1-x^2}{1+x} = 1-x$$

$$\text{Đặt } \ln x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}.$$

Đổi cận

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 tf(e^t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t) dt = \frac{1}{12}.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx = a$ và $\int_e^{e^{\sqrt{2}}} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = b$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $a + b.$

B. $-a + 2b.$

C. $-a - 2b.$

D. $a + 2b.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét tích phân } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx. \text{ Đặt } t = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow dt = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cos x f\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx = \int_1^{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}} \frac{f(t)}{t} dt = a \Rightarrow \int_1^{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}} \frac{f(t)}{t} dt = -a.$$

$$\text{Xét tích phân } I_2 = \int_e^{e^{\sqrt{2}}} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx. \text{ Đặt } t = \ln^2 x \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

$$I_2 = \int_e^{e^{\sqrt{2}}} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_e^{e^{\sqrt{2}}} \frac{f(\ln^2 x)}{\ln^2 x} \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = b \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 2b.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = -a + 2b.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

A. $I = 3.$

B. $I = \frac{3}{2}.$

C. $I = 2.$

D. $I = \frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1, I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1.$$

$$? \text{ Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \sin^2 x \cdot \cot x dx = 2t \cdot \cot x dx.$$

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = 2I_1 = 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}$$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2:

Tính $\int_a^b f(x) dx$, biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $A \cdot f(x) + B \cdot u' \cdot f(u) + C \cdot f(a+b-x) = g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

+ Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$

+ Với $\begin{cases} u(a) = a \\ u(b) = b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

+ Với $\begin{cases} u(a) = b \\ u(b) = a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

+ Học sinh có thể nhớ công thức hoặc thực hiện hai lần đổi biến khác nhau như dạng 1.

- Câu 19.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$
- A. 2. B. 4. C. -1. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

$$\text{Biến đổi } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \text{ với } A = 1, B = -2.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 \frac{-6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx; \text{ Với } x = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ và } x = 1 \Rightarrow u = 1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

- Câu 20.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = -4$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: (Dùng công thức)

$$\text{Với } f(x) + f(2-x) = 2x \text{ ta có } A = 1; B = 1, \text{ suy ra: } I = \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^2 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + f(2-x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 2x dx = 4 (*)$$

$$\text{Đặt } u = 2-x \Rightarrow du = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=2 \text{ và } x=2 \Rightarrow u=0.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 f(u)du = \int_0^2 f(x)dx.$$

$$\text{Thay vào } (*), \text{ ta được } 2 \int_0^2 f(x)dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2.$$

Câu 21. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{20}$.

D. $\frac{\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [2f(x) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow A + B = C.$$

$$\text{Tính: } C = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sin t \text{ suy ra } dx = \cos t dt. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Vậy: } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Tính: } B = \int_0^1 3f(1-x) dx$$

$$\text{Đặt: } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Vậy: } B = \int_1^0 3f(t) dt = \int_0^1 3f(x) dx.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^1 [2f(x) + 3f(x)] dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2x) - xf(x^2) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{17}{8}$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. $-\frac{17}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$f(2x) - xf(x^2) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx - \int_1^2 xf(x^2) dx = \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 f(2x) d(2x) - \frac{1}{2} \int_1^2 f(x^2) d(x^2) = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \int_2^4 f(t) dt - \int_1^4 f(u) du = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Hay } \int_2^4 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = -\frac{15}{2}.$$

Câu 23. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 15$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x) + (2x)f(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$. Ta có:

$A = 1; B = 1; C = 3$ và $u = x^2 - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1) = -1 \\ u(2) = 2 \end{cases}$. Khi đó áp dụng công thức có:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1+3} \int_{-\frac{1}{2}}^2 4x^3 dx = \frac{x^4}{5} \Big|_{-\frac{1}{2}}^2 = 3.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3.$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_{-1}^2 2x \cdot f(x^2 - 2)dx + 3 \int_{-1}^2 f(1 - x)dx = \int_{-1}^2 4x^3 dx \quad (*)$$

+) Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2xdx$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1$ và $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 2x \cdot f(x^2 - 2)dx = \int_{-1}^2 f(u)du = \int_{-1}^2 f(x)dx \quad (1)$$

+) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; Với $x = -1 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = -1$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 f(1 - x)dx = \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^2 f(x)dx \quad (2)$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $5 \int_{-1}^2 f(x)dx = 15 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx = 3$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I = \frac{28}{3}$.

B. $I = 2$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = \frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^2 [\sqrt{x+2} + xf(3-x^2)]dx$$

$$= \int_{-1}^2 \sqrt{x+2}dx + \int_{-1}^2 xf(3-x^2)dx$$

$$= \frac{14}{3} + \int_{-1}^2 xf(3-x^2)dx = \frac{14}{3} + J.$$

$$\text{Tính } J = \int_{-1}^2 xf(3-x^2)dx$$

$$\text{Đặt } t = 3 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } J = -\frac{1}{2} \int_2^{-1} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{1}{2}I.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{14}{3} + \int_{-1}^2 xf(3-x^2)dx = \frac{14}{3} + \frac{1}{2}I \Rightarrow I = \frac{28}{3}.$$

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^2) - f(2x) = 2x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị } I = \int_1^2 f(x)dx.$$

A. $I = 25$.

B. $I = 21$.

C. $I = 27$.

D. $I = 23$.

Lời giải

Chọn B

$$xf(x^2) - f(2x) = 2x^3 + 2x \Rightarrow \int_1^2 [xf(x^2) - f(2x)]dx = \int_1^2 (2x^3 + 2x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [xf(x^2)]dx - \int_1^2 [f(2x)]dx = \left(\frac{x^4}{2} + x^2\right)\Big|_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 [xf(x^2)]dx - \int_1^2 [f(2x)]dx = \frac{21}{2}. (*)$$

$$+ \text{Tính } \int_1^2 [xf(x^2)]dx:$$

$$\text{Đặt } u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{du}{2}.$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 1; x = 2 \Rightarrow u = 4.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 [xf(x^2)]dx = \int_1^4 \frac{f(u)}{2}du = \frac{1}{2} \int_1^4 f(x)dx.$$

$$+ \text{Tính } \int_1^2 [f(2x)]dx:$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2}.$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 4.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 [f(2x)]dx = \int_2^4 \frac{f(t)}{2}dt = \frac{1}{2} \int_2^4 f(x)dx.$$

Thay vào (*) ta được $\frac{1}{2} \int_1^4 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{21}{2}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 21.$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Biết $f(2x - 1) + 2f(2x - 3) = 24x^2 - 28x + 20, \forall x \in \mathbb{R}$, tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. 24.

B. 36.

C. 12.

D. -36.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(2x - 1) + 2f(2x - 3) = 24x^2 - 28x + 20, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(2x - 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2f(2x - 3) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (24x^2 - 28x + 20) dx = 18 \Leftrightarrow M + N = 18$$

Tính $M = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(2x - 1) dx$: Đặt $t = 2x - 1 \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$. Đổi cận: $x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 0; x = \frac{3}{2} \rightarrow t = 2$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \quad (1)$$

Tính $N = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2f(2x - 3) dx$: Đặt $t = 2x - 3 \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận $x = \frac{1}{2} \rightarrow t = -2; x = \frac{3}{2} \rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow N = \int_{-2}^0 f(t) dt = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx, \quad (2)$$

(Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên) $\int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = 18 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 12$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập số thực thỏa mãn $f(x) + (5x - 2)f(5x^2 - 4x) = 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hãy tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết: $f(x) + (5x - 2)f(5x^2 - 4x) = 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $2f(x) + (10x - 4)f(5x^2 - 4x) = 100x^3 - 120x^2 + 46x - 2$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2f(x) + (10x - 4)f(5x^2 - 4x)) dx = \int_0^1 (100x^3 - 120x^2 + 46x - 2) dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (10x - 4)f(5x^2 - 4x) dx = \left(\frac{100}{4} x^4 - \frac{120}{3} x^3 + \frac{46}{2} x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 (*).$$

Xét $I = \int_0^1 (10x - 4)f(5x^2 - 4x) dx$. Đặt $t = 5x^2 - 4x \Rightarrow dt = (10x - 4)dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$

Khi đó $I = \int_0^1 f(t) dt$.

(*) trở thành $2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(t) dt = 6 \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = 2$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf(x^3) + f(1 - x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{-17}{20}$.

B. $\frac{-13}{4}$.

C. $\frac{17}{4}$.

D. -1 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự Luận

Ta có $xf(x^3) + f(1 - x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$$\Leftrightarrow x^2 f(x^3) + xf(1 - x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 xf(1 - x^2) dx = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx = \frac{-17}{24}$$

Xét $I_1 = \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx$ đặt $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{3} du = x^2 dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = -1 \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(u) du = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx$$

Xét $I_2 = \int_{-1}^0 xf(1 - x^2) dx$ đặt $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow \frac{-1}{2} du = x dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 0 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(u) du = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{-17}{24} \quad (2)$$

Trong (1) thay x bởi $-x$ ta được: $-xf(-x^3) + f(1 - x^2) = -x^{10} + x^6 + 2x, (3)$

Lấy (1) trừ (3) ta được: $xf(x^3) + xf(-x^3) = -4x$

$$\Rightarrow x^2 f(x^3) + x^2 f(-x^3) = -4x^2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 x^2 f(-x^3) dx = \int_{-1}^0 -4x^2 dx = \frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx = \frac{-4}{3} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-13}{4}$.

Cách 2: Trắc nghiệm có thể chọn hàm:

$$f(x) = -x^3 + 3x - 2$$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$f(x) + x^3 f(1 - x^4) = 2x^{11} + 3x^9 + x^4 - 5x^3 + 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó: $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{41}{15}$.

B. $\frac{11}{3}$.

C. $\frac{32}{5}$.

D. $\frac{41}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1 f(x) + x^3 f(1 - x^4) dx = \int_0^1 (2x^{11} + 3x^9 + x^4 - 5x^3 + 2x + 3) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \frac{-1}{4} \int_0^1 f(1 - x^4) d(1 - x^4) = \int_0^1 (2x^{11} + 3x^9 + x^4 - 5x^3 + 2x + 3) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \frac{-1}{4} \int_1^0 f(x) dx = \frac{41}{12} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{41}{15}$$

Mặt khác cũng từ giả thiết ta lại có:

$$\int_{-1}^0 f(x) + x^3 f(1 - x^4) dx = \int_{-1}^0 (2x^{11} + 3x^9 + x^4 - 5x^3 + 2x + 3) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{-1}{4} \int_{-1}^0 f(1 - x^4) d(1 - x^4) = \int_{-1}^0 (2x^{11} + 3x^9 + x^4 - 5x^3 + 2x + 3) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{-1}{4} \int_0^1 f(x) dx = \frac{179}{60} \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{179}{60} - \frac{-1}{4} \cdot \frac{41}{15} = \frac{11}{3}.$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2 - x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in [0; 2]$. Biết $f(2) = 10$, tích phân $I = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng:

A. 72.

B. 96.

C. 32.

D. 88.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có:

$$\Rightarrow \int_0^2 (f(x) + f(2-x))dx = \int_0^2 3(x^2 - 2x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 f(2-x)d(2-x) = -4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_2^0 f(t)dt = -4$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = -4 \Leftrightarrow 2 \int_0^2 f(x)dx = -4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -2$$

$$I = \int_0^4 xf'(\frac{x}{2})dx = 4 \int_0^2 xf'(x)dx = 4 \left(xf(x)|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \right) = 4(2f(2) - (-2)) = 88$$

Cách 2:

Xét $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$f(2) = 4a + 2b + c \quad (1)$$

$$f(2-x) = a(2-x)^2 + b(2-x) + c = ax^2 - (4a+b)x + 4a + 2b + c$$

$$\Rightarrow f(x) + f(2-x) = ax^2 + bx + c + ax^2 - (4a+b)x + 4a + 2b + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(2-x) = 2ax^2 - 4ax + 4a + 2b + 2c \quad (2)$$

Mà $f(x) + f(2-x) = 3(x^2 - 2x)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 10 \\ a = \frac{3}{2} \\ 4a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 7 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x - 10$$

$$I = \int_0^4 xf'(\frac{x}{2})dx = 4 \int_0^2 xf'(x)dx = 4 \left(xf(x)|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \right) = 4(2f(2) - (-2)) = 88$$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{2} \sin^3 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- A. 1. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \frac{1}{2} \sin^3 2x) dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \cos^2 2x) dx$$

* Tính $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x)dx$

Đôi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

* Tương tự, ta tính được: $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

$$\begin{aligned} * \text{ Tính } I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \cos^2 2x) dx = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 2x) d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\cos 2x + \frac{1}{3} \cos^3 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \cos^2 2x) dx$ trở thành:

$$2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} + \quad \text{Ta} \quad & \text{c\acute{o:} } f(1 + 4\sin x) - \sin x \cdot f(3 - 2\cos 2x) = 6\sin x + 1 \Rightarrow \cos x \cdot f(1 + 4\sin x) - \\ & \cos x \cdot \sin x \cdot f(3 - 2\cos 2x) = 6\sin x \cdot \cos x + \cos x \\ & \Leftrightarrow \cos x \cdot f(1 + 4\sin x) - \frac{1}{2}\sin 2x \cdot f(3 - 2\cos 2x) = 3\sin 2x + \cos x \quad (*) \end{aligned}$$

+ Lấy tích phân từ $-\frac{\pi}{2}$ đến 0 hai vế của (*) ta được:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \cdot f(1 + 4\sin x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2x \cdot f(3 - 2\cos 2x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (3\sin 2x + \cos x) dx \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(1 + 4\sin x) d(1 + 4\sin x) - \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(3 - 2\cos 2x) d(3 - 2\cos 2x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (3\sin 2x + \cos x) dx \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \int_{-3}^1 f(t) dt - \frac{1}{8} \int_5^1 f(t) dt = -2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \int_{-3}^1 f(t) dt + \frac{1}{8} \int_1^5 f(t) dt = -2 \quad (1) \end{aligned}$$

+ Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ hai vế của (*) ta được:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(1 + 4\sin x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(3 - 2\cos 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin 2x + \cos x) dx \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(1 + 4\sin x) d(1 + 4\sin x) - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(3 - 2\cos 2x) d(3 - 2\cos 2x) = 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \int_1^5 f(t) dt - \frac{1}{8} \int_1^5 f(t) dt = 4$$

$$\Leftrightarrow \int_1^5 f(t) dt = 32 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\int_{-3}^1 f(x) dx = -24$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$.
 Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{12}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad (1)$.

Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện đề bài cho trở thành $2f\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}f(t) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có:
$$\begin{cases} 4f(t) + 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = 2x \\ f(t) + 2t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1-2t}{-3}.$$

Lấy tích phân cận từ $\frac{1}{2}$ đến 2 ta được: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1-2x}{-3} dx = \frac{3}{4}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$. Khi đó
 $I = \int_{\frac{2}{5}}^1 \ln 3x \cdot f'(3x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$.

B. $\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$.

C. $-\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$.

D. $-\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right] \quad (1)$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{f(x)}{x} + 5 \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} = 3, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right] \Leftrightarrow 2 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{2}{5}}^1 3 dx = \frac{9}{5} \quad (2)$$

Xét $I_1 = 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} dx$ đặt $u = \frac{2}{5x} \Rightarrow du = -\frac{2}{5x^2} dx \Rightarrow -\frac{2}{5} \frac{du}{u^2} = dx$.

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = \frac{2}{5} \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = -5 \int_1^{\frac{2}{5}} \frac{f(u)}{u} du = 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(u)}{u} du = 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx$$

$$\text{Từ (2) suy ra, } 2 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{9}{35}$$

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x \cdot f'(3x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow \frac{1}{3} dt = dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = \frac{2}{15} \Rightarrow t = \frac{2}{5} \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{5}}^1 \ln t \cdot f'(t) dt$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = f'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{3} (\ln t \cdot f(t)) \Big|_{\frac{2}{5}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{35}$$

$$\text{Tính } 2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$$

Cho $x = 1; x = \frac{2}{5}$ vào (1) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2f(1) + 5f\left(\frac{2}{5}\right) = 3 \\ 2f\left(\frac{2}{5}\right) + 5f(1) = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra, } I = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \ln \frac{2}{5} - \frac{3}{35} = \frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}.$$

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 6x^2 + 4$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{11}{6}$.

B. $I = \frac{29}{6}$.

C. $I = \frac{8}{3}$.

D. $I = \frac{20}{3}$.

B1.X.T0Lời giải

Chọn B

Với mọi $x \in [1; 2]$, ta có: $3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 6x^2 + 4 \Leftrightarrow 3f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 6 + \frac{4}{x^2}$ (*).

Đặt $t = \frac{1}{x}$, ta có (*) có dạng: $\Leftrightarrow 3f(t) + f(1-t) = 4t^2 + 6$.

Về phải là hàm số bậc hai, ta chọn $f(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$).

Khi đó ta có: $3f(t) + f(1-t) = 3[at^2 + bt + c] + [a(1-t)^2 + b(1-t) + c]$
 $= 4at^2 - 2(a-b)t + a + b + 4c$.

Đồng nhất hai vế ta có: $\begin{cases} 4a = 4 \\ -2(a-b) = 0 \\ a + b + 4c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Suy ra: $f(t) = t^2 + t + 1$ hay $f(x) = x^2 + x + 1$.

Vậy $I = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 + x + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_1^2 = \frac{20}{3} - \frac{11}{6} = \frac{29}{6}$.

- Câu 36.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$. Khi đó $\int_{-1}^1 f(x)dx$ có giá trị là
- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f(1-x) + \frac{2}{x^2} f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}$

Ta có: $\int_1^2 f(1-x)dx + \int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3} dx$
 $\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x)d(1-x) + \int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right)d\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \int_1^2 \left(-x + 1 + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)dx$
 $\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt = \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\Big|_1^2$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt = 0$.

Vậy $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$.

Cách trắc nghiệm

Ta có: $x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4+x^3}{x} + \frac{4x-4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = x^2(1-x) + 2\left(\frac{2x-2}{x}\right), \forall x \neq 0, x \neq 1$

Chọn $f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = \int_{-1}^1 x \cdot dx = 0$.

- Câu 37.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2x f(x^2 - 2) + 2f(1-x) = 3x^2$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}} dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{9}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 9$.

Lời giải

Chọn C

+) Xét tích phân: $I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}} dx$.

Đặt $v = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow dv = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Đổi cận: Với $x = 1 \Rightarrow v = -1$ và với $x = 16 \Rightarrow v = 2$.

Khi đó: $I = \int_{-1}^2 f(v) dv = \int_{-1}^2 f(x) dx$ (1).

+) Ta có $2x f(x^2 - 2) + 2f(1 - x) = 3x^2$

$\Rightarrow \int_{-1}^2 2x \cdot f(x^2 - 2) dx + 2 \int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{-1}^2 3x^2 dx = 9$ (2).

+) Xét tích phân: $\int_{-1}^2 2x \cdot f(x^2 - 2) dx$.

Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x dx$.

Đổi cận: Với $x = -1 \Rightarrow u = -1$ và với $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

Khi đó: $\int_{-1}^2 2x \cdot f(x^2 - 2) dx = \int_{-1}^2 f(u) du = \int_{-1}^2 f(x) dx = I$ (3).

+) Xét tích phân: $\int_{-1}^2 f(1 - x) dx$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận: Với $x = -1 \Rightarrow t = 2$ và với $x = 2 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó: $\int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^2 f(x) dx = I$ (4).

+) Thay (3), (4) vào (2) ta được: $I + 2 \cdot I = 9 \Rightarrow I = 3$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐÔI BIÊN DẠNG 3:**Phương pháp:**

Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A \cdot f(ax + b) + B \cdot f(-ax + c) = g(x)$ với $A^2 \neq B^2$ khi đó $f(x) = \frac{A \cdot g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B \cdot g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}$ (*)

+ Hệ quả 1 của (*): $A \cdot f(x) + B \cdot f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A \cdot g(x) - B \cdot g(-x)}{A^2 - B^2}$

+ Hệ quả 2 của (*): $A \cdot f(x) + B \cdot f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt, $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

Hay $4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Suy ra :

$3f(x) = \frac{6}{x} - 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left(\frac{-2}{x} - x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$, $\int_3^9 f(x) dx = k$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ theo k .

A. $I = -\frac{45+k}{9}$.

B. $I = \frac{45-k}{9}$.

C. $I = \frac{45+k}{9}$.

D. $I = \frac{45-2k}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right) dx$.

Mà $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)$

Nên $I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[-\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)\right] dx = -\frac{5}{4} \int_1^3 x dx - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx = -5 - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx (*)$

Đặt $u = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 3 \\ x = 3 \Rightarrow u = 9 \end{cases}$.

Khi đó $I = -5 - \frac{1}{9} \int_3^9 f(t) dt = -5 - \frac{k}{9} = -\frac{45+k}{9}$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục $(0; +\infty)$ và $f(x) + 2.f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{15}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{13}{8}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(x) + 2.f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2.f(x) = \frac{1}{x}$.

Do đó ta có $\begin{cases} f(x) + 2.f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2.f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2.f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 4.f(x) = \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow 3.f(x) = \frac{2}{x} - x \Rightarrow f(x) = \frac{\frac{2}{x} - x}{3}$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 x \cdot \frac{\frac{2}{x} - x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^2 (2 - x^2) dx = \frac{1}{3} \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{8}$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_2^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a - 143b$.

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết: $5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay x bởi $1-x$ ta được: $5f(1-x) - 7f(x) = 4(1-x) - 6(1-x)^2 = -6x^2 + 8x - 2$.

Ta được hệ: $\begin{cases} 5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2 \\ -7f(x) + 5f(1-x) = -6x^2 + 8x - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 25f(x) - 49f(x) = 5(4x - 6x^2) + 7(-6x^2 + 8x - 2)$

$\Rightarrow -24f(x) = -72x^2 + 76x - 14$

$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - \frac{19}{6}x + \frac{7}{12}$.

$\Rightarrow f'(x) = 6x - \frac{19}{6}$. Khi đó: $\int_2^3 [f'(x)]^2 dx = \int_2^3 \left(6x - \frac{19}{6}\right)^2 dx = \frac{5149}{36}$.

Vậy $a = 5149, b = 36$ nên $a - 143b = 5149 - 143 \times 36 = 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn $f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$. Giá trị tích phân

$I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2+x} dx$ bằng

A. $\frac{8}{9}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$.

$$+ \text{Đổi cận: } x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

$$+ \text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2+x} dx = - \int_3^{\frac{1}{3}} \frac{f(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t^2}+t} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(\frac{1}{t})}{t+1} dt.$$

Suy ra:

$$2I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2+x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(\frac{1}{x})}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)+x \cdot f(\frac{1}{x})}{x(x+1)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 (x-1) dx = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{8}{9}.$$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$, $\int_3^9 f(x) dx = k$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ theo k .

$$\text{A. } I = -\frac{45+k}{9}.$$

$$\text{B. } I = \frac{45-k}{9}.$$

$$\text{C. } I = \frac{45+k}{9}.$$

$$\text{D. } I = \frac{45-2k}{9}.$$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right) dt.$$

$$\text{Mà } 2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[-\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)\right] dx = -\frac{5}{4} \int_1^3 x dx - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx = -5 - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx (*)$$

$$\text{Đặt } u = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 3 \\ x = 3 \Rightarrow u = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = -5 - \frac{1}{9} \int_3^9 f(t) dt = -5 - \frac{k}{9} = -\frac{45+k}{9}.$$

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính giá trị của $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

$$\text{A. } I = \frac{2}{2019}.$$

$$\text{B. } I = \frac{2}{1009}.$$

$$\text{C. } I = \frac{4}{2019}.$$

$$\text{D. } I = \frac{1}{1009}.$$

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$ ta có $A = 1; B = 2018$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \text{Đáp án C}$$

Cách 2:

Áp dụng Hệ quả 2: $A \cdot f(x) + Bf(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

$$\text{Ta có } f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{2x \sin x}{2019}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{2019} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \text{Đáp án C}$$

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2f(\pi - x) = (x+1) \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^\pi f(x) dx$ bằng

$$\text{A. } 1 + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{B. } \frac{2+\pi}{3}.$$

$$\text{C. } 2 + \pi.$$

$$\text{D. } 0.$$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) + 2f(\pi - x) = (x+1) \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay x bằng $\pi - x$, ta được:

$$f(\pi - x) + 2f(x) = (\pi - x + 1) \sin x \Leftrightarrow 2f(x) + f(\pi - x) = (\pi + 1 - x) \sin x.$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) + 2f(\pi - x) = (x + 1)\sin x \\ 2f(x) + f(\pi - x) = (\pi + 1 - x)\sin x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} &\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(2\pi + 1 - 3x)\sin x. \\ \Rightarrow \int_0^\pi f(x) dx &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (2\pi + 1)\sin x dx - \int_0^\pi x \sin x dx = -\frac{2\pi+1}{3} \cos x \Big|_0^\pi + x \cos x \Big|_0^\pi - \sin x \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2\pi+1}{3} + \frac{2\pi+1}{3} - \pi = \frac{\pi+2}{3}. \end{aligned}$$

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính giá trị của $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$

A. $I = \frac{e^2-1}{2019e}$.

B. $I = \frac{e^2-1}{2018e}$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{e^2-1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(-x) + 2018f(x) = e^x$ ta có $A = 1; B = 2018$.

Suy ra $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2019} e^x \Big|_{-1}^1 = \frac{e^2-1}{2019e}$.

Cách 2: (Dùng công thức)

Áp dụng Hệ quả 1: $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-x) + 2018f(x) = e^x &\Rightarrow f(x) = \frac{2018e^x - e^{-x}}{2018^2 - 1} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2019 \cdot 2017} \int_{-1}^1 (2018e^x - e^{-x}) dx \\ &\approx 1,164 \cdot 10^{-3} \approx \frac{e^2-1}{2019e} \text{ (Casio).} \end{aligned}$$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 6$.

D. $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng kết quả

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (với $A^2 \neq B^2$) khi đó $f(x) = \frac{A.g(\frac{x-b}{a}) - B.g(\frac{x-c}{a})}{A^2 - B^2}$ ”.

Ta có

$$2f(2x) + f(1-x) = 12x^2 = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2.g(\frac{x}{2}) - g(\frac{x-1}{-2})}{2^2 - 1} = \frac{6x^2 - 3(x-1)^2}{3} = x^2 + 2x - 1.$$

Suy ra $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y = 4x - 2$.

Câu 48. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$.

A. $I = 2018$.

B. $I = \frac{1009}{2}$.

C. $I = 4036$.

D. $I = 1008$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng Hệ quả

$A.g(x) + B.g(-x) = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có: $g(x) + g(-x) = 1 = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 2018.$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a; a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

Câu 49. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^a f(x)dx$ bằng

A. $2a^2$.

B. a .

C. a^2 .

D. $2a$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x = -t &\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = \int_a^{-a} f(-t)(-dt) = \int_a^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^a f(-x)dx \\ &\Rightarrow 2 \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-a}^a a dx \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x)dx = 2a^2 \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = a^2. \end{aligned}$$

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) + f(-x) = 2\sin x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giả sử } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx, \text{ đổi cận } x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = 0 \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 3 - 2\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I = \frac{\pi-1}{3}$.

B. $I = \frac{3\pi}{2} - 2$.

C. $I = \frac{\pi}{2} + 2$.

D. $I = \frac{\pi+1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } -x = t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Đổi cận } x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Suy ra } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$$

$$\text{Do đó } 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos x)dx = 3\pi - 4 \Rightarrow I = \frac{3\pi}{2} - 2.$$

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2\cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. -2 .

B. 4 .

C. 2 .

D. 0 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Với } f(x) + f(-x) = 2\cos 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f(-x))dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x dx (*)$$

$$\text{Tính } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Từ (*), ta được: } 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x dx = \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0.$$

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + f(-x) = \cos x$. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) + f(x) = \cos x$.

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} 2f(x) + f(-x) = \cos x \\ 2f(-x) + f(x) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(-x) = 2\cos x \\ f(x) + 2f(-x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \cos x$$

$$\text{Khi đó } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{3} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{2}{3}.$$

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{\pi}{10}$.

B. $I = -\frac{\pi}{20}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2}$.

$$\text{Do đó ta có hệ: } \begin{cases} 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \\ 2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6f(-x) = \frac{2}{4+x^2} \\ 9f(x) + 6f(-x) = \frac{3}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5(4+x^2)}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 55. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$. Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = 3$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx; \text{ Đổi cận: } x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}; x = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx.$$

Theo giả thiết ta có: $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x))dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos x} dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx$$

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Lời giải

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \quad (1) \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t) \cdot (-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx \quad (2) \text{ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - (-1)] = 4 \Rightarrow I = 2$$

Chọn D

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2019x^{2018} + 3x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x)dx$.

A. $I = 2^{2018}$.

B. $I = 0$.

C. $I = 2^{2019}$.

D. $I = 2^{2020}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $f(x) + f(-x) = 2019x^{2018} + 3x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$ lấy tích phân hai vế trên $[-2; 2]$ ta được $\int_{-2}^2 [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-2}^2 (2019x^{2018} + 3x^2 - 4)dx \Leftrightarrow \int_{-2}^2 f(x)dx + \int_{-2}^2 f(-x)dx = (x^{2019} + x^3 - 4x) \Big|_{-2}^2 \Leftrightarrow I + \int_{-2}^2 f(-x)dx = 2^{2020}$.

Xét $J = \int_{-2}^2 f(-x)dx$. Đặt $t = -x$ ta có $dt = -dx$. Khi $x \rightarrow -2$ thì $t \rightarrow 2$, khi $x \rightarrow 2$ thì $t \rightarrow -2$. Do đó $J = \int_{-2}^2 f(-x)dx = \int_2^{-2} f(t)dt = \int_{-2}^2 f(t)dt = \int_{-2}^2 f(x)dx = I$.

Vậy $2I = 2^{2020} \Rightarrow I = 2^{2019}$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

A. $1 - \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} - 1$.

C. $1 + \frac{\pi}{4}$.

D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)] dx.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} [3f(t) - 2f(-t)] dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(x) - 2f(-x)] dx$$

Suy ra, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x) dx \Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(x) - 2f(x)] dx \Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Vậy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Chọn $f(x) = f(-x) = \tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2+4}$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{\pi}{20}$.

B. $I = \frac{\pi}{10}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = -\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn C

• Ta có: $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2+4}$ (1).

• Do các hàm số $f(x)$ và $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên lấy tích phân hai vế của (1) trên đoạn $[-2; 2]$, ta được: $\int_{-2}^2 [2f(x) + 3f(-x)] dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4} dx$.

$$\Leftrightarrow 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4} dx \quad (2).$$

• Ký hiệu $K = \int_{-2}^2 f(-x) dx$, $M = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4} dx$. Khi đó từ (2) suy ra: $2I + 3K = M$ (3).

+ Xét $K = \int_{-2}^2 f(-x) dx$:

Đặt $t = -x \Rightarrow -dt = dx$.

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = -2$.

Suy ra $K = - \int_2^{-2} f(t) dt = \int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(x) dx = I$ hay $I = K$ (4).

+ Tính $M = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4} dx$:

Đặt $x = 2 \tan t \Rightarrow dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt = 2(1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Suy ra $M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\tan^2 t + 4} \cdot 2(1 + \tan^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} dt = \frac{\pi}{4}$ hay $M = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4}$ (5).

• Thay (4) và (5) (3), ta được: $5I = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi}{20}$.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

Tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\ln 3}{2}$.

B. $\frac{\ln 3}{3}$.

C. $2\ln 3$.

D. $\ln 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ (1)

Thay $x = -t$ vào (1) ta có $3f(-t) - f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 3}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} 3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \\ 3f(-x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}}$.

Do đó ta có $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} dx$.

Áp dụng :

$$(\ln|\sqrt{x^2 + a} - x|)' = \left(\frac{\sqrt{x^2 + a} - x}{\sqrt{x^2 + a} - x}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a} - x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = -\ln|\sqrt{x^2 + a} - x| + C$$

ta có $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} dx = -\frac{1}{2} \left(\ln(\sqrt{x^2 + 3} - x) \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\ln 3}{2}$.

(Để tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ ta có thể dùng đổi biến $x = -t$ cũng đưa về $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$.

- Ta có thể sử dụng máy tính để tính $\int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} dx$ rồi so sánh với đáp án).

Nhận xét

Ta có: $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d(x + \sqrt{x^2 + 3})}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| \Big|_{-1}^1 = \frac{\ln 3}{2}$

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx$.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2$; Với $x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2$.

Ta được $I = -\int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx$.

Khi đó ta có: $2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$.

Xét $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$. Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$; $x = \ln 2 \Rightarrow u = 2$.

Ta được $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u(u+1)} du$

$$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u| - \ln|u+1|) \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = \ln 2$$

Vậy ta có $a = \frac{1}{2}$, $b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$.

Câu 62. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$.

B. $I = \frac{1}{15}$.

C. $I = \frac{4}{75}$.

D. $I = \frac{1}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$ ta có $A = 2; B = 3$.

Suy ra: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2+3} \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}$.

Áp dụng kết quả

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}.$$

Ta có: $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x) - 3g(1-x)}{2^2 - 3^2} = \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}$.

Suy ra: $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}$.

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,2(6) = \frac{4}{15}$ (*) Đặt $u = 1-x \Rightarrow du = -dx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$ và $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

Suy ra $\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$ thay vào (*), ta được:

$$5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{75}.$$

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$, $\forall x \in [0; 1]$.

Tích phân $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

A. $-\frac{4}{75}$.

B. $-\frac{4}{25}$.

C. $-\frac{16}{75}$.

D. $-\frac{16}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

$$2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}, \forall x \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f(0) + 3f(1) = 0 \\ 2f(1) + 3f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) = f(0) = 0$$

$$\text{Nhận xét: } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [2f(x) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{75}$$

$$\text{Nên } \int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 2tf'(t) 2dt = 4 \int_0^1 t d(f(t)) = 4tf(t) \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 f(t) dt = 4f(1) -$$

$$4 \cdot \frac{4}{75} = -\frac{16}{75}.$$

Cách 2

- Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow \int_0^2 x f' \left(\frac{x}{2} \right) dx = \int_0^1 2t f'(t) 2dt = 4 \int_0^1 t f'(t) dt = 4 \left[(t f(t)) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right] (*)$

- Ta có $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}, \forall x \in [0; 1]$

Cho $x = 0$ ta được $2f(0) + 3f(1) = 0$

Cho $x = 1$ ta được $2f(1) + 3f(0) = 0$

$$\Rightarrow f(1) = f(0) = 0 \quad (1)$$

- Mặt khác $\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 [2f(x) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$$

$$\Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{15} \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \frac{4}{75} \quad (2)$$

Thế (1), (2) vào (*) ta được $\int_0^2 x f' \left(\frac{x}{2} \right) dx = 4 \left[0 - \frac{4}{75} \right] = -\frac{16}{75}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4:

Bài toán: “ Cho $f(x) \cdot f(a+b-x) = k^2$, khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \frac{b-a}{2k}$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \end{cases}$ và $x = a \Rightarrow t = b; x = b \Rightarrow t = a$.

Khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k+\frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(t)dx}{k+f(t)}$.

$2I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(t)dx}{k+f(t)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k} (b-a) \Rightarrow I = \frac{b-a}{2k}$.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0; 1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với $\forall x \in [0; 1]$. Tính giá trị $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $1 + f(x) = f(x)f(1-x) + f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$.

Đặt $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I = - \int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1$ hay $2I = 1$. Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Câu 65. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0; 3]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(3-x) = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{1}{2+f(x)} dx$.

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} f(x) \cdot f(3-x) = 4 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; 3] \end{cases} \Rightarrow f(3-x) = \frac{4}{f(x)}$.

$$I = \int_0^3 \frac{1}{2+f(x)} dx$$

Đặt $t = 3-x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 0$.

Thay vào ta được

$$I = \int_0^3 \frac{1}{2+f(3-t)} dt = \int_0^3 \frac{1}{2+f(3-x)} dx = \int_0^3 \frac{1}{2+\frac{4}{f(x)}} dx = \int_0^3 \frac{f(x)}{2f(x)+4} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{f(x)}{f(x)+2} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{f(x) + 2 - 2}{f(x) + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{2}{f(x) + 2}\right) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{f(x) + 2} dx = \frac{3}{2} - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2} - I \Rightarrow 2I = \frac{3}{2} \Rightarrow I = \frac{3}{4}.$$

Vậy $I = \frac{3}{4}$.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(0).f(2018-x) = 1$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$ **#C.** $I = 1009$ **#D.** 4016

Lời giải

Chọn C

$$\text{ta có } I = \int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{2018-0}{2.1} = 1009.$$

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; 5]$. Biết $f(x).f(5-x) = 1$, tính tích phân $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{3}$.

C. $I = \frac{5}{2}$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = 5 - t \Rightarrow dx = -dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 5; x = 5 \Rightarrow t = 0$

$$I = - \int_5^0 \frac{dt}{1+f(5-t)} = \int_0^5 \frac{f(t)dt}{1+f(t)} \text{ (do } f(5-t) = \frac{1}{f(t)})$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^5 dt = 5 \Rightarrow I = \frac{5}{2}.$$

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; a]$ ($a > 0$). Biết $f(x).f(a-x) = 1$, tính tích phân $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I = \frac{a}{2}$.

B. $I = 2a$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = \frac{a}{4}$.

Lời giải:

$$I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} \text{ (1) Đặt } t = a - x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_a^0 - \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx \text{ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_0^a \left[\frac{1}{1+f(x)} + \frac{1}{1+f(a-x)} \right] dx$$

$$= \frac{1+f(a-x)+1+f(x)}{1+f(x).f(a-x)+f(x)+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{2+2+f(a-x)+f(x)}{2+f(a-x)+f(x)} dx = \int_0^a dx = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}$$

Chọn A

Câu 69. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b + c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11; 22)$. **#B.** $(0; 9)$. **#C.** $(7; 21)$. **#D.** $(2017; 2020)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

Cách 2. Chọn $f(x) = 1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

$$\text{Dễ dàng tính được } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5: CÓ HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, CÓ CẶN ĐỐI XỨNG.

Phương pháp: Để giải các bài toán tích phân liên quan đến hàm số chẵn hàm lẻ, ta thường sử dụng phép đổi biến $t = -x$ và kết hợp tính chất của hàm số chẵn (lẻ):

• $f(x)$ là hàm số chẵn trên D khi và chỉ khi $\forall x \in D$ thì $f(x) = f(-x)$;

• $f(x)$ là hàm số lẻ trên D khi và chỉ khi $\forall x \in D$ thì $f(x) = -f(-x)$.

Ngoài ta cũng hay sử dụng một số tính chất tích phân hàm số chẵn và hàm số lẻ:

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lẻ trên đoạn $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_{-a}^0 f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $[-a; a]$ và $b > 0, b \neq 1$ thì

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Câu 70. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1, 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 5$ và $\int_0^1 g(x)dx = 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_{-1}^1 f(x)dx = 10$. **B.** $\int_{-1}^1 g(x)dx = 14$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)]dx = 10$. **D.**

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \int_{-1}^1 f(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^0 f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x)dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

x	-1	0
t	1	0

$$\Rightarrow A_1 = \int_1^0 f(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 f(-t)dt = \int_0^1 f(-x)dx \text{ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)} = \int_0^1 f(x)dx \text{ (Do } f(x) \text{ là hàm chẵn } \Rightarrow f(-x) = f(x))$$

$$\text{Vậy } A = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 10 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = \int_{-1}^1 g(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^0 g(x)dx}_{B_1} + \underbrace{\int_0^1 g(x)dx}_{B_2}$$

$$B_1 = \int_{-1}^0 g(x)dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

x	-1	0
t	1	0

$\Rightarrow B_1 = \int_1^0 g(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 g(-t) dt = \int_0^1 g(-x) dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= -\int_0^1 g(x) dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow g(-x) = -g(x)$)

Vậy $B = \int_{-1}^1 g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 0$ (2)

Từ (1) và (2)

Chọn B

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -10$.

B. $I = -6$.

C. $I = 6$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng công thức: $\int_{x_1}^{x_2} f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} f(ax) dx$ và tính chất $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a; a]$.

Áp dụng, ta có:

$$\bullet 4 = \int_1^2 f(-2x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-4} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{-2} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x) dx = 8.$$

$$\bullet 2 = \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$$

$$\text{Suy ra: } 0 = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 = 8 + \left(\int_{-2}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \right) + I \Leftrightarrow 0 = 8 + (0 - 2) + I \Leftrightarrow I = -6.$$

Cách 2: Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$.

Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt$.

$$\text{Đổi cận: khi } x = -2 \text{ thì } t = 2; \text{ khi } x = 0 \text{ thì } t = 0 \text{ do đó } \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$$

Xét $\int_1^2 f(2x) dx$.

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận: khi } x = 1 \text{ thì } t = 2; \text{ khi } x = 2 \text{ thì } t = 4 \text{ do đó } \int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

$$\text{Do } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$$

Câu 72. Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx = 8$. Giá trị của $\int_0^2 f(x) dx$ bằng:

A. 8.

B. 2.

C. 1.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{+) Ta có } 8 = \int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx + \int_0^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx. \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_{-1}^0 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx:$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 0 \Rightarrow t = 0$. Khi đó

$$I = \int_1^0 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}} dt = \int_0^1 \frac{5^t f(-2t)}{5^t + 1} dt.$$

Vì $y = f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên $f(-2t) = f(2t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 \frac{5^t f(2t)}{5^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x + 1} dx. \text{ Thay vào (1) thu được}$$

$$8 = \int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx = \int_0^1 \frac{(5^x + 1)f(2x)}{5^x + 1} dx = \int_0^1 f(2x) dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = 8 \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 16.$$

Câu 73. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1; 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Kết quả $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx$ bằng

A. $I = 1$.

B. $I = 3$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = -1 \Rightarrow t = 1$

$$I_1 = \int_1^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{e^t f(t)}{1+e^t} dt.$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{e^t f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^x f(x)}{1+e^x} dx.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^t f(t)}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{(1+e^t)f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 1.$$

Câu 74. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$. Giá trị của $\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx$ bằng

A. 1.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^{x+1}} dx = \int_0^a f(x) dx$, với $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a; a]$.

Áp dụng ta có:

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 1 + 2 = 3$$

Cách 2: Do $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1$ và $\int_1^2 f(x) dx = 2$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

Mặt khác $\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx$ và $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx = - \int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t+1}} dt = \int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t+1}} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t+1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^{x+1}} dx = \int_0^2 \frac{(3^x+1)f(x)}{3^{x+1}} dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6:

“ Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)] = x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ “

Cách giải: Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = a \rightarrow g(y) = a \Leftrightarrow y = \alpha \\ x = b \rightarrow g(y) = b \Leftrightarrow y = \beta \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b yg(y)dy$$

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x)dx$

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1)dy$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \rightarrow y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y^3 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1)dy = \int_0^1 (3y^3 + y)dy = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{đáp án D}$$

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^5 f(x) dx$.

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = \frac{5}{12}$.

D. $I = \frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = 2y^3 - 3y^2 + 6y \Rightarrow dx = 6(y^2 - y + 1)dy.$$

$$\text{Đổi cận: với } x = 0 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ và } x = 5 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 5 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 y \cdot 6(y^2 - y + 1) dy = 6 \int_0^1 (y^3 - y^2 + y) dy = \frac{5}{2}.$$

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{4}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{7}{3}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = -y^3 - 2y + 1 \Rightarrow dx = (-3y^2 - 2)dy.$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = -2 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = -2 \Leftrightarrow y = 1; x = 1 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = 0.$$

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Tích phân từng phần với hàm ẩn thường áp dụng cho những bài toán mà giả thiết hoặc kết luận có một trong các tích phân sau:

$$\int_a^b u(x) \cdot f'(x) \cdot dx \text{ hoặc } \int_a^b u'(x) \cdot f(x) \cdot dx.$$

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.
- A. $I = 8$. B. $I = -8$. C. $I = 4$. D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn B

$A = \int_0^1 (x+1)f'(x)dx$ Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx, dv = f'(x)dx$ chọn $v = f(x)$

$$\Rightarrow A = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx = 2 - \int_0^1 f(x)dx = 10$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -8$$

- Câu 2.** Biết rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 5; \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$. Tính $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$.

- A. $I = 7$. B. $I = 12$. C. $I = 20$. D. $I = \frac{13}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài: $\int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$.

Đặt: $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	2

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Tính } I = \int_0^1 xf'(2x)dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$$

Ta có:

$$I = \int_0^1 xf'(2x)dx = \frac{1}{2}x \cdot f(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{6}.$$

- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x \cdot f'(x)dx$.
- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{17}{4}$. C. $\frac{33}{4}$. D. -1761 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x)dx.$$

$$\text{Từ } f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 \ (x=1) \\ f(1) = 2 \ (x=0) \end{cases}, \text{ suy ra } I = 23 - \int_1^5 f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3)dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận: Với } t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = 23 - \int_1^5 f(x)dx = 23 - \int_0^1 (3x+2)(3x^2+3)dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 2019$, $\int_0^2 f(x)dx = 2020$. Tính $\int_0^4 f'(\sqrt{x})dx$.

A. 2020.

B. 4040.

C. $\sqrt{2020}$.

D. 4036.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2tdt$

Đổi cận

x	0	4
t	0	2

Suy ra $\int_0^4 f'(\sqrt{x})dx = 2 \int_0^2 t \cdot f'(t)dt = 2 \int_0^2 xf'(x)dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$ $\Rightarrow 2 \int_0^2 xf'(x)dx = 2[xf(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2[2 \cdot 2019 - 2020] = 4036$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 5$ và $\int_0^1 x \cdot f'(x)dx = 3$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$.

A. 3.

B. 4.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết:

$$\int_0^1 x \cdot f'(x)dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 x \cdot d(f(x)) = 3 \Leftrightarrow x \cdot f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 3$$

$$\Leftrightarrow f(1) - \int_0^1 f(x)dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2.$$

Xét $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$ Đặt $\sqrt{x} - 1 = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$.

Đổi cận:

x	1	4
t	0	1

Khi đó: $I = \int_0^1 f(t)2dt = 2 \int_0^1 f(x)dx = 4$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$. Biết $f(1) = 1$, $f(3) = 81$, $f'(1) = 4$, $f'(3) = 108$. Giá trị của $\int_1^3 (4 - 2x) \cdot f''(x)dx$ bằng

A. 48.

B. -64.

C. -48.

D. 64.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = 4 - 2x \\ dv = f''(x)dx \end{cases}$. Khi đó $\begin{cases} du = -2dx \\ v = f'(x) \end{cases}$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (4 - 2x) \cdot f''(x)dx &= [(4 - 2x) \cdot f'(x)] \Big|_1^3 - \int_1^3 f'(x) \cdot (-2dx) \\ &= [(4 - 2x) \cdot f'(x)] \Big|_1^3 + 2 \int_1^3 f'(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(4-2x) \cdot f'(x)] \Big|_1^3 + 2f(x) \Big|_1^3 \\
 &= -2f'(3) - 2f'(1) + 2f(3) - 2f(1) \\
 &= -2.108 - 2.4 + 2.81 - 2.1 = -64. \\
 \text{Vậy } \int_1^3 (4-2x) \cdot f''(x) dx &= -64.
 \end{aligned}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8$; $f(2) = 2$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(2x) dx$.

A. $I = -5$.

B. $I = -10$.

C. $I = 5$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $J = \int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8$.

Đặt $u = x$ và $dv = f'(2x-4) dx = d\left(\frac{1}{2}f(2x-4)\right)$, ta được $du = dx$ và $v = \frac{1}{2}f(2x-4)$.

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}x \cdot f(2x-4) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = \frac{3}{2}f(2) - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx.$$

$$\text{Vì } J = 8 \Rightarrow 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 8 \Rightarrow \int_0^3 f(2x-4) dx = -10.$$

$$\text{Đặt } 2t = 2x - 4 \Rightarrow 2dt = 2dx \Leftrightarrow dt = dx$$

Đổi cận:

$$x \text{ 03}$$

$$t \text{ -21}$$

$$I_1 = \int_{-2}^1 f(2t) dt = \int_{-2}^1 f(2x) dx = -10.$$

$$\text{Vậy } I = -10.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019} + b^{2019}$ bằng

A. $2^{2018} + 1$.

B. 2.

C. 0.

D. $2^{2018} - 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } u = f(x), dv = e^x dx; \text{ ta có } du = f'(x) dx, v = e^x.$$

$$\text{Khi đó, } \int_0^1 e^x f(x) dx = [e^x f(x)] \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = [e^x f(x)] \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = [e^x f(x)] \Big|_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1.$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b, a, b \in \mathbb{R} \text{ suy ra } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Do đó } a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 [e^x f(x)]' dx = [e^x f(x)] \Big|_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1.$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b, a, b \in \mathbb{R} \text{ suy ra } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Do đó } a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$?

A. -4.

B. $e - 2$.

C. 4.

D. $2 - e$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x)f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0 \text{ (vì } f'(0) \cdot f'(2) \neq 0)$$

$$I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx = \int_0^2 f(x) dg(x) = (f(x) \cdot g(x)) \Big|_0^2 - \int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx = - \int_0^2 (x^2 - 2x) e^x dx = 4.$$

- Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 0]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{1-\ln 2}{2}$. B. $\frac{3-4\ln 2}{2}$. C. $\frac{3-2\ln 2}{2}$. D. $\frac{1-2\ln 2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + 1 \end{cases}$

Ta có: $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = \left(-\frac{1}{x+1} + 1\right) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) \cdot \frac{x}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot \frac{x}{(x+1)^2} dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \Rightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = x - \ln|x+1| + C$. Do $f(1) = 0$ nên ta có: $C = \ln 2 - 1$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [x - \ln|x+1| + \ln 2 - 1] dx = \frac{1-2\ln 2}{2}$

- Câu 11.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$ bằng:

- A. 4. B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I_1$.

$2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin^2 x \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 - \cos^2 x) \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx$.

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(x)}{\cos x} \right] dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = 1 - I_1$.

$\Rightarrow I_1 = -1 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3\sqrt{2}+2}{2}$.

- Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$.

Giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $-\frac{\pi}{4}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Mặt khác: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}$.

Xét, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{4}$.

Vậy $I = -\frac{1}{4}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 10$, $f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x] dx$.

- A. $1 - \ln(\cos 1)$. B. -1 . C. -9 . D. $1 - \cot 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$+ I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x] dx = \int_0^1 f(x)\tan^2 x dx + \int_0^1 f'(x)\tan x dx \quad (1).$$

$$+ \text{Tính } J = \int_0^1 f'(x)\tan x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \tan x \\ dv = f'(x)dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = (1 + \tan^2 x)dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= f(x) \cdot \tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot (1 + \tan^2 x) dx \\ &= f(1) \cdot \tan 1 - f(0) \cdot \tan 0 - \int_0^1 f(x) \cdot \tan^2 x dx - \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

$$= \cot 1 \cdot \tan 1 - \int_0^1 f(x) \cdot \tan^2 x dx - 10$$

$$= 1 - \int_0^1 f(x) \cdot \tan^2 x dx - 10 = -9 - \int_0^1 f(x) \cdot \tan^2 x dx.$$

Thay J vào (1) ta được:

$$I = \int_0^1 f(x)\tan^2 x dx + \left(-9 - \int_0^1 f(x) \cdot \tan^2 x dx \right) = -9.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } (f(x)\tan x)' = f'(x)\tan x + f(x)(\tan^2 x + 1) = f'(x)\tan x + f(x)\tan^2 x + f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)\tan x + f(x)\tan^2 x = [f(x)\tan x]' - f(x).$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x] dx = \int_0^1 \{[f(x)\tan x]' - f(x)\} dx$$

$$= f(x)\tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1)\tan 1 - 10 = \cot 1 \cdot \tan 1 - 10 = -9.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$.

- A. $I = -\frac{14}{3}$. B. $I = -\frac{32}{5}$. C. $I = -\frac{16}{3}$. D. $I = -\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, cho $x = 2$, ta có $f(2) = 1$.

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x)dx \\ v = \ln|f(x)| \end{cases}.$$

Khi đó, ta có

$$I = (x^3 - 3x^2)\ln|f(x)| \Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x)\ln|f(x)| dx = -3 \int_0^2 (x^2 - 2x)\ln|f(x)| dx = -3J.$$

$$J = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx \stackrel{x=2-t}{=} \int_2^0 [(2-t)^2 - 2(2-t)] \ln|f(2-t)| d(2-t)$$

$$= \int_2^0 [(2-x)^2 - 2(2-x)] \ln|f(2-x)| d(2-x) = \int_0^2 [x^2 - 2x] \ln|f(2-x)| dx.$$

Suy ra

$$2J = \int_0^2 [x^2 - 2x] \ln|f(x)| dx + \int_0^2 [x^2 - 2x] \ln|f(2-x)| dx = \int_0^2 [x^2 - 2x] \ln|f(x)f(2-x)| dx$$

$$= \int_0^2 [x^2 - 2x] \ln e^{2x^2-4x} dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)(2x^2 - 4x) dx = \frac{32}{15} \Rightarrow J = \frac{16}{15}.$$

$$\text{Vậy } I = -3J = -\frac{16}{5}.$$

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $[f'(x)]^2 = 4 \cdot [2x^2 + 1 - f(x)]$ với mọi x thuộc đoạn $[0; 1]$ và $f(1) = 2$. Giá trị $I = \int_0^1 xf(x) dx$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } [f'(x)]^2 = 4 \cdot [2x^2 + 1 - f(x)] \Leftrightarrow [f'(x)]^2 + 4f(x) = 4 \cdot (2x^2 + 1).$$

$$\text{Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 ta được } \int_0^1 [[f'(x)]^2 + 4f(x)] dx = \int_0^1 4 \cdot (2x^2 + 1) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \frac{20}{3}. (*)$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4xf(x)|_0^1 - \int_0^1 4xf'(x) dx = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - \int_0^1 4xf'(x) dx + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - \int_0^1 4xf'(x) dx + \int_0^1 4x^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) - 2x]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x.$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + C. \text{ Vì } f(1) = 2 \text{ nên } C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1. \text{ Vậy } \int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{4}.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 1]$ và thỏa $f(1) = 0$, $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8$ với mọi x thuộc $[-1; 1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

$$\text{Đặt } I = \int_{-1}^1 2f(x) dx.$$

$$\text{Dùng tích phân từng phần, ta có: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2x + 2 \end{cases}.$$

$$I = (2x + 2)f(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx = 4f(1) - \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx = - \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx.$$

$$\text{Ta có } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \Rightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx + 2 \int_{-1}^1 2f(x) dx = \int_{-1}^1 (8x^2 + 16x - 8) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx + \int_{-1}^1 (2x + 2)^2 dx = \int_{-1}^1 (8x^2 + 16x - 8) dx + \int_{-1}^1 (2x + 2)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 [f'(x) - (2x + 2)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3)dx = -\frac{5}{3}$.

Cách 2.

Chọn $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ (lý do: vế phải là hàm đa thức bậc hai).

$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b$.

Ta có:

$$\begin{aligned} (f'(x))^2 + 4f(x) &= 8x^2 + 16x - 8 \Rightarrow (2ax + b)^2 + 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2 + 16x - 8 \\ &\Leftrightarrow (4a^2 + 4a)x^2 + (4ab + 4b)x + b^2 + 4c = 8x^2 + 16x - 8 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + 4a = 8 \\ 4ab + 4b = 16 \\ b^2 + 4c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2$ và $c = -3$.

Vậy $f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3)dx = -\frac{5}{3}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$.

B. $\frac{13}{15}$.

C. $-\frac{17}{15}$.

D. $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} (f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) &= 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4 \\ \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) dx &= \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx. (1) \end{aligned}$$

Xét $I = \int_0^1 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \int_0^1 (24x^2 - 4) f(x) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (24x^2 - 4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (8x^3 - 4x) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (8x^3 - 4x) \cdot f'(x) dx = 4 - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x) \cdot f'(x) dx.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x) \cdot f'(x) dx + \int_0^1 (4x^3 - 2x)^2 dx \\ = \int_0^1 (56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8) dx. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - (4x^3 - 2x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Do đó $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1) dx = \frac{13}{15}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; \pi]$ thỏa mãn: $\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx = \int_0^\pi \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{2}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Khi đó tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. 0.

B. $\frac{\pi}{2} + 1$.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{2} - 1$.

Lời giải

Chọn B

*) Xét tích phân $I = \int_0^\pi \cos x \cdot f(x) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx.$$

Theo giả thiết $I = \frac{\pi}{2}$, suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx = -\frac{\pi}{2}$.

*) Tìm số thực k thỏa mãn $f'(x) + k \cdot \sin x = 0$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + k \cdot \sin x]^2 dx = 0$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2k \sin x \cdot f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} k^2 \sin^2 x dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + k^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Từ đó, $f'(x) + \sin x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f(x) = \cos x + C$.

Do $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ nên $C = 1$. Vậy $f(x) = \cos x + 1$.

$$*) \text{ Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1) dx = (\sin x + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Trắc nghiệm:

Từ giả thiết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx = -\frac{\pi}{2}$ ta suy ra được $f'(x) = -\sin x$.

Từ đó giải tiếp như phần trên.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x) dx = [\sin x f(x)] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x) dx. \text{ Suy ra } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Hơn nữa ta tính được } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4} \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = -\sin x$. Do đó $f(x) = \cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 2 - e$.

B. $I = e - 2$.

C. $I = \frac{e}{2}$.

D. $I = \frac{e-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}.$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

Suy ra $f'(x) + xe^x = 0 \forall x \in [0; 1]$ (do $(f'(x) + xe^x)^2 \geq 0 \forall x \in [0; 1]$)

$$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$$

Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = (1-x)e^x$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

- Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{1-2\ln 2}{2}$. B. $\frac{3-2\ln 2}{2}$. C. $\frac{3-4\ln 2}{2}$. D. $\frac{1-\ln 2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= \int_0^1 f(x) d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x \cdot f(x)}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx &= - \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx \\ &= \left(x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx &= \frac{3}{2} - 2\ln 2 - 2\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) + \frac{3}{2} - 2\ln 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \left\{ [f'(x)]^2 - 2 \cdot \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \right\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 dx &= 0 (*) \end{aligned}$$

Vì $\left[f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 \geq 0, \forall x \in [0; 1]$ nên $\int_0^1 \left[f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 dx \geq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) - \frac{x}{x+1} = 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1}, \forall x \in [0; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \int_0^1 f(x) dx &= x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = - \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = - \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= - \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1-2\ln 2}{2} \end{aligned}$$

- Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 2 - e$. B. $I = e - 2$. C. $I = \frac{e}{2}$. D. $I = \frac{e-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}.$$

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 x e^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + x e^x)^2 dx = 0$
 Suy ra $f'(x) + x e^x = 0 \forall x \in [0; 1]$ (do $(f'(x) + x e^x)^2 \geq 0 \forall x \in [0; 1]$)
 $\Rightarrow f'(x) = -x e^x \Rightarrow f(x) = (1 - x)e^x + C$
 Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = (1 - x)e^x$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $4f^3(x) + f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 0. B. $\frac{5}{16}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

+) Với $x = 0$, ta có $4f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[4f^2(0) + 1] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

+) Với $x = 1$, ta có $4f^3(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow 4f^3(1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$.

+) Đặt $f(x) = t$, ta có: $x = 4t^3 + t \Rightarrow dx = (12t^2 + 1)dt$

+) Đổi cận: Với $x = 0$ thì $t = 0$

Với $x = 1$ thì $t = \frac{1}{2}$

Suy ra $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} t(12t^2 + 1) dt = \frac{5}{16}$

Cách 2:

+) Với $x = 0$, ta có $4f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[4f^2(0) + 1] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

+) Với $x = 1$, ta có $4f^3(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow 4f^3(1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$.

+) $4f^3(x) + f(x) = x \Rightarrow 12f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{12f^2(x)+1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Do đó $4f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow 4f^3(x)f'(x) + f(x)f'(x) = x \cdot f'(x)$.

$$\Rightarrow \int_0^1 [4f^3(x)f'(x) + f(x)f'(x)] dx = \int_0^1 x f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [4f^3(x) + f(x)] df(x) = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx (*)$$

+) Tính $\int_0^1 x f'(x) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x f'(x) dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \left[f^4(x) + \frac{f^2(x)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{16}.$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 1]$ và thỏa $f(1) = 0, (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8$ với mọi x thuộc $[-1; 1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $-\frac{5}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

$$\text{Đặt } I = \int_{-1}^1 2f(x) dx.$$

$$\text{Dùng tích phân từng phần, ta có: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2x + 2 \end{cases}.$$

$$I = (2x + 2)f(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx = 4f(1) - \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx = - \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx.$$

Ta có $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \Rightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx + 2 \int_{-1}^1 2f(x) dx = \int_{-1}^1 (8x^2 + 16x - 8) dx$
 $\Leftrightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_{-1}^1 (2x + 2)f'(x) dx + \int_{-1}^1 (2x + 2)^2 dx = \int_{-1}^1 (8x^2 + 16x - 8) dx + \int_{-1}^1 (2x + 2)^2 dx$
 $\Leftrightarrow \int_{-1}^1 [f'(x) - (2x + 2)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + C, C \in \mathbb{R}.$

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx = -\frac{5}{3}.$

Cách 2.

Chọn $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b.$

Ta có:

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \Rightarrow (2ax + b)^2 + 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2 + 16x - 8$$

$$\Leftrightarrow (4a^2 + 4a)x^2 + (4ab + 4b)x + b^2 + 4c = 8x^2 + 16x - 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + 4a = 8 \\ 4ab + 4b = 16 \\ b^2 + 4c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases}$$

Do $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2$ và $c = -3.$

Vậy $f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx = -\frac{5}{3}.$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0; 1].$ Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}.$

B. $\frac{13}{15}.$

C. $-\frac{17}{15}.$

D. $-\frac{7}{15}.$

Lời giải

Chọn B

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx. (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \int_0^1 (24x^2 - 4) f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (24x^2 - 4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (8x^3 - 4x) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (8x^3 - 4x) \cdot f'(x) dx = 4 - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x) \cdot f'(x) dx.$$

Do đó:

$$(1) \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x) \cdot f'(x) dx + \int_0^1 (4x^3 - 2x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8) dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - (4x^3 - 2x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1.$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1) dx = \frac{13}{15}.$$

- Câu 26.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(2x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $\int_1^2 xf'(x)dx = 5$. Giá trị $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right) dx$ bằng
- A. $-\frac{103}{48}$. B. $\frac{103}{24}$. C. $\frac{103}{48}$. D. $-\frac{103}{12}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 x \cdot f'(x)dx = x \cdot f(x)|_1^2 - \int_1^2 f(x)dx \Leftrightarrow 5 = 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x)dx \quad (1)$$

Lần lượt thay $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}$ vào $2f(2x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ ta được

$$\begin{cases} 2f(2) - f(1) = 1 \\ 2f(1) - f(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = \frac{3}{4} \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = 2f(2) - f(1) - 5 = -4 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx = -2.$$

$$\text{Lại có } 2f(2x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \Rightarrow 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) -$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{7}{24}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx = -4 - \frac{7}{24} = -\frac{103}{24}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{t^2} dt \text{ ta có } \int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right)dx = \int_2^1 f(t) \cdot \frac{-2}{t^2} dt = 2 \int_2^1 f(t) \cdot \frac{-1}{t^2} dt \quad (2)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{1}{u^2} du \text{ ta có } \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_2^1 f(u) \cdot \frac{-1}{u^2} du = \int_2^1 f(t) \cdot \frac{-1}{t^2} dt = -\frac{103}{24}.$$

$$\text{Thay vào } (2) \text{ ta được } \int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right)dx = 2 \cdot \left(-\frac{103}{24}\right) = -\frac{103}{12}.$$

- Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = -\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = 8a - 3b$.
- A. $T = 1$. B. $T = 0$. C. $T = 16$. D. $T = -16$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x).$$

Lần lượt chọn $x = 0, x = 1$, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 5f(0) - 7f(1) = 0 \\ 5f(1) - 7f(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{5}{8} \\ f(0) = \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$\text{Tính } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \text{ Chọn } \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$I = x \cdot f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{8} - J.$$

$$\text{Đặt } x = 1 - t \Rightarrow J = -\int_1^0 f(1-t)dt = \int_0^1 f(1-x)dx = K. \text{ Suy ra } 5J - 7K = 3 \int_0^1 (x^2 - 2x)dx = -2.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} J = K \\ 5J - 7K = -2 \end{cases} \Leftrightarrow J = K = 1.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{5}{8} - 1 = -\frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow T = 8a - 3b = 0.$$

Câu 28. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(x) + xf(1 - x^2) + 3f(1 - x) = \frac{1}{x+1}$.

Tính giá trị tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$

A. $I = \frac{9}{2}\ln 2$.

B. $I = \frac{2}{9}\ln 2$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) + x \cdot f(1 - x^2) + 3f(1 - x) = \frac{1}{x+1}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf(1 - x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1 - x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2 (*).$$

$$\text{Đặt } u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx; \text{ với } x = 0 \Rightarrow u = 1; x = 1 \Rightarrow u = 0.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 xf(1 - x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx (1).$$

$$\text{Đặt } t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx; \text{ với } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1 - x)dx = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx (2).$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Rightarrow \frac{9}{2} \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{9} \ln 2.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 xf'(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. -1761 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x)dx \Leftrightarrow I = 5f(5) - f(1) - \int_1^5 f(x)dx.$$

$$\text{Có } \begin{cases} f(5) = 5 \text{ khi } x = 1 \\ f(1) = 2 \text{ khi } x = 0 \end{cases} \text{ nên } \Rightarrow I = 23 - \int_1^5 f(x)dx = 23 - \int_1^5 f(t)dt$$

$$\text{Gọi } J = \int_1^5 f(t)dt$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3)dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận: } t = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ và } t = 5 \Rightarrow x = 1.$$

$$J = \int_1^5 f(t)dt = 3 \int_0^1 (3x + 2)(x^2 + 1)dx = \frac{59}{4} \Rightarrow I = 23 - \frac{59}{4} = \frac{33}{4}.$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3) + xf(1 - x^4) = -x^{13} + 4x^9 - 3x^5 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó tính $T = 2 \int_{-1}^0 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx$.

A. 12.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $-\frac{19}{4}$.

D. $\frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo bài ra } f(x^3) + xf(1 - x^4) = -x^{13} + 4x^9 - 3x^5 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Nhân cả hai vế với x^2 ta được

$$x^2 f(x^3) + x^3 f(1 - x^4) = -x^{15} + 4x^{11} - 3x^7 - x^2, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

+ Lấy tích phân cận từ -1 đến 0 hai vế (*) ta được

$$\int_{-1}^0 x^2 f(x^3)dx + \int_{-1}^0 x^3 f(1 - x^4)dx = \int_{-1}^0 (-x^{15} + 4x^{11} - 3x^7 - x^2)dx = -\frac{11}{48}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^3 = u \\ 1 - x^4 = v \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(u)du - \frac{1}{4} \int_0^1 f(v)dv = -\frac{11}{48} (*) \right]$$

+ Lấy tích phân cận từ 0 đến 1 hai vế (*) ta được

$$\int_0^1 x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 x^3 f(1-x^4) dx = \int_0^1 (-x^{15} + 4x^{11} - 3x^7 - x^2) dx = -\frac{7}{16}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^3 = u \\ 1-x^4 = v \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{3} \int_0^1 f(u) du - \frac{1}{4} \int_1^0 f(v) dv = -\frac{7}{16} \right] (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^0 f(u) du = -\frac{5}{4} \\ \int_0^1 f(u) du = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = 2 \int_{-1}^0 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{19}{4}.$$

TRƯỜNG HỢP RIÊNG:

Khi đề bài cho biết giá trị $f(a), f(b), \int_a^b u(x) \cdot f'(x) dx = h, \int_a^b [f'(x)]^2 dx = k$ (với $u(x)$ là một biểu thức chứa x đã tường minh), đề tìm $f(x)$ trước tiên ta đi tìm 2 số α, β sao cho $\int_a^b [f'(x) + \alpha \cdot u(x) + \beta]^2 dx = 0$, rồi suy ra $f'(x) = -\alpha \cdot u(x) - \beta$, sau đó nguyên hàm hai vế để tìm $f(x)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$, thỏa các điều kiện $f(2) = 1$ và $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = 2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx \Rightarrow - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Ta lại có: } \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^2 [f'(x)]^2 dx - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 \left[f'(x) - \frac{1}{2} x \right]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{1}{2} x = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2 + C \Rightarrow f(2) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{4} x^2 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_1^2 = \frac{1}{4}.$$

Bài tập tương tự:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 0, f(1) = 2, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$. Tính $J = \int_0^1 [f^3(x) + 2018x] dx$.

Giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f'(x) dx = 2 - 0 = 2.$$

$$\text{Với } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ xét tích phân: } I = \int_0^1 [f'(x) + \alpha]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2\alpha \int_0^1 f'(x) dx + \int_0^1 \alpha^2 dx = 4 + 2\alpha \cdot 2 + \alpha^2 = (\alpha + 2)^2.$$

$$\text{Ta có: } I = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + C.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 2x.$$

$$\text{Vậy } J = \int_0^1 [(2x)^3 + 2018x] dx = \left(\frac{8}{4}x^4 + \frac{2018}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = 1011.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$.

Giải:

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $[f(x)]^2, xf(x), f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f(x) + \alpha x + \beta]^2$. Với mỗi số thực α, β ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 (\alpha x + \beta) f(x) dx + \int_0^1 (\alpha x + \beta)^2 dx \\ &= 4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

Cần tìm α, β sao cho $\int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx = 0$ hay $4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + (3\beta + 6)\alpha + 3\beta^2 + 6\beta + 2 = 0$. Để tồn tại α thì:

$$\Delta = (3\beta + 6)^2 - 4(3\beta^2 + 6\beta + 2) \geq 0 \Leftrightarrow -3\beta^2 + 12\beta - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3(\beta - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -6.$$

Vậy $\int_0^1 [f(x) - 6x + 2]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = 10$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$, thỏa các điều kiện $f(2) = 1$ và $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$:

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = 2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx \Rightarrow - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Ta lại có: } \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^2 [f'(x)]^2 dx - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 \left[f'(x) - \frac{1}{2} x \right]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{1}{2} x = 0 \text{ (vì } \int_0^2 \left[f'(x) - \frac{1}{2} x \right]^2 dx \geq 0, \forall x \in [0; 2])$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2 + C \Rightarrow f(2) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{4} x^2 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_1^2 = \frac{1}{4}.$$

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$

A. $\frac{7}{5}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cách 1: Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 49x^6 dx = 7, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7, \int_0^1 2.7x^3 \cdot f'(x) dx = -14 \Rightarrow \int_0^1 [7x^3 + f'(x)]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C, \text{ mà } f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \frac{7}{5}.$$

Cách 2: Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x) = k \cdot g(x), (\forall x \in [a; b], k \in \mathbb{R})$

Ta có $\frac{1}{9} = \left(\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 \frac{x^6}{9} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = k \cdot \frac{x^3}{3}$.

Mặt khác $\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{-1}{3} \Rightarrow k = 21 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$ suy ra $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

$$\text{Từ đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \frac{7}{5}.$$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$ và $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 4.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết: $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1$.

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 5x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{5}{2} x^2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = \left. \frac{5}{2} x^2 \cdot f(x) \right|_0^1 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx$$

$$= \frac{5}{2} \cdot f(1) - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx, \text{ (vì } f(1) = 4)$$

$$\text{Mà: } I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 36 \Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx, \quad (\text{theo giả thiết: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [10x^2 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) [10x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$$

$$\text{Với } f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{10 \cdot 1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}. \text{ Khi đó: } f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3} \right) dx = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3} x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $f(2) = 3, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$ và $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{115}$.

B. $\frac{297}{115}$.

C. $\frac{562}{115}$.

D. $\frac{266}{115}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết: $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1$.

$$\text{Tính: } I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = x^3 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx, (\text{vì } f(2) = 3)$$

$$\text{Mà: } I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 23 \Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx, (\text{theo giả thiết: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4) \Leftrightarrow \int_0^2 \left[\frac{4}{23} x^3 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2 \right] dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{23} x^3 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{23} x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{23} x^4 + C$$

$$\text{Với } f(2) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{16}{23} + C \Rightarrow C = \frac{53}{23}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23} \right) dx = \left(\frac{1}{115} x^5 + \frac{53}{23} x \right) \Big|_0^2 = \frac{562}{115}.$$

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)^2 dx \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{3} (x-1)^3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} (x-1)^3 f(x) \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1.$$

$$\text{Xét } \int_1^2 [f'(x) - k(x-1)^3]^2 dx = 0 \quad (k \in \mathbb{R}).$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx + k^2 \int_1^2 (x-1)^6 dx = 0.$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2k + \frac{k^2}{7} = 0 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \text{ nên } C = -\frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{7}{4} \int_1^2 [(x-1)^4 - 1] dx = \frac{7}{4} \left[\frac{(x-1)^5}{5} - x \right] \Big|_1^2 = -\frac{7}{5}.$$

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)^2 dx \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{3} (x-1)^3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} (x-1)^3 f(x) \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1.$$

Xét $\int_1^2 [f'(x) - k(x-1)^3]^2 dx = 0$ ($k \in \mathbb{R}$).

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx + k^2 \int_1^2 (x-1)^6 dx = 0.$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2k + \frac{k^2}{7} = 0 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \text{ nên } C = -\frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{7}{4} \int_1^2 [(x-1)^4 - 1] dx = \frac{7}{4} \left[\frac{(x-1)^5}{5} - x \right] \Big|_1^2 = -\frac{7}{5}.$$

Câu 38. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(2) = 0, \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{45}$ và $\int_1^2 (x-1)f(x) dx = -\frac{1}{30}$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{1}{36}$.

B. $I = -\frac{1}{15}$.

C. $I = \frac{1}{12}$.

D. $I = -\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $E = \int_1^2 (x-1)f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{(x-1)^2}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow E = \frac{(x-1)^2}{2} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx = -\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx \Rightarrow -\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx = -\frac{1}{30} \Rightarrow \int_1^2 (x-1)^2 f'(x) dx = \frac{1}{15}.$$

Ta tìm số k để $\int_1^2 (f'(x) - k(x-1)^2)^2 dx = 0$.

$$\int_1^2 (f'(x) - k(x-1)^2)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx - 2k \int_1^2 f'(x) \cdot (x-1)^2 dx + k^2 \int_1^2 (x-1)^4 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{45} - 2k \cdot \frac{1}{15} + k^2 \cdot \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Khi đó: $\int_1^2 \left(f'(x) - \frac{1}{3}(x-1)^2 \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{3}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x-1)^3 + C.$

Mà $f(2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x-1)^3 - \frac{1}{9} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{9}(x-1)^3 - \frac{1}{9} \right] dx = -\frac{1}{12}.$

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1, \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{5}$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{4}$.

B. $I = \frac{1}{5}$.

C. $I = \frac{1}{4}$.

D. $I = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $A = \int_0^1 x f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow A = \frac{x^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}.$$

+ Xét $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_0^1 x^2 f'(x) dx + k^2 \int_0^1 x^4 dx = 0$ (1) $\Leftrightarrow \frac{9}{5} - 2k \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$

(1) trở thành $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 6 \int_0^1 x^2 f'(x) dx + 9 \int_0^1 x^4 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0.$

$$(f'(x) - 3x^2)^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx \geq 0.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = x^3.$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$, $f(1) = 0$, $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{7}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 x f(x) dx$.

A. $I = -\frac{19}{60}$.

B. $I = \frac{7}{120}$.

C. $I = -\frac{1}{5}$.

D. $I = \frac{13}{30}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-2)^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{(x-2)^3}{3} \end{cases}$.

$$\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = \frac{(x-2)^3}{3} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} \cdot f'(x) dx.$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{21} \Leftrightarrow \int_1^2 (x-2)^3 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{7}.$$

Ta có

$$\int_1^2 [f'(x) - (x-2)^3]^2 dx = \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_1^2 (x-2)^3 \cdot f'(x) dx + \int_1^2 (x-2)^6 dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 0.$$

$$\Rightarrow f'(x) - (x-2)^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = (x-2)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy: } I = \int_1^2 x f(x) dx = -\frac{19}{60}.$$

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. Biết rằng $f(0) = 0$, tính $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

B. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

D. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

• Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

• Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

$$= \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \cos x.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \sin x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \sin x.$$

$$\text{Vậy } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa $f(1) = 0$, $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{1}{\pi}$.

D. $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos \frac{\pi x}{2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Lại có: } \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} \cdot f'(x)\right)^2 dx - 2\left(-\frac{2}{\pi}\right) \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \geq 0 \text{ trên đoạn } [0; 1] \text{ nên}$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C \text{ mà } f(1) = 0 \text{ do đó } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$.

B. $\frac{4}{\pi}$.

C. $\frac{6}{\pi}$.

D. $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} d(f(x))$$

$$= \cos \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos \pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} f(x) dx + \int_0^1 \left[3 \sin \frac{\pi x}{2}\right]^2 dx = 0.$$

$$\text{hay } \int_0^1 \left[f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2}\right]^2 dx = 0 \text{ suy ra } f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -\frac{6}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}.$$

- Câu 44.** Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(2) = 0$, $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{45}$ và $\int_1^2 (x-1)f(x)dx = -\frac{1}{30}$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.
- A. $I = -\frac{1}{36}$. B. $I = -\frac{1}{15}$. C. $I = \frac{1}{12}$. D. $I = -\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $E = \int_1^2 (x-1)f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{(x-1)^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow E = \frac{(x-1)^2}{2} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x)dx = -\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x)dx \Rightarrow -\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x)dx = -\frac{1}{30}$

$\Rightarrow \int_1^2 (x-1)^2 f'(x)dx = \frac{1}{15}$. Ta có: $\int_1^2 (x-1)^4 dx = \frac{1}{5}$ và $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{45}$.

Ta tìm số k để $\int_1^2 (f'(x) - k(x-1)^2)^2 dx = 0$.

$$\int_1^2 (f'(x) - k(x-1)^2)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx - 2k \int_1^2 f'(x) \cdot (x-1)^2 dx + k^2 \int_1^2 (x-1)^4 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{45} - 2k \cdot \frac{1}{15} + k^2 \cdot \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Khi đó: $\int_1^2 \left(f'(x) - \frac{1}{3}(x-1)^2\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{3}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x-1)^3 + C$.

Mà $f(2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x-1)^3 - \frac{1}{9} \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{9}(x-1)^3 - \frac{1}{9}\right] dx = -\frac{1}{12}$.

- Câu 45.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f(2) = 2$. Biết $\int_0^2 (f'(x))^2 dx = \frac{512}{9}$ và $\int_0^{16} f(\sqrt[4]{x})dx = -\frac{224}{9}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.
- A. $-\frac{20}{3}$. B. $\frac{32}{9}$. C. $-\frac{32}{15}$. D. $\frac{108}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^{16} f(\sqrt[4]{x})dx = M;$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow 4t^3 dt = dx$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 16 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Khi đó } M = \int_0^2 4t^3 \cdot f(t)dt = 4 \int_0^2 x^3 \cdot f(x)dx = x^4 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x^4 \cdot f'(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^2 x^4 \cdot f'(x)dx = x^4 \cdot f(x) \Big|_0^2 - M$$

$$\Rightarrow \int_0^2 x^4 \cdot f'(x)dx = \frac{512}{9}.$$

$$\int_0^2 [f'(x) - mx^4]^2 dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx - 2m \int_0^2 x^4 \cdot f'(x)dx + m^2 \int_0^2 x^8 dx$$

$$= \frac{512}{9} - 2m \cdot \frac{512}{9} + m^2 \cdot \frac{512}{9} = 0$$

$$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow f'(x) = x^4 \Rightarrow f(x) = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C; \text{ mà } f(2) = 2 \Rightarrow \frac{32}{5} + C = 2 \Rightarrow C = -\frac{22}{5}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{22}{5} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{5} \int_0^2 (x^5 - 22)dx = -\frac{20}{3}.$$

- Câu 46.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ đồng thời thỏa mãn $f(2) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{4} + 2\ln\frac{2}{3}$.

B. $I = \ln\frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{3}{4} + 2\ln\frac{3}{2}$.

D. $I = \frac{3}{4} + 2\ln\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \left[f(x) \frac{x-1}{x+1} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x-1}{x+1} f'(x) dx \right] \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left[f(2) \frac{1}{3} - \int_1^2 \frac{x-1}{x+1} f'(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} - 2\ln\frac{3}{2} = \int_1^2 \frac{x-1}{x+1} f'(x) dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } \int_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)^2 dx$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx = \left(x - 4\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} \right) \Big|_1^2 = 1 - 4\ln 3 + 4\ln 2 - \frac{4}{3} + 2 = \frac{5}{3} - 4\ln\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \int_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 dx = \frac{5}{12} - \ln\frac{3}{2} \quad (2).$$

$$\text{Theo đề } \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{5}{12} - \ln\frac{3}{2} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - f'(x) \right]^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right).$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} [x - 2\ln(x+1)] + C$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{1}{2} [2 - 2\ln 3] + C = 0 \Rightarrow C = \ln 3 - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} [x - 2\ln(x+1)] + \ln 3 - 1$$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} [x - 2\ln(x+1)] + \ln 3 - 1 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} + (\ln 3 - 1)x \right] \Big|_1^2 - \int_1^2 \ln(x+1) dx = -\frac{1}{4} + \ln 3 - \int_1^2 \ln(x+1) dx$$

$$= -\frac{1}{4} + \ln 3 - \left[(x+1)\ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 x dx \right]$$

$$= -\frac{1}{4} + \ln 3 - [3\ln 3 - 2\ln 2 - 1] = \frac{3}{2} - 2\ln\frac{2}{3}.$$

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn: $\frac{3}{5} - (x-4)^2 + 4xf(x) = [f'(x)]^2$

và $f(0) = \frac{1}{20}$. Khi đó $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{203}{30}$.

B. $\frac{163}{30}$.

C. $\frac{11}{30}$.

D. $\frac{157}{30}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết } \frac{3}{5} - (x-4)^2 + 4xf(x) = [f'(x)]^2$$

Ta có:

$$\int_0^2 \left[\frac{3}{5} - (x-4)^2 + 4xf(x) \right] dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{-262}{15} + 2 \int_0^2 f(x) d(x^2 - 4) = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt } I = \int_0^2 f(x) d(x^2 - 4)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = d(x^2 - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^2 - 4 \end{cases}$$

Khi đó

$$I = (x^2 - 4)f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 (x^2 - 4)f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{5} - \int_0^2 (x^2 - 4)f'(x) dx \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) có:

$$\frac{-262}{15} + 2 \left[\frac{1}{5} - \int_0^2 (x^2 - 4)f'(x) dx \right] = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^2 (x^2 - 4)f'(x) dx + \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = -\frac{262}{15} + \frac{2}{5} + \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^2 (x^2 - 4)f'(x) dx + \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [f'(x) + x^2 - 4]^2 dx = 0$$

$$\text{Do } [f'(x) + x^2 - 4]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^2 [f'(x) + x^2 - 4]^2 dx \geq 0 \text{ mà } \int_0^2 [f'(x) + x^2 - 4]^2 dx = 0 \text{ nên}$$

$$[f'(x) + x^2 - 4]^2 = 0 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^3}{3} + 4x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = \frac{1}{20} \Rightarrow C = \frac{1}{20} \Rightarrow f(x) = \frac{-x^3}{3} + 4x + \frac{1}{20}$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \frac{203}{30}.$$

DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1**Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$** **Phương pháp:**+ Tìm $P(x) = \int p(x)dx$ + Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{P(x)} + p(x) \cdot e^{P(x)}f(x) = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

+ Lấy tích phân hai vế ta được $f(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx$. Từ đó suy ra $f(x)$.**Hệ quả 1: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$** **Phương pháp:**+ Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$ + Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$ + Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$ **Hệ quả 2: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$** **Phương pháp:**+ Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$ + Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$ + Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$ **Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f(x) + f'(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-4 + \frac{10}{e}$.

B. -10 .

C. -2 .

D. $-2 + \frac{10}{e}$.

Lời giải**Chọn D**+) Từ giả thiết, ta có $e^x f(x) + e^x f'(x) = x^3 e^x \Rightarrow [e^x f(x)]' = x^3 e^x \Rightarrow e^x f(x) = \int x^3 e^x dx$

$$\Rightarrow e^x f(x) = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(x-1)e^x + C$$

+) Lại có $f(0) = 4 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + \frac{10}{e^x} \Rightarrow f(1) = -2 + \frac{10}{e}$.**Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) + f'(x) = 2x + 1$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $1 - \frac{1}{2e^2}$.

B. $\frac{1}{2e^2}$.

C. $1 + \frac{1}{2e^2}$.

D. $-\frac{1}{2e^2}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có:

$$2f(x) + f'(x) = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} \cdot f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow (e^{2x} \cdot f(x))' = (2x + 1) \cdot e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \cdot f(x) = \int (2x + 1) \cdot e^{2x} dx (*)$$

$$\text{Xét } I = \int (2x + 1) \cdot e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx$$

$$dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = (2x + 1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2dx$$

$$= \frac{1}{2} (2x + 1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Thay vào (*) ta có:

$$e^{2x} \cdot f(x) = \frac{1}{2} (2x + 1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} (2x + 1) - \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{2x}}$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(2x + 1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2x}} = x + e^{-2x}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x + e^{-2x})dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2e^2}.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 4]$, thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x \in [0; 4]$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$. **B.** $e^4 f(4) - f(0) = 3e$.

C. $e^4 f(4) - f(0) = e^4 - 1$.

D. $e^4 f(4) - f(0) = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) + f'(x) = e^{-x}\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = \sqrt{2x+1}$

Suy ra: $\int_0^4 [e^x f(x)]' dx = \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \frac{26}{3} \Leftrightarrow e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn

$3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+3} \cdot e^{-2x}$. Khi đó:

A. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2+3}} - \frac{1}{2}$.

B. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2+3}} - \frac{1}{4}$.

C. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

D. $e^3 f(1) - f(0) = (e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+3} \cdot e^{-2x} = \frac{\sqrt{e^{2x}+3}}{e^x} \Rightarrow 3e^{3x} f(x) + e^{3x} f'(x) = e^{2x} \sqrt{e^{2x}+3}$.

$\Leftrightarrow [e^{3x} f(x)]' = e^{2x} \sqrt{e^{2x}+3}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\int_0^1 [e^{3x} f(x)]' dx = \int_0^1 e^{2x} \sqrt{e^{2x}+3} dx$

$\Leftrightarrow [e^{3x} f(x)] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{e^{2x}+3})^3 \Big|_0^1 \Leftrightarrow e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$?

A. $f(1) = 2018e^{-2018}$. **B.** $f(1) = 2017e^{2018}$.

C. $f(1) = 2018e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2019e^{2018}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x} \Leftrightarrow e^{-2018x} f'(x) - 2018e^{-2018x} f(x) = 2018x^{2017}$

$\Leftrightarrow [e^{-2018x} f(x)]' = 2018x^{2017} \Rightarrow e^{-2018x} f(x) = \int 2018x^{2017} dx = x^{2018} + C$

Do $f(0) = 2018 \Rightarrow C = 2018 \Rightarrow f(x) = (x^{2018} + 2018)e^{2018x}$. Vậy $f(1) = 2019e^{2018}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2020f(x) = 2020 \cdot x^{2019} \cdot e^{2020x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2020$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2021 \cdot e^{2020}$. **B.** $f(1) = 2020 \cdot e^{2020}$.

C. $f(1) = 2020 \cdot e^{-2018}$. **D.** $f(1) = 2019 \cdot e^{2020}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) - 2020f(x) = 2020 \cdot x^{2019} \cdot e^{2020x} \Leftrightarrow \frac{f'(x) - 2020 \cdot f(x)}{e^{2020x}} = 2020 \cdot x^{2019}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x) - 2020 \cdot f(x)}{e^{2020x}} dx = \int_0^1 2020 \cdot x^{2019} dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } \int_0^1 2020 \cdot x^{2019} dx = 1.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{f'(x) - 2020 \cdot f(x)}{e^{2020x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{2020x} f'(x) - 2020 \cdot e^{2020x} f(x)}{(e^{2020x})^2} dx.$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{e^{2020x}} \right)' dx = \frac{f(x)}{e^{2020x}} \Big|_0^1 = \frac{f(1)}{e^{2020}} - \frac{f(0)}{e^0} = \frac{f(1)}{e^{2020}} - 2020.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } \frac{f(1)}{e^{2020}} - 2020 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2021 \cdot e^{2020}.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e$.

B. $f(1) = \frac{1}{e}$.

C. $f(1) = \frac{2}{e}$.

D. $f(1) = -\frac{2}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Nhân 2 vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được.

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Suy ra: } e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int 2xe^{\frac{x^2}{2}} dx = -2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào hai vế ta được } C = 0 \Rightarrow f(x) = -2e^{-x^2}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

Câu 8. Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{9}{e}$ và $f'(x) + 3x^2 f(x) = (15x^4 + 12x)e^{-x^3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 3 + \frac{4}{e}$

B. $I = 2e - 1$

C. $I = 3 - \frac{4}{e}$

D. $I = 2e + 1$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(e^{3x} f(x) \right)' = e^{3x} \left(f'(x) + 3x^2 f(x) \right) = e^{3x} (15x^4 + 12x) e^{-3x} = 15x^4 + 12x$$

$$\text{Do đó: } e^{3x} f(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \Rightarrow f(x) = (3x^5 + 6x^2 + C) e^{-3x}$$

$$\text{Vì } f(1) = \frac{9}{e} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (3x^5 + 6x^2) e^{-3x}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^5 + 6x^2) e^{-3x} dx = 3 - \frac{4}{e}.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0) = f(0) = 1$ và $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = x^3 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{107}{12} - \frac{21}{e}$.

B. $\frac{107}{21} - \frac{12}{e}$.

C. $\frac{107}{12} + \frac{21}{e}$.

D. $\frac{107}{21} + \frac{12}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có:

$$f(x) + f'(x) + (f'(x) + f''(x)) = x^3 + 2x^2 \Leftrightarrow f(x) + f'(x) + (f(x) + f'(x))' = x^3 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) + e^x (f(x) + f'(x))' = e^x (x^3 + 2x^2) \Leftrightarrow \left(e^x (f(x) + f'(x)) \right)' = e^x (x^3 + 2x^2)$$

$$\Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) = \int e^x (x^3 + 2x^2) dx = e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + C$$

$$\text{Mặt khác } f(0) = f'(0) = 1 \text{ nên } 1 + 1 = -2 + C \Leftrightarrow C = 4 \Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) = e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4$$

$$\text{Do đó } (e^x f(x))' = e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4$$

$$\Rightarrow e^x f(x) = \int [e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4] dx = e^x(x^3 - 4x^2 + 10x - 12) + 4x + C$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 13 \Leftrightarrow f(x) = (4x + 13)e^{-x} + x^3 - 4x^2 + 10x - 12$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [(4x + 13)e^{-x} + x^3 - 4x^2 + 10x - 12] dx = \frac{107}{12} - \frac{21}{e}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, $f(0) = 1$ và $f'(x) = f(x) + e^x + 1, \forall x \in [0; 1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $2e - 1$.

B. $2(e - 1)$.

C. $1 - e$.

D. $1 - 2e$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = f(x) + e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 1 + e^{-x} \\ \Leftrightarrow [e^{-x} f(x)]' = 1 + e^{-x} \Rightarrow e^{-x} f(x) = x - e^{-x} + C \Rightarrow f(x) = x e^x - 1 + C e^x.$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = (x + 2)e^x - 1.$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 [(x + 2)e^x - 1] dx = 2(e - 1).$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = f(x) + x^2 e^x + 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1$. Tính $f(3)$?

A. $6e^3 + 3$.

B. $6e^2 + 3$.

C. $3e^2 - 1$.

D. $9e^3 - 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) - f(x) = x^2 e^x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) = x^2 + e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = x^2 + e^{-x}.$$

$$\text{Do đó: } e^{-x} f(x) = \int (e^{-x} f(x))' dx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 e^x}{3} - 1 + C e^x.$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow -1 = -1 + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 e^x}{3} - 1 \Rightarrow f(3) = 9e^3 - 1.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2 + 2x - 1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = e$. Giá trị của $f(5)$ bằng

A. $3e^{12} - 1$.

B. $5e^{17}$.

C. $5e^{17} - 1$.

D. $3e^{12}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) - f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2 + 2x - 1}{2}} \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - e^{-x} f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2 - 1}{2}} \Leftrightarrow \\ (e^{-x} f(x))' = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2 - 1}{2}}.$$

$$\Rightarrow \int_1^5 (e^{-x} f(x))' dx = \int_1^5 (x^2 + 1)e^{\frac{x^2 - 1}{2}} dx \Leftrightarrow e^{-x} f(x) \Big|_1^5 = \int_1^5 x^2 e^{\frac{x^2 - 1}{2}} dx + \int_1^5 e^{\frac{x^2 - 1}{2}} dx \\ \Leftrightarrow e^{-5} f(5) - 1 = I_1 + I_2 (*)$$

$$\text{Xét: } I_2 = \int_1^5 e^{\frac{x^2 - 1}{2}} dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^{\frac{x^2 - 1}{2}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x e^{\frac{x^2 - 1}{2}} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I_2 = x e^{\frac{x^2 - 1}{2}} \Big|_1^5 - \int_1^5 x^2 e^{\frac{x^2 - 1}{2}} dx = 5e^{12} - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_1 + I_2 = 5e^{12} - 1 (*) \Leftrightarrow e^{-5} f(5) - 1 =$$

$$5e^{12} - 1 \Leftrightarrow f(5) = 5e^{17}.$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = e$ và $(x + 2)f(x) = x f'(x) - x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 + 4e - 4$.

B. $4e^2 - 2e + 1$.

C. $2e^3 - 2e + 2$.

D. $4e^2 - 4e + 2$.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi giả thiết $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{x+2}{x}f(x) = x^2$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-x}f'(x)}{x^2} - \frac{(x+2)}{x^3}e^{-x}f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x}}{x^2}f(x) \right]' = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x}}{x^2}f(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C \Rightarrow f(x) = -x^2 + Cx^2e^x$$

$$\text{Mà } f(1) = e \Rightarrow C = \frac{e+1}{e} \Rightarrow f(x) = -x^2 + (e+1)x^2e^{x-1}$$

$$\text{Vậy, } f(2) = -4 + 4e(e+1) = 4e^2 + 4e - 4.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+3} \cdot e^{-2x}$. Khi đó:

A. $e^3f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2+3}} - \frac{1}{2}$.

B. $e^3f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2+3}} - \frac{1}{4}$.

C. $e^3f(1) - f(0) = \frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

D. $e^3f(1) - f(0) = (e^2+3)\sqrt{e^2+3} - 8$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } 3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+3} \cdot e^{-2x} = \frac{\sqrt{e^{2x}+3}}{e^x}$$

$$\text{Nhân hai vế giả thiết với } e^{3x} \text{ ta được } \Rightarrow 3e^{3x}f(x) + e^{3x}f'(x) = e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}.$$

$$\Leftrightarrow [e^{3x}f(x)]' = e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}.$$

$$\text{Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được } \int_0^1 [e^{3x}f(x)]' dx = \int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3} dx$$

$$\Leftrightarrow [e^{3x}f(x)] \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{e^{2x}+3})^3 \Big|_0^1 \Leftrightarrow e^3f(1) - f(0) = \frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}.$$

Câu 15. Trong những hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$. Giá trị nhỏ nhất của $I = \int_0^1 f(x)dx$ là

A. $\frac{1}{2019.2021}$

B. $\frac{1}{2018.2021}$

C. $\frac{1}{2020.2021}$

D. $\frac{1}{2017.2021}$

Lời giải**Chọn A**

$$+ 3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{3}{x}f(x) \geq x^{2017}, x \neq 0$$

$$+ P(x) = 3\ln x \Rightarrow e^{P(x)} = x^3.$$

$$+ \text{Nhân hai vế của (*) cho } x^3 \text{ ta được } x^3f'(x) + 3x^2f(x) \geq x^{2019} \Rightarrow (x^3f(x))' \geq x^{2020}, \text{ đúng } \forall x \in [0;1]$$

$$+ \text{Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế có } (x^3f(x)) \Big|_0^1 \geq \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021}x^{2021} \Big|_0^1 = \frac{1}{2021}, \forall t \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(t) \geq \frac{t^{2018}}{2021} \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{t^{2018}}{2021} = \frac{1}{2019.2021}.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2018 \cdot e^{-2018}$.

C. $f(1) = 2018 \cdot e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2017 \cdot e^{2018}$.

Lời giải**Chọn A**

$$+ P(x) = -\int 2018 dx = -2018x$$

+ Nhân hai vế với e^{-2018x} ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018e^{-2018x}f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \Rightarrow (f(x)e^{-2018x})' = 2018 \cdot x^{2017}$$

+ Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được

$$(f(x)e^{-2018x})\Big|_0^1 = \int_0^1 2018x^{2017}dx \Rightarrow f(1) = 2019e^{2018}$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $2xf(x) + f'(x) = x(x^2 - 1)$ với mọi $x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{e-4}{8e}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{7}{6}$.

D. $\frac{e-4}{4e}$.

Lời giải

Chọn A

Nhân hai vế giả thiết với e^{x^2} ta được $e^{x^2} \cdot 2xf(x) + e^{x^2} \cdot f'(x) = e^{x^2} \cdot x(x^2 - 1) \Leftrightarrow [e^{x^2}f(x)]' = x^3e^{x^2} - xe^{x^2} \Rightarrow e^{x^2}f(x) = \int x(x^2 - 1)e^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 2) + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2) + Ce^{-x^2}$.

Do $f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2) + e^{-x^2}$.

Vậy $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2}(x^2 - 2) + e^{-x^2} \right] dx = \frac{e-4}{8e}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; \pi]$. Biết $f(0) = 2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức $f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x}, \forall x \in [0; \pi]$. Tính $I = \int_0^\pi f(x) \cdot dx$ (làm tròn đến phần trăm).

A. $I \approx 6,55$.

B. $I \approx 17,30$.

C. $I \approx 10,31$.

D. $I \approx 16,91$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x}$. Chia hai vế đẳng thức cho $e^{\cos x}$ ta được

$f'(x) \cdot e^{-\cos x} + e^{-\cos x} \cdot \sin x \cdot f(x) = \cos x$ (vế trái có dạng $u'v + uv'$)

$\Leftrightarrow (f(x) \cdot e^{-\cos x})' = \cos x \Leftrightarrow \int (f(x) \cdot e^{-\cos x})' dx = \int \cos x \cdot dx \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-\cos x} = \sin x + C$.

Do $f(0) = 2e$ nên $2e \cdot e^{-1} = C \Rightarrow C = 2$. Vậy $f(x) = \frac{\sin x + 2}{e^{-\cos x}} = e^{\cos x}(\sin x + 2)$.

$I = \int_0^\pi f(x) \cdot dx = \int_0^\pi e^{\cos x}(\sin x + 2)dx$.

Sử dụng MTCT (để đơn vị rad). KQ: 10,31

Câu 19. Suy ra. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

+ Trước tiên ta đưa phương trình về dạng tổng quát $f'(x) + \frac{1}{x(x+1)}f(x) = 1$

+ $P(x) = \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \ln \frac{x}{x+1}$. (ta chỉ cần xét $x > 0$)

+ Nhân hai vế cho $e^{P(x)}$ ta được $f'(x) \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x}{x+1}$

+ Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta có

$$\left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1}\right)\Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = (x - \ln(x+1))\Big|_1^2 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{2} \text{ và } b = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x) + \tan x f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = -\frac{4}{9}$.

B. $P = -\frac{2}{9}$.

C. $P = \frac{7}{9}$.

D. $P = \frac{14}{9}$.

Lời giải

Chọn ATừ giả thiết $\Rightarrow \cot x \cdot f(x) + f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \cdot \cot x$ Nhân thêm 2 vế với $e^{\int \cot x dx} = \sin x$ ta có

$$\cos x f(x) + \sin x f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow [\sin x f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

Suy ra $\sin x f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \ln 2 \rightarrow \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \pi \sqrt{3} - 2 \ln 2 + 2C.$$

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 + C \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{9} \cdot \pi \sqrt{3} + \ln 3 - 2 \ln 2 + 2C.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{9} \pi \sqrt{3} - \ln 3 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow P = a + b = -\frac{4}{9}.$$