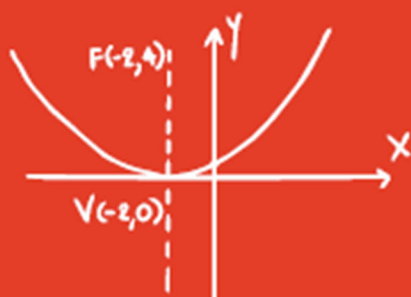
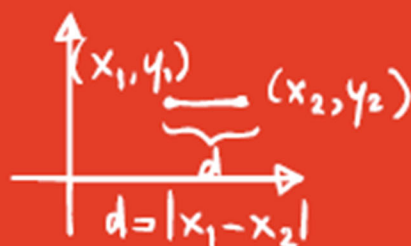


CHUYÊN ĐỀ

KHẢO SÁT HÀM SỐ



TOÁN THẦY AN

Sưu tầm và biên soạn: Tô Quốc An

facebook.com/toanthayn

toanthayan@gmail.com

ĐD: 0988 32 33 71

BÀI 33. BIỆN LUẬN SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 1:

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + f(m)|$ có n điểm cực trị.

Phương pháp:

► Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + f(m)|$ bằng

Các bạn xem lại bài toán 18: biện luận số điểm cực trị hàm trị tuyệt đối dựa vào đồ thị.

Ta thực hiện các bước sau

Bước 1:

Bước 2:

Bước 3:

Bước 4:

Bài toán 2:

Cho hàm số $y = f(x)$ biện luận số cực trị của hàm $y = f(|x + m|)$

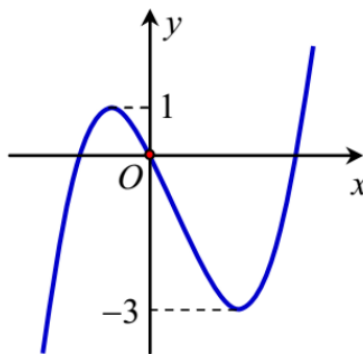
B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| (x+1)(x-2)^2 + m \right|$ có 5 điểm cực trị?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| -x^3 + 3x^2 - 1 - m \right|$ có 5 điểm cực trị?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \right|$ có 7 điểm cực trị?
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.
- Câu 4.** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \left| x^5 - 5x^3 + 5x^2 + m - 1 \right|$ có 5 điểm cực trị là
- A. $-1 < m < 27$. B. $-27 < m < 1$. C. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -27 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 27 \\ m < -1 \end{cases}$.
- Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1 + 2m \right|$ có 3 điểm cực trị?
- A. 5. B. 4. C. 6. D. Vô số.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

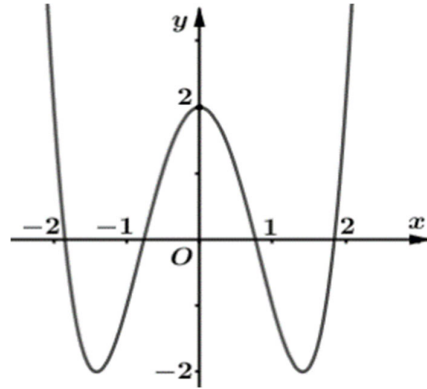
- Câu 1.** Cho hàm số $y = |\sin x + x + m|$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị?
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.
- Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?
A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** Không có.
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^2 + 2x + m|$ có đúng ba điểm cực trị.
A. $m > 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m \leq 1$. **D.** $m > 0$.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = |\sin 2x + x + m|$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có đúng ba điểm cực trị?
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 5.** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?
A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028
- Câu 6.** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}|$ có 5 điểm cực trị. Vậy S sẽ nhận giá trị nào sau đây?
A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.
- Câu 7.** (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 2|$ có đúng năm điểm cực trị
A. $m \leq 2$ hoặc $m \geq 6$. **B.** $m < 2$ hoặc $m > 6$. **C.** $2 \leq m \leq 6$. **D.** $2 < m < 6$.
- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.
A. $-4 < m < 0$. **B.** $-4 \leq m \leq 0$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $m \geq 4$ hoặc $m \leq 0$.
- Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |(x+1)(x-2)^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5
- Câu 10.** [2D1-2.1-3] Cho hàm số $y = |x^4 - 8x^2 + m|$. Với những giá trị nào của tham số m hàm số có 5 điểm cực trị.
A. $m > 0$. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \leq 0$.

- Câu 11.** [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.
- A. 44 B. 27 C. 26 D. 16
- Câu 12.** (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Biết $m \in (a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ thì hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1|$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng $a + b$?
- A. $\frac{14}{5}$. B. $-\frac{27}{10}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $-\frac{13}{5}$.
- Câu 13.** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019; 2019)$ để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 - 20x + m|$ có 5 điểm cực trị?
- A. 95. B. 48. C. 47. D. 94.
- Câu 14.** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + m - 1|$ có 5 điểm cực trị là
- A. $-1 < m < 27$. B. $-27 < m < 1$. C. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -27 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 27 \\ m < -1 \end{cases}$.
- Câu 15.** (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.
- Câu 16.** [2D1-2.5-3] Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2m|$ có 7 điểm cực trị bằng
- A. 2. B. 6. C. 4. D. 3.
- Câu 17.** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là
- A. $(0; 6)$. B. $(6; 33)$. C. $(1; 33)$. D. $(1; 6)$.
- Câu 18.** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình dưới đây. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số a trong khoảng $(-23; 23)$ để hàm số $y = |f(x) + a|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S .



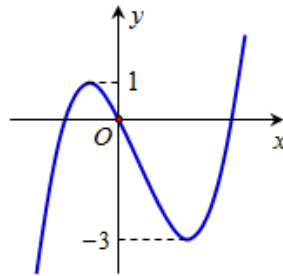
- A. -3. B. 250. C. 0. D. -253.

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị.



- A. 6. B. 3. C. 5. D. 2.

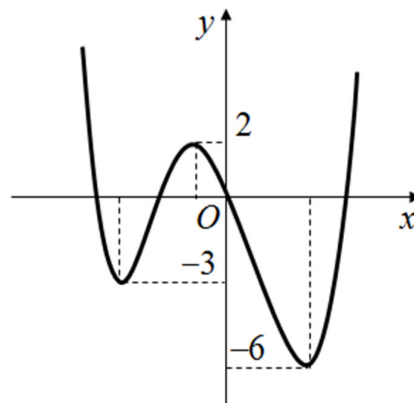
Câu 20. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.



- A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. D. $1 \leq m \leq 3$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

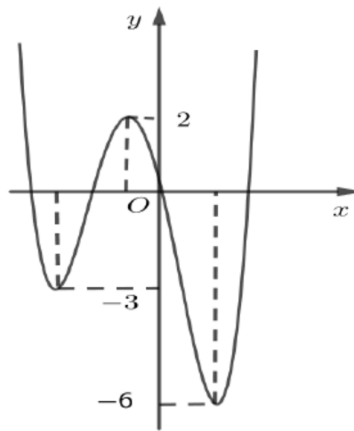
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x - 2018) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của tập S bằng

- A. 9. B. 7. C. 18. D. 12.

Câu 2. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 5 điểm cực trị?

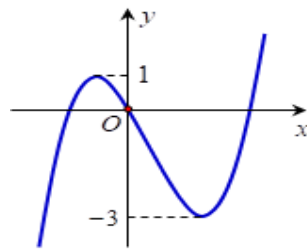
A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = |f(x+2019) + m|$ có ba điểm cực trị là

A. 4036.

B. 4037.

C. 4039.

D. 4038.

Nhận xét: Để hàm số $y = |f(x+2019) + m|$ có ba điểm cực trị thì từ đồ thị và phép biến đổi đồ thị (lấy đối xứng qua trục Ox) ta có phương trình $f(x+2019) = -m$ có đúng 1 nghiệm

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m ($|m| < 5$) để hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có ba điểm cực tiểu?

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

BÀI 33. BIỆN LUẬN SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 1:

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + f(m)|$ có n điểm cực trị.

Phương pháp:

► Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + f(m)|$ bằng tổng số số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm phương trình $f(x) + f(m) = 0$.

Các bạn xem lại bài toán 18: biện luận số điểm cực trị hàm trị tuyệt đối dựa vào đồ thị.

Ta thực hiện các bước sau

Bước 1: Lập bảng biến thiên tìm số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ (ví dụ có n_i điểm cực trị).

Bước 2: Phương trình $f(x) + f(m) = 0$ (*) có $n - n_i$ nghiệm.

Bước 3: Chuyển bài toán tìm số nghiệm của (*) về dạng tìm số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -f(m)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên tìm giá trị m .

Bài toán 2:

Cho hàm số $y = f(x)$ biện luận số cực trị của hàm $y = f(|x + m|)$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| (x+1)(x-2)^2 + m \right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 2.

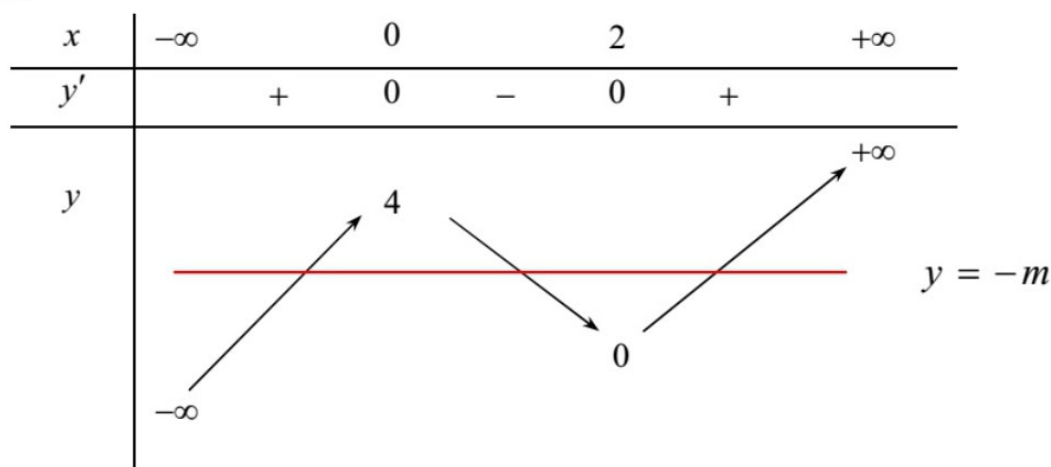
B. 3.

C. 4.

D. 5

Lời giải:Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.Xét hàm: $y = f(x) = (x+1)(x-2)^2 = x^3 - 3x^2 + 4$.Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ (*) có 3 nghiệm duy nhất(Không tính nghiệm cực trị của hàm $y = f(x)$)Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -m$ Dựa vào bảng biến thiên để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại một điểm duy nhất:

$$0 < -m < 4 \Leftrightarrow -4 < m < 0.$$

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{-3; -2; -1\}$.Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn $\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| -x^3 + 3x^2 - 1 - m \right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Xét hàm $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				3		$-\infty$

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) - m \right|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình

$f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ (*) có 3 nghiệm phân biệt

(Không tính nghiệm cực trị của hàm $y = f(x)$)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$

Dựa vào bảng biến thiên để đường thẳng cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt:

$$\Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{ 0; 1; 2 \}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

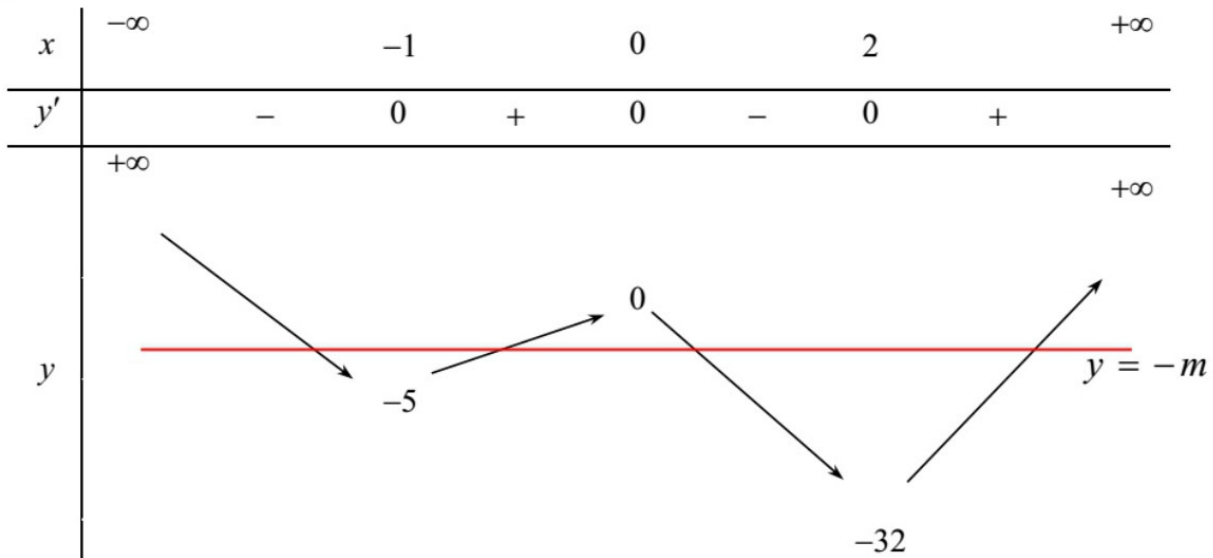
Lời giải:

Xét hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình

$f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ (*) có 4 nghiệm phân biệt

(Không tính nghiệm cực trị của hàm $y = f(x)$)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -m$

Dựa vào bảng biến thiên để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt:

$$\Leftrightarrow -5 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$$

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên cần tìm của m .

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 4. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + m - 1|$ có 5 điểm cực trị là

A. $-1 < m < 27$.

B. $-27 < m < 1$.

C. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -27 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m > 27 \\ m < -1 \end{cases}$.

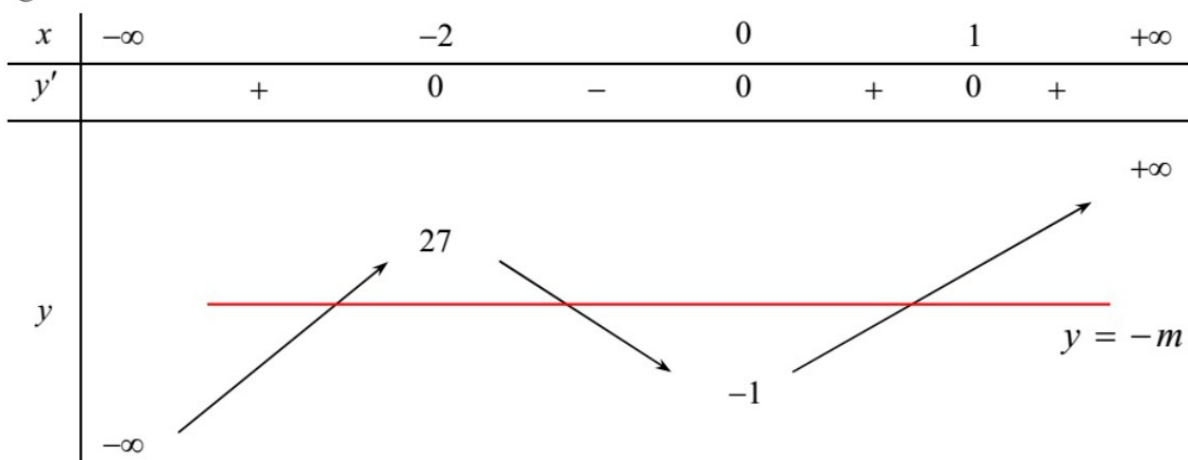
Lời giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 1$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 15x^2 + 10x = 0$

$$\Leftrightarrow 5x(x+2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình

$$f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m \quad (*) \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

(Không tính nghiệm cực trị của hàm $y = f(x)$)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -m$

Dựa vào bảng biến thiên để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt:

$$\Leftrightarrow -1 < -m < 27 \Leftrightarrow -27 < m < 1$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$y = |3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1 + 2m| \text{ có 3 điểm cực trị?}$$

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. Vô số.

Lời giải:

Xét hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 12(x^3 - x^2 - x + 1) = 12(x+1)(x-1)^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + 2m|$ có 3 điểm cực trị thì phương trình

$$f(x) + 2m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2m \quad (*) \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$$

(Không tính nghiệm cực trị của hàm $y = f(x)$)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -2m$

Dựa vào bảng biến thiên để đường thẳng $y = -2m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt:

$$\Leftrightarrow -2m > -10 \Leftrightarrow m < 5$$

Vì m nguyên dương nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y = |\sin x + x + m|$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. vô số.

Lời giải

Chọn D.

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\text{Số giao điểm}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $f(x) = \sin x + x + m$, $f'(x) = \cos x + 1 \geq 0$ (dấu bằng xảy ra tại các điểm rời rạc).

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$,

do đó hàm số $f(x)$ không có cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Hơn nữa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm.

Từ đó hàm số $y = |\sin x + x + m|$ có đúng một điểm cực trị với mọi m .

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?

A. 1.

B. Vô số.

C. 2.

D. Không có.

Lời giải:

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\text{Số giao điểm}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

- Áp dụng công thức: $(|x|)' = \frac{u.u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)(4x^3 - 24x^2 + 36x)}{|x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|}$.

$$y' = \frac{(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)4x(x-3)^2}{|x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 3 \text{ (nghiệm kép)} \\ \underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m \text{ (*)} \end{cases}$$

- Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$; $g'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	
$g(x)$	$+\infty$						
			0		27		$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m \text{ (*)}$ có **tối đa hai nghiệm**.

Ngoài ra, $x = 0$ là **nghiệm đơn**, $x = 3$ là **nghiệm kép** của phương trình $y' = 0$. Vì vậy hàm số đã cho có ba cực trị tương đương phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó có vô số giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^2 + 2x + m|$ có đúng ba điểm cực trị.

- A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. $m \leq 1$. D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \boxed{\text{Số giao điểm} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{Không tính tiếp xúc} \end{matrix}}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm $f(x) = x^2 + 2x + m$,

Ta có: $f'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 4. Cho hàm số $y = |\sin 2x + x + m|$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có đúng ba điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\text{Số giao điểm}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $f(x) = \sin 2x + x + m$, $f'(x) = 2 \cos 2x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (\text{đầu bằng xảy ra tại các điểm}$$

rời rạc).

$$f''(x) = -4 \sin 2x.$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0 \text{ nên hàm số đạt cực đại tại các điểm } x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0 \text{ nên hàm số đạt cực tiểu tại các điểm } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Do đó hàm số $f(x)$ có vô số điểm cực trị.

Mà số cực trị của hàm số $y = |\sin 2x + x + m|$ bằng tổng số cực trị của hàm số $f(x)$ và số nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$, do đó hàm số $y = |\sin 2x + x + m|$ có vô số điểm cực trị với mọi m .

Suy ra số giá trị của m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị là 0 giá trị.

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị

A. 4032.

B. 4034.

C. 4030.

D. 4028

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\boxed{\text{Số giao điểm}}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

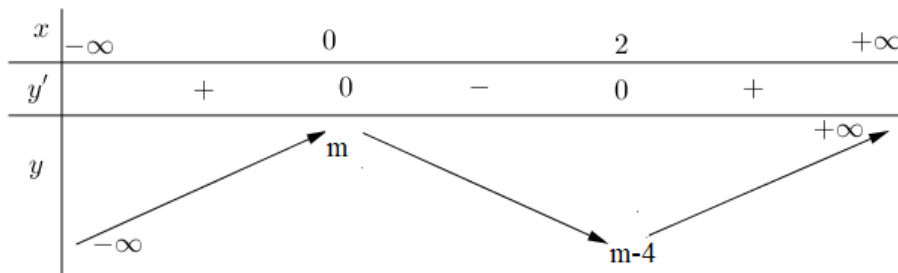
Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét $y = x^3 - 3x^2 + m$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT



□ Để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị thì $\begin{cases} m-4 \geq 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \end{cases}$

□ YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-2017; 0] \cup [4; 2017] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

□ Có 4032 giá trị nguyên m để thỏa mãn ycbt

Câu 6. Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị. Vậy S sẽ nhận giá trị nào sau đây?

A. 2016.

B. 1952.

C. -2016.

D. -496.

✎ **Nhận xét :** Để giải quyết dạng toán này, các bạn học sinh cần :

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\boxed{\text{Số giao điểm}}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Ngoài ra, các em cần phải nắm công thức **tìm tổng cấp số cộng**: Cho cấp số cộng với số hạng đầu u_1 , công sai d , khi đó **tổng của n số hạng đầu** là: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$ với $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Lời giải :

😊 Cách 1: Tự luận

- Xét: $y = \left| f(x) + \frac{m}{2} \right|$ với $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
- Áp dụng công thức: $(|u|)' = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = f'(x) \cdot \frac{f(x) + \frac{m}{2}}{\left| f(x) + \frac{m}{2} \right|}$.
- Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{m}{2} \end{cases}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (hai nghiệm phân biệt).
- Vậy hàm số $y = \left| f(x) + \frac{m}{2} \right| = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có năm điểm cực trị khi $f(x) = -\frac{m}{2}$ có ba nghiệm phân biệt khác $-1, 3$ (*).
- Bản biến thiên hàm $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
		$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-32	$+\infty$

- Ta thấy với (*) $\Leftrightarrow -32 < -\frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 64$. Vì m nguyên nên $m \in \{1, 2, \dots, 63\}$
- Tổng các giá trị của m là $S = \frac{63}{2}(1+63) = 2016$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{A}$

😊 Cách 2: Trắc nghiệm

- Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = \frac{m}{2} \\ x = 3 \Rightarrow y = -32 + \frac{m}{2} \end{cases}$.
- Ta biết:

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\boxed{\text{Số giao điểm}}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

mà: Số cực trị của hàm $y = f(x)$ bằng 2.

Do đó yêu cầu đề bài tương đương với $\begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$ có ba giao điểm (không tính tiếp xúc) $\Leftrightarrow y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow \frac{m}{2} \cdot \left(-32 + \frac{m}{2}\right) < 0$
 $\Leftrightarrow m(m-64) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 64$. Vì m nguyên nên $m \in \{1, 2, \dots, 63\}$.

Câu 7. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 2|$ có đúng năm điểm cực trị

A. $m \leq 2$ hoặc $m \geq 6$. B. $m < 2$ hoặc $m > 6$. C. $2 \leq m \leq 6$.

D. $2 < m < 6$.

Lời giải

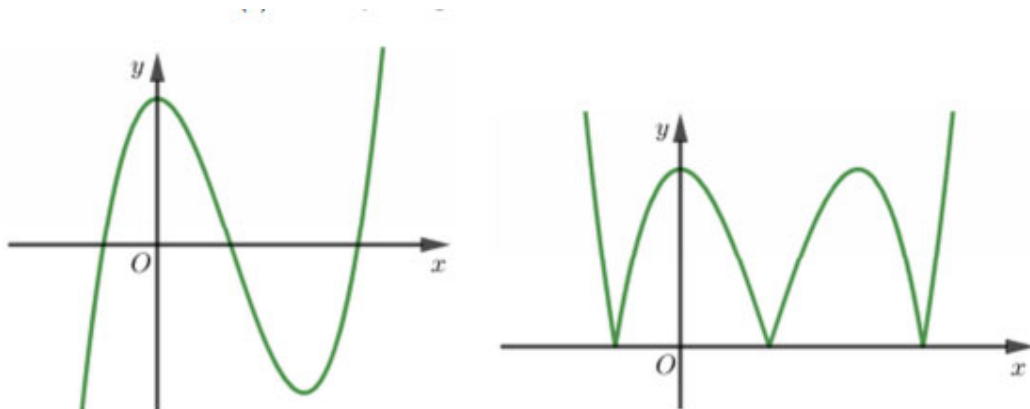
Chọn D

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \boxed{\text{Số giao điểm } \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \text{ không tính tiếp xúc}}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1) (ngiem bội chẵn không tính)

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 2|$ có đúng năm điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y = x^3 - 3x^2 + m - 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 2 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.



Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 2 - m$.

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x^2$, ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		0		$+\infty$	
	$-\infty$		-4		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < 2 - m < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-4 < m < 0$.

B. $-4 \leq m \leq 0$.

C. $0 < m < 4$.

D. $m \geq 4$ hoặc $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\boxed{\text{Số giao điểm}}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

$$\text{Ta có } y = |x^3 - 3x^2 + m| = \sqrt{(x^3 - 3x^2 + m)^2} \Rightarrow y' = \frac{(x^3 - 3x^2 + m)(3x^2 - 6x)}{|x^3 - 3x^2 + m|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = 0 & (1) \\ 3x^2 - 6x = 0 & (2) \end{cases}$$

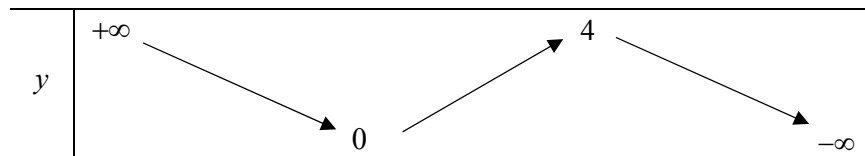
Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ suy ra để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và 2.

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + 3x^2$ trên $D = \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-\infty$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $0 < m < 4$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |(x+1)(x-2)^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5

Lời giải

Chọn B

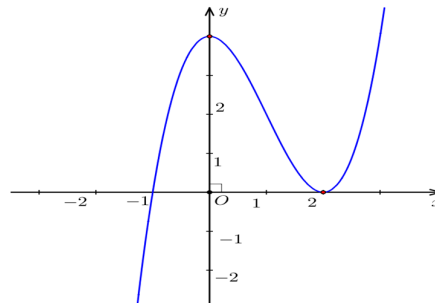
Ta có: $f(x) = (x+1)(x-2)^2 + m = x^3 - 3x^2 + 4 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị

$y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = -m$$

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$



$\Leftrightarrow 0 < -m < 4 \Leftrightarrow -4 < m < 0$ kết hợp với m nguyên suy ra có 3 giá trị m thỏa mãn nên chọn B.

Câu 10. [2D1-2.1-3] Cho hàm số $y = |x^4 - 8x^2 + m|$. Với những giá trị nào của tham số m hàm số có 5 điểm cực trị.

A. $m > 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \geq 0$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \boxed{\text{Số giao điểm } \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \text{ Không tính tiếp xúc}}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + m$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 - 16x. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$f(x)$ có 2 điểm cực tiểu $x_{CT} = \pm 2$ và 1 điểm cực đại $x_{CD} = 0$

Hàm số $y = |x^4 - 8x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có $y_{CD} \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(0) = m \leq 0$$

Vậy với $m \leq 0$ hàm số có 5 cực trị.

Câu 11. [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 44

B. 27

C. 26

D. 16

Lời giải

Chọn B

$$\left| \text{Số cực trị hàm } y = |f(x)| \right| = \left| \text{Số cực trị hàm } y = f(x) \right| + \underbrace{\left| \text{Số giao điểm} \right|}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		m		$+\infty$
		$m-5$		$m-32$	

Xét hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

Nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5

điểm cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 32 < 0 \\ m - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq m < 32$.

Do đó có 27 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 12. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Biết $m \in (a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ thì hàm số

$y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1|$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng $a + b$?

A. $\frac{14}{5}$.

B. $-\frac{27}{10}$.

C. $\frac{1}{10}$.

D. $-\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \boxed{\text{Số giao điểm} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}} \begin{matrix} \text{Không tính tiếp xúc} \end{matrix}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Đặt $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1, x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x = 5x(x+2)(x-1)^2, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$10m+27$		$10m-1$		$+\infty$
	$-\infty$						

Dựa vào bảng biến thiên trên của hàm số $f(x)$ ta suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị

khi và chỉ khi: $10m - 1 < 0 < 10m + 27 \Leftrightarrow -\frac{27}{10} < m < \frac{1}{10}$. Suy ra $a + b = -\frac{27}{10} + \frac{1}{10} = -\frac{13}{5}$.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019; 2019)$ để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 - 20x + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 95.

B. 48.

C. 47.

D. 94.

Lời giải

Chọn A

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\text{Số giao điểm}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (ng nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $y = f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + m$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20$. cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 15x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$	
$y'(x)$		+	0	-	0	+
$y(x)$	$-\infty$		$48+m$		$-48+m$	$+\infty$

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $y = f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.

Ta có $y(x_1) \cdot y(x_2) = (m+48)(m-48) < 0 \Leftrightarrow -48 < m < 48$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{-47; -46; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 46; 47\}$. Vậy có 95 số.

Câu 14. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + m - 1|$ có 5 điểm cực trị là

A. $-1 < m < 27$.B. $-27 < m < 1$.C. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -27 \end{cases}$.D. $\begin{cases} m > 27 \\ m < -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	28	0	1	$+\infty$

Suy ra $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + m - 1|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) + m - 1$ có 3 nghiệm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên hàm số $f(x)$ ta có $0 < 1 - m < 28 \Leftrightarrow -27 < m < 1$.

Câu 15. (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\text{Số giao điểm}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1) (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ có 3 điểm cực trị với mọi m . Do đó để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \text{ cắt trục hoành tại } 7 - 3 = 4 \text{ điểm phân biệt} \begin{cases} m - 5 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm là $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên cần tìm của m .

Câu 16. [2D1-2.5-3] Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2m|$ có 7 điểm cực trị bằng

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\boxed{\text{Số giao điểm}}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1) (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2m$.

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Có } y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$2m-5$	$2m$	$2m-32$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 7 cực trị khi $\begin{cases} 2m-5 < 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{5}{2}$.

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m bằng 3.

Câu 17. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là

A. $(0; 6)$.

B. $(6; 33)$.

C. $(1; 33)$.

D. $(1; 6)$.

Lời giải

Chọn D

$$\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \boxed{\text{Số giao điểm} \begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{Không tính tiếp xúc} \end{matrix}}$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$. (1). (nghiệm bội chẵn không tính)

Xét hàm số $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1 \Rightarrow g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$ có dạng:

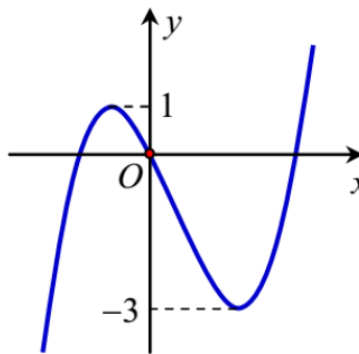
x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(2)$	$+\infty$

Để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $y = g(x)$ phải cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt (do cách lấy đối xứng của đồ thị $y = |g(x)|$)

$$\text{Hay } \begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(0) > 0 \\ g(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-6 < 0 \\ m-1 > 0 \\ m-33 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Vậy $m \in (1; 6)$.

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình dưới đây. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số a trong khoảng $(-23; 23)$ để hàm số $y = |f(x) + a|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S .



A. -3.

B. 250.

C. 0.

D. -253.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = |f(x) + a| = \sqrt{(f(x) + a)^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x) + a)f'(x)}{\sqrt{(f(x) + a)^2}}.$$

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x) + a|$, ta tìm x để thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định đồng thời qua nghiệm x đó y' phải đổi dấu. Khi đó:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x) + a)f'(x)}{\sqrt{(f(x) + a)^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -a & (2) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị, hàm số bậc ba có hai điểm cực trị trái dấu giả sử x_1, x_2 nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

Vậy để hàm số có đúng ba cực trị thì phương trình (2) có 1 nghiệm khác x_1, x_2 .

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = -a$.

Dựa vào đồ thị thì đề (2) có một nghiệm khi và chỉ khi: $\begin{cases} -a \geq 1 \\ -a \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -1 \\ a \geq 3 \end{cases}.$

Theo bài ra $a \in (-23; 23)$, $a \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{-22; -21; \dots; -1; 3; 4; \dots; 21, 22\}$.

Tổng các giá trị của S là:

$$(-22)+(-21)+\dots+(-1)+3+4+\dots+21+22=\frac{22((-22)+(-1))}{2}+\frac{20(3+22)}{2}=-3.$$

Cách 2. Dựa vào đồ thị, $y = f(x)$ có 2 cực trị $\Rightarrow y = f(x) + a$ có hai cực trị.

Để $y = |f(x) + a|$ có 3 cực trị thì phương trình $f(x) + a = 0$ có 1 nghiệm đơn.

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -a$. Dựa vào

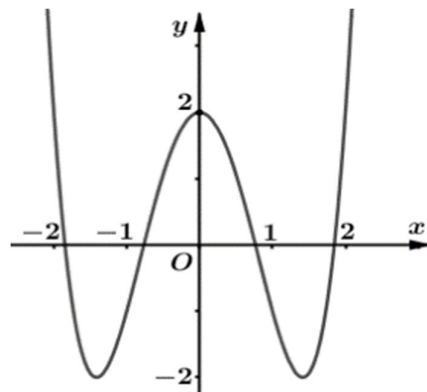
$$\text{đồ thị thì } \begin{cases} -a \geq 1 \\ -a \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -1 \\ a \geq 3 \end{cases}.$$

Theo bài ra $a \in (-23; 23)$, $a \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{-22; -21; \dots; -1; 3; 4; \dots; 21, 22\}$.

Tổng các giá trị của S là:

$$(-22)+(-21)+\dots+(-1)+3+4+\dots+21+22=\frac{22((-22)+(-1))}{2}+\frac{20(3+22)}{2}=-3.$$

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị.



A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

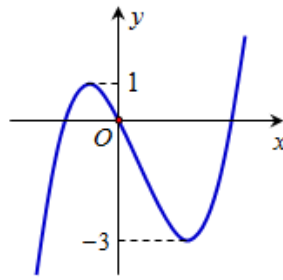
Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến lên trên hoặc xuống không quá 2 đơn vị. Vậy $-2 < 5 - 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < \frac{7}{2} \Rightarrow m \in \{2; 3\}$

Vậy tổng tất cả các số nguyên của m là 5.

Câu 20. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.



A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **B.** $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **C.** $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Tư luận:

$$(L)y = |f(x) + m| = \begin{cases} f(x) + m & \text{khi } f(x) + m \geq 0 (L_1) \\ -[f(x) + m] & \text{khi } f(x) + m < 0 (L_2) \end{cases}$$

(L) gồm (L_1) và (L_2) , trong đó $y = f(x) + m$ có 2 điểm cực trị

(L) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) + m = 0$ có 1 nghiệm đơn hoặc có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq -3 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Trắc nghiệm: Số cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng số giao điểm của $f(x) = -m$ (không tính tiếp điểm)

Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị

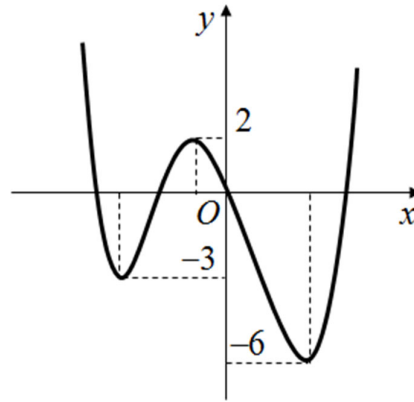
Do đó hàm số $y = |f(x) + m|$ có 3 cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = -m$ có 1 nghiệm đơn hoặc có 1 nghiệm đơn và có 1 nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq -3 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x - 2018) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của tập S bằng

A. 9.

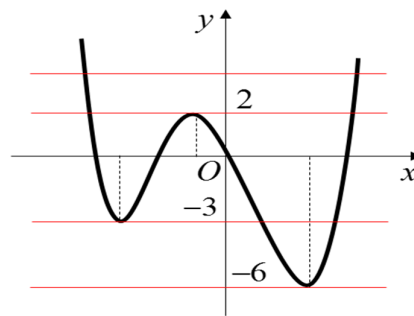
B. 7.

C. 18.

D. 12.

Lời giải

Chọn D



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2018) + m$ là 3.

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2018) + m|$ có 5 điểm cực trị

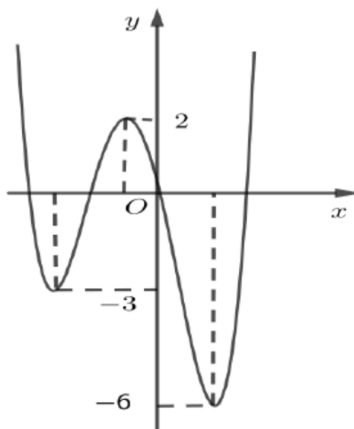
$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x - 2018) + m$ tại 2 điểm (không tính giao điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < -m \leq -3 \\ -m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq m < 6 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tập S bằng: $3 + 4 + 5 = 12$.

Câu 2. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị của hàm số $y = |f(x+1) + m|$ được suy ra từ đồ thị (C) ban đầu như sau:

+ Tịnh tiến (C) sang trái một đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên (hay xuống dưới) m đơn vị. Ta được đồ thị (C') : $y = f(x+1) + m$.

+ Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số $y = |f(x+1) + m|$.

Ta được bảng biến thiên của của hàm số $y = |f(x+1) + m|$ như sau.

x	$-\infty$	-4	-2	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$-3 + m$	$2 + m$	$-6 + m$	$+\infty$

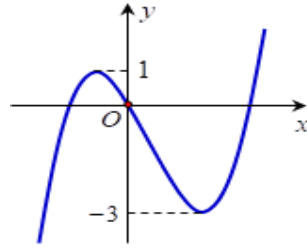
Để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị của hàm số (C') : $y = f(x+1) + m$ phải cắt trục Ox tại 2 hoặc 3 giao điểm.

+ TH1: Tịnh tiến đồ thị (C') : $y = f(x+1) + m$ lên trên. Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ -3 + m \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq m < 6. \\ -6 + m < 0 \end{cases}$

+ TH2: Tịnh tiến đồ thị (C') : $y = f(x+1) + m$ xuống dưới. Khi đó $\begin{cases} m < 0 \\ 2 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2. \end{cases}$

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m là 3; 4; 5.

Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = |f(x+2019) + m|$ có ba điểm cực trị là

A. 4036.

B. 4037.

C. 4039.

D. 4038.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = f'(x+2019) \cdot \frac{f(x+2019) + m}{|f(x+2019) + m|}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2019) = 0 \\ f(x+2019) = -m \end{cases}$.

Xét $f'(x+2019) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(x+2019) + m|$ có ba điểm cực trị khi $f(x+2019) = -m$ có đúng một nghiệm đơn. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Vậy có 4036 số nguyên thỏa mãn.

Nhận xét: Để hàm số $y = |f(x+2019) + m|$ có ba điểm cực trị thì từ đồ thị và phép biến đổi đồ thị (lấy đối xứng qua trục Ox) ta có phương trình $f(x+2019) = -m$ có đúng 1 nghiệm

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

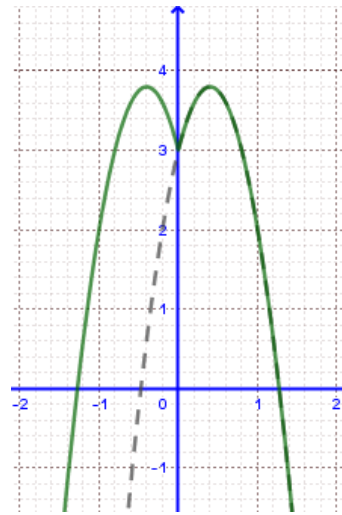
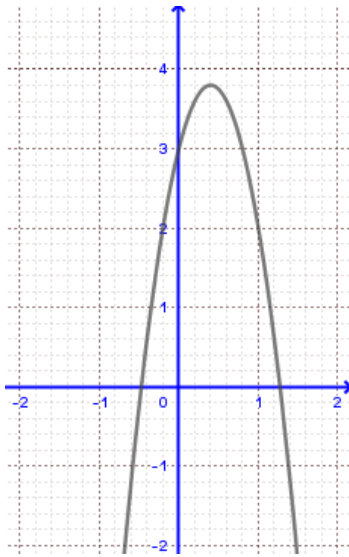
Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = f(x)$ có đồ thị (C) .

$y = f(|x|)$ là hàm chẵn $\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ giữ nguyên đồ thị (C) nằm bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

+TH1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow y = -5x^2 + 4x + 3$.



Đồ thị hàm số $y = -5x^2 + 4x + 3$.

Đồ thị hàm số $y = -5|x|^2 + 4|x| + 3$ có 3 cực trị.

Vậy $m = 1$ thỏa yêu cầu.

+ TH2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Rightarrow f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$ là hàm số bậc 3.

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

$\Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 \leq 0 < x_2$.

$\Leftrightarrow 3(m-1)x^2 - 10x + m + 3 = 0(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 \leq 0 < x_2$.

$$+ x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$$

+ Nếu $(*)$ có một nghiệm $x_1 = 0 \Rightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

$$\text{Khi đó } (*) \text{ trở thành: } -12x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{6} \end{cases} \text{ (Không thỏa mãn).}$$

Vậy có 4 giá trị m .

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m ($|m| < 5$) để hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có ba điểm cực tiểu?

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm: $y = x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $y' = 3x^2 - 2(m-2)x - m$.

Nhận xét :

- Mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox sẽ có một điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có $y_{cd} \cdot y_{ct} \geq 0$ thì hàm số $y = |f(x)|$ chỉ có hai cực tiểu.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì hàm số $y = |f(x)|$ chỉ có một cực tiểu.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$.

$\Leftrightarrow x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow (x-m)(x^2 + 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 1-m > 0 \\ m^2 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq \{0; -3\} \end{cases}.$$

Theo đề ra ta có: $m \in \mathbb{Z}, |m| < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 5$

Kết hợp điều kiện trên ta được $m \in \{-4; -2; -1\}$.

BÀI 34. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = f(m)$ ()*

Phương pháp:

Bước 1:

Bước 2:

Bước 3:

.....

.....

Bước 4:

.....

Chú ý:

► Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì phương trình

$$f(x) = A(m) \Leftrightarrow \min_D f(x) \leq f(m) \leq \max_D f(x)$$

► Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = f(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm?

- A. 9. B. 10.
C. 11. D. 8.

Câu 2. Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi $m \in [a; b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là

- A. $T = 3\sqrt{2} + 2$. B. $T = 6$.
C. $T = 8$. D. $T = 0$.

Câu 3. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ có điểm chung với trục hoành là $[a; b]$. Tính giá trị $S = a + b$.

- A. $S = \frac{13}{3}$. B. $S = 5$.
C. $S = 3$. D. $S = \frac{16}{3}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm.

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0]$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1]$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m(\sqrt{4-x^2} + 1) - 7$ có điểm chung với trục hoành.

- A. $0 \leq m \leq 3$. B. $-1 \leq m \leq \frac{7}{3}$.
C. $2 \leq m \leq \frac{7}{3}$. D. $2 \leq m \leq 3$.

Câu 6. Đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất thì giá trị của m là

- A. $m > -3$. B. $m < -3$.
C. $m \geq -3$. D. $m \leq -3$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 + mx^2 - 4$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất thì giá trị của m là

- A. $m > 3$. B. $m < 3$.
C. $m \geq 3$. D. $m \leq 3$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$ có nghiệm thực?

- A. 5 . B. 6 .
C. 7 . D. 8 .

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = \sin^2 4x + m$ có nghiệm thực?

- A. 1. B. 2 .
C. 3 . D. 4 .

Câu 10. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để phương trình trên có nghiệm duy nhất $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 100 . B. 99 .
C. 201 . D. 98

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^4 + \frac{16}{x^4} - 4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 12\left(x - \frac{2}{x}\right) = m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$.

- A. $-13 \leq m \leq 11$. B. $-15 \leq m \leq 9$. C. $-15 < m < 9$. D. $-16 \leq m \leq 9$.

Câu 2. (SỞ GD-ĐT GIA LAI -2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- A. $-3 < m < 0$. B. $m > -3$. C. $m < -3$. D. $m \geq 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + mx - 2$. Tìm tất cả các điều kiện của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- A. $m < -3$. B. $m < 3$. C. $m > -3$. D. $m > 3$.

Câu 4. Phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có một nghiệm duy nhất khi điều kiện của m là

- A. $m > 1$. B. $m > -1$. C. $m < -2$. D. $m < 1$.

Câu 5. Tìm tất cả số thực của tham số m để phương trình $2x - 1 = m(x - 1)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 0]$.

- A. $m \leq \frac{3}{2}$. B. $m \geq 1$. C. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x|^3 - 3|x| = 2m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-2 < m < 0$. B. $-2 \leq m$. C. $-1 < m < 0$. D. $-1 \leq m$.

Câu 7. Phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$; (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi

- A. $1 < m < 2$. B. $m > 2$. C. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $0 < m < 1$.

Câu 8. [HKII THPT CHUYÊN THAI NGUYEN 19_20] Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

- A. 1. B. 5.
C. 0. D. 3.

Câu 9. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = m$ có nghiệm?

- A. $-2 < m < 2$. B. $-2 < m < 2\sqrt{2}$.
C. $-2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$.

- A. $0 \leq m \leq 6$. B. $3 \leq m \leq 3\sqrt{2}$.
C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 3\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2} - \frac{9}{2} \leq m \leq 3$.

Câu 11. Tìm m để phương trình $x+3=m\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm.

- A. $1 \leq m \leq \sqrt{10}$. B. $-1 \leq m \leq 10$.
C. $1 \leq m < \sqrt{10}$. D. $-1 < m \leq \sqrt{10}$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để phương trình $\sqrt{2x^2-3x+m} = x-2$ có nghiệm.

- A. 21. B. 10.
C. 9. D. 8.

Câu 13. [2D1-5.4-3] (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Tìm m để phương trình sau có nghiệm $(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})^3 - 6\sqrt{16-x^2} + 2m+1 = 0$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.
C. $-\frac{41}{2} \leq m \leq \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}$. D. $m < -\frac{41}{2}$.

Câu 14. Phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm x khi:

- A. $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$. B. $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.
C. $m \leq \frac{1}{3}$. D. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 15. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của $S = 2a + b$.

- A. $S = \frac{19}{3}$. B. $S = 7$.
C. $S = 5$. D. $S = \frac{23}{3}$.

Câu 16. Cho phương trình $(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt[4]{x^2-x}\right) = 1$, với m là tham số thực. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. 11. B. 9.

C. 20.

D. 4.

Câu 17. Tìm m để phương trình $\cos 2x + 2 \sin x + m = 0$ có đúng bốn nghiệm $x \in [0; \pi]$.

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$

B. $-\frac{3}{2} < m < -1$.

C. $-\frac{3}{2} \leq m < -1$.

D. Không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

Câu 18. (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

A. $m \leq \frac{47}{64}$ hoặc $m \geq \frac{3}{2}$.

B. $\frac{47}{64} < m < \frac{3}{2}$.

C. $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$.

D. $\frac{47}{64} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$ có bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?

A. 3

B. 5

C. 7

D. 1

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-1)x^3 + 2mx^2 - x + 3m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

- A. $m < 0$. B. $0 < m < \frac{1}{3}$. C. $m > 0$. D. $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 2. Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

- A. $-6 \leq m \leq \frac{3}{4}$. B. $-1 \leq m \leq \frac{14}{25}$. C. $m \leq \frac{4}{3}$. D. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

- A. $m \in \left(-1; \frac{-5}{6}\right)$. B. $m \in (-3; -1)$. C. $m \in (-3; 1)$. D. $m \in (-4; -1)$.

Câu 4. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x-4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ tại bốn điểm phân biệt?

- A. 1. B. 5. C. 3. D. 7.

Câu 5. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1-903-2018) Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

- A. $-6 \leq m \leq \frac{3}{4}$. B. $-1 \leq m \leq \frac{14}{25}$. C. $m \leq \frac{4}{3}$. D. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$.

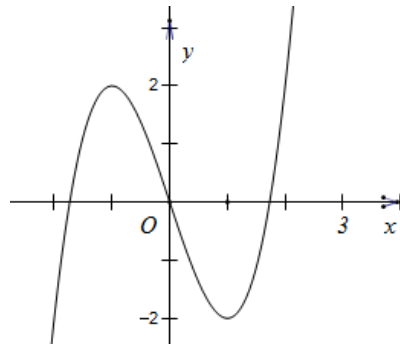
Câu 6. Phương trình $|x^2 - 2x|(|x| - 1) = m$ (với m là tham số thực) có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|2|x| - 6| = m||x| - 1|$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (0;1) \cup (4; +\infty)$. B. $m \in (0;1) \cup (6; +\infty)$.
C. $m \in (0;2) \cup (6; +\infty)$. D. $m \in (0;3) \cup (5; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $|x^3 - 3x| = m^2 + m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:



- A. $-1 < m < 0$. B. $m > 0$.
 C. $m < -2$ hoặc $m > 1$. D. $-2 < m < -1$ hoặc $0 < m < 1$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

- A. $m = 2$. B. $m \in (-1; 3)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

- A. 10. B. 6. C. 4. D. 2.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

- A. $m \leq 3$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 3$. D. $m \geq 2$.

Câu 12. Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi m thuộc $[a; b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là

- A. $T = 3\sqrt{2} + 2$. B. $T = 6$. C. $T = 8$. D. $T = 0$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} = m$ có nghiệm thực?

- A. 13. B. 12. C. 6. D. 7.

Câu 14. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})^3 - 6\sqrt{16-x^2} + 2m + 1 = 0$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.
 C. $-\frac{41}{2} \leq m \leq \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}$. D. $m < -\frac{41}{2}$.

Câu 15. (TH TUỔI TRẺ SỐ 6-2018) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x+1=m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x+1=3m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. C. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $m > \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 17. Tất cả giá trị của m để phương trình $mx-\sqrt{x-3}=m+1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $0 < m < \frac{1+\sqrt{3}}{4}$. B. $m > 0$. C. $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2} \leq m < \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18. Cho phương trình $x^2+7+m\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4+x^2+1}+m(\sqrt{x^2-x+1}-2)$. Biết tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm là $(-a;b)$. Tính $P=b+a$.

- A. $-\frac{26}{3}$. B. $\frac{13}{6}$. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 19. Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m=1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

- A. 13. B. 7. C. 19. D. 8.

Câu 20. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2+m\sqrt{4-x^2}+m-7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của $S=a+b$.

- A. $S=\frac{13}{3}$. B. $S=5$. C. $S=3$. D. $S=\frac{16}{3}$.

Câu 21. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x-1)(\cos^2 x-\cos x+m)=0$ có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

- A. $0 \leq m < \frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{4} < m \leq 0$. C. $0 < m < \frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4} < m < 0$

Câu 22. Gọi K là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$. Hỏi K là tập con của tập hợp nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. B. $(1 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$. C. $\left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

Câu 23. Với giá trị nào của m thì phương trình $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3m$ có nghiệm.

- A. $-\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}$. B. $-\frac{4}{3} \leq m \leq 1$. C. $0 \leq m \leq \frac{5}{3}$. D. $-\frac{4}{3} \leq m < \frac{5}{3}$.

Câu 24. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin 4x = m \cdot \tan x$ có nghiệm $x \neq k\pi$.

- A. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 4$. B. $-1 < m < 4$. C. $-\frac{1}{2} < m < 4$. D. $-\frac{1}{2} \leq m < 4$.

BÀI 34. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = f(m)$ ()*

Phương pháp:

Bước 1: Cô lập tham số m và đưa về dạng $f(x) = f(m)$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $f(m)$ sao cho đường thẳng $y = f(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Bước 4: Kết luận giá trị của $f(m)$ để phương trình $f(x) = f(m)$ có nghiệm trên D .

Chú ý:

► Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì phương trình $f(x) = A(m) \Leftrightarrow \min_D f(x) \leq f(m) \leq \max_D f(x)$

► Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = f(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm?

- A. 9. B. 10.
C. 11. D. 8.

Câu 2. Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi $m \in [a; b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là

- A. $T = 3\sqrt{2} + 2$. B. $T = 6$.
C. $T = 8$. D. $T = 0$.

Câu 3. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ có điểm chung với trục hoành là $[a; b]$. Tính giá trị $S = a + b$.

- A. $S = \frac{13}{3}$. B. $S = 5$.
C. $S = 3$. D. $S = \frac{16}{3}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm.

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0]$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1]$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m(\sqrt{4-x^2} + 1) - 7$ có điểm chung với trục hoành.

- A. $0 \leq m \leq 3$. B. $-1 \leq m \leq \frac{7}{3}$.
C. $2 \leq m \leq \frac{7}{3}$. D. $2 \leq m \leq 3$.

Câu 6. Đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất thì giá trị của m là

- A. $m > -3$. B. $m < -3$.
C. $m \geq -3$. D. $m \leq -3$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 + mx^2 - 4$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất thì giá trị của m là

- A. $m > 3$. B. $m < 3$.
C. $m \geq 3$. D. $m \leq 3$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$ có nghiệm thực?

- A. 5. B. 6.
C. 7. D. 8.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = \sin^2 4x + m$ có nghiệm thực?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Câu 10. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để phương trình trên có nghiệm duy nhất $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 100.
B. 99.
C. 201.
D. 98

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^4 + \frac{16}{x^4} - 4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 12\left(x - \frac{2}{x}\right) = m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$.

A. $-13 \leq m \leq 11$.B. $-15 \leq m \leq 9$.C. $-15 < m < 9$.D. $-16 \leq m \leq 9$.

Lời giải

Chọn đáp án B.

Đặt $t = x - \frac{2}{x}$, $x \in [1; 2]$ Đạo hàm $t' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0$, $\forall x \in [1; 2]$

Do đó $t(1) \leq t \leq t(2)$, $\forall x \in [1; 2]$ suy ra $-1 \leq t \leq 1$.

Ta có $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$, $x^4 + \frac{16}{x^4} = \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^2 - 8 = (t^2 + 4)^2 - 8 = t^4 + 8t^2 + 8$.

Phương trình đã cho trở thành $t^4 + 8t^2 + 8 - 4(t^2 + 4) - 12t = m \Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 12t = m + 8$ (*).

Phương trình đã cho có nghiệm trong đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trong $[-1; 1]$. Xét hàm số $y = f(t) = t^4 + 4t^2 - 12t$ trên $[-1; 1]$.

Đạo hàm $y' = 4t^3 + 8t - 12$, $t \in (-1; 1)$, $y' = 4(t-1)(t^2 + t + 3) < 0$, $\forall t \in (-1; 1)$

Bảng biến thiên

x	-1	1
y'		-
y	-7	17

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm trên $[1; 2]$ thì $-7 \leq m + 8 \leq 17 \Leftrightarrow -15 \leq m \leq 9$.

Câu 2. (SỞ GD-ĐT GIA LAI -2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

A. $-3 < m < 0$.B. $m > -3$.C. $m < -3$.D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $x^3 + mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{x} - x^2$ (do

$x = 0$ không là nghiệm của phương trình).

Xét hàm số $g(x) = -\frac{2}{x} - x^2$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g'(x) = \frac{2}{x^2} - 2x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+		+	0	-	
y	$-\infty$		$+\infty$		-3		$-\infty$

Dựa vào đồ thị ta có, để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất thì $m > -3$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + mx - 2$. Tìm tất cả các điều kiện của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

A. $m < -3$.

B. $m < 3$.

C. $m > -3$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn đáp án C.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 + mx - 2$ và trục hoành ($y = 0$) là:

$$x^3 + mx - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 - x^3}{x} \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{2 - x^3}{x}$$

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y' = \frac{(2 - x^3)' \cdot x - x' \cdot (2 - x^3)}{x^2} = \frac{-3x^3 - (2 - x^3)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 2}{x^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^3 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

BBT

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-		-	
y	$-\infty$		-3		$+\infty$		$-\infty$

Để đồ thị $y = x^3 + mx - 2$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) có một nghiệm duy nhất hay đồ thị hàm số $y = m$ cắt đồ thị $y = \frac{2-x^3}{x}$ tại 1 điểm duy nhất

Theo bảng biến thiên ta có $m > -3$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 4. Phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có một nghiệm duy nhất khi điều kiện của m là

- A. $m > 1$. B. $m > -1$. C. $m < -2$. D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn đáp án D.

Ta có $x^3 - 3mx + 2 = 0 \Leftrightarrow 3mx = x^3 + 2$ (*).

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Lúc này (*) $\Leftrightarrow m = \frac{x^3 + 2}{3x}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3x}$ có $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3x}\right)' = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^3 - 1)}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-		-	0	+	
y					1		

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì $m < 1$.

Câu 5. Tìm tất cả số thực của tham số m để phương trình $2x - 1 = m(x - 1)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 0]$.

- A. $m \leq \frac{3}{2}$. B. $m \geq 1$. C. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn đáp án C.

Với $x \in [-1; 0]$, ta có $2x - 1 = m(x - 1) \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x - 1} = m$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ trên $[-1;0]$, ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$ và

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in [-1;0] \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến trên } [-1;0]. \text{ Suy ra phương trình}$$

$$f(x) = m \text{ có nghiệm trên } [-1;0] \Leftrightarrow f(0) \leq m \leq f(-1) \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x|^3 - 3|x| = 2m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 < m < 0$.

B. $-2 \leq m$.

C. $-1 < m < 0$

D. $-1 \leq m$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$

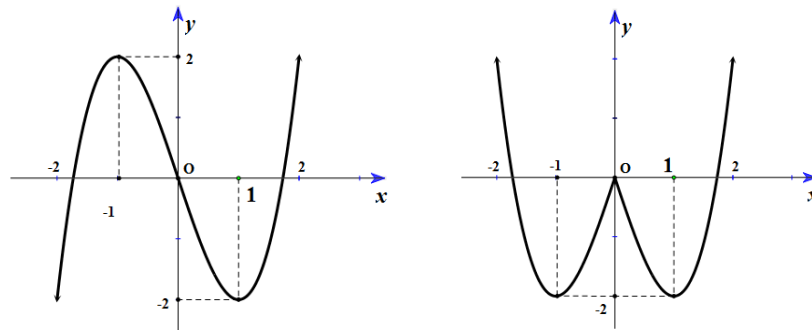
TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Đồ thị



Viết phương trình dưới dạng $|x|^3 - 3|x| = 2m$ (1)

Gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = |x|^3 - 3|x|$ gồm 2 phần

* Phần phía bên phải Oy của (C)

* Phần đối xứng phần đồ thị trên qua Oy

Do (d): $y = 2m$ là đường thẳng cùng phương với Ox khi đó số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C') và đường thẳng $(d): y = 2m$.

Điều kiện để phương trình (1) có 4 nghiệm khi và chỉ khi: $-2 < 2m < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

Câu 7. Phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$; (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi

A. $1 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$.

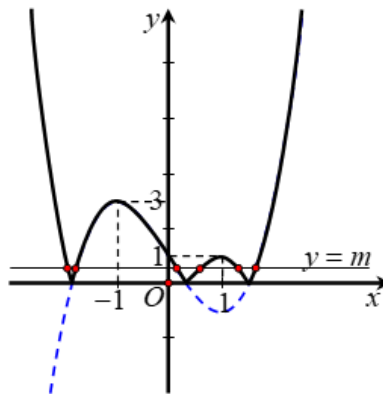
D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

* Số nghiệm phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x + 1|$ và đường thẳng $y = m$.

* Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x + 1|$ được suy ra từ đồ thị hàm $y = x^3 - 3x + 1$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phần hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ nằm phía trên trục Ox và lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ nằm phía dưới trục Ox qua trục Ox .



* Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = |x^3 - 3x + 1|$ ta suy ra để phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$ có 6 nghiệm phân biệt điều kiện là: $0 < m < f(1) \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 8. [HKII THPT CHUYÊN THAI NGUYEN 19_20] Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1.

B. 5.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

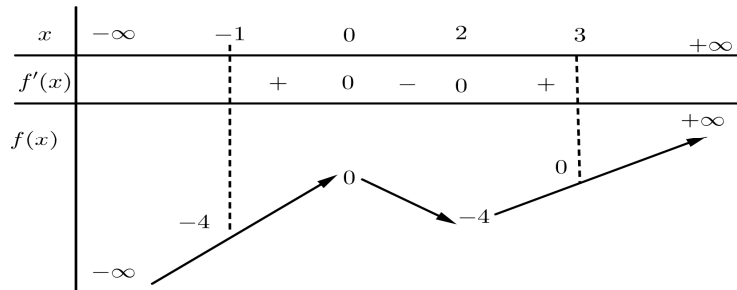
Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow f(x) = f(m)$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2:

Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - m^3) - 3(x^2 - m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - m)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \\ m^2 + (m - 3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 3)(-3m - 3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \text{ (vì } m \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 9. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = m$ có nghiệm?

- A. $-2 < m < 2$. B. $-2 < m < 2\sqrt{2}$. **C. $-2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$** D. $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ trên $[-2; 2]$

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ có $f(-2) = -2$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $f(2) = 2$.

Vậy $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2$, $\max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Do đó, phương trình $x + \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi $-2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

Câu 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$.

- A. $0 \leq m \leq 6$. B. $3 \leq m \leq 3\sqrt{2}$. C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 3\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2} - \frac{9}{2} \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn đáp án D.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)}$ trên $[-3; 6]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{(3+x)(6-x)}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \sqrt{6-x} + \sqrt{3+x} = 1 \quad (*) \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}$. Ta có bảng biến thiên:

x	-3	$\frac{3}{2}$	6	
$y'(x)$		-	0	+
$y(x)$	3			3
			$\frac{-9+6\sqrt{2}}{2}$	

Vậy, để phương trình có nghiệm thì $3\sqrt{2} - \frac{9}{2} \leq m \leq 3$.

Câu 11. Tìm m để phương trình $x + 3 = m\sqrt{x^2 + 1}$ có nghiệm.

- A. $1 \leq m \leq \sqrt{10}$. B. $-1 \leq m \leq 10$. C. $1 \leq m < \sqrt{10}$. D. $-1 < m \leq \sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn đáp án D.

Ta có: $x+3 = m\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x+3 = m\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = m.$

Đặt $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ Phương trình có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ và đồ thị của hàm số

$y = f(x)$ có điểm chung.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1-3x}{(\sqrt{x^2+1})^3}. \text{ Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'		0	
y	-1	$\sqrt{10}$	1

Để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 < m \leq \sqrt{10}.$

Chọn đáp án D.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để phương trình

$$\sqrt{2x^2-3x+m} = x-2 \text{ có nghiệm.}$$

A. 21.

B. 10.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn đáp án C.

Xét phương trình $\sqrt{2x^2-3x+m} = x-2$ (*)

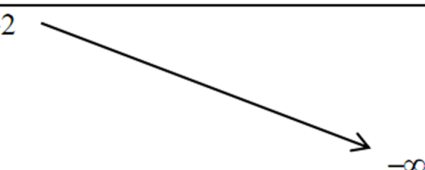
$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x^2-3x+m = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ m = -x^2-x+4 \end{cases} (**)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có ít nhất một nghiệm thuộc $[2; +\infty)$

$\Leftrightarrow$ Parabol $(P): y = -x^2 - x + 4$ cắt đường thẳng $(d): y = m$ tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc $[2; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		-2	$-\infty$



Từ bảng biến thiên, ta có $m \leq -2$.

Theo giả thiết $m \in [-10; 10]$. Do đó $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$.

Câu 13. [2D1-5.4-3] (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Tìm m để phương trình sau có nghiệm $(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})^3 - 6\sqrt{16-x^2} + 2m + 1 = 0$.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\frac{41}{2} \leq m \leq \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

D. $m < -\frac{41}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

ĐK $x \in [-4; 4]$. Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$, ta có $t \in [2\sqrt{2}; 4]$.

Ta có $t^2 = 2\sqrt{16-x^2} + 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{16-x^2} = t^2 - 8$.

Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 3(t^2 - 8) + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2m = -t^3 + 3t^2 - 25$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t^2 - 25 \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 6t$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 6t < 0, \forall t \in [2\sqrt{2}; 4]$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(4) \leq 2m \leq f(2\sqrt{2}) \Leftrightarrow -41 \leq 2m \leq -1-16\sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{41}{2} \leq m \leq \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 14. Phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm x khi:

A. $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

B. $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

C. $m \leq \frac{1}{3}$.

D. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn đáp án B.

ĐKXD: $x \geq 1$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta có

$$pt \Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = m$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Phương trình trở thành $-3t^2 + 2t = m$ (*)

Xét hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$ có $y' = -6t + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{3}$	1
y	0	$\frac{1}{3}$	-1

Phương trình đã cho có nghiệm $x \Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm $t \in [0;1)$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{3}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 15. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b \in \mathbb{R}$).

Tính giá trị của $S = 2a + b$.

A. $S = \frac{19}{3}$.

B. $S = 7$.

C. $S = 5$.

D. $S = \frac{23}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số: $D = [-2;2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ và trục hoành là

$$x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7 = 0 \Leftrightarrow m(\sqrt{4-x^2} + 1) = 7 - x^2 \Leftrightarrow m = \frac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2} + 1} \quad (1).$$

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$, $t \in [0;2]$, phương trình (1) trở thành $m = \frac{t^2+3}{t+1} \quad (2).$

Đồ thị hàm số đã cho có điểm chung với trục hoành khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;2]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+3}{t+1}$ trên $[0;2]$.

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0; 2) \\ t = -3 \notin (0; 2) \end{cases}$.

$$f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = \frac{7}{3}.$$

Do đó $\min_{[0;2]} f(t) = 2$ và $\max_{[0;2]} f(t) = 3$.

Bởi vậy, phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 2]$ khi và chỉ khi

$$\min_{[0;2]} f(t) \leq m \leq \max_{[0;2]} f(t) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3.$$

Từ đó suy ra $a = 2$, $b = 3$, nên $S = 2a + b = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

Câu 16. Cho phương trình $(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt[4]{x^2-x} \right) = 1$, với m là tham số thực. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11.

B. 9.

C. 20.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện $x > 1$.

Ta có $(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt[4]{x^2-x} \right) = 1$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt[4]{x^2-x} = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow m + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} + 16\frac{\sqrt[4]{x^2-x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow m = -16\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} + 1 \quad (1).$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}$, khi $x > 1$ ta có $0 < t < 1$.

Xét hàm số $f(t) = -16t - \frac{1}{t^2} + 1$ trên khoảng $(0; 1)$ ta có $f'(t) = -16 + \frac{2}{t^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		-11	

Từ đó ta thấy, phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi $-16 < m < -11$.

Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17. Tìm m để phương trình $\cos 2x + 2 \sin x + m = 0$ có đúng bốn nghiệm $x \in [0; \pi]$.

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$

B. $-\frac{3}{2} < m < -1$.

C. $-\frac{3}{2} \leq m < -1$.

D. Không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

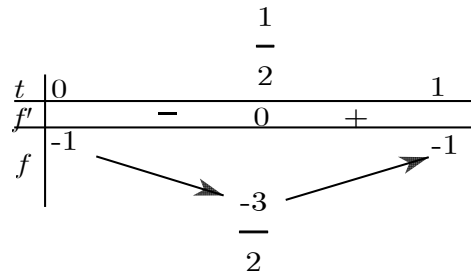
Lời giải

Chọn đáp án B.

Phương trình đã cho tương đương: $1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin x + m = 0$.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in [0; \pi]$ thì $t \in [0; 1]$. Phương trình trở thành: $m = 2t^2 - 2t - 1$ (1).

Xét $f(t) = 2t^2 - 2t - 1$ trên đoạn $[0; 1]$



Phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm $x \in [0; \pi]$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 1]$. Dựa vào bảng biến thiên ta có $-\frac{3}{2} < m < -1$.

Câu 18. (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

A. $m \leq \frac{47}{64}$ hoặc $m \geq \frac{3}{2}$.

B. $\frac{47}{64} < m < \frac{3}{2}$.

C. $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$

D. $\frac{47}{64} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 4x = m$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4} + \cos^2 4x = m$$

Đặt $t = \cos 4x$, $t \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành $\frac{3}{4} + \frac{t}{4} + t^2 = m$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{3}{4} + \frac{t}{4} + t^2, t \in [-1; 1]$.

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$$

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{47}{64}, f(-1) = \frac{3}{2}, f(1) = 2.$$

Phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 1]$.

$$\Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$ có bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?

A. 3

B. 5

C. 7

D. 1

Lời giải

Chọn đáp án D.

$$\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1 \quad (1) \Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 + m) = 0$$

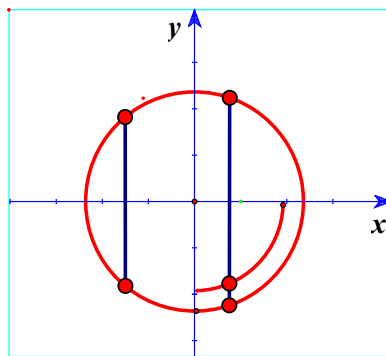
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 + m = 0 \end{cases}$$

$$\square \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{Do } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \text{ nên } x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\square \quad 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 + m = 0 \quad (2)$$

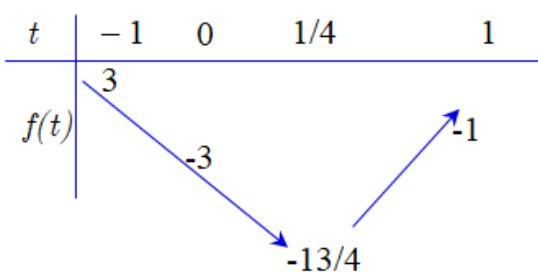
Phương trình (1) có có bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ khi phương trình (2) có có năm nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.



Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$ trong đó $t = \cos x$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 4t^2 - 2t - 3 = -m$

Xét $f(t) = 4t^2 - 2t - 3, t \in [-1; 1]$



Khi đó $-3 < -m < -1 \Leftrightarrow 1 < m < 3$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?

A. 3.

B. 4.

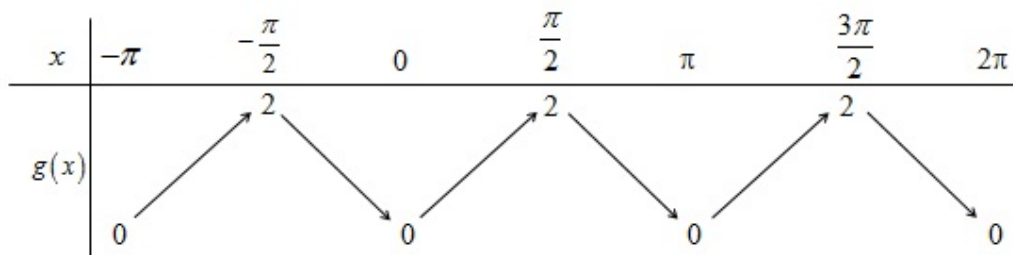
C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn đáp án C.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = 2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$



Phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in (0; 2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$t \in (0; 2) \text{ khi và chỉ khi } -\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-1)x^3 + 2mx^2 - x + 3m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

- A. $m < 0$. **B.** $0 < m < \frac{1}{3}$ C. $m > 0$. **D.** $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Pt} \Leftrightarrow m = \frac{x^3 + x}{x^3 + 2x^2 + 3}.$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 + 2x^2 + 3} \text{ có } f'(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 3}{(x^3 + 2x^2 + 3)^2} > 0, \forall x \in (0;1)$$

nên để pt đã cho có nghiệm thì $f(0) < m < f(1)$ hay $0 < m < \frac{1}{3}$.

Câu 2. Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

- A. $-6 \leq m \leq \frac{3}{4}$. B. $-1 \leq m \leq \frac{14}{25}$. C. $m \leq \frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \frac{x^3 + x(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = m(*).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x^3 + x(x+1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{TXĐ: } \mathbb{D} = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-(x-1)(x+3)^3}{(x^2 + 1)^3}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Lập bbt khảo sát hàm số trên $\mathbb{R}$

Từ bảng biến thiên, suy ra để phương trình (*) có nghiệm thực thì

$$-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}.$$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $m \in \left(-1; \frac{-5}{6}\right)$.

B. $m \in (-3; -1)$.

C. $m \in (-3; 1)$.

D. $m \in (-4; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ pt trở thành $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (2)$

$$g(t) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$$

Để pt (1) có 4 nghiệm phân biệt thì pt (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\text{Hay } \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ (2m-3)^2 - (m+1)(6m+5) > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} > 0 \\ \frac{2m-3}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \frac{-23-\sqrt{561}}{4} < m < \frac{-23+\sqrt{561}}{4} \\ m < -1 \vee m > -\frac{5}{6} \\ m < -1 \vee m > \frac{3}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 1 < 0 \\ t_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6m+5}{m+1} - \frac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3m+12}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -1$$

Kết hợp với (*) ta có $m \in (-4; -1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ pt trở thành $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (2)$.

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6} \quad (\text{biểu thức } t^2 - 4t + 6 \neq 0, \forall t).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}, \text{ với } t \in (0; +\infty).$$

Ta có $f(t)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và có

$$f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 - \sqrt{561}}{10} < 0 \\ t = \frac{1 + \sqrt{561}}{10} > 1 \end{cases} \quad \text{Bảng biến thiên}$$

t	0	1	$\frac{1 + \sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$-\frac{5}{6}$	-4	-1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(t) = \frac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$ tại hai giao điểm có hoành độ thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Câu 4. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x - 4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ tại bốn điểm phân biệt?

A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn B.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = m(x - 4) \Rightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)} = m \quad (1), \quad (x \neq 4).$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)}$ và

$y = m$.

Ta có:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9)(x - 4) + 2x(x^2 - 1)(x - 4) - (x^2 - 9)(x^2 - 1)}{(x - 4)^2} = \frac{3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9}{(x - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9 = 0$$

Giải phương trình bằng MTBT ta được 4 nghiệm $\begin{cases} x_1 \approx -2,169 \\ x_2 \approx 0,114 \\ x_3 \approx 2,45 \\ x_4 \approx 4,94 \end{cases}$. Các nghiệm này đã được lưu

chính xác ở trong bộ nhớ của MTBT.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+	0	-
$f(x)$			2,58		9,67		
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			-2,28		$-\infty$	383,5	$+\infty$

Từ BBT và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 5. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1-903-2018) Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2+1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

- A. $-6 \leq m \leq \frac{3}{4}$. B. $-1 \leq m \leq \frac{14}{25}$. C. $m \leq \frac{4}{3}$. D. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình đã cho tương đương $\frac{x^3 + x(x+1)}{(x^2+1)^2} = m(*)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

TXĐ: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \frac{-(x-1)(x+3)}{(x^2+1)^3}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$

Từ bảng biến thiên, suy ra để phương trình đã cho có nghiệm thực thì

$$-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}.$$

Câu 6. Phương trình $|x^2 - 2x|(|x| - 1) = m$ (với m là tham số thực) có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f(x) = |x^2 - 2x|(|x| - 1) = \begin{cases} (x^2 - 2x)(x - 1), & x \geq 2 \\ -(x^2 - 2x)(x - 1), & 0 \leq x < 2 \\ (x^2 - 2x)(-x - 1), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x, & x \geq 2 \\ -x^3 + 3x^2 - 2x, & 0 \leq x < 2 \\ -x^3 + x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2, & x \geq 2 \\ -3x^2 + 6x - 2, & 0 \leq x < 2 \\ -3x^2 + 2x + 2, & x < 0 \end{cases}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{7}}{3}$	0	$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$	$\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{20 - 14\sqrt{7}}{27}$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|2|x| - 6| = m||x| - 1|$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

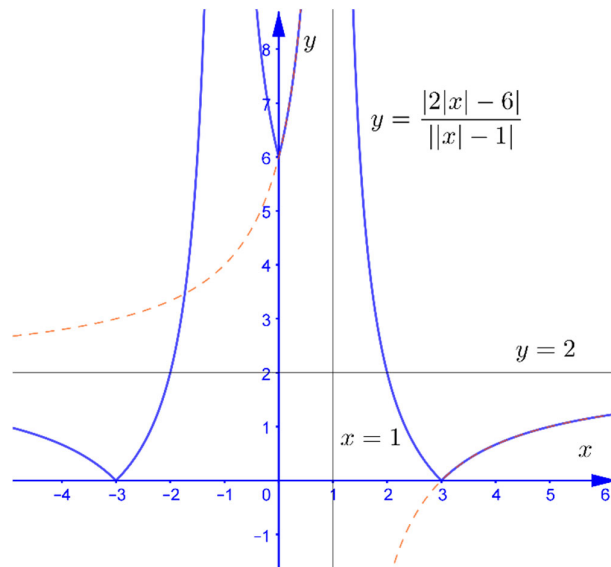
B. $m \in (0; 1) \cup (6; +\infty)$.

C. $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$.

D. $m \in (0; 3) \cup (5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

**Cách 1:**

Ta có $|2|x| - 6| = m||x| - 1| \Rightarrow \left| \frac{2|x| - 6}{|x| - 1} \right| = m$. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì đường

thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2|x| - 6}{|x| - 1} \right|$ tại 4 điểm phân biệt.

Vẽ đồ thị hàm số ta dựa vào đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 6}{x - 1}$.

+ Trước hết vẽ đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2x - 6}{x - 1} \right|$ bằng cách từ đồ thị $y = \frac{2x - 6}{x - 1}$ bỏ phần phía dưới trục hoành, lấy đối xứng phần bị bỏ qua trục hoành.

+ Vẽ đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2|x| - 6}{|x| - 1} \right|$ bằng cách từ đồ thị $y = \left| \frac{2x - 6}{x - 1} \right|$ ta lấy đối xứng qua trục tung.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2|x| - 6}{|x| - 1} \right|$ trong hình vẽ ta thấy để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm

số $y = \left| \frac{2|x| - 6}{|x| - 1} \right|$ tại 4 điểm phân biệt thì $m > 6$ hoặc $0 < m < 2$.

Vậy $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$.

Cách 2:

Đặt $t = |x| \geq 0$ ta có pt: $|2t - 6| = m|t - 1| \Leftrightarrow m = \left| \frac{2t - 6}{t - 1} \right|, t \geq 0$ và $t \neq 1$.

Nhận xét:

Ứng với mỗi $t = 0 \rightarrow$ có 1 nghiệm x

Ứng với mỗi $t > 0 \rightarrow$ có 2 nghiệm x

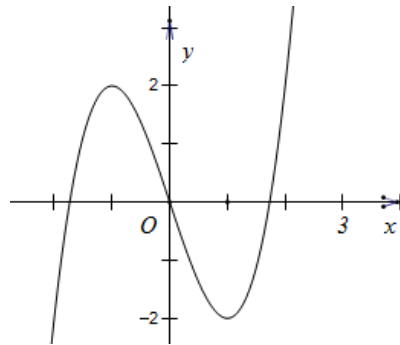
Do đó để pt ban đầu có 4 nghiệm ta cần tìm m để pt(*) có 2 nghiệm phân biệt $t \geq 0$ và $t \neq 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2t-6}{t-1}$ với $t \geq 0$ và $t \neq 1$ sau đó biến đổi để được đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2t-6}{t-1} \right|$

(Vẽ cho em nhé đại ca)

Nhìn vào đồ thị ta thấy các giá trị m thỏa mãn ycbt là: $\begin{cases} m > 6 \\ 0 < m < 2 \end{cases}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $|x^3 - 3x| = m^2 + m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:



A. $-1 < m < 0$.

B. $m > 0$.

C. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

D. $-2 < m < -1$ hoặc $0 < m < 1$.

Lời giải

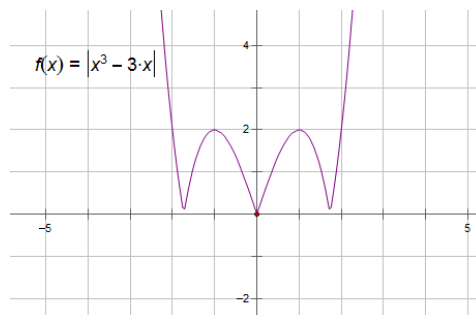
Chọn D

Phương trình $|x^3 - 3x| = m^2 + m$ chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x|$ (C') với đường thẳng $y = m^2 + m$ (d).

Đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x|$ (C') được suy ra từ đồ thị $y = x^3 - 3x$ (C) bằng cách:

☐ Giữ lại phần (C) nằm trên trục Ox .

☐ Lấy đối xứng phần (C) nằm dưới Ox qua trục Ox .



Dựa vào hình vẽ ta suy ra phương trình $|x^3 - 3x| = m^2 + m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m^2 + m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < -1$ hoặc $0 < m < 1$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

- A. $m = 2$. B. $m \in (-1; 3)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Phương trình tương đương $x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2$. Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $d: y = m^3 - 3m^2$ có ba điểm chung với đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Ta có $f(-1) = 4$ và $f(3) = 0$. Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < m^3 - 3m^2 < 0 \Leftrightarrow -4 < f(m) < 0$. Dựa vào bảng biến thiên ta được: $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

$$x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow (x - m)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 0 \\ g(x) = x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m = 0 (*) \end{cases}$$

Để hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì cần tìm m để pt(*) có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 6m + 9 > 0 \\ g(m) = 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0, m \neq 2 \end{cases}$$

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4-x^2} = \frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 10.

B. 6.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x + \sqrt{4-x^2} = \frac{m}{2}$ (*) điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2; 2]$.

Có $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in [-2; 2] \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên $[-2; 2]$; có đạo hàm trên $(-2; 2)$.

$f(-2) = -2$; $f(2) = 2$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Suy ra $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2$; $\max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq \frac{m}{2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4\sqrt{2}$.

Mặt khác m nguyên âm nên $S = \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

A. $m \leq 3$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 3$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có $2\sqrt{x+1} = x + m \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - x = m$ (*).

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = 2\sqrt{x+1} - x$ (C) và $y = m$.

Xét hàm số $y = \sqrt{x+1} - x$ với $x \geq -1$ ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập bảng biến thiên

x	-1	0	$+\infty$
y'		0	-
y''		2	

$\nearrow$ 1 $\searrow$ $-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $2\sqrt{x+1} = x+m$ có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 12. Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi m thuộc $[a; b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là

A. $T = 3\sqrt{2} + 2$.

B. $T = 6$.

C. $T = 8$.

D. $T = 0$.

Lời giải

Chọn BĐiều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}.$$

$$\text{Phương trình đã cho thành } t - \frac{t^2-4}{2} = m.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$, với $x \in [-2; 2]$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2+x}}; \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ 2-x = 2+x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và $f(-2) = 2$; $f(2) = 2$; $f(0) = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \min_{[-2; 2]} f(x) = 2 \text{ và } \max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}].$$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{t^2-4}{2}$, với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$ ta có $f'(t) = 1-t < 0$, $\forall t \in (2; 2\sqrt{2})$.

Bảng biến thiên:

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	2	$2\sqrt{2}-2$

$\searrow$ $y = m$

YCBT $\Leftrightarrow$ trên $[-2; 2]$ đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2 \leq m \leq 2$.

Khi đó $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} - 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = (a+2)\sqrt{2} + b = 6.$

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} = m$ có nghiệm thực?

A. 13.

B. 12.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \in [-1; 8]$.

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} (1) \Rightarrow t' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$

Mà $t(-1) = t(8) = 3; t\left(\frac{7}{2}\right) = 3\sqrt{2} \Rightarrow t \in [3; 3\sqrt{2}].$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt{8+7x-x^2} = \frac{t^2-9}{2}.$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t + \frac{t^2-9}{2} = m(2); t \in [3; 3\sqrt{2}].$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\min_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t); \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) \right]$ với $f(t) = t + \frac{t^2-9}{2}.$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{t^2-9}{2}$ trên $[3; 3\sqrt{2}].$ Ta có: $f'(t) = 1+t > 0; \forall t \in [3; 3\sqrt{2}].$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3 \\ \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + \frac{9}{2} \end{cases}$

Suy ra $m \in \left[3; 3\sqrt{2} + \frac{9}{2} \right]$ mà $m \in \mathbb{Z}.$

Vậy $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ hay có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})^3 - 6\sqrt{16-x^2} + 2m+1 = 0.$

A. $m \in \mathbb{R}.$

B. $m > \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}.$

C. $-\frac{41}{2} \leq m \leq \frac{-1-16\sqrt{2}}{2}.$

D. $m < -\frac{41}{2}.$

Lời giải

Chọn C

ĐK $x \in [-4; 4]$. Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$, ta có $t \in [2\sqrt{2}; 4]$.

Ta có $t^2 = 2\sqrt{16-x^2} + 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{16-x^2} = t^2 - 8$.

Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 3(t^2 - 8) + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2m = -t^3 + 3t^2 - 25$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t^2 - 25 \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 6t$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 6t < 0, \forall t \in [2\sqrt{2}; 4]$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(4) \leq 2m \leq f(2\sqrt{2}) \Leftrightarrow -41 \leq 2m \leq -1 - 16\sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{41}{2} \leq m \leq \frac{-1 - 16\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 15. (TH TUỔI TRẺ SỐ 6-2018) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

B. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải**Chọn D.**

$$x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

Đặt $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}}, f'(x) = \frac{1 - 2x}{(2x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có BBT

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x + 1 = 3m\sqrt{2x^2 + 1}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

B. $-\frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $m > \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có: $x+1=3m\sqrt{2x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}=3m \quad (1).$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}-\frac{2x^2+2x}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1}=\frac{1-2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 3m < \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 17. Tất cả giá trị của m để phương trình $mx-\sqrt{x-3}=m+1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m < \frac{1+\sqrt{3}}{4}$. **B.** $m > 0$. **C.** $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2} \leq m < \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình $mx-\sqrt{x-3}=m+1 \quad (1)$ xác định với $x \in [3; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow m(x-1)=\sqrt{x-3}+1 \text{ với } x \in [3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{x-3}+1}{x-1} \text{ với } x \in [3; +\infty)$$

Xét hàm số $y=f(x)=\frac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$ với $x \in [3; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{5-x-2\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}(x-1)^2} \text{ với } x \in (3; +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ 4(x-3) = (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 14x + 37 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ \begin{cases} x = 7 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 7 - 2\sqrt{3} \\ x = 7 + 2\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

x	3	$7 - 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	0

Dựa vào đồ thị ta thấy với $\frac{1}{2} \leq m < \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số

$y = f(x) = \frac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Câu 18. Cho phương trình $x^2 + 7 + m\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2)$. Biết tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm là $(-a; b)$. Tính $P = b + a$.

A. $\frac{-26}{3}$.

B. $\frac{13}{6}$.

C. $\frac{13}{3}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 7 + m\sqrt{x^2 + x + 1} &= \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2) \\ \Leftrightarrow x^2 + 7 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1} &= m(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2). \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow x^2 + 7 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1} = \frac{t^2}{2} + 6$.

Ta có: $t' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) - (\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$t' = \frac{2(x^2 - 1 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

$$\text{Vi} \begin{cases} x^2 < \sqrt{x^4 + x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \\ (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})\sqrt{x^4 + x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow t' < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 1.$$

$$\text{và} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -1$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
t'	-	
t	1	-1

Từ bảng biến thiên suy ra $t \in (-1; 1)$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + 12 = m(2t - 4) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 12}{2t - 4} = f(t) \text{ (do } t \in (-1; 1)).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2t^2 - 8t - 24}{(2t - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \notin (-1; 1) \\ t = 6 \notin (-1; 1) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	-1	1
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{13}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}$.

$$\text{Suy ra } m \in \left(-\frac{13}{2}; -\frac{13}{6}\right) \Rightarrow a = \frac{13}{2}; b = -\frac{13}{6}. \text{ Do đó } P = b + a = \frac{13}{3}.$$

Câu 19. Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3} + (2m-1)\sqrt{1-x} + m = 1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Giá trị của biểu thức $5a + 3b$ bằng

A. 13.

B. 7.

C. 19.

D. 8.**Lời giải****Chọn D****Cách 1:**Tập xác định : $D = [-3; 1]$.Từ phương trình suy ra : $m = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$.Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$ trên đoạn $[-3; 1]$.Ta có : $g'(x) = \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)}{(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1)^2} > 0, \forall x \in [-3; 1]$.Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $[-3; 1]$.Do đó, $\min_{[-3; 1]} g(x) = \frac{3}{5}; \max_{[-3; 1]} g(x) = \frac{5}{3}$.Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3} \right]$.Vậy $5a + 3b = 8$. Đáp án D**Cách 2:**Tập xác định : $D = [-3; 1]$.Từ phương trình suy ra : $m = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$.Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$ trên đoạn $[-3; 1]$.Dùng máy tính ta dự đoán $\frac{3}{5} \leq g(x) \leq \frac{5}{3}$.Ta chứng minh: $\frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1} \geq \frac{3}{5}$. (1)Ta có: (1) $\Leftrightarrow 10\sqrt{x+3} + 5\sqrt{1-x} + 5 \geq 3\sqrt{x+3} + 6\sqrt{1-x} + 3$ $\Leftrightarrow 7\sqrt{x+3} + 2 - \sqrt{1-x} \geq 0$.Xét trên đoạn $[-3; 1]$ thì $7\sqrt{x+3} \geq 0; 2 - \sqrt{1-x} \geq 0$. Suy ra (1) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = -3$.

Ta lại chứng minh: $\frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1} \leq \frac{5}{3}$. (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 3 \leq 5\sqrt{x+3} + 10\sqrt{1-x} + 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \leq 7\sqrt{1-x} + 2$.

Xét trên đoạn $[-3;1]$ thì $\sqrt{x+3} \leq 2$; $7\sqrt{1-x} + 2 \geq 2$. Suy ra (2) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Do đó, $\frac{3}{5} \leq m \leq \frac{5}{3}$.

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right]$.

Vậy $5a + 3b = 8$. Đáp án D

Câu 20. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của $S = a + b$.

A. $S = \frac{13}{3}$.

B. $S = 5$.

C. $S = 3$.

D. $S = \frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số: $D = [-2;2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ và trục hoành là

$x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7 = 0 \Leftrightarrow m(\sqrt{4-x^2} + 1) = 7 - x^2 \Leftrightarrow m = \frac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2} + 1}$ (1).

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$, $t \in [0;2]$, phương trình (1) trở thành $m = \frac{t^2+3}{t+1}$ (2).

Đồ thị hàm số đã cho có điểm chung với trục hoành khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;2]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+3}{t+1}$ với $t \in [0;2]$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2+2t-3}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0;2) \\ t = -3 \notin (0;2) \end{cases}$.

$$f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Do đó } \min_{[0;2]} f(t) = 2 \text{ và } \max_{[0;2]} f(t) = 3.$$

Bởi vậy, phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;2]$ khi và chỉ khi

$$\min_{[0;2]} f(t) \leq m \leq \max_{[0;2]} f(t) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3.$$

Từ đó suy ra $a = 2$, $b = 3$, nên $S = 2 + 3 = 5$.

Câu 21. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x - 1)(\cos^2 x - \cos x + m) = 0$ có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

A. $0 \leq m < \frac{1}{4}$.

B. $-\frac{1}{4} < m \leq 0$.

C. $0 < m < \frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{4} < m < 0$

Lời giải

Chọn đáp án A.

Ta có:
$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos^2 x - \cos x + m = 0 (*) \end{cases}$$

Vì $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ có 1 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$ nên ycbt trở thành: tìm m để (*) có 4 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$ và khác $\frac{\pi}{2}$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = -m$. Đặt $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$) và xét $f(t) = t^2 - t$ trên $[-1; 1]$

$$f'(t) = 2t - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(t) = t^2 - t$ tại 2 điểm thuộc $[-1; 1]$ và $t \neq 0$

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
f'		- 0 +	
f	2		0
		$-\frac{1}{4}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$ là các giá trị m cần tìm.

Câu 22. Gọi K là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$. Hỏi K là tập con của tập hợp nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. B. $(1 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$. C. $\left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Đặt $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Suy ra $t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow t^2 + t - 3 = m$

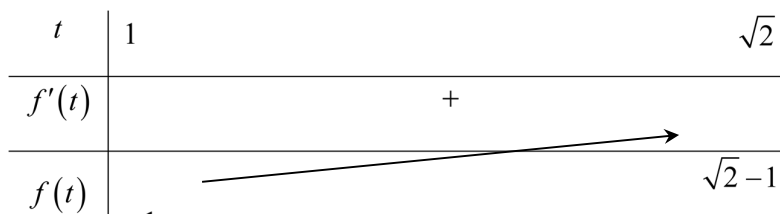
Xét hàm số $y = f(t) = t^2 + t - 3$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$f'(t) = 2t + 1$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $t^2 + t - 3 = m$ có đúng một nghiệm $t \in (1; \sqrt{2})$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $K = (-1; \sqrt{2} - 1) \subset \left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Cách 2 :

Xét hàm số $f(x) = \sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ với $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Ta có $f'(x) = 2 \cos 2x + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, vậy

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x - \sin x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ 2(\cos x + \sin x) + 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vì trong khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ thì $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$. Lập bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	-1	$\sqrt{2}-1$	-3	

Vậy để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ thì

$$m \in (-1; \sqrt{2}-1) \subset \left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Cách 3:

Đặt $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$; với $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}]$.

Khi đó: $\sin 2x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t - 3 = m$. (2)

Lưu ý rằng: mỗi nghiệm $t \in (1; \sqrt{2})$ của phương trình (2) cho ta 2 nghiệm $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ của

phương trình (1) và với $\begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t \in (0; 1) \end{cases}$ chỉ cho ta một nghiệm $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ của phương trình (1). Số

nghiệm phương trình (2) bằng số giao điểm của (P): $y = t^2 + t - 3$ và đường thẳng $y = m$.

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra yêu cầu bài toán là $-1 < m < -1 + \sqrt{2}$.

Vậy $K = (-1; -1 + \sqrt{2}) \subset \left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 23. Với giá trị nào của m thì phương trình $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3m$ có nghiệm.

- A. $-\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}$. B. $-\frac{4}{3} \leq m \leq 1$. C. $0 \leq m \leq \frac{5}{3}$. D. $-\frac{4}{3} \leq m < \frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn đáp án D.

Ta có $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3m \Leftrightarrow 5 - 4(1 - \cos^2 x) - 4(1 + \cos x) = 3m$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 - 3m = 0 \quad (1).$

Đặt $t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 3 = 3m \quad (2).$

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 4t - 3, f'(t) = 8t - 4$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y'		$-$	$+$
y	$+5$	-4	-3

Khi đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[-1; 1] \Leftrightarrow -4 \leq 3m \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}$.

Câu 24. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 2017.

B. 2018.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. (1)

Chia cả hai vế của phương trình (1) cho $\cos x$ ta được

$$3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2) = m(\tan x + 3) \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2)}{\tan x + 3}. \quad (2)$$

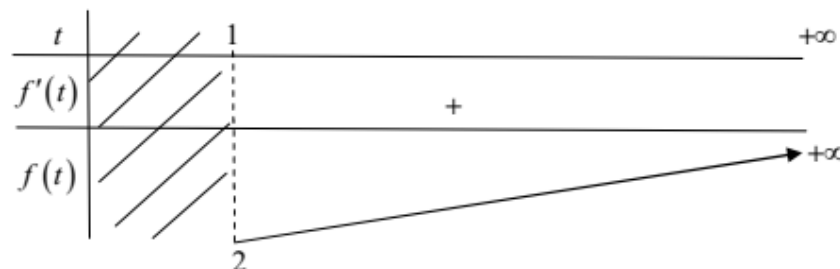
Đặt $t = \sqrt{\tan x + 1}$, do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (1; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } m = \frac{3t^3 + 3t}{t^2 + 2}. \quad (3)$$

Nhận xét: Với mỗi một giá trị $t \in (1; +\infty)$ từ cách đặt $t = \sqrt{\tan x + 1}$ cho ta đúng một giá trị $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình (3) có đúng một nghiệm $t \in (1; +\infty)$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{3t^3 + 3t}{t^2 + 2}, t \in (1; +\infty). \text{ Ta có } f'(t) = \frac{3t^4 + 15t^2 + 6}{(t^2 + 2)^2} > 0, \forall t \in (1; +\infty).$$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (3) có đúng một nghiệm $t \in (1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m > 2$. Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [0; 2019]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin 4x = m \tan x$ có nghiệm $x \neq k\pi$.

A. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 4$.

B. $-1 < m < 4$.

C. $-\frac{1}{2} < m < 4$.

D. $-\frac{1}{2} \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \neq k\pi$ nên phương trình $\sin 4x = m \cdot \tan x \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x \cos 2x = m \frac{\sin x}{\cos x}$

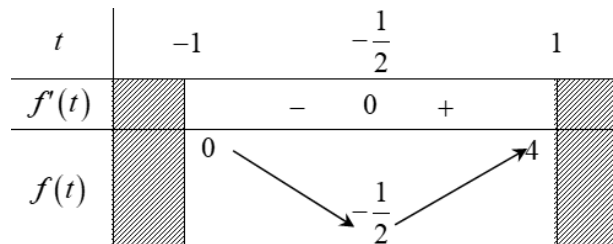
$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 x \cdot \cos 2x - m = 0 \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x) \cos 2x - m = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + 2 \cos 2x = m \quad (1)$$

Đặt $f(t) = 2t^2 + 2t$ với $t = \cos 2x, t \in (-1; 1)$.

(Do $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq k\pi$ nên $2x \neq k\pi$, suy ra $t \neq \pm 1$)

Khi đó $f'(t) = 4t + 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in (-1; 1)$



Phương trình (1) có nghiệm $x \neq k\pi$ khi $-\frac{1}{2} \leq m < 4$.

BÀI 35. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình $\begin{cases} F(x;m) > 0; F(x;m) \geq 0 \\ F(x;m) < 0; F(x;m) \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm trên D .

Phương pháp:

Bước 1:

.....

Bước 2:

.....

Bước 3:

.....

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D

▶

.....

▶

▶

▶

B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.
- Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- A. $m \leq 3$. B. $m \leq -3$. C. $m \geq 3$. D. $m \geq -3$.
- Câu 3.** Tìm tất cả các GT của tham số m để hàm số $y = -x^4 - 4x^3 + mx^2 - 2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- A. $m \leq \frac{9}{4}$. B. $m \leq -\frac{9}{2}$. C. $m \geq -\frac{9}{2}$. D. $m \leq -\frac{9}{4}$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + mx + \frac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- A. $m \leq 5$. B. $m \leq -5$. C. $m \geq 5$. D. $m \geq -5$.
- Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}(3-m)x^2 + (3-m)x + 1$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
- A. $m \leq 3$. B. $m \leq -3$. C. $m \geq 4$. D. $m \geq -3$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{3x}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- A. $m \leq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq -1$. D. $m \geq -2$.
- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - mx + 4\sqrt{x}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x + 3 \geq m\sqrt{x^2 + 1}$ có nghiệm trên $(0; +\infty)$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} \geq m$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \geq m$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên miền $(0; +\infty)$ khi giá trị của m thỏa mãn:
A. $m \geq 12$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \leq 12$. **D.** $m > 12$.
- Câu 2.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng
A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2
- Câu 3.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ là
A. $(-\infty; 1]$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 4.** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
A. $1 < m < 2$. **B.** $m < 1, m > 2$. **C.** $1 \leq m \leq 2$. **D.** $m \leq 1, m \geq 2$.
- Câu 5.** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m-3)x^2 - 72mx + 12m^2$ nghịch biến trên $[-2;4]$ là
A. $[2;5]$. **B.** $[2; +\infty)$. **C.** $[1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 3]$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
A. $m \leq -\frac{1}{4}$. **B.** $m \geq \frac{1}{4}$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \geq 0$.
- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + x^2 - mx + 2m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.
A. $m \leq -\frac{1}{6}$. **B.** $m \geq -\frac{1}{6}$. **C.** $m \leq 8$. **D.** $m \geq 8$.
- Câu 8.** Điều kiện của tham số m để hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6mx - 1$ nghịch biến trên $(0;2)$ là
A. $m \leq -6$. **B.** $m < -6$. **C.** $m \geq \frac{1}{4}$. **D.** $-6 \leq m \leq \frac{1}{4}$.
- Câu 9.** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-50;50]$ sao cho bất phương trình $mx^4 - 4x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
A. 1272. **B.** 1. **C.** 1275. **D.** 0.
- Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
A. $m \in (-\infty; -5)$. **B.** $m \in (2; +\infty)$. **C.** $m \in [-5; 2)$. **D.** $m \in (-\infty; 2]$.
- Câu 11.** Bất phương trình $\frac{x-1}{x+1} \geq m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi
A. $m \leq \frac{1}{3}$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \geq \frac{1}{3}$.

- Câu 12.** Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \frac{1}{x^3} + 2x^3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là
- A. $[-9; +\infty)$. B. $(-\infty; -9)$. C. $(-9; +\infty)$. D. $(-\infty; -9]$.
- Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- A. $m \leq 0$. B. $m \leq -3$. C. $m > 0$. D. $m > -3$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\sin^2 x + 6(2m-1)\sin x + 2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016; 2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?
- A. 2019. B. 2017. C. 2021. D. 2018.
- Câu 15.** Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là
- A. $(-\infty; 12)$. B. $(-\infty; -1]$. C. $(-\infty; 0]$. D. $(-1; 16]$.
- Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x+3 \geq m\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm trên $(0; +\infty)$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 17.** Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$.
- A. 4. B. 5. C. 8. D. 10.
- Câu 18.** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- A. $[1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1]$. C. $[-1; 1]$. D. $(-\infty; 1)$.
- Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0$?
- A. $m \leq -\frac{4}{7}$. B. $m \geq -\frac{4}{7}$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.
- Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $(x^2-1)(x-1)x^3 + (x^2-x)^2(2-m) + (x^2-1)(x-1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- A. $m \leq 2$. B. $m \leq -\frac{1}{4}$. C. $m \leq 1$. D. $m \leq 6$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. $[3; +\infty)$. B. $[48; +\infty)$. C. $[36; +\infty)$. D. $[12; +\infty)$.
- Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (6m+5)x - 1$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ đồng biến trên $(0; +\infty)$?
- A. $m \leq -\frac{5}{4}$. B. $m \leq \frac{5}{4}$. C. $m \geq -\frac{5}{4}$. D. $m \geq \frac{5}{4}$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.
- A. $m \leq 3$. B. $m < 3$.
C. $m \geq 3$. D. $m \neq 3$.
- Câu 5.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:
- A. $(-\infty; 3]$. B. $[3; 6]$. C. $(-\infty; 6]$. D. $(-\infty; 3)$.
- Câu 6.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là
- A. $m > 4$. B. $m \geq 4$.
C. $m \leq -8$. D. $m < 8$.
- Câu 7.** Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ thì m thuộc tập nào sau đây:
- A. $m \in \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}; +\infty\right)$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.
C. $m \in (-\infty; -1)$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)$.
- Câu 8.** (Chuyên Thái Nguyên - 2018 - BTN) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($m \in [-2018; 2018]$) để hàm số $y = x^2(m-x) - m$ đồng biến trên $(1; 2)$?
- A. 2020. B. 2016.
C. 2018. D. 2014.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m nhỏ hơn 2020 để hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10 \text{ đồng biến trên khoảng } (0;3).$$

- A. 2020. B. 2018. C. 2019. D. Vô số.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx - 2019$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. $m \leq -1$. B. $m < -1$. C. $m > -1$. D. $m \leq 1$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. B. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 - x + m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

- A. $[-1; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right]$. C. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 13. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m > -1$. B. $m \leq -1$. C. $m \leq 1$. D. $m < 1$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên $(1;2)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left[-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 9.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = -x^3 - mx + \frac{3}{28x^7}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 0.

Câu 17. Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$m(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| - 2018.$$

- A. $-\frac{1}{3}$. B. -2018. C. $-\frac{2017}{2}$. D. -2017.

Câu 18. Hàm số $y = 2mx + \sin x$ đồng biến trên tập số thực khi và chỉ khi giá trị của m là

- A. $m \geq -\frac{1}{2}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \geq \frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. B. $m \geq \sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. D. $m \leq -\sqrt{2}$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2\sin x - 3\cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \in (-\infty; -\sqrt{13}]$. B. $m \in (-\infty; \sqrt{13}]$. C. $m \in [\sqrt{13}; +\infty)$. D. $m \in [-\sqrt{13}; +\infty)$.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$?

- A. 3. B. 2. C. vô số. D. 5.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. 2028. B. 2018. C. 2020. D. 2019.

Câu 24. Tìm m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $m \leq 2$. B. $m \leq \frac{5}{4}$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 1$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số

$$y = \frac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m} \text{ nghịch biến trên } \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

- A. 0. B. 2020. C. 2019. D. 2018.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x - 4.6^x + (m+1)4^x \leq 0$ có nghiệm?

- A. vô số. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 27. Cho bất phương trình $8^x - 3.2^{2x+1} + 9.2^x + m - 5 > 0$ (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$?

- A. Vô số. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

- A. $m < \sqrt{2}$. B. $m < 0$.
C. $m = \sqrt{2}$. D. $m \geq \sqrt{2}$.

Câu 29. Tìm m để bất phương trình $x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} > m + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})$ có nghiệm?

- A. $m < -8$. B. $m < -1 - 4\sqrt{3}$.
C. $m < -7$. D. $-8 < m < -7$.

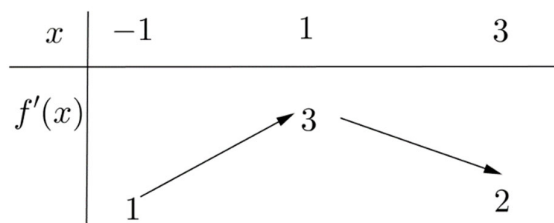
Câu 30. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1 \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-3; 6].$$

- A. 28. B. 20.
C. 4. D. 19.

Nhận xét: Trên tinh thần thi trắc nghiệm, học sinh hoàn toàn có thể sử dụng tính năng TABLE của máy tính cầm tay để tìm $\max_{[-3;6]} f(x) = 3$ với $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$. Từ đó đưa bài toán về dạng giải bất phương trình bậc hai cơ bản: $m^2 - m + 1 \geq 3$ một cách dễ dàng.

Câu 31. Cho $f(x)$ mà hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$ là



- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$.
C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình $y = f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ có nghiệm?

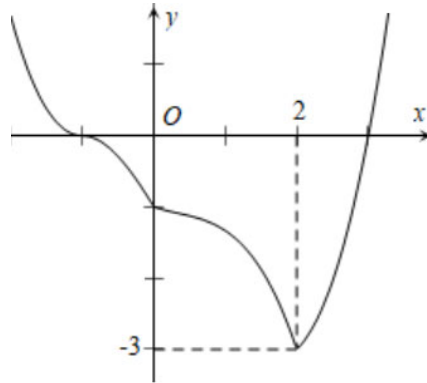
A. $m \geq 0$.

B. $m \geq 4$.

C. 1.

D. $m \geq -2$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2.f(x) + x^2 > 4x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

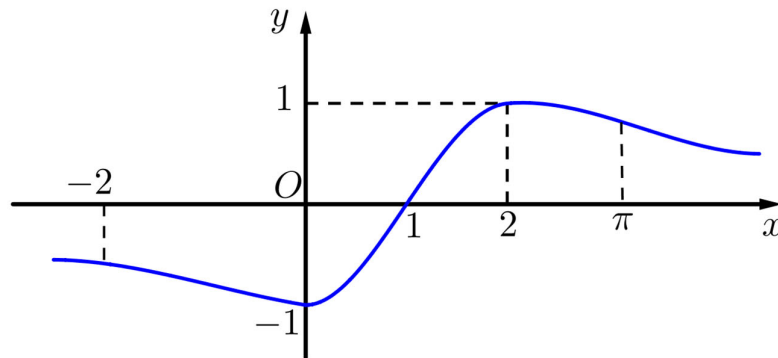
A. $m < -3$.

B. $m < -10$.

C. $m < -2$.

D. $m < 5$.

Câu 34. Bất phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq 7$. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

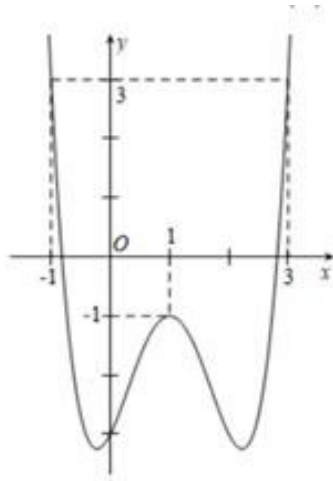
A. $m < f(0)$.

B. $m < f(1) - 1$.

C. $m < f(-1) + 1$.

D. $m < f(2)$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \geq 3f(3)$. **B.** $m > 3f(3)$. **C.** $m \geq 3f(-1) + 4$. **D.** $m > 3f(-1) + 4$.

BÀI 35. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình
$$\begin{cases} F(x; m) > 0; F(x; m) \geq 0 \\ F(x; m) < 0; F(x; m) \leq 0 \end{cases} \text{ có nghiệm trên } D.$$

Phương pháp:

Bước 1: Cô lập tham số m và đưa về dạng $A(m) > f(x)$ hoặc $A(m) \geq f(x)$ hoặc $A(m) < f(x)$ hoặc $A(m) \leq f(x)$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên của hàm số xác định các giá trị của m

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D

- ▶ Bất phương trình $A(m) \geq f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow A(m) \geq \max_D f(x)$
- ▶ Bất phương trình $A(m) \leq f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow A(m) \leq \min_D f(x)$
- ▶ Bất phương trình $A(m) \geq f(x)$ nghiệm đúng trên $D \Leftrightarrow A(m) \geq \min_D f(x)$
- ▶ Bất phương trình $A(m) \leq f(x)$ nghiệm đúng trên $D \Leftrightarrow A(m) \leq \max_D f(x)$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq 3$. B. $m \leq -3$. C. $m \geq 3$. D. $m \geq -3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 - 4x^3 + mx^2 - 2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

- A. $m \leq \frac{9}{4}$. B. $m \leq -\frac{9}{2}$. C. $m \geq -\frac{9}{2}$. D. $m \leq -\frac{9}{4}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + mx + \frac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

- A. $m \leq 5$. B. $m \leq -5$. C. $m \geq 5$. D. $m \geq -5$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}(3-m)x^2 + (3-m)x + 1$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

- A. $m \leq 3$. B. $m \leq -3$. C. $m \geq 4$. D. $m \geq -3$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{3x}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq -1$. D. $m \geq -2$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - mx + 4\sqrt{x}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x + 3 \geq m\sqrt{x^2 + 1}$ có nghiệm trên $(0; +\infty)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} \geq m$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \geq m$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên miền $(0; +\infty)$ khi giá trị của m thỏa mãn:

A. $m \geq 12$

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq 12$.

D. $m > 12$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$. Để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét hàm số: $g(x) = -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = -6x + 12; g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow g(2) = 12$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	12	$-\infty$

Vậy ta có: $m \geq g(x) \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \geq 12$.

Câu 2. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số

$y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5.$$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow \text{hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

$$\text{Do đó } m \leq g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}.$$

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. $(-\infty; 1]$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1 \Rightarrow y' = x^2 - (m+2)x + 2m.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Để hàm số đồng biến trên khoảng } (0;1) \text{ thì } \begin{cases} 0 < 1 \leq m \leq 2 \\ 0 < 1 \leq 2 \leq m \end{cases} \Rightarrow m \geq 1. \text{ Do đó } m \in [1; +\infty).$$

Cách 2:

$$\text{Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow y' = x^2 - (m+2)x + 2m \geq 0 \quad \forall x \in (0;1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-m) \geq 0 \quad \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow x \leq m \quad \forall x \in (0;1).$$

$$\text{Vậy } m \geq 1.$$

Câu 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. $1 < m < 2$.

B. $m < 1, m > 2$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

D. $m \leq 1, m \geq 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 + 6x - (m^2 - 3m + 2)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5 \text{ đồng biến trên khoảng } (0;2)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - (m^2 - 3m + 2) \geq 0, \forall x \in (0;2).$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (0;2).$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq \min_{[0;2]} g(x), \text{ với } g(x) = 3x^2 + 6x.$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $g'(x) = 6x + 6$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin (0;2)$.

Khi đó: $g(0) = 0, g(2) = 24 \Rightarrow \min_{[0;2]} g(x) = 0$.

Vậy: $m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

Câu 5. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m-3)x^2 - 72mx + 12m^2$ nghịch biến trên $[-2;4]$ là

A. $[2;5]$.

B. $[2;+\infty)$.

C. $[1;+\infty)$.

D. $(-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6(2m-3)x - 72m$.

Để hàm số nghịch biến trên $[-2;4] \Leftrightarrow y' \leq 0$ với $\forall x \in [-2;4]$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(2m-3)x - 24m \leq 0 \text{ với } \forall x \in [-2;4].$$

$$\Leftrightarrow m(4x+24) \geq x^2 + 6x \text{ với } \forall x \in [-2;4].$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 6x}{4x + 24} = \frac{x}{4} \text{ với } \forall x \in [-2;4].$$

$$\Rightarrow m \geq 1.$$

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m \leq -\frac{1}{4}$.

B. $m \geq \frac{1}{4}$.

C. $m \geq 2$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1;1)$ hay $m \geq x^2 - x$ với $\forall x \in (-1;1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y'	-	0	+
y	2	$-\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq f(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq 2$.

* Có thể sử dụng $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \leq 0 \\ y'(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \leq 0 \\ 12-6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + x^2 - mx + 2m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m \leq -\frac{1}{6}$.

B. $m \geq -\frac{1}{6}$.

C. $m \leq 8$.

D. $m \geq 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 + 2x - m$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [-1;1]$.

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 2x - m \leq 0, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 6x^2 + 2x \leq m, \forall x \in [-1;1].$$

Xét hàm $g(x) = 6x^2 + 2x$ trên đoạn $[-1;1]$.

$$g'(x) = 12x + 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{1}{6}$	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	4		8

Để $6x^2 + 2x \leq m, \forall x \in [-1;1]$ thì đồ thị của hàm $g(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = m$.

Từ bảng biến thiên ta có $m \geq 8$.

Câu 8. Điều kiện của tham số m để hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6mx - 1$ nghịch biến trên $(0; 2)$ là

- A.** $m \leq -6$. **B.** $m < -6$. **C.** $m \geq \frac{1}{4}$. **D.** $-6 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6mx - 1$ trên $\mathbb{R}$. $f'(x) = 6(x^2 + x + m)$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; 2) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2)$ ($f'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm)
 $\Leftrightarrow x^2 + x \leq -m, \forall x \in (0; 2)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^2 + x$ trên $(0; 2)$

x	0		2
$g'(x)$		+	
$g(x)$		0	6

$g(x) = x^2 + x \leq -m, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 6 \leq -m \Leftrightarrow m \leq -6$.

Câu 9. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-50; 50]$ sao cho bất phương trình

$mx^4 - 4x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A.** 1272 **B.** 1. **C.** 1275. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $mx^4 - 4x + m \geq 0 \Leftrightarrow m(x^4 + 1) \geq 4x \Leftrightarrow m \geq \frac{4x}{x^4 + 1}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $m \geq \min_{x \in \mathbb{R}} \frac{4x}{x^4 + 1}$.

Xét hàm $f(x) = \frac{4x}{x^4 + 1}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 4 \frac{x^4 + 1 - x(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} = 4 \frac{-3x^4 + 1}{(x^4 + 1)^2}$

$= 4 \frac{(\sqrt{3}x^2 + 1)(-\sqrt{3}x^2 + 1)}{(x^4 + 1)^2}$, do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	0		$\frac{3}{\sqrt[4]{3}}$	0

Do đó, $m \geq -\frac{3}{\sqrt[4]{3}} \approx -2,27$, vì m nguyên nên suy ra $m \geq -2$. Do đó, tổng bằng

$$S = (-2) + (-1) + 0 + 1 + \dots + 50 = 1272.$$

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

- A. $m \in (-\infty; -5)$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in [-5; 2)$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0 \quad \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq m \quad \forall x \in (1; 3).$$

Đặt $h(x) = x^2 + 1$ với $x \in (1; 3)$, $h'(x) = 2x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0(l)$.

x	1	2
$h'(x)$		+
$h(x)$	2	10

Vậy $m \leq 2$.

Câu 11. Bất phương trình $\frac{x-1}{x+1} \geq m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq \frac{1}{3}$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 0$. D. $m \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta đặt $y = \frac{x-1}{x+1}$ hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định nên đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Bất phương trình có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi $m \leq \max_{[1; 2]} y = y(2) = \frac{1}{3}$.

Câu 12. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \frac{1}{x^3} + 2x^3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A.** $[-9; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -9)$ **C.** $(-9; +\infty)$ **D.** $(-\infty; -9]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = m + \frac{3}{x^4} + 6x^2$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$m + \frac{3}{x^4} + 6x^2 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \frac{3}{x^4} + 6x^2 \geq -m, \forall x \in (0; +\infty).$$

Đặt $g(x) = \frac{3}{x^4} + 6x^2, \forall x \in (0; +\infty)$. Ta có: $g'(x) = -\frac{12}{x^5} + 12x, \forall x \in (0; +\infty)$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{12}{x^5} + 12x = 0 \Rightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	9	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m \leq 9 \Leftrightarrow m \geq -9$. Chọn A.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A.** $m \leq 0$ **B.** $m \leq -3$ **C.** $m > 0$ **D.** $m > -3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sin x = t, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t - m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$ cần:

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t \geq m \quad \forall t \in [0; 1]$$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t$

$$g'(t) = 6t + 6$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Bảng biến thiên

t	0	1
$g'(t)$		+
$g(t)$	0	9

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 14. Cho hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\sin^2 x + 6(2m-1)\sin x + 2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016; 2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019.

B. 2017.

C. 2021.

D. 2018.

Lời giải

Chọn B

$$y' = [-6\sin^2 x + 6\sin x + 6(2m-1)]\cos x.$$

$$\text{Ta có } \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right): \cos x < 0.$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\Leftrightarrow -6\sin^2 x + 6\sin x + 6(2m-1) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (-1; 1).$$

Điều kiện (1) trở thành tìm m thỏa mãn

$$-6t^2 + 6t + 6(2m-1) \geq 0, \forall t \in (-1; 1) \Leftrightarrow 2m-1 \geq t^2 - t, \forall t \in (-1; 1)$$

Xét hàm số nghịch biến trên khoảng $f(t) = t^2 - t, t \in (-1; 1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	$-\frac{1}{4}$	0

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2m - 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$ mà m thuộc khoảng $(-2016; 2019)$ nên có 2017 giá trị thỏa mãn.

Câu 15. Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $(-1; 16]$.

Lời giải

Chọn B

$$4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0, \forall x \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2(m+1)2^x + m \geq 0, \forall x \geq 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, (t > 0).$$

$$(1) \text{ trở thành } t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0, \forall t \geq 1 \quad (2).$$

$$(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2t}{2t - 1}, \forall t \geq 1 \quad (3).$$

Xét hàm số $y = f(t) = \frac{t^2 - 2t}{2t - 1}$. Ta có hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{(2t-2)(2t-1) - 2(t^2 - 2t)}{(2t-1)^2} = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(1) = -1, \forall t \geq 1$.

$$\text{Do đó } (3) \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; +\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x+3 \geq m\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm trên $(0; +\infty)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x+3 \geq m\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} \geq m$.

Đặt $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x+3)}{x^2+1} = \frac{2-6x}{(x^2+1) \cdot 2\sqrt{x^2+1}}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \max f(x) = \sqrt{10}$ khi $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{10} \geq m$.

m nguyên dương nên $\Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 17. Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$.

A. 4.

B. 5.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$

$\Leftrightarrow 16x - 12\sqrt{1-x^2} + 15 - m[\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}] + 2m \leq 0 \quad (1)$

Đặt $t = \sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}$.

$0 - 3\sqrt{1+1} \leq \sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x} \leq \sqrt{1-(-1)} - 3\sqrt{1-1}$.

Vậy $t \in [-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Khi đó: $t^2 = 8x - 6\sqrt{1-x^2} + 10$.

Vậy YCBT $\Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - mt + 2m - 5 \leq 0, \quad \forall t \in [-3\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})m - 1 \leq 0 \\ f(-3\sqrt{2}) = (2 + 3\sqrt{2})m + 31 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{-31}{2 + 3\sqrt{2}} < -4, 9$.

Vậy $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5\}$.

Câu 18. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $[1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $[-1; 1]$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \geq 0$ hay $m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ta có : $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-1	1

Do đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m \leq -1$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0$?

A. $m \leq -\frac{4}{7}$.

B. $m \geq -\frac{4}{7}$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{-x-2}{x^2 + x + 1}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{-x-2}{x^2 + x + 1}$ với $1 \leq x \leq 2$. Có $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{[1; 2]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình

$$(x^2 - 1)(x - 1)x^3 + (x^2 - x)^2(2 - m) + (x^2 - 1)(x - 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

A. $m \leq 2$

B. $m \leq -\frac{1}{4}$

C. $m \leq 1$

D. $m \leq 6$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(x^2 - 1)(x - 1)x^3 + (x^2 - x)^2(2 - m) + (x^2 - 1)(x - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 1)x^3 + [x(x + 1)]^2(2 - m) + (x - 1)(x + 1)(x - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 1)x^3 + x^2(x - 1)^2(2 - m) + (x - 1)^2(x + 1) \geq 0 \quad (1)$$

+ Nhận xét $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình (1).

+ Khi $x \neq 0, x \neq 1$.

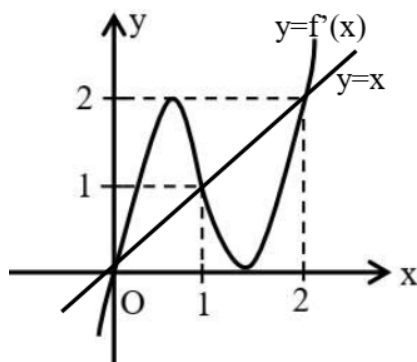
$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)x^3 + x^2(2 - m) + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2 + \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^2}$$

Đặt $t = 2 + \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^2} = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Ta có:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow t \geq 6 \\ x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow t \geq 2 \end{cases}$$

Vậy GTNN của t là $2 \Leftrightarrow x = 1$.

Theo YCBT ta có $\Leftrightarrow m \leq 2$.



Ta có hình vẽ đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x$ như trên.

Do đó ra có bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$	$f(0)$ $\nearrow$ $f(1) - \frac{1}{2}$ $\searrow$ $f(2) - 2$				

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(1) - \frac{1}{2} < m$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $[3; +\infty)$.B. $[48; +\infty)$.C. $[36; +\infty)$.D. $[12; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$.Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $y' = 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.Suy ra $m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty)$.Xét $g(x) = -3x^2 + 12x$ trên $(0; +\infty)$.

$$g'(x) = -6x + 12.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		0	12	$-\infty$

$$\text{Do đó: } \max_{(0; +\infty)} g(x) = 12 \Rightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} g(x) = 12.$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (6m+5)x - 1$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m + 5$.Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m + 5 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 \geq 6m(x-1) \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{6x - 6} = f(x).$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{18x^2 - 36x + 6}{(6x - 6)^2} > 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

BBT

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$

Vậy $m \leq \frac{5}{6}$ nên không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa ycbt.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ đồng biến trên $(0; +\infty)$?

A. $m \leq -\frac{5}{4}$.

B. $m \leq \frac{5}{4}$.

C. $m \geq -\frac{5}{4}$.

D. $m \geq \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $y' = 0$ có nghiệm hữu hạn trong $(0; +\infty)$.

Lúc đó, bài toán trở thành tìm m để $3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ (*).

Cách 1:

sử dụng dấu tam thức.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ \Delta' > 0 \\ \forall x_1, x_2 \notin (0; +\infty) \end{cases}, \text{ với } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình } y' = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)^2 - 3(2-m) \leq 0 \\ (1-2m)^2 - 3(2-m) > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 \leq 0 \\ 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{-2(1-2m)}{3} < 0 \\ \frac{2-m}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq \frac{5}{4} \\ \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases} \\ m < \frac{1}{2} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}.$$

Cách 2:

sử dụng phương pháp đồ thị (cô lập tham số m).

$$(*) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 4mx + 2 - m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m(4x+1) \leq 3x^2 + 2x + 2, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1} = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [0; +\infty)} g(x).$$

Đến đây là chuyển bài toán về dạng tìm GTNN của hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1}, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{12x^2 + 6x - 6}{(4x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; +\infty) \\ x = \frac{1}{2} \in [0; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: $m \leq \frac{5}{4}$.

Tóm lại, chọn đáp án **B**.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. $m \leq 3$.

B. $m < 3$.

C. $m \geq 3$.

D. $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + m$

YCBT $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty)$$

Xét hàm số: $f(x) = -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, f(1) = 3$. Do đó: $m \geq f(x), x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \geq 3$.

Câu 5. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

- A. $(-\infty; 3]$. B. $[3; 6]$. C. $(-\infty; 6]$. D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \forall x \in (0;4)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x+1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0;4) \\ x = -2 \notin (0;4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \forall x \in (0;4)$ thì $m \leq 3$.

Câu 6. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ là

- A. $m > 4$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq -8$. D. $m < 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m - 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi: $y' \geq 0, \forall x \in (-1;1)$.

Hay $3x^2 + 6x + m - 1 \geq 0, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - 6x + 1 = g(x), \forall x \in (-1;1)$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in (-1;1)} g(x).$$

Do $g'(x) = -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $g'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1)$ nên $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$. Suy ra $m \geq \max_{x \in (-1; 1)} g(x) \Leftrightarrow m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq 4$.

Câu 7. Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ thì m thuộc tập nào sau đây:

- A.** $m \in \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}; +\infty \right)$ **B.** $m \in \left(-\infty; \frac{2}{3} \right)$.
C. $m \in (-\infty; -1)$ **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{2} \right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (2; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0 \quad \forall x \in (2; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) \geq 6 - 2x \quad \forall x \in (2; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3} \quad \forall x \in (2; +\infty).$$

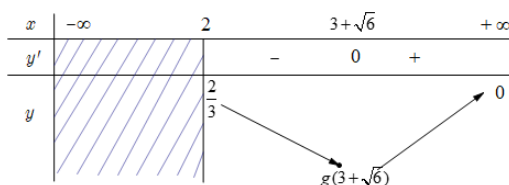
$$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [2; +\infty)} \frac{6-2x}{x^2-2x+3}.$$

Đặt $g(x) = \frac{6-2x}{x^2-2x+3}$. Ta đi tìm $\max_{x \in [2; +\infty)} g(x)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x + 3)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{6} \notin (2; +\infty) \\ x = 3 + \sqrt{6} \in (2; +\infty) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên khoảng $(2; +\infty)$:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{x \in [2; +\infty)} g(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$.

- Câu 8.** (Chuyên Thái Nguyên - 2018 - BTN) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($m \in [-2018; 2018]$) để hàm số $y = x^2(m-x) - m$ đồng biến trên $(1; 2)$?
- A. 2020. B. 2016. C. 2018. D. 2014.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx = x(2m - 3x)$.

Để hàm số đồng biến trên $(1; 2)$ thì $y' \geq 0 \forall x \in (1; 2)$.

Khi đó $2m - 3x \geq 0 \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \frac{3x}{2} \leq 2m \forall x \in (1; 2)$.

Do đó $m \geq 3$.

Vậy $3 \leq m \leq 2018$ hay có 2016 số nguyên thỏa mãn.

- Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m nhỏ hơn 2020 để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
- A. 2020. B. 2018. C. 2019. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10 \Rightarrow y' = -x^2 + 2(m-1)x + (m+3)$.

Nhận thấy y' là tam thức bậc hai có hệ số bậc hai $a = -1$ nên y' có tối đa 2 nghiệm.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 3)$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2(m-1)x + (m+3) \geq 0, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}, \forall x \in (0; 3)$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}$ trên khoảng $(0; 3)$.

Có $g'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{(2x + 1)^2} > 0, \forall x \in (0; 3)$

Do đó hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; 3) \Rightarrow g(x) < g(3) = \frac{12}{7}, \forall x \in (0; 3)$

Suy ra $m \geq g(x), \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}$. Vì $0 < m < 2020$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2; 3; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2018 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx - 2019$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $m \leq -1$

B. $m < -1$

C. $m > -1$

D. $m \leq 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 2x + m$.

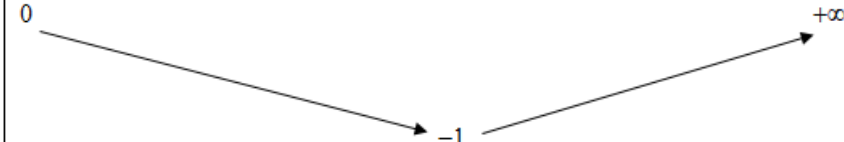
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét $h(x) = x^2 - 2x$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $h'(x) = 2x - 2, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	0				

Do đó $m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} (x^2 - 2x) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Chọn A.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

A. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$

B. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$

C. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$

D. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1, \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1)$$

Để dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1; +\infty)$, suy ra $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$

Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 - x + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

- A. $[-1; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right]$. C. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 2mx - 1$. Ycđb $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2x} = f(x), \forall x \in (1; 2)$.

$$f'(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2} < 0, \forall x \in (1; 2). \text{ YCBT. } m$$

Câu 13. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m > -1$. B. $m \leq -1$. C. $m \leq 1$. D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m = 3(-x^2 + 2x + m)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ cũng tương đương hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$ khi chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = f(x) \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0; +\infty)} f(x) = f(1) = -1$$

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên $(1; 2)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$.

Hàm số đồng biến trên $(1; 2)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$ và $y' = 0$ có nghiệm hữu hạn trong $(1; 2)$.

Lúc đó, bài toán trở thành tìm m để $4x^3 - 4mx \geq 0, \forall x \in (1; 2)$ (*).

Cách 1:

$$(*) \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) \geq 0, \forall x \in (1; 2).$$

Nếu $m = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 4x^3 \geq 0, \forall x \in (1; 2)$ thỏa.

Nếu $m < 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) \geq 0, \forall x \in (1; 2)$ thỏa.

Nếu $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 4x(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m}) \geq 0, \forall x \in (1; 2)$ thỏa khi $\sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Kết hợp các trường hợp ta nhận được $m \leq 1$. Chọn đáp án A.

Cách 2:

$$(*) \Leftrightarrow 4mx \leq 4x^3, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 = g(x), \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [1; 2]} g(x) = 1.$$

Chọn đáp án A.

Câu 15. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m - 3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left[-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p + q$ là?

A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m - 3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1; 2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; 2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1	2
g'	+	0
g	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$. Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = -x^3 - mx + \frac{3}{28x^7}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -3x^2 - m - \frac{3}{4x^8} \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{3}{4x^8} = g(x), \forall x > 0.$

Xét $g'(x) = -6x + \frac{6}{x^9} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; +\infty) \Rightarrow \max_{(0; +\infty)} g(x) = g(1) = -\frac{15}{4}.$

Vậy với $m \geq -\frac{15}{4}$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}.$

Câu 17. Tìm số thực m lớn nhất để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$m(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| - 2018.$$

A. $-\frac{1}{3}.$

B. -2018.

C. $-\frac{2017}{2}.$

D. -2017.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |\sin x| + |\cos x| \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow t \geq 1$ và $t^2 = 1 + |\sin 2x| \leq 2 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}.$

Suy ra $t \in [1; \sqrt{2}].$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow m(t+1) \leq t^2 - 1 + t - 2018 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + t - 2019}{t+1} = t - \frac{2019}{t+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{2019}{t+1}$ trên $[1; \sqrt{2}].$ Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2019}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{2}].$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[1; \sqrt{2}].$

$$\text{Do đó } m \leq f(t), \forall t \in [1; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; \sqrt{2}]} f(t) = f(1) = -\frac{2017}{2}.$$

Câu 18. Hàm số $y = 2mx + \sin x$ đồng biến trên tập số thực khi và chỉ khi giá trị của m là

A. $m \geq -\frac{1}{2}.$

B. $m \in \mathbb{R}.$

C. $m \geq \frac{1}{2}.$

D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 2m + \cos x$$

Hàm số đồng biến trên tập số thực

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m + \cos x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2} \cos x \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. B. $m \geq \sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. D. $m \leq -\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \sin x + \cos x + mx$

$$y' = \cos x - \sin x + m$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \sin x - \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{\mathbb{R}} \varphi(x), \text{ với } \varphi(x) = \sin x - \cos x.$$

$$\text{Ta có: } \varphi(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } \max_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \sqrt{2}. \text{ Từ đó suy ra } m \geq \sqrt{2}.$$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2 \sin x - 3 \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \in (-\infty; -\sqrt{13}]$. B. $m \in (-\infty; \sqrt{13}]$. C. $m \in [\sqrt{13}; +\infty)$. D. $m \in [-\sqrt{13}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 2 \cos x + 3 \sin x + m$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 \cos x + 3 \sin x + m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -m \leq 2 \cos x + 3 \sin x \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét biểu thức $P = 2 \cos x + 3 \sin x$ ta thấy:

$$P^2 = (2 \cos x + 3 \sin x)^2 \leq (4 + 9)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 13 \Rightarrow -\sqrt{13} \leq P \leq \sqrt{13}.$$

$$\text{Vậy để } -m \leq 2 \cos x + 3 \sin x \forall x \in \mathbb{R} \text{ thì } -m \leq -\sqrt{13} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{13}.$$

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3 + m(\cos x - \sin x) = 3 - \sqrt{2}m \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' = 3 - \sqrt{2}.m.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{2}.m.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\mathbb{R}} \left[\sqrt{2}.m.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}|m| \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$?

A. 3.

B. 2.

C. vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

- Ta có: $y' = -\cos^2 x \cdot \sin x + \frac{4}{\sin^2 x} + (m+1) \cdot \sin x = \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m \cdot \sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0; \pi)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m \cdot \sin x \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x} \geq -m, \forall x \in (0; \pi) \quad (1).$$

- Xét hàm số: $g(x) = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0; \pi)$.

Có $g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \frac{12\cos x}{\sin^4 x} = 2\cos x \cdot \left(\sin x - \frac{6}{\sin^4 x} \right) = 2\cos x \cdot \frac{\sin^5 x - 6}{\sin^4 x}$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0; \pi).$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y'		0	
		-	+
y	$+\infty$	5	$+\infty$

- Do đó: $(1) \Leftrightarrow -m \leq \min_{x \in (0; \pi)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 5 \Leftrightarrow m \geq -5$.

- Lại do m nguyên âm nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số

$$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1 \text{ đồng biến trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

A. 2028.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2019.

Lời giải

Chọn D

$$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1 \Leftrightarrow y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4.$$

$$y' = (3\sin^2 x + 6\sin x - m)\cos x.$$

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi

hàm số liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3\sin^2 x + 6\sin x - m \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x + 6\sin x \geq m, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1).$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$ trên $(0; 1)$ ta có bảng biến thiên sau

t	0	1
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có (1) xảy ra khi và chỉ khi $m \leq 0$.

Suy ra có 2019 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 24. Tìm m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \leq 2$.

B. $m \leq \frac{5}{4}$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - m}{\sin^2 x - 1}$. Đặt $t = \sin x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ nên $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Vì hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ nên bài toán trở thành: Tìm m để hàm số

$y = \frac{t - m}{t^2 - 1}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y' = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(t^2 - 1)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ (do $(t^2 - 1)^2 > 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$)

$\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}$ trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{2t^2}$. Suy ra hs nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $m \leq \min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} f(t) = \frac{5}{4}$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số

$y = \frac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 0.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cot x$. Vì $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0; 1)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị của m để $y = \frac{t^2 - 2mt + 2m^2 - 1}{t - m}$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{t^2 - 2mt + 1}{(t - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2mt + 1 \geq 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \geq m \quad (1) \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1 \quad (2) \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{t^2 - 1}{2t^2}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

Bảng biến thiên

t	0	1
$f'(t)$		-
$f(t)$	$+\infty$	1

Từ (1) $\Leftrightarrow m \leq 1$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow m \leq 0$ hoặc $m = 1$.

Mà m nguyên và $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2020 giá trị thỏa mãn.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x - 4 \cdot 6^x + (m+1)4^x \leq 0$ có nghiệm?

A. vô số.

B. 6.

C. 4

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $9^x - 4 \cdot 6^x + (m+1)4^x \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + m+1 \leq 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$. Ta được $t^2 - 4t + m+1 \leq 0, t > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t \leq -m-1$ với $t > 0$

Xét hàm số $y = t^2 - 4t, t > 0$

$y' = 2t - 4, y' = 0 \Leftrightarrow t = 2$

BBT

t	0	2	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	0	$\searrow -4 \nearrow$	$+\infty$

Để bất phương trình có nghiệm khi $\min y \leq -m-1 \Leftrightarrow -4 \leq -m-1 \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$

với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$

Câu 27. Cho bất phương trình $8^x - 3 \cdot 2^{2x+1} + 9 \cdot 2^x + m - 5 > 0$ (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$?

A. Vô số.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x$ được bất phương trình $t^3 - 6t^2 + 9t + m - 5 > 0$ (2).

(1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [2; 4]$

$$\Leftrightarrow t^3 - 6t^2 + 9t > 5 - m, \forall t \in [2; 4] \Leftrightarrow \min_{[2; 4]} (t^3 - 6t^2 + 9t) > 5 - m.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ trên $[2; 4]$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 3t^2 - 12t + 9; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$f(2) = 2; f(3) = 0; f(4) = 4 \Rightarrow \min_{[2; 4]} (t^3 - 6t^2 + 9t) = 0 \Rightarrow 0 > 5 - m \Leftrightarrow m > 5.$$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn

$f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

A. $m < \sqrt{2}$.

B. $m < 0$.

C. $m = \sqrt{2}$.

D. $m \geq \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}; f(-1) = -1 \text{ và } f(1) = 1.$$

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{2}$ khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = -1$ khi $x = -1$.

Do đó, $f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m \geq \max_{[-1;1]} f(x) \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$.

Câu 29. Tìm m để bất phương trình $x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} > m + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})$ có nghiệm?

A. $m < -8$.

B. $m < -1 - 4\sqrt{3}$.

C. $m < -7$.

D. $-8 < m < -7$.

Lời giải.

Chọn C

•Điều kiện: $x \in [-1; 2]$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Có $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$g(-1) = \sqrt{3}$, $g(1) = 3$, $g(2) = \sqrt{6}$.

Suy ra $\max_{[-1;2]} g(x) = 3$, $\min_{[-1;2]} g(x) = \sqrt{3}$.

•Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}$, $t \in [\sqrt{3}; 3] \Rightarrow t^2 = x + 4 + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)}$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4 > m + 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t - 4 > m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t - 4$ trên đoạn $[\sqrt{3}; 3]$.

Có $f'(t) = 2t - 4$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

$f(\sqrt{3}) = -4\sqrt{3} - 1$, $f(2) = -8$, $f(3) = -7$.

Suy ra $\max_{[\sqrt{3};3]} f(t) = -7$.

Để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $m < \max_{[\sqrt{3};3]} f(t)$ hay $m < -7$.

Vậy $m < -7$.

Câu 30. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1 \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-3; 6].$$

A. 28.

B. 20.

C. 4.

D. 19

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1 \quad (1) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-3; 6].$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}, \quad x \in [-3; 6].$$

$$\Rightarrow t' = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{3+x}}{2\sqrt{3+x}\sqrt{6-x}}.$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow 6-x = 3+x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-3	$\frac{3}{2}$	6	
t'		+	0	-
t	3	$3\sqrt{2}$	3	

$$\Rightarrow t \in [3; 3\sqrt{2}].$$

$$\text{Ta có } t^2 = 3+x+6-x+2\sqrt{18+3x-x^2} = 9+2\sqrt{18+3x-x^2} \Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \frac{t^2-9}{2}.$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-3; 6]$

$$\Leftrightarrow f(t) = t - \frac{t^2-9}{2} \leq m^2 - m + 1 \text{ nghiệm đúng } \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 \geq \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t - \frac{t^2-9}{2}, \quad t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2t = 1 - t < 0 \quad \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } [3; 3\sqrt{2}].$$

$$\Rightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3 - \frac{3^2-9}{2} = 3.$$

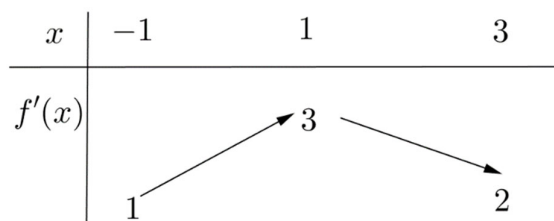
$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow m^2 - m + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện bài toán: } m \text{ nguyên và } m \in [-10; 10] \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; -1] \cup [2; 10] \end{cases}.$$

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Trên tinh thần thi trắc nghiệm, học sinh hoàn toàn có thể sử dụng tính năng TABLE của máy tính cầm tay để tìm $\max_{[-3;6]} f(x) = 3$ với $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$. Từ đó đưa bài toán về dạng giải bất phương trình bậc hai cơ bản: $m^2 - m + 1 \geq 3$ một cách dễ dàng.

Câu 31. Cho $f(x)$ mà hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$ là



A. $m < f(0)$.

B. $m \leq f(0)$.

C. $m \leq f(3)$.

D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

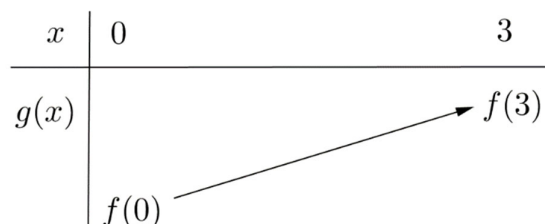
Chọn B

Ta có: $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m < f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ trên $[0; 3]$, có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 2x - x^2 \quad \forall x \in [0; 3].$$

Theo bảng biến thiên $f'(x) > 1$, $\forall x \in [0; 3]$, mà $2x - x^2 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f'(x) > 2x - x^2, \forall x \in [0; 3]$ nên ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $[0; 3]$:



Từ bảng biến thiên ta có $m < g(x), \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \leq f(0)$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình $y = f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ có nghiệm?

A. $m \geq 0$.

B. $m \geq 4$.

C. 1.

D. $m \geq -2$.

Lời giải

Chọn D

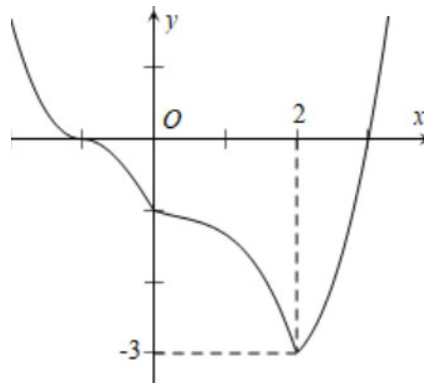
Bất phương trình $f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ xác định khi $x \geq 1$.

Khi đó, $\sqrt{x-1}+1 \geq 1, \forall x \geq 1$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[1;+\infty)} f(x) = f(3) = -2$.

Bất phương trình $y = f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min_{[1;+\infty)} f(x) = -2$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2.f(x) + x^2 > 4x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

A. $m < -3$.

B. $m < -10$

C. $m < -2$.

D. $m < 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2.f(x) + x^2 > 4x + m \Leftrightarrow f(x) > \frac{-x^2 + 4x + m}{2}$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

Dựa vào đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng -3 khi $x = 2$.

Đặt $g(x) = \frac{-x^2 + 4x + m}{2}$.

Ta có $g(x) < -3, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x + m}{2} < -3, \forall x \in (-1; 3).$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + m + 6 < 0 \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m < x^2 - 4x - 6, \forall x \in (-1; 3).$

Đặt $h(x) = x^2 - 4x - 6, \forall x \in (-1; 3).$

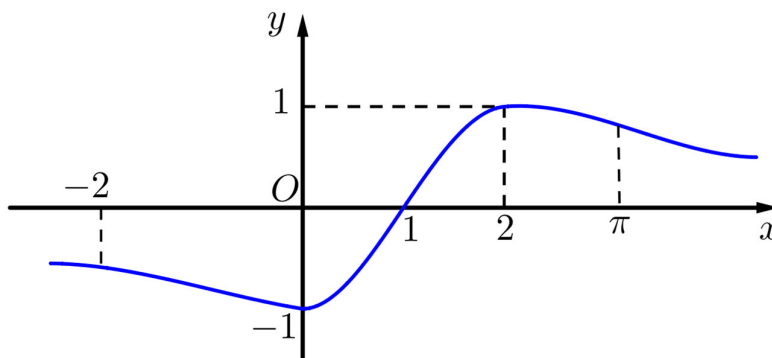
$h'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Bảng biến thiên

x	-1	2	3
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	-1	-10	-9

Vậy $m < -10.$

Câu 34. Bất phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq 7$. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(0).$ B. $m < f(1) - 1.$ C. $m < f(-1) + 1.$ D. $m < f(2).$

Lời giải

Chọn B

- Xét bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ (1) với $x \in [-1; 3]$, ta có:

$$f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m \Leftrightarrow f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} > m \quad (2)$$

- Đánh giá $f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}$ với $x \in [-1; 3]$

+ Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ đã cho ta suy ra BBT của $f(x)$ như sau:

x		-1	1	3	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$	

Từ BBT ta suy ra: $f(x) \geq f(1), \forall x \in [-1; 3]$ (*)

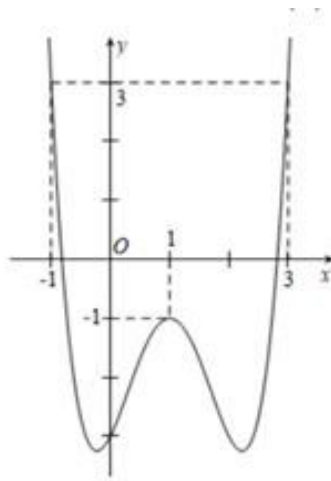
+ Do $x \in [-1; 3]$ nên: $-1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2} \leq \frac{3\pi}{2}$

Suy ra: $-1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin \frac{\pi x}{2} \leq 1$ (**)

+ Từ (*) và (**) cho ta: $f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \geq f(1) - 1, \forall x \in [-1; 3]$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

- Do đó: Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$
 $\Leftrightarrow m < f(1) - 1$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq 3f(3)$. B. $m > 3f(3)$. C. $m \geq 3f(-1) + 4$ D. $m > 3f(-1) + 4$.

Lời giải

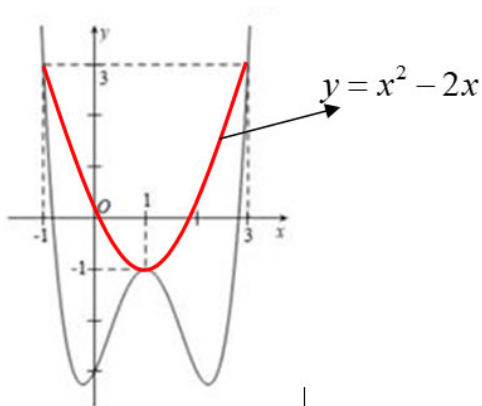
Chọn C

BPT $\Leftrightarrow m \geq 3f(x) - x^3 + 3x^2 = g(x)$ (*)

Xét hàm số $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ trên khoảng $(-1; 3)$ ta có

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3[f'(x) - (x^2 - 2x)].$$

Mặt khác trên hệ tọa độ, đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và đồ thị $f'(x)$ như sau:



Suy ra $g'(x) \leq 0, \forall x \in (-1; 3)$ nên BBT của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(-1; 3)$ là

x	-1	3
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$g(3)$

Do đó để bất phương trình luôn đúng với $\forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 3f(-1) + 4$

BÀI 36: BÀI TOÁN THỰC TẾ ĐÃ XÂY DỰNG MÔ HÌNH .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Bài toán thực tế tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đã xây dựng mô hình hàm.

Phương pháp:

- ▶
- ▶
- ▶

Lưu ý:

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = \dots\dots\dots$;

Gia tốc: $a(t_0) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Cường độ tức thời: $I(t_0) = \dots\dots\dots$

- ▶
- ▶
- ▶

B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $216(m/s)$. B. $30(m/s)$.
C. $400(m/s)$ D. $54(m/s)$.
- Câu 2.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và s tính bằng (m). Trong khoảng thời gian 6 giây đầu tiên của chuyển động, ở thời điểm nào thì vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất?
- A. $t = 2(s)$. B. $t = 3(s)$.
C. $t = 6(s)$ D. $t = 5(s)$.
- Câu 3.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $144(m/s)$. B. $36(m/s)$.
C. $243(m/s)$ D. $27(m/s)$.
- Câu 4.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $64(m/s)$. B. $24(m/s)$.
C. $18(m/s)$ D. $108(m/s)$.
- Câu 5.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam) và $x \in [0; 30]$. Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là:
- A. $10mg$. B. $30mg$.
C. $100mg$ D. $20mg$.
- Câu 6.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 4t^3 - \frac{t^4}{2}$ (người). Nếu xem $f'(t)$ là tốc

- độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t với $t \in [0; 6]$. Tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?
- A. 6. B. 3.
C. 4 D. 5.
- Câu 7.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$ (t tính theo giây). Trong 6 giây đầu tiên vận tốc chuyển động $v(t)(m/s)$ của chất điểm đó đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm.
- A. $t = 1,5(s)$. B. $t = 2(s)$.
C. $t = 2,5(s)$ D. $t = 3(s)$.
- Câu 8.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3, t \in [0; 25]$ (người). Nếu coi f là hàm số xác định trên $[0; 25]$ thì $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t với $t \in [0; 25]$. Vào thời điểm t nào thì tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?
- A. $t = 30$. B. $t = 25$.
C. $t = 15$ D. $t = 5$.
- Câu 9.** Nhà Thầy T.Q.An trồng rất nhiều hoa cát tường để bán phục vụ tết. Trong ngày 29 tết âm lịch Thầy T.Q.An bán hàng tại vườn từ lúc 6 giờ sáng đến 4 giờ chiều, cứ sau 1 tiếng Thầy T.Q.An lại đếm số cây hoa cát tường bán được theo thời gian là $f(t) = 15t^2 - t^3$ (t : thời gian, đơn vị giờ). Giả sử $f'(t)$ là số cây bán được trong 1 giờ tại thời điểm t . Hỏi số cây hoa cát tường bán được nhiều nhất vào lúc mấy giờ?
- A. 9 giờ sáng. B. 11 giờ trưa.
C. 2 giờ chiều D. 4 giờ chiều.
- Câu 10.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là $300(km)$. Vận tốc dòng nước là $6(km/h)$. Nếu vận tốc của cá bơi khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng Jun . Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là ít nhất?
- A. $v = 7(km/h)$. B. $v = 8(km/h)$.
C. $v = 12(km/h)$ D. $v = 9(km/h)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là $F(m)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(m) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân đó có cứu chữa được không ?
- A.** 5433,99 và không cứu được **B.** 1499,45 và cứu được
C. 283,01 và cứu được **D.** 3716,99 và cứu được
- Câu 2.** Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $(0 \leq t \leq 25)$. Giả sử coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.
- A.** 15. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 5.
- Câu 3.** Giả sử ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cách tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ ($0 < t < 24$). Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất ? (Trích đề thi thử lần 1, lớp toanthayn)
- A.** 12 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 6 giờ. **D.** 2 giờ.
- Câu 4.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (đơn vị miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.
- A.** 15 mg. **B.** 30 mg. **C.** 25 mg. **D.** 20 mg.
- Câu 5.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu:
- A.** $t = 2$ **B.** $t = 1$ **C.** $t = 3$ **D.** $t = 4$
- Câu 6.** Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?
- A.** $t = 4$. **B.** $t = 2$. **C.** $t = 0$. **D.** $t = 1$.
- Câu 7.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$ (t tính theo giây). Trong 6 giây đầu tiên vận tốc chuyển động $v(t)$ (m/s) của chất điểm đó đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm.
- A.** $t = 1,5$ (s). **B.** $t = 2$ (s). **C.** $t = 2,5$ (s) **D.** $t = 3$ (s).

- Câu 8.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và s tính bằng (m). Trong khoảng thời gian 6 giây đầu tiên của chuyển động, ở thời điểm nào thì vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất?
A. $t = 2(s)$. **B.** $t = 3(s)$. **C.** $t = 6(s)$ **D.** $t = 5(s)$.
- Câu 9.** Bạn An tham gia một giải thi chạy, giả sử quãng đường mà bạn chạy được là một hàm số theo biến t và có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 1t$ (m) và thời gian t có đơn vị bằng giây. Hỏi trong quá trình chạy vận tốc tức thời nhỏ nhất là
A. $8(m/s)$. **B.** $1(m/s)$. **C.** $3(m/s)$. **D.** $4(m/s)$.
- Câu 10.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là $300(km)$. Vận tốc dòng nước là $6(km/h)$. Để vận tốc của cá bơi khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là ít nhất?
A. $v = 7(km/h)$. **B.** $v = 8(km/h)$.
C. $v = 12(km/h)$ **D.** $v = 9(km/h)$.
- Câu 11.** Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là
A. $12m/s^2$. **B.** $-6m/s^2$. **C.** $-12m/s^2$. **D.** $6m/s^2$
- Câu 12.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?
A. $t = 22(h)$. **B.** $t = 15(h)$. **C.** $t = 14(h)$. **D.** $t = 10(h)$.
- Câu 13.** Bà Hà Thầy Quốc An trồng rất nhiều hoa ly để bán phục vụ tết. Trong ngày 29 tết âm lịch Thầy Quốc An bán hàng tại vườn từ lúc 6 giờ sáng đến 4 giờ chiều, cứ sau 1 tiếng Thầy Quốc An lại đếm số cây hoa ly bán được theo thời gian là $f(t) = 15t^2 - t^3$ (t : thời gian, đơn vị giờ). Giả sử $f'(t)$ là số cây bán được trong 1 giờ tại thời điểm t . Hỏi số cây hoa ly bán được nhiều nhất vào lúc mấy giờ?
A. 9 giờ sáng. **B.** 11 giờ trưa.
C. 2 giờ chiều **D.** 4 giờ chiều.
- Câu 14.** Một công ty chuyên sản xuất đĩa CD với chi phí mỗi đĩa là 40 (ngàn đồng). Để mỗi đĩa giá bán là x (ngàn đồng) thì số lượng đĩa bán được sẽ là $q(x) = 120 - x$. Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất?
A. 60 ngàn đồng. **B.** 70 ngàn đồng. **C.** 80 ngàn đồng. **D.** 90 ngàn đồng.

- Câu 15.** Một nhà sản xuất độc quyền một loại bánh gia truyền để bán ra thị trường trong dịp Tết năm nay. Qua thăm dò và nghiên cứu thị trường biết lượng cầu về loại hàng này là một hàm số $Q_D(P) = 656 - \frac{1}{2}P$ theo đơn giá P . Để sản xuất loại bánh này ở sản lượng Q thì tổng chi phí là $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$. Tìm mức sản lượng Q để doanh nghiệp có lợi nhuận cao nhất sau khi bán hết loại bánh này với đơn giá P , biết lợi nhuận bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí, doanh thu bằng đơn giá nhân sản lượng bán được.
- A. 62. B. 200. C. 52. D. 2.
- Câu 16.** Một tạp chí bán được 25 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, ...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 11000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 6 nghìn đồng. Các khoản thu khi bán tạp chí bao gồm tiền bán tạp chí và 100 triệu đồng nhận được từ quảng cáo. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết. Tính số tiền lãi lớn nhất có thể có được khi bán tạp chí.
- A. 100.250.000 đồng. B. 100.000.000 đồng. C. 100.500.000 đồng. D. 71.000.000 đồng.
- Câu 17.** Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n+10)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?
- A. 4 máy. B. 6 máy. C. 5 máy. D. 7 máy.
- Câu 18.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/năm? (Trích đề thi thử lần 1, lớp toanthay)an)
- A. 2014. B. 2016 C. 2015 D. 2017.
- Câu 19.** Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách 300 km, vận tốc của dòng nước là 6 (km/h). Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước yên lặng là v (km/h). Để ăn lượng tiêu hao của cá trong t giờ được tính theo công thức $E = cv^3t$; c là hằng số cho trước, đơn vị của E là Jun. Vận tốc v của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là
- A. 9 (km/h). B. 8 (km/h). C. 10 (km/h). D. 12 (km/h).
- Câu 20.** Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$, ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
- A. Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.
- B. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
- C. Tốc độ bơm luôn giảm. D. Tốc độ bơm luôn tăng.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ ($0 \leq t \leq 11$), trong đó T là nhiệt độ ($^{\circ}F$ – Fahrenheit) theo thời gian t trong ngày. Biết rằng $^{\circ}C = \frac{^{\circ}F - 32}{1,8}$, độ chênh lệch (theo độ $^{\circ}C$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là
- A. $3,6^{\circ}C$. B. $2^{\circ}C$.
C. $2,6^{\circ}C$. D. $2,5^{\circ}C$.
- Câu 2.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 4t^3 - \frac{t^4}{2}$ (người). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t với $t \in [0; 6]$. Tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?
- A. 6. B. 3.
C. 4 D. 5.
- Câu 3.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.
- A. $x = 8$. B. $x = 10$.
C. $x = 15$. D. $x = 7$.
- Câu 4.** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?
- A. 4 giờ. B. 1 giờ.
C. 3 giờ. D. 2 giờ.
- Câu 5.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $24(m/s)$. B. $108(m/s)$.
C. $64(m/s)$. D. $18(m/s)$.

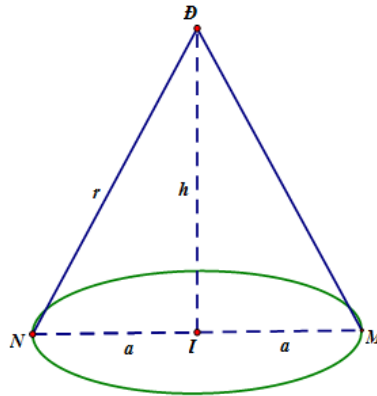
- Câu 6.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng
- A. $29m/s$. B. $26m/s$.
C. $17m/s$. D. $36m/s$.
- Câu 7.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $144(m/s)$. B. $36(m/s)$.
C. $243(m/s)$ D. $27(m/s)$.
- Câu 8.** Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ bằng:
- A. $49m/s$. B. $25m/s$.
C. $10m/s$. D. $18m/s$.
- Câu 9.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. $216(m/s)$. B. $30(m/s)$.
C. $400(m/s)$ D. $54(m/s)$.
- Câu 10.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?
- A. $89(m/s)$. B. $109(m/s)$.
C. $71(m/s)$. D. $\frac{25}{3}(m/s)$.

- Câu 11.** Công ty A chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất thì tổng chi phí sẽ là $C(q) = 3q^2 + 72q - 9789$ (đơn vị tiền tệ). Giá mỗi sản phẩm công ty sẽ bán với giá $p(q) = 180 - 3q$. Hãy xác định số sản phẩm công ty cần sản xuất sao cho công ty thu được lợi nhuận cao nhất ?
- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.
- Câu 12.** Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$; Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Lại biết chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$; C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo gần với giá trị nào nhất sau đây?
- A. 51 (tấn). B. 52 (tấn). C. 2 (tấn). D. 3 (tấn).
- Câu 13.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: ấu ếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?
- A. 10 B. 12 C. 16 D. 24
- Câu 14.** Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.
- A. 20.000 đ. B. 15.000 đ. C. 10.000 đ. D. 22.000 đ.
- Câu 15.** Theo thống kê tại một nhà máy Z , nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. ấu ếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ (và như vậy, nếu giảm thời gian làm việc 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có thêm 1 công nhân đi làm đồng thời năng suất lao động tăng 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ). ấu goài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. ấu hà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?
- A. $x = 36$. B. $x = 32$. C. $x = 44$. D. $x = 48$.

Câu 16. Đặt một điện áp xoay chiều $u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)\text{V}$, $t(\text{s})$ vào hai đầu một đoạn mạch gồm biến trở R nối tiếp với cuộn dây thuần cảm độ tự cảm L . Điều chỉnh R để tổng điện áp hiệu dụng $(U_R + U_L)$ đạt giá trị cực đại, giá trị cực đại đó là

- A. $100\sqrt{2} \text{ V}$. B. 200 V . C. $50\sqrt{2} \text{ V}$ D. 100 V .

Câu 17. Cần phải đặt một ngọn đèn ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính A . Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).



- A. $h = \frac{3a}{2}$ B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $h = \frac{a}{2}$ D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

BÀI 36: BÀI TOÁN THỰC TẾ ĐÃ XÂY DỰNG MÔ HÌNH .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Bài toán thực tế tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đã xây dựng mô hình hàm.

Phương pháp:

Xác định mối quan hệ các đại lượng (đại lượng đề bài cho và đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất).

Lưu ý:

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$; Gia tốc: $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$

Cường độ tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$

- Quy bài toán thực tế về bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.
- Lập bảng biến thiên tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của đại lượng cần xét.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $216(m/s)$. B. $30(m/s)$.
C. $400(m/s)$ D. $54(m/s)$.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và s tính bằng (m). Trong khoảng thời gian 6 giây đầu tiên của chuyển động, ở thời điểm nào thì vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất?

- A. $t = 2(s)$. B. $t = 3(s)$.
C. $t = 6(s)$ D. $t = 5(s)$.

Câu 3. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $144(m/s)$. B. $36(m/s)$.
C. $243(m/s)$ D. $27(m/s)$.

Câu 4. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $64(m/s)$. B. $24(m/s)$.
C. $18(m/s)$ D. $108(m/s)$.

Câu 5. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam) và $x \in [0; 30]$. Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là:

- A. $10mg$. B. $30mg$.
C. $100mg$ D. $20mg$.

Câu 6. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 4t^3 - \frac{t^4}{2}$ (người). Nếu xem $f'(t)$ là tốc

- độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t với $t \in [0; 6]$. Tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?
- A. 6. B. 3.
C. 4 D. 5.
- Câu 7.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$ (t tính theo giây). Trong 6 giây đầu tiên vận tốc chuyển động $v(t)(m/s)$ của chất điểm đó đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm.
- A. $t = 1,5(s)$. B. $t = 2(s)$.
C. $t = 2,5(s)$ D. $t = 3(s)$.
- Câu 8.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3, t \in [0; 25]$ (người). Nếu coi f là hàm số xác định trên $[0; 25]$ thì $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t với $t \in [0; 25]$. Vào thời điểm t nào thì tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?
- A. $t = 30$. B. $t = 25$.
C. $t = 15$ D. $t = 5$.
- Câu 9.** Nhà Thầy T.Q.An trồng rất nhiều hoa cát tường để bán phục vụ tết. Trong ngày 29 tết âm lịch Thầy T.Q.An bán hàng tại vườn từ lúc 6 giờ sáng đến 4 giờ chiều, cứ sau 1 tiếng Thầy T.Q.An lại đếm số cây hoa cát tường bán được theo thời gian là $f(t) = 15t^2 - t^3$ (t : thời gian, đơn vị giờ). Giả sử $f'(t)$ là số cây bán được trong 1 giờ tại thời điểm t . Hỏi số cây hoa cát tường bán được nhiều nhất vào lúc mấy giờ?
- A. 9 giờ sáng. B. 11 giờ trưa.
C. 2 giờ chiều D. 4 giờ chiều.
- Câu 10.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là $300(km)$. Vận tốc dòng nước là $6(km/h)$. Nếu vận tốc của cá bơi khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là ít nhất?
- A. $v = 7(km/h)$. B. $v = 8(km/h)$.
C. $v = 12(km/h)$ D. $v = 9(km/h)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là $F(m)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(m) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân đó có cứu chữa được không?
- A. 5433,99 và không cứu được B. 1499,45 và cứu được
C. 283,01 và cứu được **D. 3716,99 và cứu được**

Lời giải.

Chọn D.

$$F(m) = 500 \ln(2t + 1) + C$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow c = 2000$$

$$\text{Với } t = 15 \Rightarrow 500 \ln(2 \cdot 15 + 1) + 2000 = 3716,99 < 4000 \Rightarrow \text{cứu được}$$

- Câu 2.** Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $(0 \leq t \leq 25)$. Giả sử coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.
- A. 15** B. 20 C. 10 D. 5

Lời giải

Chọn A**Cách 01 :**

Từ giả thiết suy ra tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t là: $f'(t) = 90t - 3t^2$.

Xét hàm $f'(t) = 90t - 3t^2$ với $0 \leq t \leq 25$.

Ta có: $f''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên:

t	0	15	25	
f''		+	0	-
f'	0	↗ 675 ↘	375	

Từ bảng biến thiên ta có ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất là ngày thứ 15.

Cách 02 :

Ta có: $f'(x) = 90t - 3t^2$, $x \in [0; 25]$.

Khảo sát hàm $f'(x)$.

Ta có $f''(t) = 90 - 6t$; $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

t	0	15	30
$f''(t)$	+	0	-
$f'(t)$	0	↗ 675 ↘	375

Vậy tốc độ lan truyền bệnh lớn nhất vào thời điểm $t = 15(s)$.

Câu 3. ả gười ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cách tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ ($0 < t < 24$). Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân

là lớn nhất ? (Trích đề thi thử lần 1, lớp toanthayan)

A. 12 giờ.

B. 8 giờ.

C. 6 giờ.

D. 2 giờ.

Lời giải

Chọn D.

$$C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4} \Rightarrow C'(t) = \frac{0,28 \cdot (4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}. \text{ Khi đó } C'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max_{t \in (0; 24)} C(t) = 2$

Câu 4. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (đơn vị miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. 15 mg.

B. 30 mg.

C. 25 mg.

D. 20 mg.

Lời giải

Chọn D**Cách 1 :**Ta có: $G(x) = -0,025x^3 + 0,75x^2$. Đạo hàm: $G'(x) = -0,075x^2 + 1,5x$.

$$\text{Xét } G'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,075x^2 + 1,5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	20	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	$-\infty$
y	$+\infty$		0		100	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 20$.

Vậy cần tiêm 20 mg thuốc cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Cách 02 :

$$\text{Ta có } f(x) = 0,025x^2(30-x) = 0,0125x \cdot x \cdot (60-2x) \leq 0,0125 \cdot \left(\frac{x+x+60-2x}{3}\right)^3 = 100.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 60 - 2x \Leftrightarrow x = 20$ miligam.**Cách 03 :**

$$\text{Ta có: } F'(x) = \frac{1}{40}(60x - 3x^2), x \in [0; 30].$$

$$\text{Khảo sát hàm } F'(x), \text{ ta có } F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}.$$

x	0	20	30
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$		100	

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để giảm huyết áp nhiều nhất là 20mg.

Câu 5. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu:

A. $t = 2$ **B. $t = 1$** C. $t = 3$ D. $t = 4$

Lời giải.

Chọn B.

Cách 1:

Ta có $V(t) = S'(t) = 6t - 3t^2 = 3(t-1)^2 + 3 \leq 3 \Leftrightarrow t = 1$.

Cách 2:

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

Ta có $S'(t) = (1 + 3t^2 - t^3)' = 6t - 3t^2 = -3(t^2 - 2t) = 3 - 3(t-1)^2 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$

$\max_{\mathbb{R}} S'(t) = 3$ khi $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Câu 6. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

A. $t = 4$.

B. $t = 2$

C. $t = 0$.

D. $t = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $v'(t) = -4t^3 + 16t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2 \end{cases}$

Trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất bằng $v(2) = 516$ khi $t = 2$.

Câu 7. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$ (t tính theo giây). Trong 6 giây đầu tiên vận tốc chuyển động $v(t)$ (m/s) của chất điểm đó đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm.

A. $t = 1,5$ (s).

B. $t = 2$ (s)

C. $t = 2,5$ (s)

D. $t = 3$ (s).

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2, t \in [0; 6]$.

Khảo sát hàm $v(t)$:

Ta có: $v'(t) = 12 - 6t$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

t		0	2	6	
v'		+	0	-	

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được tại thời điểm $t = 2(s)$.

A. $t = 2(s)$. **B.** $t = 3(s)$. **C.** $t = 6(s)$ **D.** $t = 5(s)$.

Chọn B

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54(m/s)$ tại thời điểm $t=3(s)$.

A. $8(\text{m/s})$. **B.** $1(\text{m/s})$. **C.** $3(\text{m/s})$. **D.** $4(\text{m/s})$.

Chọn A

Vậy $v_{\min} = 8(\text{m/s})$ **khi** $t = 1(\text{s})$.

Cách 2:

Ta có vận tốc được tính theo công thức $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 11 = 3(t-1)^2 + 8 \geq 8$.

Vậy $v_{\min} = 8(\text{m/s})$ khi $t = 1(\text{s})$.

Câu 10. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là $300(\text{km})$. Vận tốc dòng nước là $6(\text{km/h})$. Để vận tốc của cá bơi khi nước đứng yên là $v(\text{km/h})$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là ít nhất?

- A. $v = 7(\text{km/h})$. B. $v = 8(\text{km/h})$. C. $v = 12(\text{km/h})$ D. $v = 9(\text{km/h})$.

Lời giải

Chọn D

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v - 6(\text{km/h})$. Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách

$$300\text{km} \text{ là } t = \frac{300}{v-6}$$

ăng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là:

$$E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6} (\text{jun}), v > 6$$

$$E'(v) = 600cv^2 \cdot \frac{v-9}{(v-6)^2} \Leftrightarrow E'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 (\text{loại}) \\ v = 9 \end{cases}$$

V		6		9		$+\infty$
$E'(v)$			-	0	+	
$E(v)$						
				$E(9)$		

Câu 11. Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là

- A. 12m/s^2 B. -6m/s^2 . C. -12m/s^2 . D. 6m/s^2

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 6$$

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (vì $t > 0$)

Khi đó gia tốc là $a(3) = 6.3 - 6 = 12\text{m/s}^2$.

Câu 12. Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(\text{m})$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(\text{h})$ được cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 22(\text{h})$.

B. $t = 15(\text{h})$.

C. $t = 14(\text{h})$.

D. $t = 10(\text{h})$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq h \leq 15$. Do đó mực nước cao nhất của kênh là 15m đạt được

khi $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 12k$

Vì $t > 0 \Leftrightarrow -2 + 12k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{6}$

Chọn số k nguyên dương nhỏ nhất thỏa $k > \frac{1}{6}$ là $k = 1 \Rightarrow t = 10$.

Câu 13. ả hà Thầy Quốc An trồng rất nhiều hoa ly để bán phục vụ tết. Trong ngày 29 tết âm lịch Thầy Quốc An bán hàng tại vườn từ lúc 6 giờ sáng đến 4 giờ chiều, cứ sau 1 tiếng Thầy Quốc An lại đếm số cây hoa ly bán được theo thời gian là $f(t) = 15t^2 - t^3$ (t : thời gian, đơn vị giờ). Giả sử $f'(t)$ là số cây bán được trong 1 giờ tại thời điểm t . Hỏi số cây hoa ly bán được nhiều nhất vào lúc mấy giờ?

A. 9 giờ sáng.

B. 11 giờ trưa.

C. 2 giờ chiều

D. 4 giờ chiều.

Lời giải

Chọn B

Thầy Quốc An bán hàng tại vườn từ lúc 6 giờ sáng đến 4 giờ chiều tổng cộng có 10 tiếng.

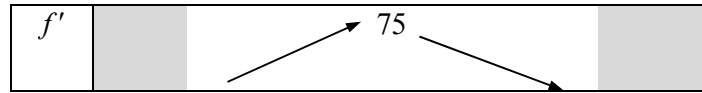
Ta có: $f(t) = 15t^2 - t^3, t \in [0; 10]$.

Khảo sát hàm $f(t)$:

Ta có: $f'(t) = 30t - 3t^2, f''(t) = 30 - 6t$.

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

t		0	5	10	
f''		+	0	-	



Số cây hoa ly bán được nhiều nhất là 75 cây lúc 11 giờ trưa.

Câu 14. Một công ty chuyên sản xuất đĩa CD với chi phí mỗi đĩa là 40 (ngàn đồng). ầu mỗi đĩa giá bán là x (ngàn đồng) thì số lượng đĩa bán được sẽ là $q(x) = 120 - x$. Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất ?

- A.** 60 ngàn đồng. **B.** 70 ngàn đồng. **C.** 80 ngàn đồng. **D.** 90 ngàn đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là giá bán của sản phẩm. ($0 < x < 120$)

Ta có doanh thu mà công ty thu được là $R(x) = x \cdot q(x) = x(120 - x) = 120x - x^2$

Đồng thời, chi phí mà công ty bỏ ra là $C(x) = 40(120 - x) = 4800 - 40x$

Lợi nhuận mà công ty thu được chính là $R(x) - C(x) = -x^2 + 160x - 4800$

Xét $f(x) = -x^2 + 160x - 4800$. Bài toán trở thành tìm $\max_{0 < x < 120} f(x) = ?$

Ta có $f'(x) = -2x + 160, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 80$. Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	80	120
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$		1600	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max_{0 < x < 120} f(x) = f(80) = 1600$

Vậy khi bán với giá 80 ngàn thì công ty đạt lợi nhuận cao nhất.

Câu 15. Một nhà sản xuất độc quyền một loại bánh gia truyền để bán ra thị trường trong dịp Tết năm nay. Qua thăm dò và nghiên cứu thị trường biết lượng cầu về loại hàng này là một hàm số

$Q_D(P) = 656 - \frac{1}{2}P$ theo đơn giá P . ầu sản xuất loại bánh này ở sản lượng Q thì tổng chi phí

là $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$. Tìm mức sản lượng Q để doanh nghiệp có lợi nhuận cao nhất sau khi bán hết loại bánh này với đơn giá P , biết lợi nhuận bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí, doanh thu bằng đơn giá nhân sản lượng bán được.

- A.** 62. **B.** 200. **C.** 52. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = 2Q - 1312$

Lợi nhuận: $f(Q) = Q \cdot P - C(Q)$

$$\Leftrightarrow f(Q) = Q(2Q - 1312) - (Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100)$$

$$\Leftrightarrow f(Q) = -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 100$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(Q)$ trên khoảng $(0; 656)$ đạt được tại $Q = 52$.

- Câu 16.** Một tạp chí bán được 25 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, ...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 11000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 6 nghìn đồng. Các khoản thu khi bán tạp chí bao gồm tiền bán tạp chí và 100 triệu đồng nhận được từ quảng cáo. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết. Tính số tiền lãi lớn nhất có thể có được khi bán tạp chí.

A. 100.250.000 đồng. **B.** 100.000.000 đồng. **C.** 100.500.000 đồng. **D.** 71.000.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Tổng thu khi bán hết x cuốn tạp chí là $T(x) = 25x + 100000$ nghìn đồng.

Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là

$$f(x) = 0,001x^2 - 2x + 110000 + 6x = 0,001x^2 + 4x + 110000 \text{ nghìn đồng.}$$

Số tiền lãi thu được là $25x + 100000 - 0,001x^2 - 4x - 110000 = -0,001x^2 + 21x - 10000 = g(x)$ nghìn đồng.

Để thấy $g(x)$ là hàm số bậc hai, hệ số $a = -0,001 < 0$ nên $g(x)$ đạt GTLĐ khi

$$x = \frac{21}{2 \cdot 0,001} = 10500 \text{ và } \max g(x) = 100250 \text{ nghìn đồng.}$$

- Câu 17.** Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n+10)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?

A. 4 máy.

B. 6 máy.

C. 5 máy.

D. 7 máy.

Lời giải

Chọn C

Một máy: Trong một giờ in được 3600 tờ nên 50000 tờ cần $\frac{125}{9}$ giờ.

Do đó n máy cần thời gian $\frac{125}{9n}$ giờ.

$$\text{Tổng chi phí là } f(n) = \left[10 \cdot (6n + 10) \cdot \frac{125}{9n} \right] \cdot 1000 + 50000n.$$

Khi đó: để được lãi nhiều nhất thì $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất, với $n \in [1; 8]$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = \left(\frac{250}{3} + \frac{1250}{9n} + 5n \right) \cdot 10000 \geq \left(\frac{250}{3} + \frac{50\sqrt{10}}{3} \right) \cdot 10000 \text{ (Dùng BĐT Côsi).}$$

$$\text{ả ên } f(n) \text{ nhỏ nhất khi } \frac{1250}{9n} = 5n \Leftrightarrow n = \frac{5\sqrt{10}}{3} \approx 5.$$

- Câu 18.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/năm? (Trích đề thi thử lần 1, lớp toanthatyan)
- A.** 2014. **B.** 2016 **C.** 2015 **D.** 2017.

Lời giải

Chọn C.

$$f(t) = \frac{26t+10}{t+5} \Rightarrow f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}. \text{ Khi đó } y_{cbt} \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,048 = \frac{6}{125}$$

$$\Rightarrow 2500 = (t+5)^2 \Leftrightarrow t+5 = 50 \Leftrightarrow t = 45.$$

Ấu hưng vậy đến năm $1970+45=2015$ thì đạt tốc độ tăng dân số 0,048 nghìn người/năm.

- Câu 19.** Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách 300 km, vận tốc của dòng nước là 6 (km/h). Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước yên lặng là v (km/h). Ấu ẩng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được tính theo công thức $E = cv^3t$; c là hằng số cho trước, đơn vị của E là Jun. Vận tốc v của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là
- A.** 9 (km/h) **B.** 8 (km/h). **C.** 10 (km/h). **D.** 12 (km/h).

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } (v-6)t = 300 \Rightarrow t = \frac{300}{v-6}. \text{ Suy ra } E = cv^3t = cv^3 \frac{300}{v-6} = 300cf(v) \text{ với } f(v) = \frac{v^3}{v-6}.$$

Vì c là hằng số nên để năng lượng tiêu hao ít nhất thì $f(v) = \frac{v^3}{v-6}$ nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(v)$ trên $(6; +\infty)$, ta có

$$f'(v) = \frac{2v^3 - 18v^2}{(v-6)^2} \text{ suy ra } f'(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{2v^3 - 18v^2}{(v-6)^2} = 0 \Rightarrow v = 9.$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra được hàm số $f(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $v = 9$.

- Câu 20.** Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$, ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
- A.** Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.
B. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
C. Tốc độ bơm luôn giảm.

D. Tốc độ bơm luôn tăng.

Lời giải

Chọn A.

$$V'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3) \Rightarrow V''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{100}(180t - 3t^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 60 \\ t = 0 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có:

t	0	60	90
$V'(t)$	0	+	0
$V(t)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án A.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ ($0 \leq t \leq 11$), trong đó T là nhiệt độ ($^{\circ}F$ - Fahrenheit) theo thời gian t trong ngày. Biết rằng $^{\circ}C = \frac{^{\circ}F - 32}{1,8}$, độ chênh lệch (theo độ $^{\circ}C$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là
- A. $3,6^{\circ}C$. B. $2^{\circ}C$. C. $2,6^{\circ}C$. D. $2,5^{\circ}C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6 \Rightarrow T'(t) = -0,2t + 1,2 \Rightarrow T'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Đồng thời ta có:
$$\begin{cases} T(0) = 98,6^{\circ}F = 37^{\circ}C \\ T(6) = 102,2^{\circ}F = 39^{\circ}C \\ T(11) = 99,7^{\circ}F = 37,6^{\circ}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{t \in [0;12]} T(t) = T(6) = 39^{\circ}C \\ \min_{t \in [0;12]} T(t) = T(0) = 37^{\circ}C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta t = 2^{\circ}C$$

Cách khác: Ta có $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6 = 102,2 - 0,1(t-6)^2 \leq 102,2 \forall t \in [0;12]$

Vậy dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 6$. Do đó $\max T = 102,2 \Leftrightarrow t = 6$

- Câu 2.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 4t^3 - \frac{t^4}{2}$ (người). Hãy xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t với $t \in [0;6]$. Tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?
- A. 6. B. 3. C. 4 D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 12t^2 - 2t^3, x \in [0;6]$.

Khảo sát hàm $f'(x)$.

Ta có $f''(t) = 24t - 6t^2; f''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$.

t		0	4	6	
$f''(t)$			+	0	-
$f'(t)$				64	

Vậy tốc độ truyền lớn nhất sẽ lớn nhất vào ngày thứ 4.

Câu 3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $x = 8$.B. $x = 10$.C. $x = 15$.D. $x = 7$.

Lời giải

Chọn B

Cách 01 :Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$\text{Có } G'(x) = 0,035[2x(15-x) - x^2] = 0,105x(10-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$G(0) = 0; G(10) = \frac{35}{2}; G(15) = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	15	
$G'(x)$		+	0	-
$G(x)$	0	$\nearrow \frac{35}{2}$	$\searrow 0$	

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.**Cách 02 :**Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$\text{Có } G'(x) = 0,035[2x(15-x) - x^2] = 0,105x(10-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$G(0) = 0; G(10) = \frac{35}{2}; G(15) = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	15		
$G'(x)$		+	0	-	
$G(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{35}{2}$	$\searrow$	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.**Cách 03 :**Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x) = 0,035[2x(15-x) - x^2] = 0,105x(10-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=10 \end{cases}$.

$G(0) = 0$; $G(10) = \frac{35}{2}$; $G(15) = 0$.

Bảng biến thiên:

x	0	10	15		
$G'(x)$		+	0	-	
$G(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{35}{2}$	$\searrow$	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x=10$ miligam.

Câu 4. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ.

B. 1 giờ.

C. 3 giờ.

D. 2 giờ.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$, $t > 0$ ta có $c'(t) = \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$.

Cho $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t		0	1	$+\infty$	
$c'(t)$			+	0	-
$c(t)$				$\frac{1}{2}$	

Vậy $\max_{(0;+\infty)} c(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 1$.

- Câu 5.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A.** 24(m/s). **B.** 108(m/s). **C.** 64(m/s). **D.** 18(m/s).

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = -\frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) + 24 = 24 - \frac{3}{2}(t - 4)^2 \leq 24$

Vậy $\max_{[0;6]} v(t) = 24$ (m/s) tại thời điểm $t = 4$ (giây).

Cách 2:

Ta có: $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 12t, t \in [0;6]$.

Khảo sát hàm $v(t)$:

Ta có: $v'(t) = -3t + 12$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

t		0	4	6	
v'		+	0	-	
v			24		

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 24(m/s).

- Câu 6.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng
- A.** 29m/s **B.** 26m/s **C.** 17m/s **D.** 36m/s.

Lời giải

Chọn A

Có: $v = s' = -3t^2 + 12t + 17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v = -3t^2 + 12t + 17$ trên khoảng $(0;8)$

$v' = -6t + 12, v' = 0 \Rightarrow t = 2$

BBT:

t	0	2	8
v'		+	0
v			29

Vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: 29 m/s .

- Câu 7.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 144 (m/s) . B. 36 (m/s) . C. 243 (m/s) D. 27 (m/s) .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t, t \in [0; 9]$.

Khảo sát hàm $v(t)$:

Ta có: $v'(t) = -2t + 12$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

t	0	6	9
v'	+	0	-
v		36	

Vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36 (m/s) .

- Câu 8.** Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5 \text{ s}$ bằng:
- A. 49 m/s . B. 25 m/s . C. 10 m/s . D. 18 m/s .

Lời giải

Chọn A

$v(5) = S' = gt = 9,8 \cdot 5 = 49 \text{ m/s}$

- Câu 9.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng

thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $216(m/s)$. B. $30(m/s)$. C. $400(m/s)$ **D. $54(m/s)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t, t \in [0; 10]$.

Khảo sát hàm $v(t)$:

Ta có: $v'(t) = -3t + 18$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

t		0	6	10	
v'		+	0	-	
v			54		

Vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54(m/s)$.

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. $89(m/s)$.** B. $109(m/s)$. C. $71(m/s)$. D. $\frac{25}{3}(m/s)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Theo ý nghĩa vật lý của đạo hàm, vận tốc tức thời của một vật khi chuyển động là đạo hàm của quãng đường theo thời gian t .

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t\right)' = t^2 - 2t + 9$.

Xét hàm số $v(t) = t^2 - 2t + 9$ trên đoạn từ $[0; 10]$.

t	0	1	10
$v'(t)$		0	+
$v(t)$	9	8	89

Từ bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm $v(t)$ là 89.

Cách 2:

Ta có $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$.

Ta có: $v' = 2t - 2 \Rightarrow v' = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Tính: $v(1) = 8$; $v(10) = 89$, $v(0) = 9$.

Vậy vận tốc lớn nhất là 89(m/s).

Câu 11. Công ty A chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất thì tổng chi phí sẽ là $C(q) = 3q^2 + 72q - 9789$ (đơn vị tiền tệ). Giá mỗi sản phẩm công ty sẽ bán với giá $p(q) = 180 - 3q$. Hãy xác định số sản phẩm công ty cần sản xuất sao cho công ty thu được lợi nhuận cao nhất ?

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $q(0 < q < 60)$ là số sản phẩm mà công ty A cần sản xuất để thu được lợi nhuận cao nhất.

Khi đó, nếu bán hết số sản phẩm thì doanh thu sẽ là $D(q) = q(180 - 3q) = 180q - 3q^2$

Suy ra lợi nhuận mà công ty thu được là $L(q) = D(q) - C(q) = -6q^2 + 108q + 9789$

Bài toán trở thành tìm $\max_{0 < q < 60} L(q) = ?$

Ta có $L'(q) = -12q + 108, L'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 9 \in (0; 60)$

Lập bảng biến thiên ta có $\max_{0 < q < 60} L(q) = L(9) = 10275$

Vậy để thu được lợi nhuận cao nhất thì công ty cần sản xuất 9 sản phẩm.

Câu 12. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$; Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Lại biết chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$; C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 51 (tấn).

B. 52 (tấn).

C. 2 (tấn).

D. 3 (tấn).

Lời giải

Chọn B.

Gọi Q là lượng gạo doanh nghiệp X cần sản xuất để đạt lợi nhuận cao nhất thì khi đó ta có

$$Q = Q_D = 656 - \frac{1}{2}P \Rightarrow P = 1312 - 2Q.$$

• Doanh thu của doanh nghiệp: $R = P.Q = (1312 - 2Q).2Q$

• Lợi nhuận của doanh nghiệp: $L = R - C = -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 100$

Khảo sát hàm trên ta thấy lợi nhuận đạt cực đại khi $Q = 52$.

Câu 13. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: ả ếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n(\text{gam})$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?

A. 10

B. 12

C. 16

D. 24

Lời giải

Chọn B.

Gọi n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ ($n > 0$). Khi đó:

Cân nặng của một con cá là: $P(n) = 480 - 20n(\text{gam})$

Cân nặng của n con cá là: $n.P(n) = 480n - 20n^2(\text{gam})$

Xét hàm số: $f(n) = 480n - 20n^2, n \in (0; +\infty)$. Ta có: $f'(n) = 480 - 40n$, cho $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$

n		0	12	10	
$f'(n)$		+	0	-	
$f(n)$			2880		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số cá phải thả trên một đơn vị diện tích hồ để có thu hoạch nhiều nhất là 12 con.

- Câu 14.** Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.
- A.** 20.000 đ. **B.** 15.000 đ. **C.** 10.000 đ. **D.** 22.000 đ.

Lời giải

Chọn D.

Theo giả thiết, ta có $T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000$.

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + \frac{10000}{x} + 0,2 \geq 2 + 0,2 = 2,2 \text{ vạn đồng} = 22.000 \text{ đồng}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow 0,0001x = \frac{10000}{x} \Leftrightarrow x = 10000.$$

- Câu 15.** Theo thống kê tại một nhà máy Z , nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Để tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ (và như vậy, nếu giảm thời gian làm việc 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có thêm 1 công nhân đi làm đồng thời năng suất lao động tăng 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ). Để đi ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Để nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?
- A.** $x = 36$. **B.** $x = 32$. **C.** $x = 44$. **D.** $x = 48$.

Lời giải

Chọn A

Gọi t là số giờ làm tăng thêm (hoặc giảm) mỗi tuần, $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{số công nhân bỏ việc (hoặc tăng thêm)} \text{ là } \frac{t}{2} \text{ nên số công nhân làm việc là } 100 - \frac{t}{2} \text{ người.}$$

$$\text{Năng suất của công nhân còn } 120 - \frac{5t}{2} \text{ sản phẩm một giờ.}$$

$$\text{Số thời gian làm việc một tuần là } 40 + t \text{ giờ.}$$

$$\text{Để nhà máy hoạt động được thì } \begin{cases} 40+t > 0 \\ 120-\frac{5t}{2} > 0 \Rightarrow t \in (-40; 48) \\ 100-\frac{t}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Số sản phẩm trong một tuần làm được: } S = \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40+t).$$

$$\text{Số sản phẩm thu được là } f(t) = \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40+t) - \frac{95(40+t)^2 + 120(40+t)}{4}.$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{2} \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40+t) - \frac{5}{2} \left(100 - \frac{t}{2}\right) (40+t) + \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) - \frac{95}{2} (40+t) - 30 \\ &= \frac{15}{4} t^2 - \frac{1135}{2} t - 2330. \end{aligned}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{466}{3} \text{ (L)} \end{cases}.$$

Ta có BBT như sau

t	-40	-4	48	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			$f(-4)$	

Vậy số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần lớn nhất khi $x = 36$ (giờ).

Câu 16. Đặt một điện áp xoay chiều $u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)\text{V}$, $t(\text{s})$ vào hai đầu một đoạn mạch gồm biến trở R nối tiếp với cuộn dây thuần cảm độ tự cảm L . Điều chỉnh R để tổng điện áp hiệu dụng $(U_R + U_L)$ đạt giá trị cực đại, giá trị cực đại đó là

A. $100\sqrt{2} \text{ V}$.

B. 200 V .

C. $50\sqrt{2} \text{ V}$

D. 100 V .

Lời giải

Chọn A.

$$U_R + U_L = I(R + Z_L) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} (R + Z_L) = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{(R + Z_L)^2}}}$$

$$\text{Để } (U_R + U_L)_{MAX} \longrightarrow y(R)_{MIN} \text{ với } y(R) = \frac{R^2 + Z_L^2}{(R + Z_L)^2} \quad (R > 0)$$

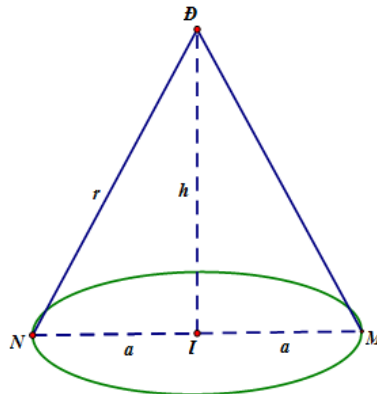
$$\text{Khi đó } y'(R) = \frac{2R(R + Z_L)^2 - 2(R^2 + Z_L^2)(R + Z_L)}{(R + Z_L)^4} = \frac{2R(R + Z_L) - 2(R^2 + Z_L^2)}{(R + Z_L)^3}.$$

$$y'(R) = 0 \Leftrightarrow 2R^2 + 2RZ_L - 2R^2 - 2Z_L^2 = 0 \Leftrightarrow 2Z_L(R - Z_L) = 0 \Leftrightarrow \boxed{R = Z_L}$$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên (họ sinh tự vẽ) ta suy ra } y_{\min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R = Z_L$$

$$\text{Do đó } \boxed{(U_R + U_L)_{MAX} = U\sqrt{2} \Leftrightarrow R = Z_L} \Rightarrow (U_R + U_L)_{MAX} = 100\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{A}$$

Câu 17. Cần phải đặt một ngọn đèn ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a . Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).



A. $h = \frac{3a}{2}$

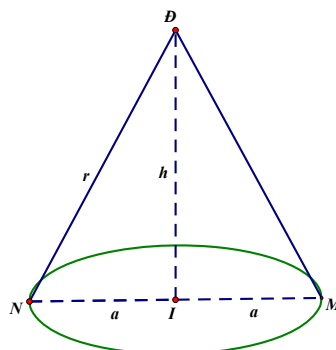
B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $h = \frac{a}{2}$

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn B



Ta có: $r = \sqrt{a^2 + h^2}$ (Định lý Py-ta-go)

$$\sin \alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$\Rightarrow C = k \cdot \frac{\sin \alpha}{R^2} = k \cdot \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2} (a^2 + h^2)}$$

Xét hàm $f(h) = \frac{h}{(\sqrt{a^2 + h^2})^3} (h > 0)$, ta có:

$$f'(h) = \frac{\sqrt{(a^2 + h^2)}^3 - 2h^2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + h^2}}{(a^2 + h^2)^3}$$

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(h^2 + a^2)}^3 = 3h^2 \cdot \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\Leftrightarrow h^2 + a^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Bảng biến thiên:

h	0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'(h)	+	-	
f(h)			

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(h)_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = k \cdot f(h)_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

BÀI 37: BÀI TOÁN THỰC TẾ CHƯA XÂY DỰNG MÔ HÌNH .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

*Bài toán thực tế tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất **chưa** xây dựng mô hình hàm.*

Một số phần kiến thức nằm ở các chương sau nên thầy chỉ lấy bài ở chương 1 thôi nhé

Phương pháp:

PHẦN I BÀI TOÁN VỀ QUÃNG ĐƯỜNG

PHẦN II BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

PHẦN III BÀI TOÁN LIÊN HỆ DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

PHẦN IV BÀI TOÁN VỀ LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

PHẦN V BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MŨ, LOGARIT

PHẦN VI BÀI TOÁN LIÊN HỆ TÍCH PHÂN, MỐI QUAN HỆ ĐẠO HÀM - NGUYÊN HÀM

PHẦN VII BÀI TOÁN KINH TẾ

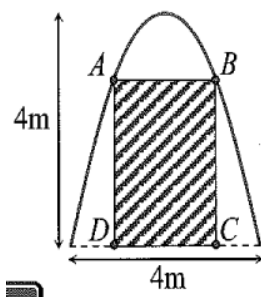
- ▶
- ▶
- ▶
- ▶
- ▶

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (mét). Giả thiết quả bóng được đá từ độ cao $1m$ và đạt được độ cao $6m$ sau 1 giây đồng thời sau 6 giây quả bóng trở về độ cao $1m$. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ lúc bắt đầu được đá, độ cao lớn nhất của quả bóng đạt được là bao nhiêu?

A. $9m$.B. $10m$.C. $6m$ D. $13m$.

Câu 2. Một đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ tại trường THPT Pleiku, Đoàn trường có thực hiện dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng hình parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$ phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí trang trí hoa văn là 100.000 đồng cho một m^2 bằng. Hỏi chi phí $f'(x)$ thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



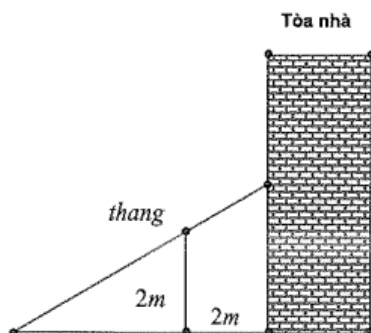
A. 615000 (đồng).

B. 440000 (đồng).

C. 451000 (đồng).

D. 606000 (đồng).

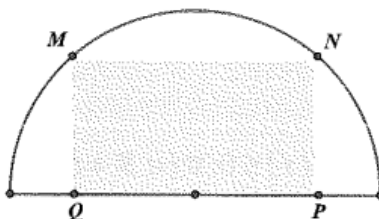
Câu 3. Một bức tường cao $2m$ nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà $2m$. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?

A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}m$.B. $4\sqrt{2}m$.

C. $6m$

D. $3\sqrt{5}m$.

Câu 4. từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích lớn nhất có thể có của miếng tôn hình chữ nhật là:



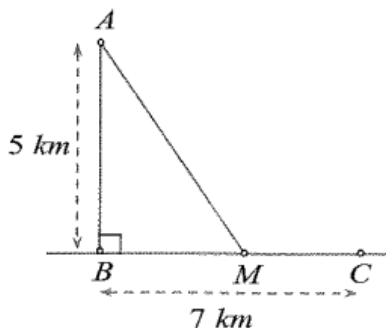
A. $6\sqrt{3}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 7

D. 9.

Câu 5. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7(km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?



A. $0,0(km)$.

B. $7,0(km)$.

C. $4,5(km)$

D. $2,1(km)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

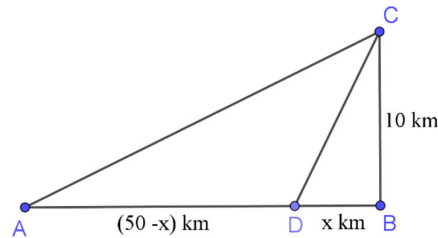
Câu 1. Thầy Tô Quốc An đang ở khách sạn A bên bờ biển, cô cần đi du lịch đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km , khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C là 50 km . Từ khách sạn A , Thầy Tô Quốc An có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy để đến hòn đảo C (như hình vẽ bên). Biết rằng chi phí đi đường thủy là 5 USD/km , chi phí đi đường bộ là 3 USD/km . Hỏi Thầy Tô Quốc An phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu km để chi phí là nhỏ nhất.

A. $\frac{15}{2}(\text{km})$.

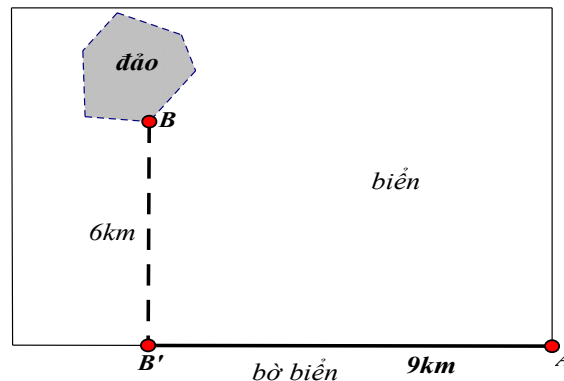
B. $\frac{85}{2}(\text{km})$.

C. $50(\text{km})$.

D. $10\sqrt{26}(\text{km})$.



Câu 2. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km . Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000 USD mỗi km , và 130.000 USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km . Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:



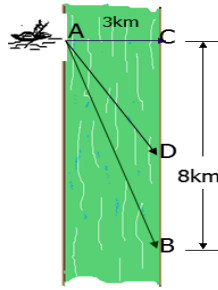
A. 6.5 km .

B. 6 km .

C. 0 km .

D. 9 km .

Câu 3. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h , chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8\text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .



A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$.

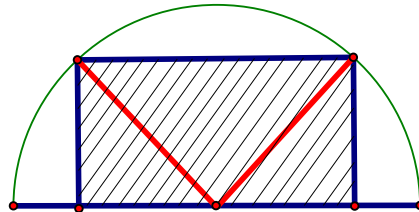
D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

- Câu 4.** Vòng quay mặt trời – Sun Wheel tại Công viên Châu Á, Đà Nẵng có đường kính 100 m, quay hết một vòng trong khoảng thời gian 15 phút. Lúc bắt đầu quay, một người ở cabin thấp nhất (độ cao 0 m). Hỏi người đó đạt được độ cao 85 m lần đầu tiên sau bao nhiêu giây (làm tròn đến 1/10 giây)?
- A. 336,1 s . B. 382,5 s . C. 380,1 s . D. 350,5 s .

- Câu 5.** Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800(m). Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?
- A. $200m \times 200m$ B. $300m \times 100m$ C. $250m \times 150m$ D. Đáp án khác

- Câu 6.** Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?
- A. $S_{\max} = 3600m^2$ B. $S_{\max} = 4000m^2$ C. $S_{\max} = 8100m^2$ D. $S_{\max} = 4050m^2$

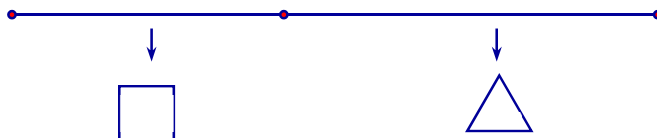
- Câu 7.** Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6\text{ cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



A. $S_{\max} = 36\pi \text{ cm}^2$. B. $S_{\max} = 36 \text{ cm}^2$. C. $S_{\max} = 96\pi \text{ cm}^2$. D. $S_{\max} = 18 \text{ cm}^2$.

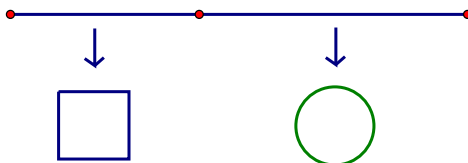
- Câu 8.** Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?
- A. 40cm . B. $40\sqrt{3}\text{cm}$. C. 80cm . D. $40\sqrt{2}\text{cm}$.

- Câu 9.** Một sợi dây có chiều dài là 6 m , được chia thành hai phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



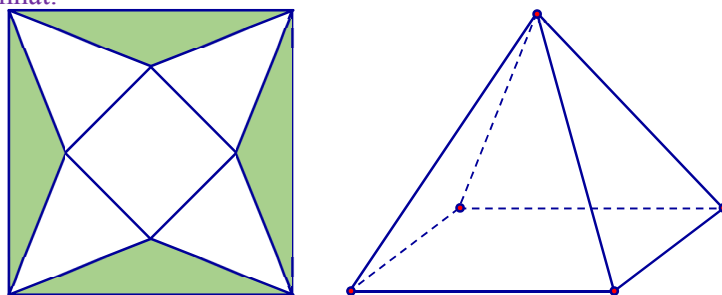
A. $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m). B. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m). C. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m). D. $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m).

- Câu 10.** Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng:



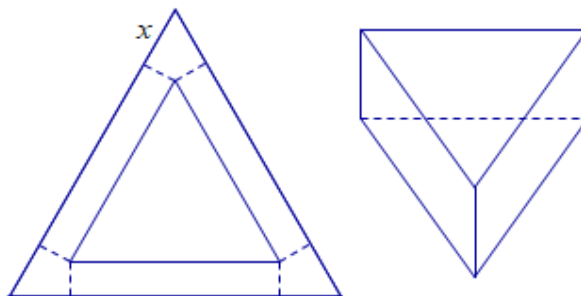
A. $\frac{a}{r} = 1$. B. $\frac{a}{r} = 2$. C. $\frac{a}{r} = 3$. D. $\frac{a}{r} = 4$.

- Câu 11.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1(m) như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



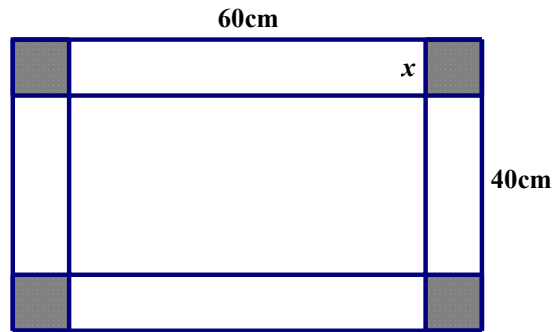
A. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

- Câu 12.** Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gập các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



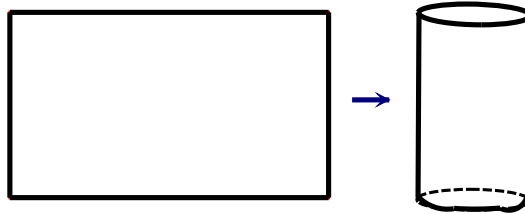
A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{5}$. D. $\frac{a}{6}$.

- Câu 13.** Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 40 cm và 60 cm người ta cắt bỏ bốn hình vuông ở bốn góc để gập lại được một cái hộp không nắp.



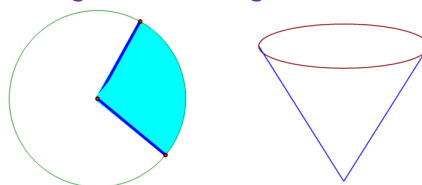
Để thể tích của hộp đó lớn nhất thì cạnh hình vuông cắt bỏ có giá trị gần với giá trị nào sau đây?

- A. 7,85 cm. B. 15 cm. C. 3,92 cm. D. 18 cm.
- Câu 14.** Bạn An là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là:

- A. 35 cm; 25 cm B. 40 cm; 20 cm C. 50 cm; 10 cm D. 30 cm; 30 cm
- Câu 15.** Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6\text{ cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gập phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ). Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng



- A. $\pi\sqrt{6}\text{ cm}$ B. $6\pi\sqrt{6}\text{ cm}$ C. $2\pi\sqrt{6}\text{ cm}$ D. $8\pi\sqrt{6}\text{ cm}$
- Câu 16.** Một công ty dự kiến chi 1 tỷ đồng để sản xuất các thùng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh thùng đó là 100.000 đ/m², chi phí để làm mỗi mặt đáy của thùng đó là 120.000 đ/m². Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được (Giả sử chi phí các mối nối không đáng kể).
- A. 18.209 thùng. B. 57.582 thùng. C. 12.525 thùng. D. 58.135 thùng.

- Câu 17.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD mỗi chiếc. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất ?

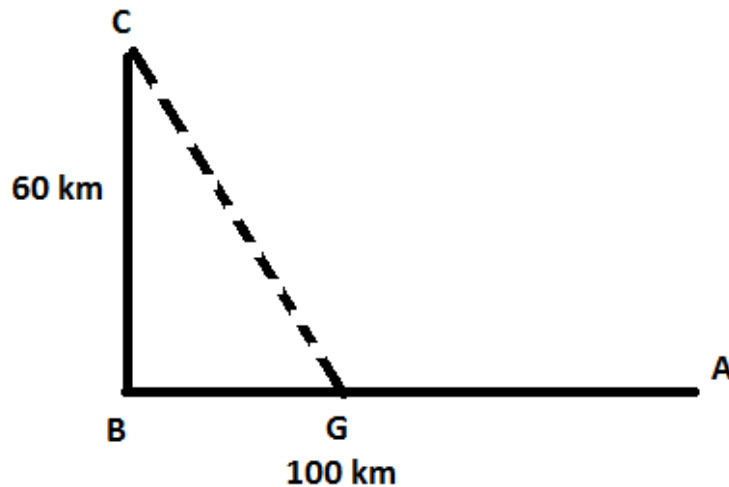
- A. 20 lần mỗi năm và 90 cái mỗi lần. B. 25 lần mỗi năm và 110 cái mỗi lần.
C. 25 lần mỗi năm và 120 cái mỗi lần. D. 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.
- Câu 18.** Công ty xe khách Gin-Bơ dự định tăng giá vé trên mỗi hành khách. Hiện tại giá vé là 50.000 VNĐ một khách và có 10.000 khách trong một tháng. Nhưng nếu tăng giá vé thêm 1.000 VNĐ một hành khách thì số khách sẽ giảm đi 50 người mỗi tháng. Hỏi công ty sẽ tăng giá vé là bao nhiêu đối với một khách để có lợi nhuận lớn nhất?
A. 50.000 VNĐ. B. 15.000 VNĐ. C. 35.000 VNĐ. D. 75.000 VNĐ.
- Câu 19.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?
A. 115.250.000. B. 101.250.000. C. 100.000.000. D. 100.250.000.
- Câu 20.** Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.
A. 44.000 đ. B. 43.000 đ. C. 42.000 đ. D. 41.000 đ.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là $60km$, khoảng cách từ A đến B là $100km$, mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.

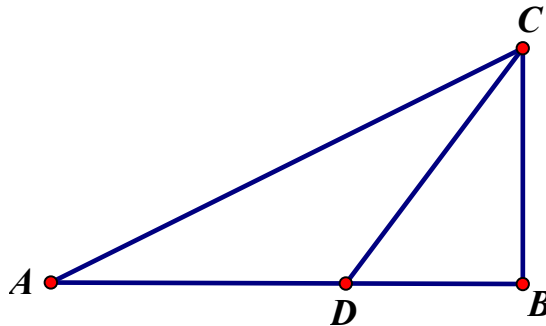
- A. $40km$ B. $45km$ C. $55km$ D. $60km$

Câu 2. Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ điểm C đến điểm B trên đất liền là $60km$, khoảng cách từ A đến B là $100km$, góc ABC bằng 90° . Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.



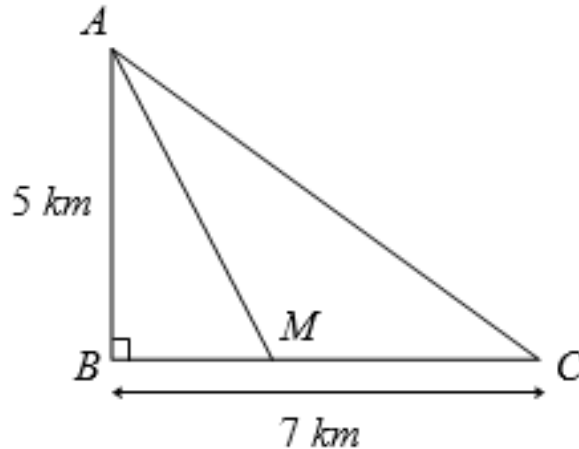
- A. $55 km$. B. $40 km$. C. $60 km$. D. $45 km$.

Câu 3. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là $10km$, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là $40km$. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là $5 USD/km$, đi đường bộ là $3 USD/km$. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40 km$, $BC = 10 km$)

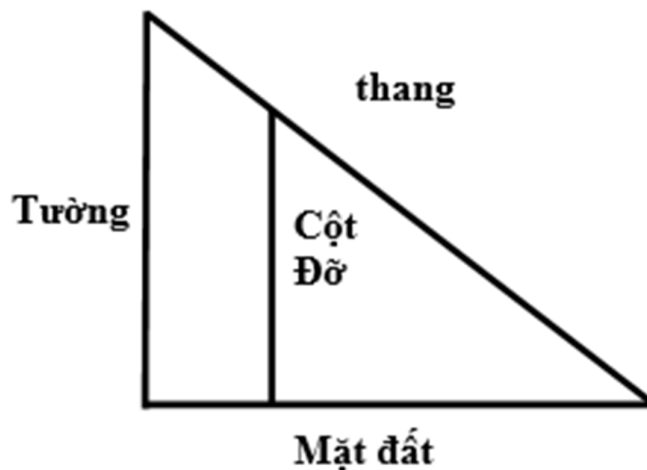


- A. $10 km$. B. $\frac{65}{2} km$. C. $40 km$. D. $\frac{15}{2} km$.

- Câu 4.** Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Hỏi cần đặt vị trí của M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?

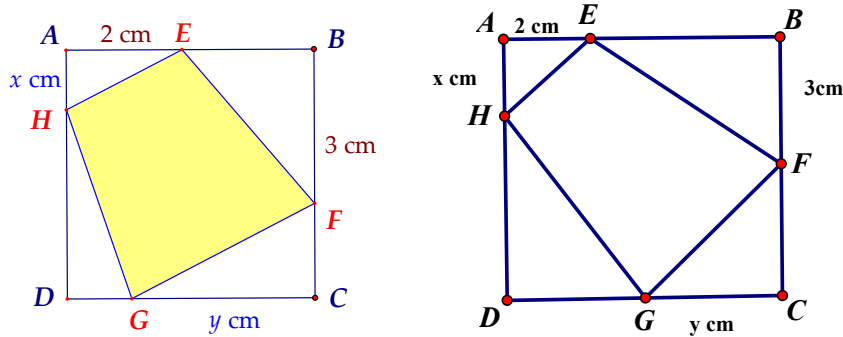


- A. 5,5 km. B. $2\sqrt{5}$ km. C. $\sqrt{5}$ km. D. 4,5 km.
- Câu 5.** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).
- A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.
- Câu 6.** Tính chiều dài nhỏ nhất của cái thang để nó có thể dựa vào tường và mặt đất, bắc qua cột đỡ cao 4m. Biết cột đỡ song song và cách tường 0,5 m, mặt phẳng chứa tường vuông góc với mặt đất – như hình vẽ, bỏ qua độ dày của cột đỡ.



- A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 7.** Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(\text{cm}^2)$. Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?
- A. $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ B. $20\text{cm} \times 5\text{cm}$ C. $25\text{cm} \times 4\text{cm}$ D. Đáp án khác

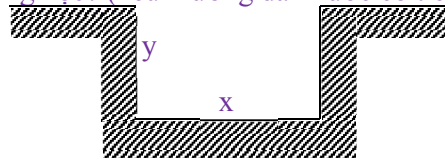
Câu 8. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 7 B. 5 C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ D. $4\sqrt{2}$.

Câu 9. Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)

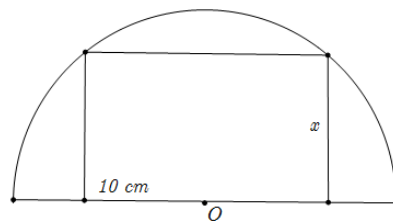


- A. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$ B. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$
C. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$ D. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

Câu 10. Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là a sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?

- A. $x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2}$ B. $x = \frac{a}{3}; y = \frac{a}{3}$ C. $x = \frac{a}{6}; y = \frac{2a}{3}$ D. Đáp án khác

Câu 11. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 43fp, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.



- A. 3fp^5 B. 433fp^5 C. 493fp^5 D. 533fp^5

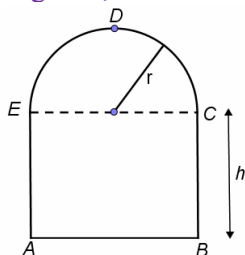
Câu 12. Trong các tam giác vuông có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền là a ($a > 0$), tam giác có diện tích lớn nhất là

- A. $\frac{a^2}{5\sqrt{6}}$ B. $\frac{a^2}{3\sqrt{6}}$ C. $\frac{a^2}{6\sqrt{5}}$ D. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$

Câu 13. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

- A. 67398224 đồng. B. 67593346 đồng. C. 63389223 đồng. D. 67398228 đồng.

Câu 14. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn, tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



- A. $\frac{250}{4}$ cm. B. $\frac{125}{4}$ cm. C. $\frac{250}{\pi + 4}$ cm. D. $\frac{125}{4 + \pi}$ cm.

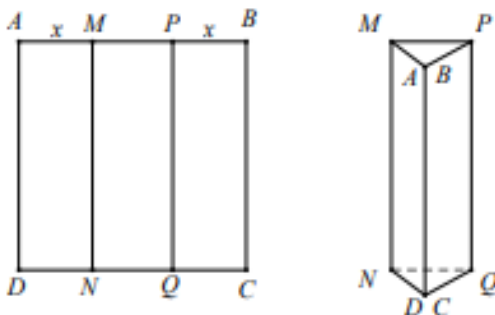
Câu 15. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

- A. $\frac{120}{9 + 4\sqrt{3}}$ m. B. $\frac{40}{9 + 4\sqrt{3}}$ m. C. $\frac{180}{9 + 4\sqrt{3}}$ m. D. $\frac{60}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

Câu 16. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 33,61cm B. 26,43cm C. 40,62cm D. 30,54cm

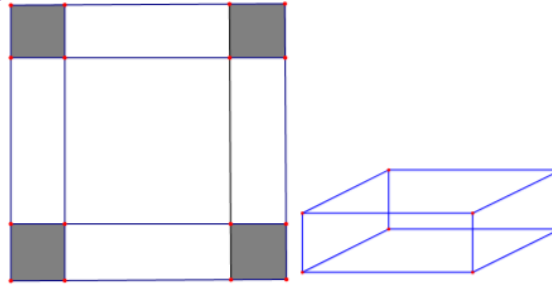
Câu 17. Từ một tấm bìa hình vuông ABCD có cạnh bằng 30cm người ta gấp theo các đoạn MN, PQ sao cho AD, BC trùng nhau để tạo thành một hình lăng trụ bị khuyết 2 đáy như hình minh họa dưới đây



Đề thể tích của khối lăng trụ tương ứng với hình lăng trụ tạo thành là lớn nhất thì giá trị của x bằng

- A. 8 cm. B. 9 cm. C. 10 cm. D. 5 cm.

Câu 18. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12(cm)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại để được cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giải thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 6$.

Câu 19. Nhân ngày phụ nữ Việt Nam 20 -10 năm 2020 , ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là $32 (đvtt)$ có đáy hình vuông và không có nắp . Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp , biết rằng độ dày lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau . Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h;x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h;x$ phải là ?

- A. $x = 2; h = 4$ B. $x = 4; h = 2$ C. $x = 4; h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $x = 1; h = 2$

Câu 20. Người ta muốn thiết kế một bể cá theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính, thể tích $8 m^3$. Giá mỗi m^2 kính là 600.000 đồng/ m^2 . Gọi t là số tiền tối thiểu phải trả. Giá trị t xấp xỉ với giá trị nào sau đây ?

- A. 11.400.000 đồng. B. 6.790.000 đồng. C. 4.800.000 đồng. D. 14.400.000 đồng.

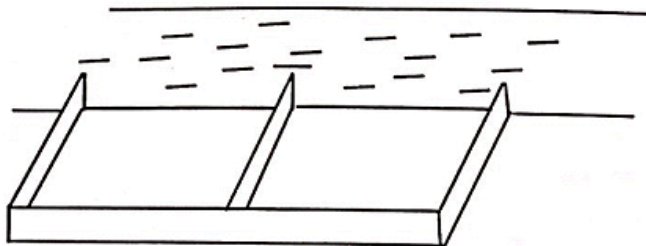
Câu 21. (TQA) Có một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$ rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x = 6$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

Câu 22. Một Bác nông dân cần xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hồ ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

- A. $1200cm^2$ B. $160cm^2$ C. $1600cm^2$ D. $120cm^2$

Câu 23. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



- A. $3125m^2$. B. $50m^2$. C. $1250m^2$. D. $6250m^2$.

- Câu 24.** Một bác nông dân cần xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có dung tích là 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hồ ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?
- A. 1200cm^2 . B. 120cm^2 . C. 160cm^2 . D. 1600cm^2 .
- Câu 25.** Ông A dự định sử dụng hết 5m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?
- A. $1,01\text{m}^3$. B. $1,51\text{m}^3$. C. $1,33\text{m}^3$. D. $0,96\text{m}^3$.
- Câu 26.** Anh Minh muốn xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hồ ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.
- A. 170cm^2 . B. 160cm^2 . C. 150cm^2 . D. 140cm^2 .
- Câu 27.** Một người có một dải ruy băng dài 130cm, người đó cần bọc dải ruy băng đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải dây duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?



- A. $4000\pi\text{cm}^3$ B. $1000\pi\text{cm}^3$ C. $2000\pi\text{cm}^3$ D. $1600\pi\text{cm}^3$
- Câu 28.** Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?
- A. 1m và 2m B. 1dm và 2dm C. 2m và 1m D. 2dm và 1dm
- Câu 29.** Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích $1(\text{m}^3)$. Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó chọn bán kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?
- A. $\sqrt[3]{2\pi}$. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.
- Câu 30.** Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?
- A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

- Câu 31.** Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là
A. 1m **B.** 1,2m **C.** 1.5 m **D.** 2m
- Câu 32.** Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n+10)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?
A. 4 máy. **B.** 6 máy. **C.** 5 máy. **D.** 7 máy.
- Câu 33.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n(gam)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?
A. 10 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 24
- Câu 34.** Một chuyến xe bus có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ \$. Chọn câu đúng:
A. Xe thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.
B. Xe thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135\$.
C. Xe thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160\$.
D. Không có đáp án đúng.
- Câu 35.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất?
A. 23500 **B.** 1223500 **C.** 43500 **D.** 24500
- Câu 36.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất (đơn vị triệu đồng) ?
A. 30,5. **B.** 305. **C.** 40,5. **D.** 30.
- Câu 37.** Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Ắ hưng nếu tăng thêm 1USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.
A. 18 USD/người. **B.** 19 USD/người. **C.** 14 USD/người. **D.** 25 USD/người.

- Câu 38.** ả hà xe khoán cho hai tài xế ta-xi An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng. Hỏi tổng số ngày ít nhất là bao nhiêu để hai tài xế chạy tiêu thụ hết số xăng của mình được khoán, biết rằng chỉ tiêu cho hai người một ngày tổng cộng chỉ chạy đủ hết 10 lít xăng?
- A.** 20 ngày. **B.** 15 ngày. **C.** 10 ngày. **D.** 25 ngày.

BÀI 37: BÀI TOÁN THỰC TẾ CHƯA XÂY DỰNG MÔ HÌNH.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

*Bài toán thực tế tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất **chưa** xây dựng mô hình hàm.*

Một số phần kiến thức nằm ở các chương sau nên thầy chỉ lấy bài ở chương 1 thôi nhé

Phương pháp:

PHẦN I BÀI TOÁN VỀ QUẢNG ĐƯỜNG

PHẦN II BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

PHẦN III BÀI TOÁN LIÊN HỆ DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

PHẦN IV BÀI TOÁN VỀ LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

PHẦN V BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MŨ, LOGARIT

PHẦN VI BÀI TOÁN LIÊN HỆ TÍCH PHÂN, MỐI QUAN HỆ ĐẠO HÀM - NGUYÊN HÀM

PHẦN VII BÀI TOÁN KINH TẾ

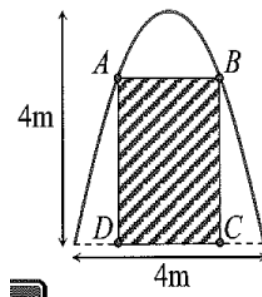
Xác định mối quan hệ các đại lượng (đại lượng đề bài cho và đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất).

- ▶ Quy bài toán thực tế về bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.
- ▶ Lập bảng biến thiên tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của đại lượng cần xét.

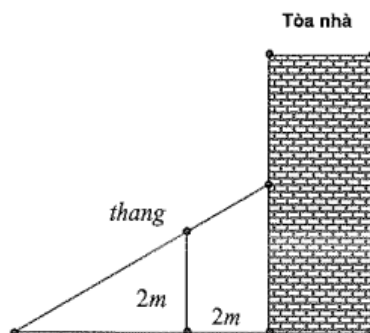
B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (mét). Giả thiết quả bóng được đá từ độ cao $1m$ và đạt được độ cao $6m$ sau 1 giây đồng thời sau 6 giây quả bóng trở về độ cao $1m$. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ lúc bắt đầu được đá, độ cao lớn nhất của quả bóng đạt được là bao nhiêu?
- A. $9m$. B. $10m$.
C. $6m$ D. $13m$.

- Câu 2.** Một đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ tại trường THPT Pleiku, Đoàn trường có thực hiện dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng hình parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$ phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí trang trí hoa văn là 100.000 đồng cho một m^2 bằng. Hỏi chi phí $f'(x)$ thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



- A. 615000 (đồng). B. 440000 (đồng).
C. 451000 (đồng). D. 606000 (đồng).
- Câu 3.** Một bức tường cao $2m$ nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà $2m$. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?

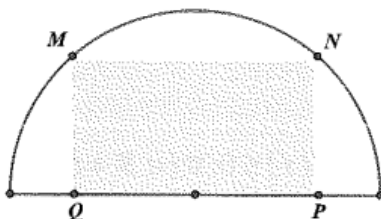


- A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}m$. B. $4\sqrt{2}m$.

C. $6m$

D. $3\sqrt{5}m$.

Câu 4. từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích lớn nhất có thể có của miếng tôn hình chữ nhật là:



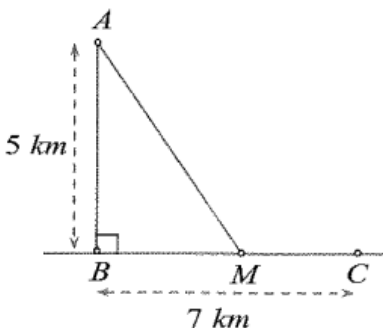
A. $6\sqrt{3}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 7

D. 9.

Câu 5. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7(km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?



A. $0,0(km)$.

B. $7,0(km)$.

C. $4,5(km)$

D. $2,1(km)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

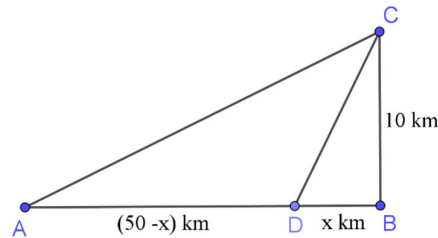
Câu 1. Thầy Tô Quốc An đang ở khách sạn A bên bờ biển, cô cần đi du lịch đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km , khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C là 50 km . Từ khách sạn A , Thầy Tô Quốc An có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy để đến hòn đảo C (như hình vẽ bên). Biết rằng chi phí đi đường thủy là 5 USD/km , chi phí đi đường bộ là 3 USD/km . Hỏi Thầy Tô Quốc An phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu km để chi phí là nhỏ nhất.

A. $\frac{15}{2}(\text{km})$.

B. $\frac{85}{2}(\text{km})$.

C. $50(\text{km})$.

D. $10\sqrt{26}(\text{km})$.



Lời giải

Chọn B

Gọi AD là quãng đường Thầy Tô Quốc An đi đường bộ.

Đặt $DB = x(\text{km}) (0 \leq x \leq 50) \Rightarrow AD = 50 - x(\text{km})$.

Chi phí của Thầy Tô Quốc An: $f(x) = (50 - x)3 + \sqrt{x^2 + 10^2} \cdot 5$ (USD)

$f(x)$ liên tục trên $[0; 50]$.

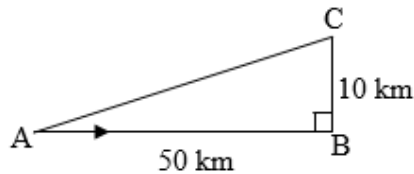
$$\text{Ta có } f'(x) = -3 + 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100}} = \frac{-3\sqrt{x^2 + 100} + 5x}{\sqrt{x^2 + 100}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{x^2 + 100} + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(x^2 + 100) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{9 \cdot 100}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{15}{2} \end{cases}$$

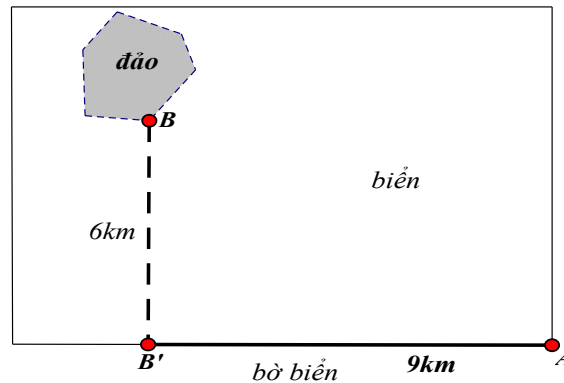
$$\text{Ta có } f(0) = 200; f(50) = 50\sqrt{26}; f\left(\frac{15}{2}\right) = 190$$

Để chi phí ít nhất thì $x = \frac{15}{2}$.

Vậy Thầy Tô Quốc An phải đi đường bộ một khoảng: $AD = 50 - \frac{15}{2} = \frac{85}{2}(\text{km})$ để chi phí ít nhất.



Câu 2. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km . Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km , và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km . Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:



A. 6.5 km .

B. 6 km .

C. 0 km .

D. 9 km .

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = B'C$ (km), $x \in [0; 9]$

$$BC = \sqrt{x^2 + 36}; AC = 9 - x$$

Chi phí xây dựng đường ống là $C(x) = 130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x)$ (USD)

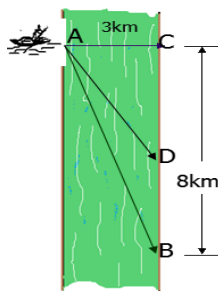
Hàm $C(x)$, xác định, liên tục trên $[0; 9]$ và $C'(x) = 10000 \cdot \left(\frac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 \right)$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25(x^2 + 36) \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$C(0) = 1.230.000; C\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000; C(9) \approx 1.406.165$$

Vậy chi phí thấp nhất khi $x = 2,5$. Vậy C cần cách A một khoảng $6,5\text{ km}$.

Câu 3. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h , chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8\text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .



A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$.

D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn D

○ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

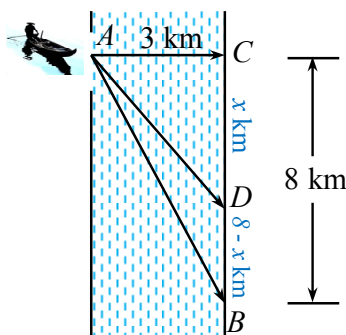
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\frac{3}{6} = 0,5$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\frac{8}{8} = 1$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là 1,5 (giờ).

○ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$ mét $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^h 26'$.

○ Cách 3:



Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD; $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD $= \sqrt{x^2 + 9}$ là $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là $\frac{8 - x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0; 8)$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

- Câu 4.** Vòng quay mặt trời – Sun Wheel tại Công viên Châu Á, Đà Nẵng có đường kính 100 m, quay hết một vòng trong khoảng thời gian 15 phút. Lúc bắt đầu quay, một người ở cabin thấp nhất (độ cao 0 m). Hỏi người đó đạt được độ cao 85 m lần đầu tiên sau bao nhiêu giây (làm tròn đến 1/10 giây)?
- A. 336,1 s. B. 382,5 s. C. 380,1 s. D. 350,5 s.

Lời giải

Chọn B

Xét trong thời gian một vòng quay của cabin đang ở vị trí thấp nhất.

Ta có thời gian để cabin đạt vị trí cao nhất 100 m là $\frac{15}{2} \cdot 60 = 450$ s.

Suy ra $f(x) = \frac{450}{100}x = \frac{9}{2}x$ là thời gian để cabin đạt đến độ cao x m, ($0 \leq x \leq 100$).

Nên cabin đạt độ cao 85 m lần đầu tiên sau $f(85) = \frac{9}{2} \cdot 85 = 382,5$ s.

- Câu 5.** Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800(m). Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?
- A. $200m \times 200m$ B. $300m \times 100m$ C. $250m \times 150m$ D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(m)$ và $y(m)$ ($x, y > 0$).

Diện tích miếng đất: $S = xy$

Theo đề bài thì: $2(x + y) = 800$ hay $y = 400 - x$. Do đó: $S = x(400 - x) = -x^2 + 400x$ với $x > 0$

Đạo hàm: $S'(x) = -2x + 400$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 200$.

Lập bảng biến thiên ta được: $S_{\max} = 40000$ khi $x = 200 \Rightarrow y = 200$.

Kết luận: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Câu 6. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $S_{\max} = 3600m^2$ B. $S_{\max} = 4000m^2$ C. $S_{\max} = 8100m^2$ D. $S_{\max} = 4050m^2$

Lời giải

Chọn D

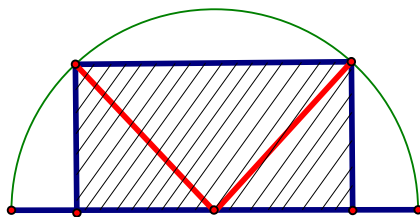
Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x + 2y = 180$. Diện tích của miếng đất là $S = y(180 - 2y)$.

$$\text{Ta có: } y(180 - 2y) = \frac{1}{2} \cdot 2y(180 - 2y) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2y + 180 - 2y)^2}{4} = \frac{180^2}{8} = 4050$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2y = 180 - 2y \Leftrightarrow y = 45m$.

Vậy $S_{\max} = 4050m^2$ khi $x = 90m, y = 45m$.

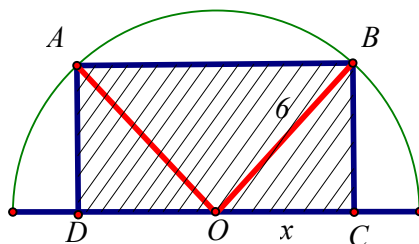
Câu 7. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6cm$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



- A. $S_{\max} = 36\pi cm^2$. B. $S_{\max} = 36 cm^2$. C. $S_{\max} = 96\pi cm^2$. D. $S_{\max} = 18 cm^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $ABCD$ có $OC = x$ ($0 < x < 6$), $OB = 6$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB \cdot BC = 2x\sqrt{36 - x^2} = f(x)$.

Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là giá trị lớn nhất của $f(x) = 2x\sqrt{36-x^2}$ trên $(0;6)$.

$$f'(x) = 2\sqrt{36-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}} = \frac{-4x^2+72}{\sqrt{36-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \in (0;6) \\ x = -3\sqrt{2} \notin (0;6) \end{cases}.$$

BBT

x	0	$3\sqrt{2}$	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	36	0	

Ta có: $\max_{(0;6)} f(x) = 36$.

Vậy $S_{\max} = 36 \text{ cm}^2$.

Câu 8. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

A. 40cm . B. $40\sqrt{3}\text{cm}$. C. 80cm . D. $40\sqrt{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x, 0 < x < 60$

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{120^2 - 240x}$. Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0;60)$

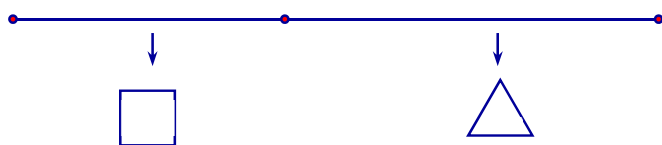
$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	40	60
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$S(40)$	

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$

Câu 9. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành hai phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



- A. $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m). B. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ (m). **C. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m).** D. $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ (m).

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi cạnh tam giác đều là x khi đó chu vi tam giác đều là $3x$ và chu vi hình vuông là $6-3x$

và do đó cạnh hình vuông có độ dài là $\frac{6-3x}{4}$, ($0 < x < 2$)

Tổng diện tích hình tam giác đều và hình vuông là

$$S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2 = \frac{(4\sqrt{3}+9)x^2 - 36x + 36}{16} = f(x)$$

Khảo sát hàm số $f(x)$ trên ($0 < x < 2$) ta thấy $S_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{18}{4\sqrt{3}+9}$.

Cách 2:

Gọi x (m) là cạnh của tam giác đều, ($0 < x < 2$).

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$ (m).

Gọi S là tổng diện tích của hai hình thu được.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2.$$

$$\text{Ta có: } S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{6-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$$

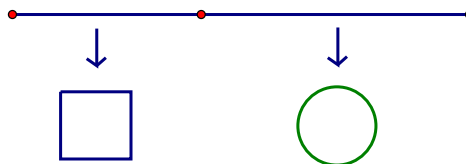
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{6-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$	2
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ (m).

Câu 10. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng:



A. $\frac{a}{r} = 1$.

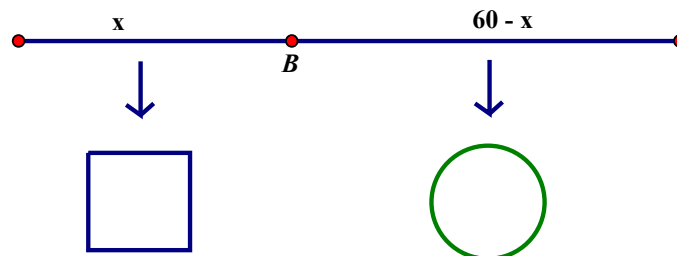
B. $\frac{a}{r} = 2$.

C. $\frac{a}{r} = 3$.

D. $\frac{a}{r} = 4$.

Lời giải

Chọn B



Gọi chiều dài đoạn dây thứ nhất là: x (cm). Điều kiện: $0 < x < 60$.

$\Rightarrow$ chiều dài đoạn dây thứ hai là: $60 - x$ (cm).

Diện tích hình vuông là: $S_1 = a^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$

Diện tích hình tròn là: $S_2 = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{60-x}{2\pi}\right)^2$

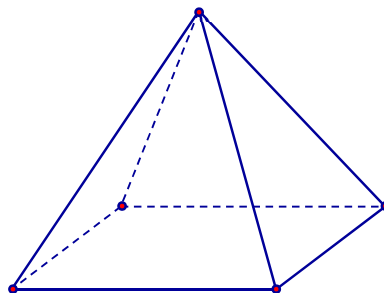
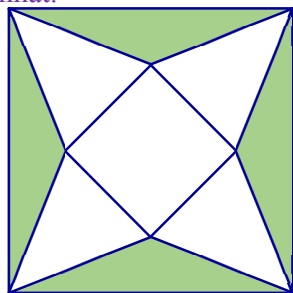
Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{60-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(60-x)^2}{4\pi} \geq \frac{(x+60-x)^2}{16+4\pi} = \frac{3600}{16+4\pi}.$$

Khi đó: S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3600}{16+4\pi}$ khi và chỉ khi $\frac{x}{16} = \frac{60-x}{4\pi} \Leftrightarrow x = \frac{240}{\pi+4}$

$$\Rightarrow a = \frac{60}{\pi+4}, r = \frac{30}{\pi+4} \Rightarrow \frac{a}{r} = 2.$$

Câu 11. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1(m) như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gấp thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gấp lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

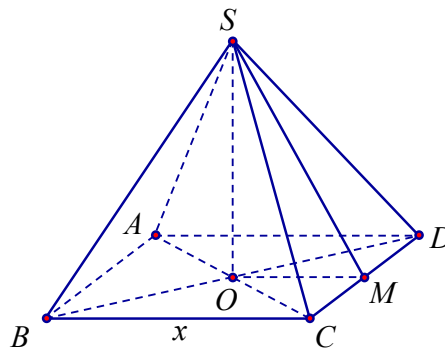
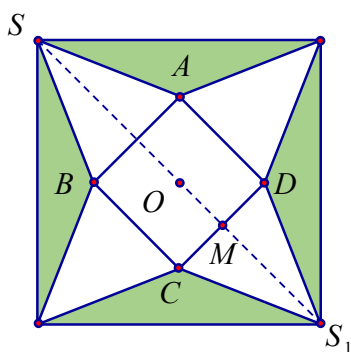
B. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.



Từ hình vuông ban đầu ta tính được $OM = \frac{x}{2}$, $S_1M = S_1O - OM = \frac{\sqrt{2}-x}{2}$. ($0 < x < \sqrt{2}$)

Khi gấp thành hình chóp $S.ABCD$ thì $S_1 \equiv S$ nên ta có $SM = S_1M$.

Từ đó $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{2}x}}{2}$. (Điều kiện $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{2-2\sqrt{2}x} = \frac{1}{6} \sqrt{2x^4 - 2\sqrt{2}x^5}$.

Ta thấy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi $f(x) = 2x^4 - 2\sqrt{2}x^5$, $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $f'(x) = 8x^3 - 10\sqrt{2}x^4 = 2x^3(4 - 5\sqrt{2}x)$

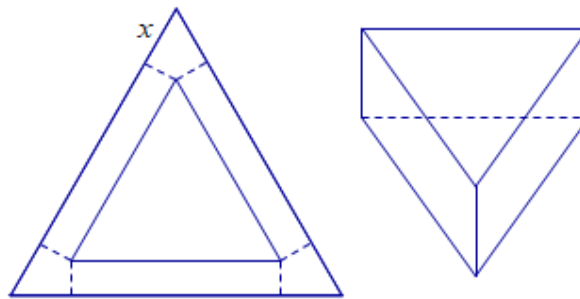
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$f_{\max}$	

Vậy: $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Câu 12. Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



A. $\frac{a}{3}$.

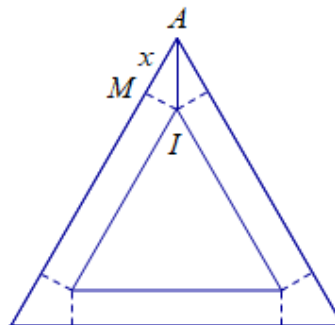
B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{a}{5}$.

D. $\frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác AMI như hình vẽ, đặt $AM = x > 0$, $\widehat{MAI} = 30^\circ \Rightarrow MI = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy $a - 2x$, $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$, chiều cao $\frac{x}{\sqrt{3}}$ nên thể tích khối lăng trụ

$$\text{là } V = \frac{(a-2x)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{4}$$

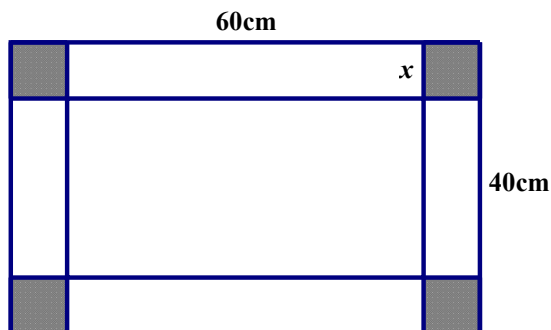
Ta cần tìm $x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$ để thể tích V đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Xét } f(x) = a^2x - 4ax^2 + 4x^3, \text{ có } f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{6} \\ x = \frac{a}{2} (l) \end{cases}$$

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{6}$.

Câu 13. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 40 cm và 60 cm người ta cắt bỏ bốn hình vuông ở bốn góc để gập lại được một cái hộp không nắp.



Để thể tích của hộp đó lớn nhất thì cạnh hình vuông cắt bỏ có giá trị gần với giá trị nào sau đây?

A. 7,85 cm.

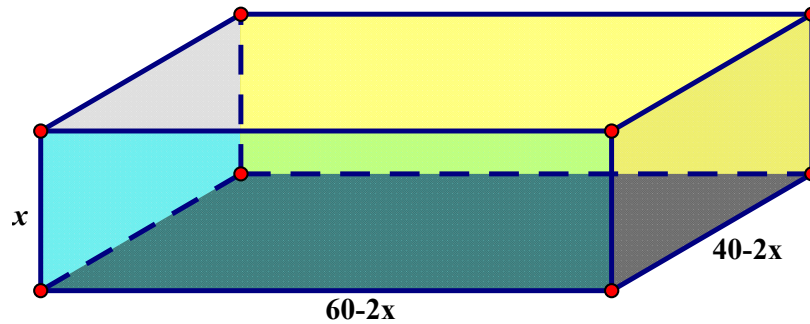
B. 15 cm.

C. 3,92 cm.

D. 18 cm.

Lời giải

Chọn A



Đặt cạnh hình vuông cắt bỏ là x , ($0 < x < 20$).

Khi đó thể tích hình hộp thu được là $V = x(60 - 2x)(40 - 2x)$

$$\Rightarrow V' = 4(3x^2 - 100x + 600) \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50 \pm 10\sqrt{7}}{3}.$$

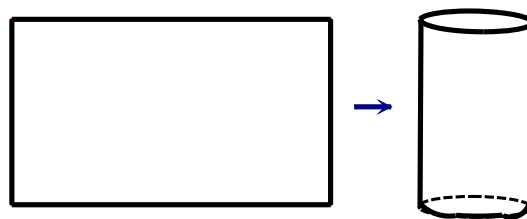
Do $0 < x < 20$ nên $x = \frac{50 - 10\sqrt{7}}{3} = x_0$.

Bảng biến thiên:

x	0	x_0	20
V'		+	0
V		$V_{\max}$	

Vậy thể tích của khối hộp thu được lớn nhất khi $x = \frac{50 - 10\sqrt{7}}{3} \approx 7,85$ cm.

Câu 14. Bạn An là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là:

A. 35 cm; 25 cm

B. 40 cm; 20 cm

C. 50 cm; 10 cm

D. 30 cm; 30 cm

Lời giải

Chọn B

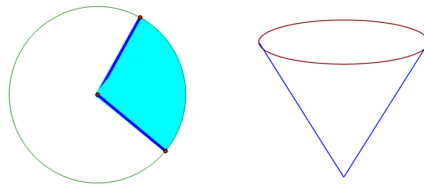
Gọi một chiều dài là $x(\text{cm})$ ($0 < x < 60$), khi đó chiều còn lại là $60 - x(\text{cm})$, giả sử quần cạnh có chiều dài là x lại thì bán kính đáy là $r = \frac{x}{2\pi}$; $h = 60 - x$. Ta có: $V = \pi r^2 \cdot h = \frac{-x^3 + 60x^2}{4\pi}$.

Xét hàm số: $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0; 60)$

$$f'(x) = -3x^2 + 120x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0; 60)$ lớn nhất khi $x = 40$. $60 - x = 20$. Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Câu 15. Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6\text{cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ). Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng



A. $\pi\sqrt{6}\text{ cm}$

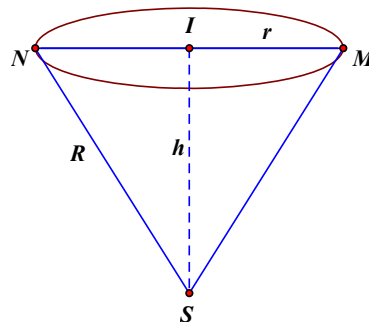
B. $6\pi\sqrt{6}\text{ cm}$

C. $2\pi\sqrt{6}\text{ cm}$

D. $8\pi\sqrt{6}\text{ cm}$

Lời giải

Chọn B



Gọi x ($x > 0$) là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.

Như vậy, bán kính R của hình tròn sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x .

Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \leq \frac{4\pi^2}{9} \left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3} \right)^3 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27}$$

$$\text{Do đó } V \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } \frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 6\sqrt{6}\pi$$

(Lưu ý bài toán có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên **Lời giải** bài toán sẽ dài hơn)

Câu 16. Một công ty dự kiến chi 1 tỷ đồng để sản xuất các thùng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh thùng đó là 100.000đ/m², chi phí để làm mỗi mặt đáy của thùng đó là 120.000đ/m². Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được (Giả sử chi phí các mối nối không đáng kể).

A. 18.209 thùng. **B.** 57.582 thùng. **C.** 12.525 thùng. **D.** 58.135 thùng.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 5 \text{ lít} = 5 \text{ dm}^3 = \frac{1}{200} \text{ m}^3.$$

Gọi $r(m)$ là bán kính đường tròn đáy của thùng sơn hình trụ.

$$\text{Thể tích thùng sơn là: } V = \pi r^2 h = \frac{1}{200} \Rightarrow h = \frac{1}{200\pi r^2}.$$

$$S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot \frac{1}{200\pi r^2} = \frac{1}{100r}, S_d = \pi r^2.$$

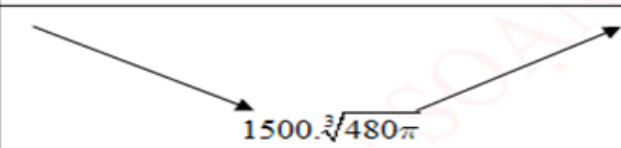
Chi phí để sản xuất 1 thùng sơn là:

$$T(r) = \frac{1}{100r} \times 100.000 + 2\pi r^2 \times 120.000 = \frac{1.000}{r} + 240.000\pi r^2 = 1.000 \left(240\pi r^2 + \frac{1}{r} \right).$$

$$T'(r) = 1.000 \left(480\pi r - \frac{1}{r^2} \right) = 1.000 \left(\frac{480\pi r^3 - 1}{r^2} \right)$$

$$T'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{480\pi}}$$

Bảng biến thiên

r	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{480\pi}}$	$+\infty$
T'	-	0	+
T			

$$\text{Số thùng sơn tối đa là: } \frac{10^9}{1500 \cdot \sqrt[3]{480\pi}} \approx 58.135 \text{ thùng.}$$

- Câu 17.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD mỗi chiếc. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất?
- A. 20 lần mỗi năm và 90 cái mỗi lần. B. 25 lần mỗi năm và 110 cái mỗi lần.
C. 25 lần mỗi năm và 120 cái mỗi lần. **D. 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.**

Lời giải**Chọn D**

Gọi x là số tivi mỗi lần đặt hàng thì $x \in [1; 2500]$

Khi đó, số lượng tivi trung bình gửi trong kho sẽ là $\frac{x}{2}$. Do đó, chi phí gửi hàng trong khi mỗi năm sẽ là $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$.

Số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{x}$.

Do đó chi phí đặt hàng mỗi năm sẽ là $(20 + 9x) \cdot \frac{2500}{x} = \frac{50000}{x} + 22500$.

Suy ra, chi phí hàng tồn kho là $C(x) = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $C(x)$ với $x \in [1; 2500]$.

Ta có: $C'(x) = 5 - \frac{50000}{x^2}$, $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 (tm) \\ x = -100 (ktm) \end{cases}$

Do $C''(x) = \frac{100000}{x^3} > 0, \forall x \in [1; 2500]$ nên $\min_{x \in [1; 2500]} C(x) = C(100) = 23500$

Khi đó số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{100} = 25$ lần.

Vậy để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất thì cửa hàng cần đặt hàng 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

- Câu 18.** Công ty xe khách Gin-Bơ dự định tăng giá vé trên mỗi hành khách. Hiện tại giá vé là 50.000 VNĐ một khách và có 10.000 khách trong một tháng. Nhưng nếu tăng giá vé thêm 1.000 VNĐ một hành khách thì số khách sẽ giảm đi 50 người mỗi tháng. Hỏi công ty sẽ tăng giá vé là bao nhiêu đối với một khách để có lợi nhuận lớn nhất?
- A. 50.000 VNĐ. B. 15.000 VNĐ. C. 35.000 VNĐ. **D. 75.000 VNĐ.**

Lời giải**Chọn D**

Gọi x (nghìn VNĐ) là số tiền công ty sẽ tăng thêm đối với một khách. Khi đó số khách sẽ giảm đi là $50x$ khách nên còn $10.000 - 50x$ khách. Khi đó, $10.000 - 50x > 0 \Leftrightarrow x < 200$.

Khi đó số tiền thu được sau khi tăng giá vé là $f(x) = (50+x)(10.000-50x)$.

Ta có $f(x) = 50(50+x)(200-x) \leq 50\left(\frac{50+x+200-x}{2}\right)^2 = 781250$ (nghìn VNĐ).

Vậy số tiền thu được tăng thêm lớn nhất là $781250 - 50 \times 10.000 = 281.250$ nghìn VNĐ khi $50+x = 200-x \Leftrightarrow x = 75$ nghìn VNĐ.

Câu 19. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

- A. 115.250.000. **B. 101.250.000.** C. 100.000.000. D. 100.250.000.

Lời giải

Chọn B

Ở tháng thu nhập của công ty cao nhất, gọi số căn hộ bị bỏ trống là x thì số tiền thuê mỗi phòng là $2.000.000 + 50.000x$, khi đó số tiền thu được là

$$f(x) = (2.000.000 + 50.000x)(50 - x) = -50.000x^2 + 500.000x + 100.000.000.$$

Ta cần tìm $x \in (0; 50)$ để $f(x)$ lớn nhất.

Ta có $f'(x) = -100.000x + 500.000$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Bảng biến thiên

x	0	5	50
y'		+	0
			-
y	100.000.000	101.250.000	0

Vậy mỗi tháng lợi nhuận cao nhất thu được của công ty là 101.250.000

Câu 20. Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- A. 44.000 đ. B. 43.000 đ. **C. 42.000 đ.** D. 41.000 đ.

Lời giải

Chọn C

Gọi t là số lần giảm ($0 \leq t \leq 4; t \in \mathbb{R}$) thì $5000t$ là tổng số tiền giảm. Lúc đó giá bán sẽ là $50000 - 5000t$, số quả bưởi bán ra là $40 + 50t$ suy ra tổng số tiền bán được cả vốn lẫn lãi là $(50000 - 5000t) \cdot (40 + 50t)$; số tiền vốn nhập ban đầu là $30000 \cdot (40 + 50t)$.

Ta có lợi nhuận thu được là $f(t) = (50000 - 5000t)(40 + 50t) - 30000(40 + 50t)$.

Ta tìm t để $f(t)$ lớn nhất: $f(t) = (4 + 5t)(20 - 5t) \cdot 10000$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{f(t)}{10000} = -25t^2 + 80t + 80 = 144 - (5t - 8)^2 \leq 144, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Để $f(t)$ lớn nhất khi $g(t)$ lớn nhất; $g(t)$ lớn nhất bằng 144 khi $5t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{5}$.

$t = \frac{8}{5} \Rightarrow 5000t = 8000$. Do đó giảm số tiền một quả bưởi là 8000đ, tức giá bán ra một quả là

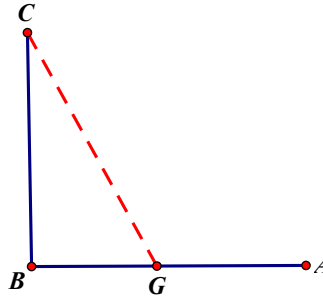
$50000 - 8000 = 42000$ đ thì lợi nhuận thu được cao nhất.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là $60km$, khoảng cách từ A đến B là $100km$, mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.
- A. $40km$ B. $45km$ C. $55km$ D. $60km$

Lời giải

Chọn B.



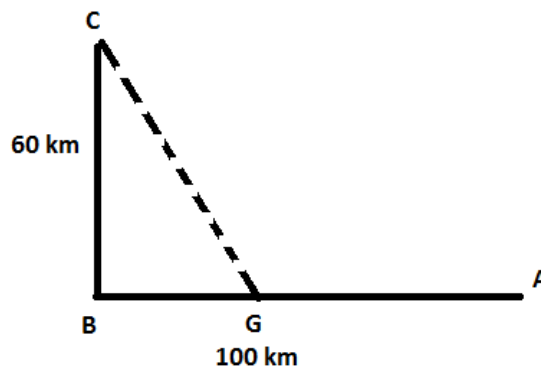
Gọi $BG = x (0 < x < 100) \Rightarrow AG = 100 - x$

Ta có $GC = \sqrt{BC^2 + BG^2} = \sqrt{x^2 + 3600}$

Chi phí mắc dây điện: $f(x) = 3000 \cdot (100 - x) + 5000\sqrt{x^2 + 3600}$

Khảo sát hàm ta được: $x = 45$.

- Câu 2.** Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ điểm C đến điểm B trên đất liền là $60km$, khoảng cách từ A đến B là $100km$, góc ABC bằng 90° . Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.



A. $55 km$.

B. $40 km$.

C. $60 km$.

D. $45 km$.

Lời giải

Chọn A

Gọi khoảng cách từ A đến G là x (km). Ta có $AG = x \Rightarrow BG = (100 - x)$ với $0 \leq x \leq 100$

Xét tam giác vuông CBG có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Chi phí tiền mắc điện là $3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Để chi phí mắc điện ít nhất thì $3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $f(x) = 3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$ với $0 \leq x \leq 100$

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000 \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow 3000 = 5000 \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2} = 5 \cdot (100 - x)$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot (3600 + (100 - x)^2) = 25(100 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow (100 - x)^2 = 2025$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100 - x = 45 \\ 100 - x = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ x = 145(l) \end{cases}$$

Ta có

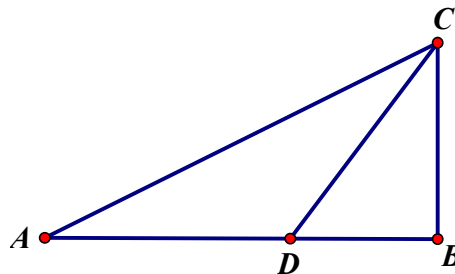
$$f(0) = 583095,1895 \text{ USD}$$

$$f(55) = 540.000 \text{ USD}$$

$$f(100) = 600.000 \text{ USD}$$

Vậy $x = 55$ km.

Câu 3. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$ km, $BC = 10$ km)



A. 10 km.

B. $\frac{65}{2}$ km.

C. 40 km.

D. $\frac{15}{2}$ km.

Lời giải

Chọn B

Đặt $AD = x \text{ km}$, $x \in [0; 40] \Rightarrow BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2}$.

Tổng kinh phí đi từ A đến C là $f(x) = x \cdot 3 + \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \cdot 5$.

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}.$$

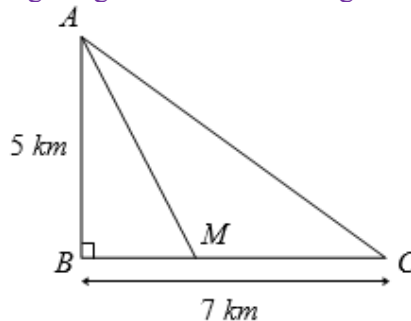
$$f'(x) = 3 + 5 \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{65}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{65}{2}$		40
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

Câu 4. Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km . Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h , rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h . Hỏi cần đặt vị trí của M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?



A. 5,5 km.

B. $2\sqrt{5} \text{ km}$.

C. $\sqrt{5} \text{ km}$.

D. 4,5 km.

Lời giải

Chọn B

Gọi $BM = x (\text{km})$ ($0 \leq x \leq 7$)

Khi đó $AC = \sqrt{x^2 + 25} (\text{km})$

Thời gian người đó đi từ A đến M rồi đến C là: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \frac{7-x}{6}$

Ta có: $f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+25}} - \frac{1}{6}$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 4\sqrt{x^2+25} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5} \in [0; 7]$

$f(0) = \frac{29}{12}$, $f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}$, $f(2\sqrt{5}) = \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{7}{6}$.

Để đến kho nhanh nhất thì $x = 2\sqrt{5}$.

Lưu ý:

Giải bằng phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \frac{7-x}{6}$ vào máy tính

Nhấn phím CALC thay lần lượt 4 đáp án A, B, C, D

Chọn kết quả nhỏ nhất.

Câu 5. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).

A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$.

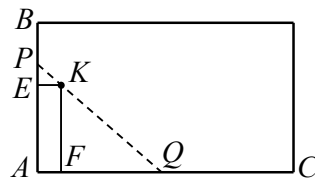
B. $5\sqrt{5}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AP = a$, $AQ = b$ ($a, b > 0$). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE = 1$, $KF = 8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}$, $\frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ} \Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1$ hay $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

(Hoặc có thể dùng phép tọa độ hóa: Gán $A = (0; 0)$, $P = (0; a)$, $Q = (b; 0)$. Khi đó $K = (1; 8)$.)

Phương trình đường thẳng PQ: $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. Vì PQ đi qua K nên $\frac{1}{b} + \frac{8}{a} = 1$.)

Cách 1:

Ta có: $PQ^2 = a^2 + b^2$. Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8k}{a} + \frac{k}{b} = k \quad \forall k > 0$.

$$a^2 + b^2 + k = \left(a^2 + \frac{8k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{b}\right) = \left(a^2 + \frac{4k}{a} + \frac{4k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{2b} + \frac{k}{2b}\right) \geq 3\sqrt[3]{16k^2} + 3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

$$\text{Suy ra } PQ \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{4k}{a} \\ b^2 = \frac{k}{2b} \\ \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 250 \\ a = 10 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-8}$ với $a > 8$. Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Xét hàm số $f(a) = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Ta có $f'(a) = 2a + \frac{2a}{a-8} \cdot \frac{-8}{(a-8)^2} = \frac{2a[(a-8)^3 - 8]}{(a-8)^3}$, $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$.

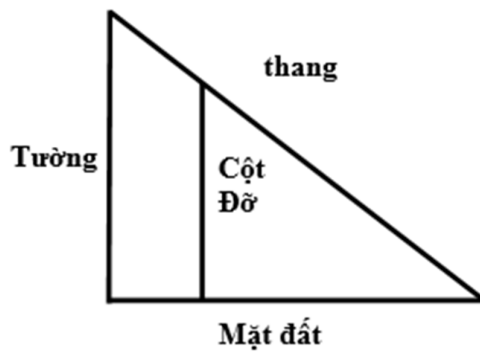
BBT của $f(a)$:

a	8	10	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	125	$+\infty$

Vậy GTNN của $f(a)$ là 125 khi $a = 10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

- Câu 6.** Tính chiều dài nhỏ nhất của cái thang để nó có thể dựa vào tường và mặt đất, bắc qua cột đỡ cao 4m. Biết cột đỡ song song và cách tường 0,5m, mặt phẳng chứa tường vuông góc với mặt đất – như hình vẽ, bỏ qua độ dày của cột đỡ.



A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

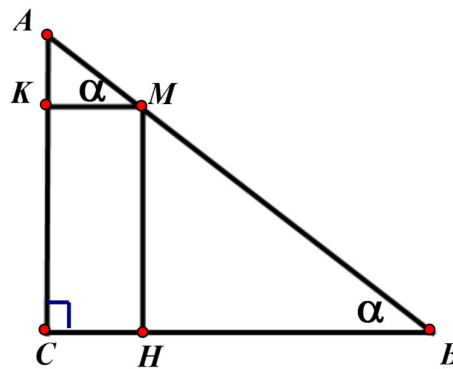
B. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AM = \frac{1}{2\cos\alpha}$; $MB = \frac{4}{\sin\alpha}$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chiều dài của thang là:

$$l(\alpha) = AB = AM + MB = \frac{4}{\sin\alpha} + \frac{1}{2\cos\alpha} \Rightarrow l'(\alpha) = \frac{-8\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow l'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Chiều dài nhỏ nhất của thang là: $\min l(\alpha) = 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Câu 7. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(\text{cm}^2)$. Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

A. $10\text{cm} \times 10\text{cm}$

B. $20\text{cm} \times 5\text{cm}$

C. $25\text{cm} \times 4\text{cm}$

D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x(\text{cm})$ và $y(\text{cm})$ ($x, y > 0$).

Chu vi hình chữ nhật là: $P = 2(x + y) = 2x + 2y$

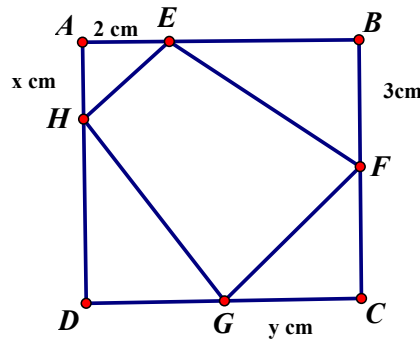
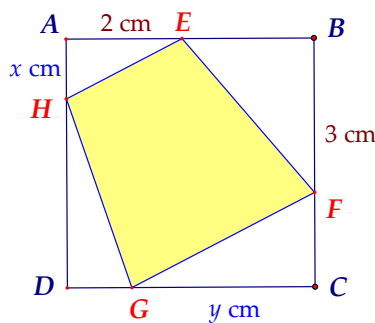
Theo đề bài thì: $xy = 100$ hay $y = \frac{100}{x}$. Do đó: $P = 2(x + y) = 2x + \frac{200}{x}$ với $x > 0$

Đạo hàm: $P'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Lập bảng biến thiên ta được: $P_{\min} = 40$ khi $x = 10 \Rightarrow y = 10$.

Kết luận: Kích thước của hình chữ nhật là 10×10 (là hình vuông).

Câu 8. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 7

B. 5

C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 2:

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1)

Mặt khác $\triangle AEH$ đồng dạng $\triangle CGF$ nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - (4x + \frac{18}{x})$. Ta có $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF} + S_{EBF})$.

Để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $S_{AHE} = \frac{1}{2} AE \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$; $S_{DHG} = \frac{1}{2} DH \cdot DG$; $S_{GCF} = \frac{1}{2} CG \cdot CF = \frac{1}{2} 3y$.

Đặt $S = S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ thì $S = \frac{1}{2} (2x + 3y + 36 - 6x - 6y + xy) = \frac{1}{2} (36 + xy - 4x - 3y)$ (1).

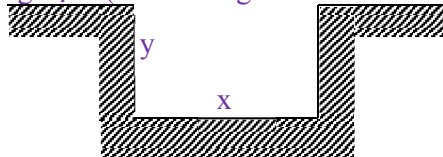
Mặt khác ta lại có $\triangle AEH \sim \triangle CGF \Rightarrow \frac{AH}{CF} = \frac{AE}{CG} \Rightarrow xy = 6$ (2).

Thay (2) vào (1) ta có $S = \frac{1}{2} \left[42 - \left(4x + \frac{18}{x} \right) \right]$.

Ta có S lớn nhất khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ thì $y = 2\sqrt{2}$. Vậy $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)



A. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$ B. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

C. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$ D. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

Lời giải

Chọn D

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Theo bài ra ta có: $S = xy$;

$\ell = 2y + x = \frac{2S}{x} + x$. Xét hàm số $\ell(x) = \frac{2S}{x} + x$. Ta có $\ell'(x) = \frac{-2S}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2S}{x^2}$.

$$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}, \text{ khi đó } y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{S}{2}}.$$

Để thấy với x, y như trên thì mương có dạng thủy động học, vậy các kích thước của mương là

$$x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}} \text{ thì mương có dạng thủy động học.}$$

Câu 10. Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là a sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?

A. $x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2}$

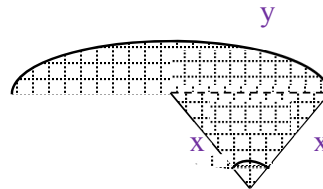
B. $x = \frac{a}{3}; y = \frac{a}{3}$

C. $x = \frac{a}{6}; y = \frac{2a}{3}$

D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A



Gọi x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn. Ta có chu vi cánh điều là $a = 2x + y$. Ta cần tìm mối liên hệ giữa độ dài cung tròn y và bán kính x sao cho diện tích quạt lớn nhất.

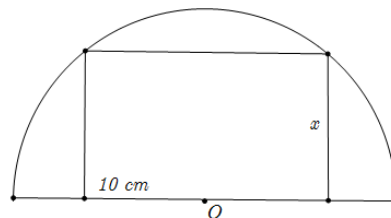
Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt là $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ và độ dài cung tròn $\ell = \frac{2\pi R \alpha}{360}$, ta có

diện tích hình quạt là: $S = \frac{\ell R}{2}$.

Vận dụng trong bài toán này diện tích cánh điều là: $S = \frac{xy}{2} = \frac{x(a-2x)}{2} = \frac{1}{4}2x(a-2x)$.

Để thấy S cực đại $\Leftrightarrow 2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \frac{a}{2}$. Như vậy với chu vi cho trước, diện tích của hình quạt cực đại khi bán kính của nó bằng nửa độ dài cung tròn.

Câu 11. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 43fp, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.



A. ; 3fp⁵

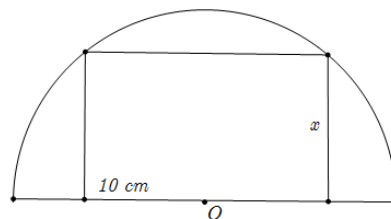
B. 433fp⁵

C. 493fp⁵

D. 533fp⁵

Lời giải

Chọn B.



Gọi $\{^5\text{fp}$, là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn ($3 < \{^5 < 43$).

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là: $5\sqrt{43^5 - \{^5} \#(\text{fp})^1$

Diện tích hình chữ nhật: $V = 5\{\sqrt{43^5 - \{^5}$

Ta có $V' = 5\sqrt{43^5 - \{^5} - \frac{5\{^5}{\sqrt{43^5 - \{^5}} = 5143^5 - 7\{^5$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{thỏa}) \\ x = -\frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{không thỏa}) \end{cases}$$

$$V'' = -; \left\{ \Rightarrow V''\left(\frac{43\sqrt{5}}{5}\right) = -73\sqrt{5} < 3. \text{ Suy ra } \left\{ = \frac{43\sqrt{5}}{5} \text{ là điểm cực đại của hàm } V(\cdot) \right\}.$$

$$\text{Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là: } V = 43\sqrt{5} \sqrt{43^5 - \frac{43^5}{5}} = 433\sqrt{5} \left(\frac{43^5}{5}\right)$$

Câu 12. Trong các tam giác vuông có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền là a ($a > 0$), tam giác có diện tích lớn nhất là

A. $\frac{a^2}{5\sqrt{6}}$.

B. $\frac{a^2}{3\sqrt{6}}$.

C. $\frac{a^2}{6\sqrt{5}}$.

D. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $\triangle ABC$ vuông tại A và có $AB + BC = a$. Đặt $AB = x \Rightarrow BC = a - x$. Vì $BC > AB \Rightarrow 0 < x < \frac{a}{2}$. Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - 2ax} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 x^2 - 2ax^3}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = a^2 x^2 - 2ax^3, 0 < x < \frac{a}{2}$$

$$y' = 2a^2 x - 6ax$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$
y'		+	0
y			-
		$y\left(\frac{a}{3}\right)$	

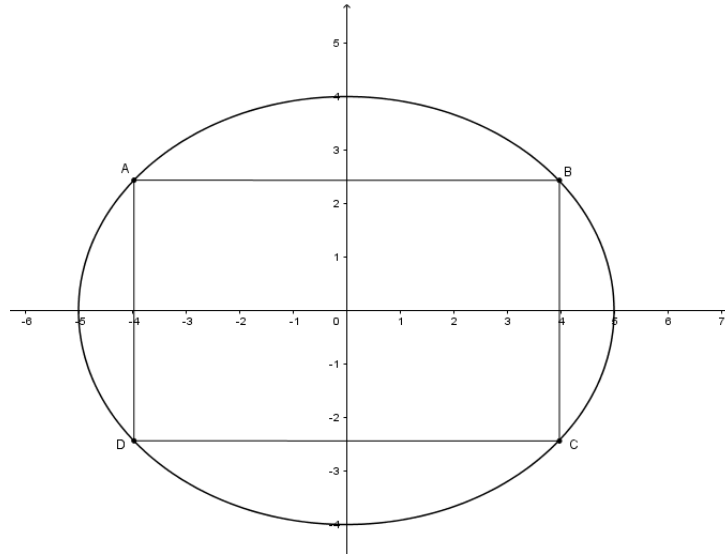
Nhìn vào bảng biến thiên suy ra tam giác có diện tích lớn nhất là $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $x = \frac{a}{3}$.

Câu 13. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé 8m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a = 5$ và $b = 4$.

Phương trình của elip là: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Diện tích của elip là: $S_{(E)} = \pi ab = 20\pi$.

Hình chữ nhật ABCD nội tiếp elip. Đặt $AB = 2x$ ($0 < x < 5$) $\Rightarrow AD = 8\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $S_{ABCD} = 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa} = 20\pi - 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T = 16000000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} + 1200000 \left(20\pi - 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right)$$

$$= 24000000\pi - 3200000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}.$$

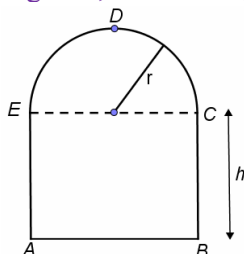
Mặt khác ta có: $16000000 \cdot \frac{x}{5} \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \leq 16000000 \cdot \frac{\frac{x^2}{25} + 1 - \frac{x^2}{25}}{2} = 8000000.$

$$\Rightarrow T = 24000000\pi - 3200000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \geq 24000000\pi - 8000000 = 67398223.69.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{5} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 14. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn, tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



A. $\frac{250}{4}$ cm .

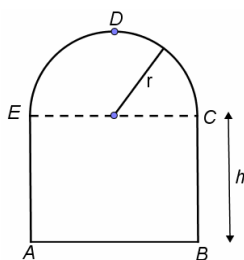
B. $\frac{125}{4}$ cm .

C. $\frac{250}{\pi + 4}$ cm .

D. $\frac{125}{4 + \pi}$ cm .

Lời giải

Chọn C



* Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của nửa hình tròn và hình chữ nhật. Khi đó:

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2; S_2 = 2rh; \text{ với } 2h = 250 - (\pi r + 2r) \text{ nên } S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2.$$

* Suy ra diện tích hình cần tìm $S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 250r - \pi r^2 - 2r^2 = -\frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 + 250r$. Bài toán trở thành tìm

giá trị lớn nhất của hàm số $S(r) = -\frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 + 250r$ với $0 < r < 125$.

* Ta có $S'(r) = -(\pi + 4)r + 250$; $S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{250}{\pi + 4}$. Đây là cực trị duy nhất của hàm số đồng thời

$S'(r)$ đổi dấu từ dương sang âm khi r qua $\frac{250}{\pi + 4}$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm này.

Câu 15. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m , bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất ?

A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}\text{ m}.$

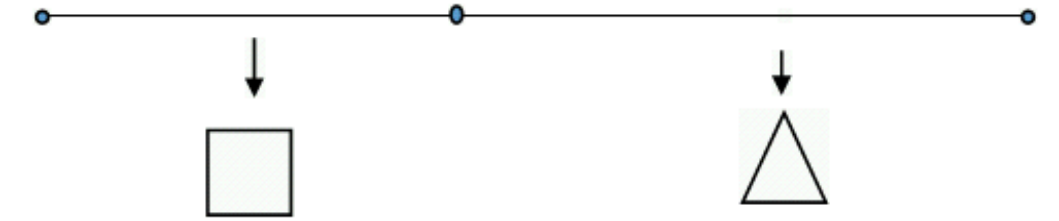
B. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}\text{ m}.$

C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}\text{ m}.$

D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}\text{ m}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $x\text{ (m)}$ là cạnh của tam giác đều, $\left(0 < x < \frac{20}{3}\right)$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{20-3x}{4}\text{ (m)}$.

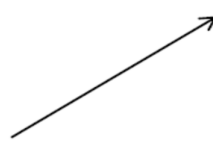
Gọi S là tổng diện tích của hai hình.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{20-3x}{4}\right)^2.$$

Ta có : $S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$	$\frac{20}{3}$
$S'(x)$		- 0 +	
$S(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}\text{ m}.$

Câu 16. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và

hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 33,61cm

B. 26,43cm

C. 40,62cm

D. 30,54cm

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông là x cm. Điều kiện: $0 \leq x \leq 60$

Độ dài cạnh hình vuông là $\frac{x}{4}$

Chiều dài đoạn dây uốn thành hình tròn là $(60-x)$ cm

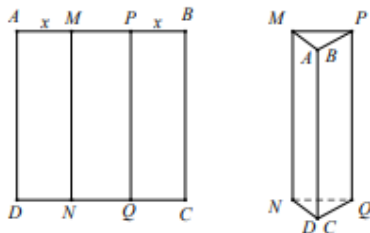
Bán kính vòng tròn là $2\pi R = (60-x) \Leftrightarrow R = \frac{60-x}{2\pi}$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi R^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{60-x}{2\pi}\right)^2$

$$= \frac{x^2}{16} + \frac{(60-x)^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 480x + 14400}{16\pi} = f(x)$$

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{480}{2(\pi+4)} \approx 33,61$.

Câu 17. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm người ta gấp theo các đoạn MN, PQ sao cho AD, BC trùng nhau để tạo thành một hình lăng trụ bị khuyết 2 đáy như hình minh họa dưới đây



Thể tích của khối lăng trụ tương ứng với hình lăng trụ tạo thành là lớn nhất thì giá trị của x bằng

A. 8 cm.

B. 9 cm.

C. 10 cm.

D. 5 cm.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\frac{15}{2} < x < 15$

(Để tồn tại tam giác AMP thì $AM + AP > MP \Leftrightarrow 2x > 30 - 2x \Leftrightarrow x > \frac{15}{2}$).

$$S_{MPA} = \frac{1}{2} \cdot d(A; MP) \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{30-2x}{2}\right)^2} \cdot (30-2x) = \sqrt{15} \cdot \sqrt{2x-15} \cdot (15-x)$$

$$\begin{aligned} V_{MPA.NQD} &= MN \cdot S_{MPA} = 30 \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{2x-15} \cdot (15-x) = 30\sqrt{15} \sqrt{(2x-15)(15-x)^2} \\ &= 30\sqrt{15} \sqrt{2x^3 - 75x^2 + 900x - 3375} \end{aligned}$$

Cách 1: Trắc nghiệm: Tính giá trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 75x^2 + 900x - 3375$ tại đáp án $x = 8; x = 9; x = 10$. Ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 10$ cm.

Cách 2: Xét hàm số

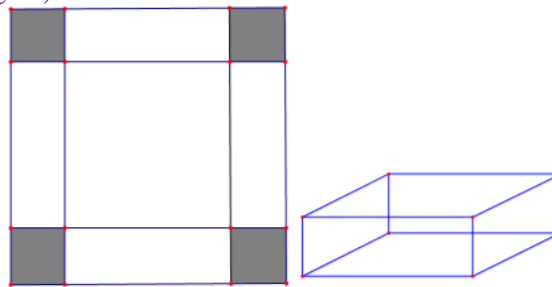
$$f(x) = 2x^3 - 75x^2 + 900x - 3375, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 150x + 900$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10, x = 15$$

BBT ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 10$ cm.

Câu 18. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12(cm)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại để được cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giải thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



A. $x = 2$

B. $x = 3$

C. $x = 4$

D. $x = 6$

Lời giải

Chọn A

Ta thấy hộp có đáy là hình vuông cạnh $12 - 2x$, đường cao x ($0 < x < 6$).

$$\text{Ta có: } V = S_d \cdot h = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$$\text{Xét } V = f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(6) = 0 \\ f(2) = 128 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Vậy với $x = 2$ hộp có thể tích lớn nhất.

Câu 19. Nhân ngày phụ nữ Việt Nam 20 -10 năm 2020, ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp. Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp, biết rằng độ dày lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h; x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h; x$ phải là ?

- A. $x = 2; h = 4$ B. $x = 4; h = 2$ C. $x = 4; h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $x = 1; h = 2$

Lời giải

Chọn B

Ta có
$$\begin{cases} S = 4xh + x^2 \\ V = x^2h \rightarrow h = \frac{V}{x^2} = \frac{32}{x^2} \end{cases} \Rightarrow S = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2$$
, để lượng vàng cần dùng là nhỏ nhất thì

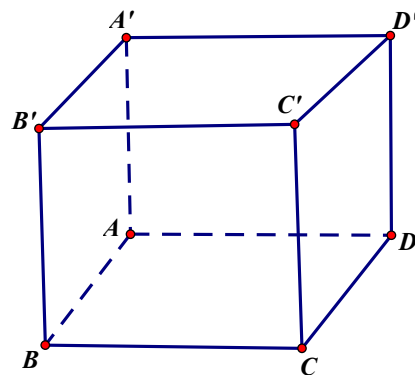
Diện tích S phải nhỏ nhất ta có $S = \frac{128}{x} + x^2 = f(x) \rightarrow f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4, h = 2$

Câu 20. Người ta muốn thiết kế một bể cá theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính, thể tích $8 m^3$. Giá mỗi m^2 kính là 600.000 đồng/ m^2 . Gọi t là số tiền tối thiểu phải trả. Giá trị t xấp xỉ với giá trị nào sau đây ?

- A. 11.400.000 đồng. B. 6.790.000 đồng. C. 4.800.000 đồng. D. 14.400.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi $AB = x > 0$, ta có $V = hx^2 = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8}{x^2}$.

Diện tích xung quanh của bể cá :

$$S_{xq} = 4xh + x^2 = 4x \cdot \frac{8}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{32}{x}$$

$$= x^2 + \frac{16}{x} + \frac{16}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{16}{x} \cdot \frac{16}{x}} = 3\sqrt[3]{256}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : } x^2 = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{16}.$$

$$\text{Số tiền tối thiểu để làm tủ kính là : } \left[\left(\sqrt[3]{16} \right)^2 + \frac{32}{\sqrt[3]{16}} \right] \cdot 600.000 = 11429287,57 \text{ đồng.}$$

Câu 21. (TQA) Có một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$ rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 6$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = 4$

Lời giải

Chọn C.

Độ dài cạnh đáy của cái hộp: $12-2x$. Diện tích đáy của cái hộp: $(12-2x)^2$.

Thể tích cái hộp là: $V = (12-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ với $x \in (0; 6)$

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$. Cho $V'(x) = 0$, giải và chọn nghiệm $x = 2$.

Lập bảng biến thiên ta được $V_{\max} = 128$ khi $x = 2$.

Câu 22. Một Bác nông dân cần xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hồ ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. 1200cm^2

B. 160cm^2

C. 1600cm^2

D. 120cm^2

Lời giải

Chọn B

Gọi x, y ($x, y > 0$) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hồ ga.

Gọi h là chiều cao của hồ ga ($h > 0$). Ta có $\frac{h}{x} = 2 \Rightarrow h = 2x$ (1)

suy ra thể tích của hồ ga là: $V = xyh = 3200 \Rightarrow y = \frac{3200}{xh} = \frac{1600}{x^2}$ (2)

Diện tích toàn phần của hồ ga là:

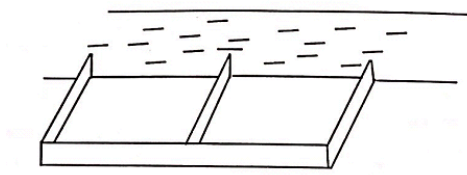
$$S = 2xh + 2yh + xy = 4x^2 + \frac{6400}{x} + \frac{1600}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} = f(x)$$

Khảo sát hàm số $y = f(x), (x > 0)$ suy ra diện tích toàn phần của hồ ga nhỏ nhất bằng 1200cm^2 khi

$$x = 10\text{ cm} \Rightarrow y = 16\text{ cm} \text{ Suy ra diện tích đáy của hồ ga là } 10 \cdot 16 = 160\text{cm}^2$$

Câu 23. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba

mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A. $3125m^2$.

B. $50m^2$.

C. $1250m^2$.

D. $6250m^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$).

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).

Số tiền phải làm là: $x \cdot 3 \cdot 50000 + y \cdot 60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}$.

Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0	50	$+\infty$	
S'		+	0	-
S	0	↗ 6250	↘ $-\infty$	

Vậy: $\max_{(0;+\infty)} S = 6250 (m^2)$ khi $x = 50$.

Câu 24. Một bác nông dân cần xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có dung tích là $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hồ ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. $1200cm^2$.

B. $120cm^2$.

C. $160cm^2$.

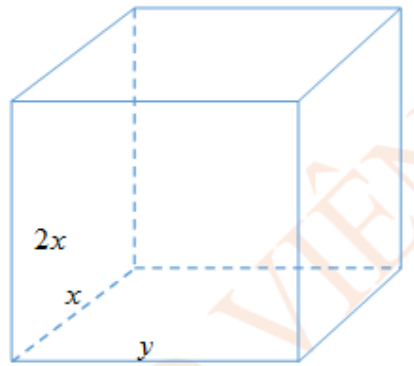
D. $1600cm^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều rộng của đáy, y là chiều dài của đáy và h là chiều cao của đáy.

Tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2 $\Rightarrow h = 2x$.



Diện tích của đáy hồ ga là $S = xy$

Thể tích của khối hộp chữ nhật không nắp bằng 3200 cm^3 nên ta có

$$V = 2x \cdot x \cdot y = 3200 \text{ cm}^3 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}.$$

Diện tích bề mặt sử dụng của bể (không tính nắp) là $S_1 = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \frac{8000}{x} = f(x)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow S_1$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	1200	$+\infty$

S_1 nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$

Diện tích của đáy hồ ga là $S = xy = 1600 \text{ cm}^2$.

Câu 25. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01 \text{ m}^3$

B. $1,51 \text{ m}^3$

C. $1,33 \text{ m}^3$

D. $0,96 \text{ m}^3$

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều rộng của bể cá là x (đơn vị: m, $x > 0$).

$$\text{Ông A dùng hết } 5 \text{ m}^2 \text{ kính để làm bể cá nên } 2x^2 + 6xh = 5 \Rightarrow h = \frac{5 - 2x^2}{6x}.$$

Do $x > 0$ và $h > 0$ nên $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Thể tích bể cá $V = \frac{1}{3}(5x - 2x^3)$.

$$V' = \frac{1}{3}(5 - 6x^2), V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Bảng biến thiên của V :

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	1,01	0

Từ BBT suy ra bể cá có thể tích lớn nhất bằng $1,01\text{m}^3$.

Câu 26. Anh Minh muốn xây dựng một hồ ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hồ ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.

A. 170cm^2 .

B. 160cm^2

C. 150cm^2 .

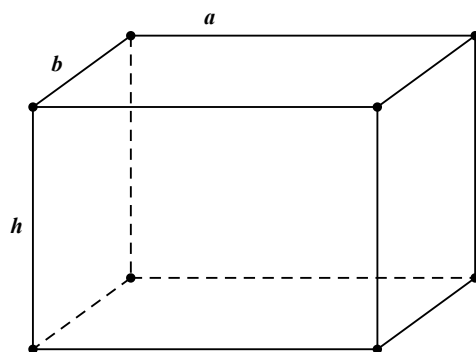
D. 140cm^2 .

Lời giải

Chọn B

Gọi a , b , h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ ga.

Ta có hình vẽ:



$$\text{Ta có: } \begin{cases} abh = 3200 \\ \frac{h}{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab^2 = 3200 \\ h = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1600}{b^2} \\ h = 2b \end{cases}$$

Để xây hồ tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì $S_{xq} + S_d$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$S_{xq} + S_d = 2bh + 2ah + ab = 4b^2 + \frac{6400}{b} + \frac{1600}{b} = 4b^2 + \frac{8000}{b} = f(b)$$

Xét $f(b) = 4b^2 + \frac{8000}{b}$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(b) = 8b - \frac{8000}{b^2} \Rightarrow f'(b) = 0 \Leftrightarrow 8b^3 - 8000 = 0 \Leftrightarrow b = 10$$

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
f'		- 0 +	
f	$+\infty$	1200	$+\infty$

Với $b = 10 \Rightarrow a = 16$

Vậy diện tích đáy hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên liệu nhất là: $S_d = 16.10 = 160 (\text{cm}^2)$

Câu 27. Một người có một dải ruy băng dài 130cm, người đó cần bọc dải ruy băng đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải dây duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là là nhiêu ?



A. $4000\pi \text{ cm}^3$

B. $1000\pi \text{ cm}^3$

C. $2000\pi \text{ cm}^3$

D. $1600\pi \text{ cm}^3$

Lời giải

Chọn B

Gọi $x(\text{cm}); y(\text{cm})$ lần lượt là bán kính đáy và chiều của hình trụ $(x, y > 0; x < 30)$.

Dải dây duy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120 cm

Ta có $(2x + y).4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2 y = \pi x^2 (30 - 2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2 (30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt giá trị lớn nhất.

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 10$

Lập bảng biến thiên, ta thấy thể tích đạt giá trị lớn nhất là $V = 1000\pi(\text{cm}^3)$.

Câu 28. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

- A. 1m và 2m B. 1dm và 2dm C. 2m và 1m D. 2dm và 1dm

Lời giải

Chọn B

Đổi $2000\pi(\text{lit}) = 2\pi(\text{m}^3)$. Gọi bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $x(\text{m})$ và $h(\text{m})$.

Ta có thể tích thùng phi $V = \pi x^2 \cdot h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{x^2}$

Vật liệu tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần nên ta chỉ cần tìm x để diện tích toàn phần bé nhất.

$$S_{tp} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h = 2\pi x \left(x + \frac{2}{x^2} \right) = 2\pi \left(x^2 + \frac{2}{x} \right)$$

Đạo hàm lập BBT ta tìm đc $f(x)$ GTNN tại $x = 1$, khi đó $h = 2$.

Câu 29. Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích $1(\text{m}^3)$. Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó chọn bán kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

- A. $\sqrt[3]{2\pi}$ B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$

Lời giải

Chọn C

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

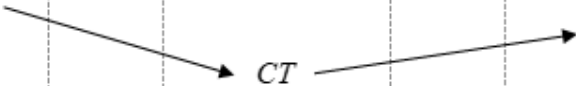
Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2}{R}$.

Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4 \cdot \frac{2}{R} = 8\pi R^2 + \frac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \frac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \frac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		-	0	+	
$f(R)$					

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

- Câu 30.** Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?
- A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

Lời giải

Chọn A

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của đĩa).

$$\text{Khi đó } x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{Thể tích khối nón sẽ là : } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi

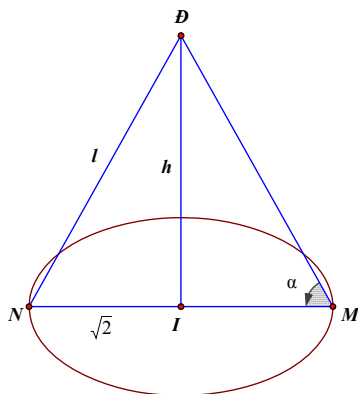
$$x = \frac{2\pi}{3} R \sqrt{6} = 4\pi$$

$$\text{Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là : } 2\pi R - 4\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi - 4\pi}{2\sqrt{6}\pi} 360^\circ \approx 66^\circ$$

- Câu 31.** Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là
- A. 1m B. 1,2m C. 1.5 m D. 2m

Lời giải

Chọn D



Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn ($h > 0$); $Đ$ là bóng điện; I là hình chiếu của $Đ$ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn. (như hình vẽ)

Ta có $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c \frac{\sqrt{l^2 - 2}}{l^3}$ ($l > \sqrt{2}$).

$$C'(l) = c \cdot \frac{6 - l^2}{l^4 \cdot \sqrt{l^2 - 2}} > 0 \quad (\forall l > \sqrt{2})$$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6} \quad (l > \sqrt{2})$$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó $h = 2$

Câu 32. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n+10)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?

A. 4 máy.

B. 6 máy.

C. 5 máy.

D. 7 máy.

Lời giải

Chọn C

Một máy: Trong một giờ in được 3600 tờ nên 50000 tờ cần $\frac{125}{9}$ giờ.

Do đó n máy cần thời gian $\frac{125}{9n}$ giờ.

$$\text{Tổng chi phí là } f(n) = \left[10 \cdot (6n+10) \cdot \frac{125}{9n} \right] \cdot 1000 + 50000n.$$

Khi đó: để được lãi nhiều nhất thì $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất, với $n \in [1; 8]$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Cách 1: } f(n) = \left(\frac{250}{3} + \frac{1250}{9n} + 5n \right) \cdot 10000 \geq \left(\frac{250}{3} + \frac{50\sqrt{10}}{3} \right) \cdot 10000 \text{ (Dùng BĐT Côsi).}$$

$$\text{Nên } f(n) \text{ nhỏ nhất khi } \frac{1250}{9n} = 5n \Leftrightarrow n = \frac{5\sqrt{10}}{3} \approx 5.$$

Cách 2 : Dùng Table với $n \in [1; 8]$ và $n \in \mathbb{N}$.

- Câu 33.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?
- A. 10 B. 12 C. 16 D. 24

Lời giải

Chọn B

Gọi n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ ($n > 0$). Khi đó :

Cân nặng của một con cá là : $P(n) = 480 - 20n$ (gam)

Cân nặng của n con cá là : $n.P(n) = 480n - 20n^2$ (gam)

Xét hàm số : $f(n) = 480n - 20n^2, n \in (0; +\infty)$. Ta có : $f'(n) = 480 - 40n$, cho $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Lập bảng biến thiên ta thấy số cá phải thả trên một đơn vị diện tích hồ để có thu hoạch nhiều nhất là 12 con.

- Câu 34.** Một chuyến xe bus có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ \$. Chọn câu đúng:
- A. Xe thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.
 B. Xe thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135\$.
 C. Xe thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160\$.
 D. Không có đáp án đúng.

Lời giải

Chọn C

Số tiền thu được là : $f(x) = x\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 = 9x - \frac{3}{20}x^2 + \frac{x^3}{1600}$

Đạo hàm, lập bảng biến thiên ta tìm được GTLN của $f(x)$ là 160 khi $x = 40$.

Vậy lợi nhuận thu được nhiều nhất là 160\$ khi có 40 hành khách.

- Câu 35.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gởi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất?
- A. 23500 B. 1223500 C. 43500 D. 24500

Lời giải

A

Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần ($x \in [1; 2500]$, đơn vị: cái)

Số lượng ti vi trung bình gởi trong kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$

Số lần đặt hàng mỗi năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là : $\frac{2500}{x}(20 + 9x)$

Khi đó chi phí mà cửa hàng phải trả là: $C(x) = \frac{2500}{x}(20 + 9x) + 5x = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$

Lập bảng biến thiên ta được : $C_{\min} = C(100) = 23500$

- Câu 36.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất (đơn vị triệu đồng) ?
- A. 30,5. B. 305. C. 40,5. D. 30.

Lời giải

a

Gọi x ($x > 0$, đơn vị: triệu đồng) là giá bán mới. Khi đó:

Số tiền đã giảm là: $31 - x$. Số lượng xe tăng lên là: $200(31 - x)$.

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: $600 + 200(31 - x) = 6800 - 200x$

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được là: $(6800 - 200x)x$

Tiền vốn mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: $(6800 - 200x).27$

Lợi nhuận mà công ty đạt được sẽ là:

$$L(x) = \text{Doanh thu} - \text{Tiền vốn} \\ = (6800 - 200x)x - (6800 - 200x).27 = -200x^2 + 12200x - 183600$$

$$L'(x) = -400x + 12200. \text{ Cho } L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30,5$$

Lập BBT ta thấy lợi nhuận lớn nhất khi $x = 30,5$. Vậy giá bán mới là 30,5 (triệu đồng)

- Câu 37.** Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. ả hưng nếu tăng thêm 1USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.
- A. 18 USD/người. B. 19 USD/người. C. 14 USD/người. D. 25 USD/người.

Lời giải

Chọn C

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x$ ($x + 20 > 0$)

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

$$f(x) = (20 + x.1 + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$$

Bảng biến thiên

x	-20		-6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

$\max_{(-20; +\infty)} f(x) = f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

- Câu 38.** ả hà xe khoán cho hai tài xế ta-xi An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng. Hỏi tổng số ngày ít nhất là bao nhiêu để hai tài xế chạy tiêu thụ hết số xăng của mình được khoán, biết rằng chỉ tiêu cho hai người một ngày tổng cộng chỉ chạy đủ hết 10 lít xăng?
- A.** 20 ngày. **B.** 15 ngày. **C.** 10 ngày. **D.** 25 ngày.

Lời giải

Chọn A

Gọi x là số lít xăng mà An đã dùng trong một ngày. Với $0 < x < 10$.

$\Rightarrow 10 - x$ là số lít xăng mà Bình đã dùng trong một ngày.

Khi đó

+ Để An tiêu thụ hết 32 lít xăng cần $\frac{32}{x}$ ngày.

+ Để Bình tiêu thụ hết 72 lít xăng cần $\frac{72}{10-x}$ ngày.

Vậy tổng số ngày chạy xe của hai tài xế là

$$y = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x} \Rightarrow y' = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Bảng biến thiên

x	0		4		10
y'		-	0	+	
y					

ả hìn bảng biến thiên ta thấy tổng số ngày chạy xe ít nhất của hai tài xế là 20 ngày.

BÀI 38: BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM ĐA THỨC.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tham số xét tính đơn điệu của hàm đa thức.

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$

Các dạng thường gặp

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:
$f'(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a.....0 \\ \Delta.....0 \\ \begin{cases} a.....0 \\ b.....0 \\ c.....0 \end{cases} \end{cases}$	$f'(x) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a.....0 \\ \Delta.....0 \\ \begin{cases} a.....0 \\ b.....0 \\ c.....0 \end{cases} \end{cases}$

Chú ý:

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

- Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài l ta giải như sau:

Bước 1:

Bước 2:

Bước 3:

Bước 4:

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi.

A. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$

B. $a \geq 0; b^2 - 3ac \leq 0$.

C. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 3: (THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018 - BTN) Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. $-\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Câu 5: Để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì tất cả giá trị thực của tham số m là:

A. $-1 < m \leq 2$.

B. $-1 \leq m \leq 2$.

C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Câu 6: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-5)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m = 1$.

D. $-4 < m < 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. $(-\infty; 1]$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Câu 8: Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1; x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$.

A. $m = -1$.

B. $m = 3$.

C. $m = -3, m = 1$.

D. $m = -1, m = 3$.

Câu 9: Một học sinh giải bài toán: “Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m-2)x + 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.” theo các bước như sau:

Bước 1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $y' = 3mx^2 + 2mx + m - 2$.

Bước 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3mx^2 + 2mx + m - 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Bước 3. } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3m > 0 \\ \Delta' = 6m - 2m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 0 \\ m > 3 \end{cases}$$

Bước 4. $\Leftrightarrow m > 3$. Vậy $m > 3$.

Học sinh này đã bắt đầu sai ở bước nào?

A. Bước 2. **B.** Bước 3. **C.** Bước 1. **D.** Bước 4.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. $1 < m \leq 2$. **B.** $m \leq 2$. **C.** $m \leq 1$. **D.** $1 < m < 2$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: (THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-Lần 1-2018) Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8-2m)x + m + 3 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho để hàm số

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-7)x - 2 \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}.$$

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 4: [THPT CHUYÊN VINH] Các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó không có tiếp tuyến song song với trục hoành là.

- A. $-1 < m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $-1 \leq m < 0$. D. $-1 < m \leq 0$.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 6. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 2m)x^3 + mx^2 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < 0$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$. D. $1 < m \leq 3$.

Câu 7: [THPT Chuyên Thái Nguyên] Tìm m để hàm số:

$$f(x) = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + (m-8)x + m^2 - 1 \text{ luôn nghịch biến trên } \mathbb{R}.$$

- A. $m < -2$. B. $m \geq -2$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \leq -2$.

Câu 8: Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$

- A. $a \geq \frac{12}{7}$. B. $a < -3$. C. $a \leq -3$. D. $a > \frac{12}{7}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m-2)x + 5$. Với $0 < m < 9$ thì có bao nhiêu giá trị m là số tự nhiên sao cho hàm số đồng biến trên $[2; 5]$?

- A. 7. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 10: Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a+b$ bằng?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

- Câu 11:** (THPT Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 2 -2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
- Câu 12:** Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = x^3 - 2mx^2 + x$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là:
- A. $m \geq \frac{13}{8}$. B. $1 \leq m \leq \frac{13}{8}$. C. $m \leq 0$. D. $m > \frac{13}{8}$.
- Câu 13:** [THPT Trần Phú-HP] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (2m-1)\frac{x^2}{2} + (m^2 - m - 2)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- A. 3. B. 0. C. 1. D. Vô số.
- Câu 14:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. $m \leq 1$ B. $m \leq -1$ C. $m \geq -1$ D. $m \leq 0$
- Câu 15:** Tìm m để hàm số $y = \frac{-1}{3}x^3 + mx^2 + (m-2)x - \frac{1}{3}$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 4:
- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -3$ D. Cả A và C đều đúng
- Câu 16:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1.
- A. $m = -\frac{9}{4}$. B. $m = 3$. C. $m \leq 3$. D. $m = \frac{9}{4}$.
- Câu 17:** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2017$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ sao cho $b - a > 3$ là
- A. $m > 6$. B. $m = 9$. C. $m < 0$. D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}$.
- Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- A. $m > -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq -3$. D. $m > 0$.
- Câu 19:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- A. $m \leq 0$. B. $m = 1$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.
- Câu 20:** (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp - QB - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + mx^2 + 2x + 3$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. $m \leq -\sqrt{6}; m \geq \sqrt{6}$. B. $m < -\sqrt{6}; m > \sqrt{6}$. C. $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$. D. $-\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq -2$. B. $m \geq 3$. C. $-2 \leq m \leq 0$. D. $-2 \leq m \leq 3$.

Câu 3: Với giá trị nào của tham số m , hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases}$. B. $-\frac{2}{3} < m < 1$. C. $-\frac{2}{3} \leq m \leq 1$. D. $\frac{2}{3} < m < 1$.

Câu 4: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (2m+3)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 5: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - m(m-2)x + 2019$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $m \geq 0$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 0$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m \leq \frac{1}{3}$. B. $m \leq \frac{4}{3}$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \geq \frac{4}{3}$.

Câu 7: (THPT LƯƠNG TÀI - BẮC NINH - LẦN 2 - 2017 - 2018 - BTN) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (9m-6)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$. B. $1 \leq m \leq 2$. C. $m > 2$ hoặc $m < 1$. D. $1 < m < 2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 3$. C. $-1 \leq m \leq 3$. D. $m < 3$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m+1)x + 5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 3$. B. $m < 3$. C. $m \geq 3$. D. $m < -3$.
- Câu 10:** Tìm các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $[4; +\infty)$. B. $(4; +\infty)$. C. $(-\infty; 4)$. D. $(-\infty; 4]$.
- Câu 11:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m-3)x + 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 3$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m = 3$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.
- Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m-1)x - 2$ đồng biến trên tập xác định?
A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.
- Câu 14:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x + 2018$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m \leq 1$. B. $-3 \leq m \leq 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $m \geq 1; m \leq -3$.
- Câu 15:** Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m = -4$. B. $m = 0$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.
- Câu 16:** [Đề thi thử-Liên trường Nghệ An-L2] Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2; 4]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:
A. 3. B. 5. C. 0. D. 2.
- Câu 17:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = (m^2 - 4)x^3 + 3(m-2)x^2 + 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m \geq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.
- Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m-2)x - 3m$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
A. $-\frac{1}{4} \leq m < 0$. B. $m \leq -\frac{1}{4}$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.
- Câu 19:** Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.
A. $m \leq 0$. B. $m > -1$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 0$.

- Câu 20:** (THPT CHUYÊN KHTN - LẦN 1 - 2018). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:
- A. $(-\infty; 6]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; 6]$.
- Câu 21:** Tập hợp các giá trị m để hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên $(-3; 0)$ là
- A. $\left[\frac{-1}{3}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{-1}{3}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{-1}{3}\right)$. D. $\left[\frac{-1}{3}; 0\right)$.
- Câu 22:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x + 2016$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; 7)$.
- A. $m \geq 5$. B. $m < 1$. C. $m \leq 1$. D. $m \geq 7 \cup m \leq 1$.
- Câu 23:** (SGD Hà Nam - Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (6m+5)x - 1$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?
- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.
- Câu 24:** [Cụm 1 HCM] Với tất cả các giá trị thực nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$?
- A. $-1 \leq m \leq 0$. B. $-1 < m < 0$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq 0$.
- Câu 25:** Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- A. $S = [-1; 0]$ B. $S = \emptyset$. C. $S = \{-1\}$. D. $S = [0; 1]$.
- Câu 26:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?
- A. $m = -1; m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 9$. D. $m = 1; m = -9$.
- Câu 27:** Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.
- A. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ B. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$
- C. $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ D. $\frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$
- Câu 28:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 2.
- A. $m = 0$. B. $m < 3$. C. $m = 2$. D. $m > 3$.

Câu 29: [AMSTERDAM-LAN-1-19-20] Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 6mx^2 - 6x + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là đoạn $[a; b]$. Khi đó $a+b$ bằng

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 30: [THPT Đặng Thúc Hứa-2017] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m-2)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Một học sinh đã giải như sau.

Bước 1. Ta có $y' = 3mx^2 + 2mx + (m-2)$.

Bước 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3mx^2 + 2mx + (m-2) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bước 3. $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6m - 2m^2 \leq 0 \\ a = 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \Leftrightarrow m < 0. \end{cases}$

Vậy $m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải của học sinh trên là đúng hay sai? Nếu lời giải là sai thì sai từ bước nào?

- A. Đúng. B. Sai từ bước 2.
C. Sai ở bước 3. D. Sai từ bước 1.

Câu 31: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

- A. 5. B. 9. C. 7. D. 3.

Câu 32: Cho hàm số $y = (m^2 - 2m)x^4 + (4m - m^2)x^2 - 4$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 0. B. Vô số. C. 2. D. 3.

BÀI 38: BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM ĐA THỨC .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tham số xét tính đơn điệu của hàm đa thức.

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Các dạng thường gặp

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:
$f'(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$	$f'(x) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Chú ý: Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a = b = c = 0$ thì $f(x) = d$

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

- Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài l ta giải như sau:

Bước 1: Tính $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Bước 2: Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} (*)$

Bước 3: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài $l \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2 (**)$

Bước 4: Giải $(*)$ và kết hợp với $(**)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi.

A. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$

B. $a \geq 0; b^2 - 3ac \leq 0$.

C. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

TH1: $a = 0$ có $y' = 2bx + c$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

TH2: $a \neq 0$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Vậy để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$

Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f'(x) = x^2 + 2mx + 4 \geq 0, \forall x$

$\Leftrightarrow \Delta'_{f'(x)} = m^2 - 4 \leq 0, \forall x \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ mà $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 3: (THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018 - BTN) Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. $-\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3[x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2].$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow mn \leq 0.$$

$$\text{TH1: } mn = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}.$$

Do vai trò của m, n là như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $m = 0$.

$$\Rightarrow P = 4n^2 - n = \left(2n - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \quad (1).$$

$$\text{TH2: } mn < 0 \Leftrightarrow m > 0; n < 0.$$

$$\text{Ta có } P = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 4n^2 + (-n) > -\frac{1}{16} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } P_{\min} = -\frac{1}{16}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{1}{8}; n = 0 \text{ hoặc } m = 0; n = \frac{1}{8}.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải:

Chọn C

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Đạo hàm } y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9.$$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-9; -8; \dots; -3\}.$$

Câu 5: Để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì tất cả giá trị thực của tham số m là:

A. $-1 < m \leq 2$.

B. $-1 \leq m \leq 2$.

C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

+ Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có: $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 3$.

+ Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

+ Với $m=1 \Rightarrow y' = 4x+3; y' > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4} \Rightarrow$ Hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m=-1 \Rightarrow y' = 3 \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ (m+1)^2 - 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ -2m^2 + 2m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m < -1 \end{cases}$$

Kết hợp hai trường hợp vậy $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-5)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$

C. $m = 1$.

D. $-4 < m < 1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Tự luận)

* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3(2m-5)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; dấu bằng chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m-5 \leq 0(1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

+ Trường hợp 1: $m=1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} -3 \leq 0$ luôn thỏa với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Trường hợp 2: $m \neq 1$, khi đó điều kiện của bài toán trở thành

$$\begin{cases} a = m-1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-1)(2m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -m^2 + 5m - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \leq 1 \vee m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

* Vậy các giá trị cần tìm của m là $m \leq 1$.

Cách 2: (Trắc nghiệm)

* Chọn $m=1 \Rightarrow y = -9x+1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $m=1$ thỏa, suy ra loại A, D.

* Chọn $m=0 \Rightarrow y = -x^3 + 3x^2 - 15x$ có $y' = -3x^2 + 6x - 15 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra loại C.

- Câu 7:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ là
- A. $(-\infty;1]$. **B.** $[1;+\infty)$. C. $(-\infty;1)$. D. $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1 \Rightarrow y' = x^2 - (m+2)x + 2m$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases} \text{ Để hàm số đồng biến trên khoảng } (0;1) \text{ thì } \begin{cases} 0 < 1 \leq m \leq 2 \\ 0 < 1 \leq 2 \leq m \end{cases} \Rightarrow m \geq 1.$$

$$\text{Do đó } m \in [1;+\infty)$$

Cách 2: Tô Quốc An

$$\text{Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow y' = x^2 - (m+2)x + 2m \geq 0 \quad \forall x \in (0;1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-m) \geq 0 \quad \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow x \leq m \quad \forall x \in (0;1)$$

$$\text{Vậy } m \geq 1.$$

- Câu 8:** Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1; x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$.
- A. $m = -1$. B. $m = 3$.
C. $m = -3$, $m = 1$. D. $m = -1$, $m = 3$.

Lời giải:

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = x^2 + 6(m-1)x + 9.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Theo định lý Viet: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -6(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2|^2 = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (6\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 36(m-1)^2 - 4.9 = 36.3 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 9: Một học sinh giải bài toán: “Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m-2)x + 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.” theo các bước như sau:

Bước 1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $y' = 3mx^2 + 2mx + m - 2$.

Bước 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3mx^2 + 2mx + m - 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Bước 3. } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3m > 0 \\ \Delta' = 6m - 2m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 0 \\ m > 3 \end{cases}$$

Bước 4. $\Leftrightarrow m > 3$. Vậy $m > 3$.

Học sinh này đã bắt đầu sai ở bước nào?

A. Bước 2.

B. Bước 3.

C. Bước 1.

D. Bước 4.

Lời giải

Chọn A

Sai ở bước 2 vì: Khi $m = 0 \Rightarrow y' = -2$ (không thỏa yêu cầu bài toán). Do đó khi $m \neq 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. $1 < m \leq 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \leq 1$.

D. $1 < m < 2$.

Lời giải:

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x[x^2 - (m-1)]; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases}$$

• Nếu $m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1 \rightarrow y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và y' đổi dấu từ “-” sang “+” khi qua điểm $x = 0 \rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1;3)$. Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn.

$$\bullet \text{ Nếu } m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m-1} \\ x = \sqrt{m-1} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{m-1}$	0	$\sqrt{m-1}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2 \xrightarrow{m > 1} 1 < m \leq 2$.

Hợp hai trường hợp ta được $m \in (-\infty; 2]$.

Cách 2:

$$y' = 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0 \quad \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq m \quad \forall x \in (1; 3).$$

Đặt $h(x) = x^2 + 1$ với $x \in (1; 3)$, $h'(x) = 2x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0(l)$.

x	1	2
$h'(x)$		+
$h(x)$	2	10

Vậy $m \leq 2$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: (THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-Lần 1-2018) Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8-2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = 4$ D. $m = -4$

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.Ta có $y' = x^2 - 2mx + (8-2m)$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$)

$$\Delta_K: \Delta \leq 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m = 2$.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 + 12mx + 6.$$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (12m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 144m^2 - 72 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m = 0$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho để hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-7)x - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 6

B. 4

C. 5

D. 3

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = -x^2 - 2(m-1)x + m - 7$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x^2 - 2(m-1)x + m - 7 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \text{ (hiển nhiên)} \\ \left[-(m-1) \right]^2 + (m-7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3$$

Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$.Vậy có 3 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 4:** [THPT CHUYÊN VINH] Các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó không có tiếp tuyến song song với trục hoành là.
- A. $-1 < m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $-1 \leq m < 0$. D. $-1 < m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Phân tích: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm.

Đồ thị hàm số không có tiếp tuyến song song với trục hoành $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm.

Kết hợp 2 điều kiện ta được $y' < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3mx^2 - 6mx - 3.$$

Nếu $m = 0$ thì $y' = -3 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

$$\text{Nếu } m \neq 0 \text{ thì ycbt } \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 9m^2 + 9m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta được: $-1 < m \leq 0$.

- Câu 5:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 6

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

- Câu 6:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 2m)x^3 + mx^2 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < 0$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$

D. $1 < m \leq 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = (m^2 - 2m)x^2 + 2mx + 3$.

$$\text{TH1: } m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Với $m = 0$, $y' = 3 \Rightarrow y' > 0, \forall x$. Do đó, $m = 0$ thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m = 2$, $y' = 4x + 3$. Do đó, $m = 2$ không thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{TH2: } m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ \Delta' = m^2 - 3(m^2 - 2m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ -2m^2 + 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \\ m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 7: [THPT Chuyên Thái Nguyên] Tìm m để hàm số:

$$f(x) = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + (m-8)x + m^2 - 1 \text{ luôn nghịch biến trên } \mathbb{R}.$$

A. $m < -2$.

B. $m \geq -2$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

$$\text{Ta có } f'(x) = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8.$$

$$\text{Trường hợp } m = -2, \text{ ta có } f'(x) = -10 < 0; \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Trường hợp $m \neq -2$, ta có để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ \Delta' = (m+2)^2 - (m+2)(m-8) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ (m+2)[(m+2) - (m-8)] \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ 10(m+2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $m \leq -2$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1 • $m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, khi đó $y' = -10 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

$$\text{TH2} \bullet \begin{cases} a = m+2 < 0 \\ \Delta' = (m+2)^2 - (m+2)(m-8) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ 10(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Hợp hai trường hợp ta được $m \leq -2$.

Câu 8: Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$

A. $a \geq \frac{12}{7}$

B. $a < -3$.

C. $a \leq -3$.

D. $a > \frac{12}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -x^2 + 2(a-1)x + a + 3$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; 3)$

$$\Leftrightarrow a \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow a \geq \max_{(0; 3)} f(x).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}$ trên khoảng $(0; 3)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{(2x + 1)^2} = \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}}{(2x + 1)^2} > 0, \forall x \in (0; 3).$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ luôn đồng biến trên khoảng } (0; 3) \Rightarrow \max_{(0; 3)} f(x) = f(3) = \frac{12}{7}.$$

$$\text{Vậy } m \geq \frac{12}{7}.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m-2)x + 5$. Với $0 < m < 9$ thì có bao nhiêu giá trị m là số tự nhiên sao cho hàm số đồng biến trên $[2; 5]$?

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có đạo hàm của hàm số là $y' = x^2 - 2mx + m - 2$

Để hàm số đồng biến trên $[2; 5] \Rightarrow y' \geq 0; \forall x \in [2; 5] \Leftrightarrow m \geq \frac{-x^2 + 2}{-2x + 1}; \forall x \in [2; 5]$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [2; 5]} \left[f(x) = \frac{-x^2 + 2}{-2x + 1} \right] (*)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 4}{(-2x + 1)^2} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}}{(-2x + 1)^2} > 0; \forall x \in [2; 5] \Rightarrow f(2) < f(5)$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [2; 5]} f(x) = f(5) = \frac{23}{9}; (*) \Rightarrow m \geq \frac{23}{9}$$

Suy ra theo đề bài $m \in \left[\frac{23}{9}; 9 \right] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 10: Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a + b$ bằng?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $(-2; 0) \in D$.

$$y' = 6x^2 - 2mx + 2.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2; 0) \Leftrightarrow m \geq 3x + \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0).$$

Đặt $g(x) = 3x + \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0)$.

Khi đó: $m \geq 3x + \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0) \Leftrightarrow m \geq \max_{(-2; 0)} g(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \forall x \in (-2; 0)$$

Bảng biến thiên:

x	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra: $m \geq \max_{(-2; 0)} g(x) \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{3}$.

Suy ra $a = -2, b = 3$.

Vậy $a + b = -2 + 3 = 1$.

Câu 11: (THPT Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 2 -2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Số phần tử của S bằng

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5.$$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow \text{hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

$$\text{Do đó } m \leq g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}.$$

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = x^3 - 2mx^2 + x$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là:

A. $m \geq \frac{13}{8}.$

B. $1 \leq m \leq \frac{13}{8}.$

C. $m \leq 0.$

D. $m > \frac{13}{8}.$

Lời giải

Chọn A

[phương pháp tự luận]

$$f'(x) = 3x^2 - 4mx + 1.$$

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2)$

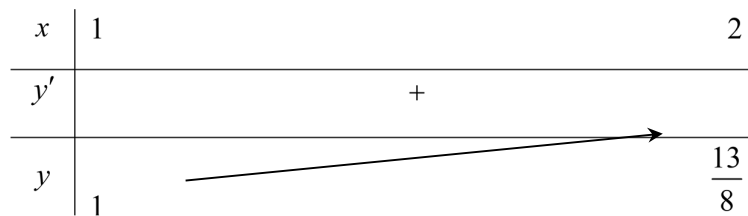
$$\text{Khi đó } 3x^2 - 4mx + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3x^2 + 1}{4x} (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{3x^2 + 1}{4x}$; tập xác định $D = (1; 2)$.

$$g'(x) = \frac{12x^2 - 4}{16x^2}. \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} & (I) \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{3} & (II) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \frac{13}{8}.$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$:



Từ bảng biến thiên, (1) luôn đúng khi $m \geq \frac{13}{8}$.

[phương pháp trắc nghiệm]

Thay $m = 2$, lập bảng biến thiên hàm số, ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán, loại đáp án B, C.

Thay $m = \frac{13}{8}$, lập bảng biến thiên hàm số, ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán, loại đáp án D.

Câu 13: [THPT Trần Phú-HP] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} - (2m-1)\frac{x^2}{2} + (m^2 - m - 2)x + 1 \text{ nghịch biến trên khoảng } (1; 2).$$

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (2m-1)\frac{x^2}{2} + (m^2 - m - 2)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

$$\Leftrightarrow y' = x^2 - (2m-1)x + m^2 - m - 2 \leq 0 \quad \forall x \in (1; 2).$$

Giải bất phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m - 2 \leq 0$ được tập nghiệm $S = [m-2; m-1]$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với $(1; 2) \subset [m-2; m-1] \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 \\ m-1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $m \leq 1$

B. $m \leq -1$

C. $m \geq -1$

D. $m \leq 0$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3m$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì:

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x \geq m, \forall x \in (0; +\infty)$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2x, \forall x \in (0; +\infty)$ Ta đi tìm GTNN của hàm $f(x), \forall x \in (0; +\infty)$

Ta có:

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Ta có: } f(0) = 0; f(1) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Vậy để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$ thì: $\min_{(0; +\infty)} f(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq -1$.

Câu 15: Tìm m để hàm số $y = \frac{-1}{3}x^3 + mx^2 + (m-2)x - \frac{1}{3}$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 4:

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = -3$

D. Cả A và C đều đúng

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -x^2 + 2mx + m - 2 \text{ và } \Delta' = m^2 + m - 2$$

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Trường hợp này không thỏa.

$$\text{Trường hợp 2: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 1 \quad (*)$$

Khi đó phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \quad (1)$$

$$\text{Theo định lý vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 2 - m \end{cases} \text{ thay vào (1) ta được } 4m^2 + 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases} \text{ (thỏa)} \\ (*)$$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1.

A. $m = -\frac{9}{4}$.

B. $m = 3$.

C. $m \leq 3$.

D. $m = \frac{9}{4}$.

Lời giải:

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x + m.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 3m > 0 \\ 2 \frac{\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 2 \frac{\sqrt{9-3m}}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}.$$

Câu 17: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2017$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ sao cho $b - a > 3$ là

A. $m > 6$.

B. $m = 9$.

C. $m < 0$.

D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) \leq 0 \forall x \in (a; b)$

$$\Delta = m^2 - 6m + 9$$

TH1: $\Delta \leq 0 \Rightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 3 \Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(x_1; x_2)$.

Yêu cầu đề bài:

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 > 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P > 9$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(m-2) > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 0 \end{cases}$$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m > -3$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq -3$.

D. $m > 0$.

Lời giải:**Chọn B**

Đặt $\sin x = t, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t - m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$ cần:

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t \geq m \quad \forall t \in [0; 1]$$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t$

$$g'(t) = 6t + 6$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Bảng biến thiên

t	0	1
$g'(t)$		+
$g(t)$	0	9

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$, hàm số $f(x)$

đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m = 1$.

C. $m > 0$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

TH1 ● $m \leq 0 \longrightarrow y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và y' đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm $x = 0 \longrightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

TH2 ● $m > 0 \longrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $-\sqrt{m}; 0; \sqrt{m}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{m}; 0)$ và $(\sqrt{m}; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{m})$ và $(0; \sqrt{m})$. Do đó trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp - QB - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn C

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$y' = 3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5}.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2x^6}, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2x^6}, x \in (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = 3x - \frac{3}{x^7}, x \in (0; +\infty).$$

$$f'(x) = 3x - \frac{3}{x^7} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y						

Từ bảng biến thiên ta thấy : $\Leftrightarrow m \leq f(x), \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} f(x) \Leftrightarrow m \leq 3$.

Giá trị nguyên dương của tham số m là $m = 1$, $m = 2$ và $m = 3$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + mx^2 + 2x + 3$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m \leq -\sqrt{6}; m \geq \sqrt{6}$. B. $m < -\sqrt{6}; m > \sqrt{6}$. C. $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$. **D. $-\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 2$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0, \forall m \\ \Delta' = m^2 - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq -2$. B. $m \geq 3$. C. $-2 \leq m \leq 0$. **D. $-2 \leq m \leq 3$.**

Lời giải

Chọn D

$y' = x^2 + 2mx + m + 6$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3$.

Vậy $-2 \leq m \leq 3$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Với giá trị nào của tham số m , hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases}$. B. $-\frac{2}{3} < m < 1$. **C. $-\frac{2}{3} \leq m \leq 1$.** D. $\frac{2}{3} < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 3(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m \leq 1.$$

Câu 4: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (2m+3)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 + 2mx + 2m + 3.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3.$$

$$\text{Vậy } m \in S = [-1; 3].$$

Câu 5: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - m(m-2)x + 2019$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $0 \leq m \leq 1$** B. $m \geq 0$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = x^2 + 2mx - m(m-2).$$

Để hàm số đồng biến trên $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + m(m-2) = 2m^2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $m \leq \frac{1}{3}$.

B. $m \leq \frac{4}{3}$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$.

D. $m \geq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 + 2x + m. \text{ Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' = 1 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

Câu 7: (THPT LƯƠNG TÀI - BẮC NINH - LẦN 2 - 2017 - 2018 - BTN) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (9m - 6)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $m > 2$ hoặc $m < 1$.

D. $1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6mx + 9m - 6; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 9m - 6 = 0.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' = 9m^2 - 27m + 18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq 3$.

C. $-1 \leq m \leq 3$.

D. $m < 3$.

Lời giải:

Chọn B

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Đạo hàm } y' = 3x^2 + 6x + m.$$

$$Y_{\text{cbt}} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (} y' = 0 \text{ có hữu hạn nghiệm)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m+1)x + 5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 3$.

B. $m < 3$.

C. $m \geq 3$.

D. $m < -3$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 + 4x + m + 1.$$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + m + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 3.$$

Câu 10: Tìm các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $[4; +\infty)$.

B. $(4; +\infty)$.

C. $(-\infty; 4)$.

D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' = x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Delta' = 4 - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4$$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m - 3)x + 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 4$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm)

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của tham số m thỏa mãn ycbt là $m = 3$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 3$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = mx^2 - 2mx + 3.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y' = 3 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ thỏa yêu cầu.

Trường hợp 2: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3.$

Kết hợp hai trường hợp ta có $0 \leq m \leq 3$ nên $m = 0$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m-1)x - 2$ đồng biến trên tập xác định?

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + m - 1$. Để hàm số đồng biến trên tập xác định thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} (1)$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(m-1) \leq 0$. Bất phương trình có $a > 0; \Delta < 0$, nên bất phương trình vô nghiệm. Vậy không tìm được giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x + 2018$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq 1$.

B. $-3 \leq m \leq 1$

C. $-3 < m < 1$.

D. $m \geq 1; m \leq -3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3.$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -4$.

B. $m = 0$.

C. $m = -2$.

D. $m = 1$

Lời giải:

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = mx^2 - 4x + m + 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1. • $m = 0$ thì $y' = -4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

TH2. • $\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta'_{y'} = -m^2 - 3m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$.

Suy ra giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là $m = 1$.

Câu 16: [Đề thi thử-Liên trường Nghệ An-L2] Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2; 4]$ để hàm

số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 3.

B. 5.

C. 0.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$.

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 2x + 3, y' > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ (không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$).

Với $m = -1 \Rightarrow y' = 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

$y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ \Delta' = (m + 1)^2 - 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 1 \\ -2m^2 + 2m + 4 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2; 4]$ nên $m \in \{-2; 2; 3; 4\}$.

Kết hợp với $m = -1$.

Vậy có 5 giá trị m nguyên thuộc $[-2; 4]$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = (m^2 - 4)x^3 + 3(m - 2)x^2 + 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 3(m^2 - 4)x^2 + 6(m - 2)x + 3$

* Với $m = 2$ ta có: $f'(x) = 3 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2$ thỏa mãn đề bài.

* Với $m = -2$ ta có: $f'(x) = -24x + 3 \Rightarrow m = -2$ không thỏa mãn đề bài.

* Với $m \neq \pm 2$ ta có: $f'(x)$ là một tam thức bậc hai. Từ đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện

$$\text{là } \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ (m-2)^2 - (m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -4m + 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m \geq 2$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m-2)x - 3m$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $\frac{-1}{4} \leq m < 0$.

B. $m \leq -\frac{1}{4}$.

C. $m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$y' = mx^2 - 2(m+1)x + (m-2).$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$ ta có $y' = -2x - 2$ (không thỏa mãn)

$$\text{TH2: } m \neq 0 \text{ ta có } y' \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (m+1)^2 - m(m-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 + 4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{4}.$$

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \leq 0$.

B. $m > -1$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = 0$

Hàm số trở thành $y = -x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$

$$y' = mx^2 - 2mx + 2m - 1$$

Hàm số nghịch biến trên tập xác định $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$)

$$\text{ĐK: } \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m(2m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được $m \leq 0$

Câu 20: (THPT CHUYÊN KHTN - LẦN 1 - 2018). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

- A. $(-\infty; 6]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; 6]$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0; 4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \forall x \in (0; 4)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1}$ trên $(0; 4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x+1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \forall x \in (0; 4)$ thì $m \leq 3$.

Câu 21: Tập hợp các giá trị m để hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên $(-3; 0)$ là

- A. $\left[\frac{-1}{3}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{-1}{3}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{-1}{3}\right)$. D. $\left[\frac{-1}{3}; 0\right)$.

Lời giải:

Chọn A

$$D = \mathbb{R}$$

Ta có $y' = 3mx^2 - 2x + 3$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ khi và chỉ khi:

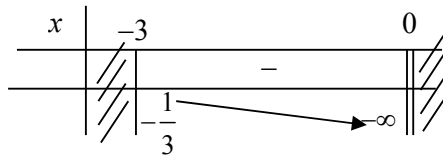
$$y' \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \text{ (Dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm trên } (-3; 0))$$

$$\Leftrightarrow 3mx^2 - 2x + 3 \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{2x-3}{3x^2} = g(x) \quad \forall x \in (-3; 0)$$

Ta có: $g'(x) = \frac{-2x+6}{3x^3}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

BBT



Vậy $m \geq \max_{[-3; 0)} g(x) = -\frac{1}{3}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x + 2016$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; 7)$.

A. $m \geq 5$.

B. $m < 1$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \geq 7 \cup m \leq 1$.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x + 2016 \Rightarrow y' = x^2 - 2(m+1)x + m(m+2).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}. \text{ Lúc này hàm số đồng biến trên các khoảng } (-\infty; m), (m+2; +\infty).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3; 7) \Rightarrow \begin{cases} m+2 \leq 3 \\ m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 7 \end{cases}.$

Câu 23: (SGD Hà Nam - Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (6m+5)x - 1$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

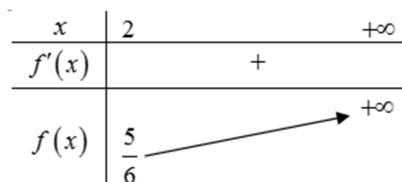
Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m+5$.

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m+5 \geq 0 \quad \forall x \in (2; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 \geq 6m(x-1) \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{6x - 6} = f(x).$$

Ta có: $f'(x) = \frac{18x^2 - 36x + 6}{(6x-6)^2} > 0 \quad \forall x \in (2; +\infty)$.

BBT



Vậy $m \leq \frac{5}{6}$ nên không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa ycbt.

Câu 24: [Cụm 1 HCM] Với tất cả các giá trị thực nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$?

A. $-1 \leq m \leq 0$.

B. $-1 < m < 0$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Xét hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} (m < m+2, \forall m).$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$						$+\infty$

Theo Bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [0;1]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Cách 2:

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2) = 3[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)]$.

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+2) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m, x = m+2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số nghịch biến trên $[0;1] \longleftrightarrow [0;1] \subset [m; m+2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Câu 25: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3 \text{ nghịch biến trên khoảng } (-1; 1).$$

A. $S = [-1; 0]$

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{-1\}$

D. $S = [0; 1]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m)$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} \forall m$$

Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(m; m+2) \forall m$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ thì $(-1; 1) \subset (m; m+2)$.

$$\text{Nghĩa là: } m \leq -1 < 1 \leq m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -1 < 1 \\ 1 \leq m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$

B. $m = -1$.

C. $m = 9$.

D. $m = 1; m = -9$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases}$$

Câu 27: Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

B. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

C. $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

D. $\frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m+1) = 3(x^2 + 2mx + m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m+1 = 0$ (1). Điều kiện cần và đủ để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow y' \leq 0$ trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 \neq x_2$) thoả mãn $|x_1 - x_2| > 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |2\sqrt{\Delta'}| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' > 4 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 > 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Vậy hàm số (1) nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4

$$\Leftrightarrow m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 2.

A. $m = 0$.

B. $m < 3$.

C. $m = 2$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn A

Tính $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Ta nhớ công thức tính nhanh "Nếu hàm bậc ba ($a > 0$) nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng α thì phương trình đạo hàm có hai nghiệm và trị tuyệt đối hiệu hai nghiệm bằng α "

Với α là một số xác định thì m cũng là một số xác định chứ không thể là khoảng $\longrightarrow$ Đáp số phải là A hoặc C.

Thử với $m = 0$ phương trình đạo hàm $3x^2 + 6x = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$ và khoảng cách giữa chúng bằng 2.

Câu 29: [AMSTERDAM-LAN-1-19-20] Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 6mx^2 - 6x + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là đoạn $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 1.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

+ Nếu $m = 1$, hàm số đã cho trở thành $y = -6x^2 - 6x + 5$ là hàm số bậc hai nên không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $m \neq 1$, có $y' = 3(m-1)x^2 - 12mx - 6$. Để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 4mx - 2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = 4m^2 + 2(m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2}.$$

Câu 30: [THPT Đặng Thúc Hứa-2017] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m-2)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Một học sinh đã giải như sau.

Bước 1. Ta có $y' = 3mx^2 + 2mx + (m-2)$.

Bước 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3mx^2 + 2mx + (m-2) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Bước 3. } y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6m - 2m^2 \leq 0 \\ a = 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy $m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải của học sinh trên là đúng hay sai? Nếu lời giải là sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 2.

C. Sai ở bước 3.

D. Sai từ bước 1.

Lời giải

Chọn B

Bài giải sai ở bước 2 vì chưa xét trường hợp $m = 0 \Leftrightarrow y' = -2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 31: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1; 2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; 2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1	2
g'	+	
g	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$. Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 32: Cho hàm số $y = (m^2 - 2m)x^4 + (4m - m^2)x^2 - 4$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 0.

B. Vô số.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta xét hai trường hợp:

- Hệ số $a = m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \longrightarrow y = -4 \text{ (loại)} \\ m = 2 \longrightarrow y = 4x^2 - 4 \end{cases}$. Hàm số $y = 4x^2 - 4$ có đồ thị là một

parabol nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó $m = 2$ thỏa mãn. (Học sinh rất mắc phải sai lầm là không xét trường hợp $a = 0$)

- Hệ số $a = m^2 - 2m \neq 0$. Dựa vào dấu hiệu đặc trưng của hàm trùng phương thì yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị tham số có một cực trị và đó là cực tiểu $\longleftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 4m - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > 2 \\ 0 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{3; 4\}.$$

Vậy $m = \{2; 3; 4\}$.

BÀI 39: BÀI TOÁN THAM SỐ XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM PHÂN THỨC.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 1:

Tìm tham số m để hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên tập xác định của nó.

Phương pháp:

— Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Tính đạo hàm $y' = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

— Bước 2. Ghi điều kiện để hàm đơn điệu. Chẳng hạn:

Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Rightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$

Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Rightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m ?$

Bài toán 2:

Tìm tham số m để hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên miền cho trước.

Phương pháp:

— Tìm tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ và tính $y' = \frac{ad - cb}{(cx+d)^2}$.

— Hàm số đồng biến trên $(x_0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots > 0 \\ \dots \leq x_0 \end{cases}$, trên $(-\infty; x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots > 0 \\ \dots \geq x_0 \end{cases}$

— Hàm số nghịch biến trên $(x_0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots < 0 \\ \dots \leq x_0 \end{cases}$, trên $(-\infty; x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots < 0 \\ \dots \geq x_0 \end{cases}$

— Hàm số tăng trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \\ x \in (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots > 0 \\ \dots \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq \alpha \\ -\frac{d}{c} \geq \beta \end{cases} \Rightarrow m.$

— Hàm số giảm trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \\ x \in (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots < 0 \\ \dots \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq \alpha \\ -\frac{d}{c} \geq \beta \end{cases} \Rightarrow m.$

***) Lưu ý:**

Khi đặt ẩn phụ cần xét tính đơn điệu của ẩn đặt trên khoảng đang xét.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{m \cos x + 1}{\cos x - m}$, m là tham số. Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Do hàm số $y = \cos x$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số,

khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = f(t) = \frac{mt - 1}{t - m}$ trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx-3}{2x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $(-\sqrt{6}; 6]$. B. $[-6; 6]$. C. $[-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. D. $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

- A. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$. B. $1 < m < 2$.
C. $1 \leq m \leq 2$. D. $m > 2$ hoặc $m < 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-2}$.
Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

- A. $m > -2$. B. $m \geq -2$. C. $m \leq -2$. D. $m < -2$.

Câu 4: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ là.

- A. $-2 < m \leq -1$. B. $-2 < m < 2$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx-6m+5}{x-m}$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

- A. $1 < m \leq 3$. B. $1 \leq m \leq 3$. C. $1 < m < 5$. D. $1 \leq m \leq 5$.

Câu 6: Tập tất cả các giá trị của tham số p để hàm số $|y| = \frac{p \begin{cases} -5 \\ +p-6 \end{cases}}{+p-6}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là khoảng $(d; e)$. Tính $S = e - d$.

- A. $S = -61$ B. $S = -51$ C. $S = -41$ D. $S = 41$

Câu 7: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in [1; 2)$. C. $m \in [1; 2]$. D. $m \in (1; 2]$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của p để hàm số $|y| = \frac{\sqrt{4} \begin{cases} +p \\ -4 \end{cases}}{\sqrt{4} \begin{cases} +p \\ -4 \end{cases}}$ nghịch biến trên khoảng $\left[\frac{\pi}{5}; \pi\right)$.

- A. $p \geq -4$. B. $p > -4$. C. $p < -4$. D. $p \leq -4$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m > 2$. B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
C. $m \leq 2$. D. $m \leq 0$.

Câu 10: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq \frac{5}{4}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của chúng.

- A. $m > 1$. B. $m > -1$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m^2x-4}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $m = 1, m = 2, m = 3$ B. $m = 0, m = -1, m = -2$
C. $m = -1, m = 0, m = 1$ D. $m = 0, m = 1, m = 2$

Câu 3: Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- A. $m < 1$ hoặc $m > 2$. B. $m \geq 1$. C. $-1 < m < 2$. D. $1 \leq m < 2$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng xác định của nó.

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in [2; +\infty)$. C. $m \in (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2)$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trên $(-1; 1)$ hàm số $y = \frac{mx+6}{2x+m+1}$ nghịch biến:

- A. $-4 < m < 3$. B. $\begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ 1 < m \leq 3 \end{cases}$. C. $1 \leq m < 4$. D. $\begin{cases} -4 < m \leq -3 \\ 1 \leq m < 3 \end{cases}$.

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 7: Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

- A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y = \frac{2x-1}{x-m}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq \frac{1}{2}$. D. $0 \leq m < \frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 10: Số các giá trị m nguyên để hàm số $y = \frac{(m+1)x+4m+10}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ là:

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. $-2 < m \leq -1$.

B. $-2 \leq m \leq -1$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Câu 12: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \leq 0$ hoặc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3$.

D. $0 \leq m < 3$.

Câu 14: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

A. $-1 \leq m < 2$.

B. $m < 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < 2 \end{cases}$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số p để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-p}+4}$ đồng biến trên khoảng $\left(3; \frac{\pi}{7}\right)$.

A. $p \in [4; +\infty)$.

B. $p \in (6; +\infty)$.

C. $p \in [5; 6)$.

D. $p \in (-\infty; 4] \cup [5; 6)$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $m \in (-1; 1)$.

B. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 12A. B. 3. C. 0. D. 4.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

- A. $m > 2$. B. $-2 < m < 2$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $1 \leq m < 2$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- A. 3. B. 0. C. Vô số. D. 6.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

- A. 2. B. 6. C. Vô số. D. 1.

Câu 4: Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. Không có m .

Câu 5: Tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ là:

- A. $-4 < m \leq -1$. B. $-4 \leq m < 1$.
C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$. D. $m < -4$ hoặc $m \geq 2$.

Câu 6: Hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-4}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$ khi:

A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$

C. $-2 \leq m \leq 2$

D. $-2 < m < 2$

Câu 7: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Tính tổng T của các phần tử trong S .

A. $T = 35$.

B. $T = 40$.

C. $T = 45$.

D. $T = 50$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2+3x+m-2}{x+2}$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị.

A. $m > 0$.

B. $m > -1$.

C. $m < 0$.

D. $m \leq 2$.

Câu 9: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Câu 10: Hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi giá trị của m là:

A. $m = 1$.

B. $m > 1$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \in \emptyset$.

Câu 11: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx-16}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 5)$ là:

A. $\begin{cases} m < -4 \\ m \geq 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m > 4 \end{cases}$

D. $4 < m \leq 5$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{mx+2015m+2016}{-x-m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tính số phần tử của S .

A. 2017.

B. 2015.

C. 2018.

D. 2016.

Câu 13: Tìm m để hàm số $y = \frac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $m \in (-\infty; -2)$.

B. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $m \in (-2; +\infty)$.

D. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 14: Hàm số $y = \frac{2m\cos x-m}{4\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì điều kiện đầy đủ của tham số m là:

A. $m < -2$ hoặc $m > 0$.

B. $m < -2$ hoặc $m \geq 4$.

C. $-2 < m \leq 4$.

D. $-2 < m < 0$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

- A. $1 \leq m < 2$. B. $m \leq 0; 1 \leq m < 2$. C. $m \geq 2$. D. $m \leq 0$.

Câu 16: Hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì giá trị của m là:

- A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right] \setminus \{-1\}$. B. $m \in (-1; 2] \setminus \{-1\}$. C. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

- A. $m \leq 0$. B. $m \leq 1$. C. $m \leq -1$. D. $m \leq 2$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17; 37)$.

- A. $m \in [-4; -1)$. B. $m \in (-\infty; -6] \cup [-4; -1) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$. D. $m \in (-1; 2)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^3 - m\left(2x^2 - 2x\sqrt{x^2+1} + 1\right) - \frac{m-6}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 5. B. Vô số. C. 2. D. 3.

Câu 20: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{(2m^2-1)\tan x}{\tan^2 x + \tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là:

- A. $\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $m < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ hoặc $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
C. $\frac{-1}{\sqrt{2}} < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

BÀI 39: BÀI TOÁN THAM SỐ XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU

HÀM PHÂN THỨC.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 1:

Tìm tham số m để hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên tập xác định của nó.

Phương pháp:

— Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Tính đạo hàm $y' = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

— Bước 2. Ghi điều kiện để hàm đơn điệu. Chẳng hạn:

Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Rightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$

Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Rightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m ?$

Bài toán 2:

Tìm tham số m để hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên miền cho trước.

Phương pháp:

— Tìm tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ và tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.

— Hàm số đồng biến trên $(x_0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq x_0 \end{cases}$, trên $(-\infty; x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \geq x_0 \end{cases}$

— Hàm số nghịch biến trên $(x_0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq x_0 \end{cases}$, trên $(-\infty; x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \geq x_0 \end{cases}$

— Hàm số tăng trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \\ x \in (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ \left[-\frac{d}{c} \leq \alpha \right. \\ \left. -\frac{d}{c} \geq \beta \right] \end{cases} \Rightarrow m.$

— Hàm số giảm trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \\ x \in (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ \left[-\frac{d}{c} \leq \alpha \right. \\ \left. -\frac{d}{c} \geq \beta \right] \end{cases} \Rightarrow m.$

*) Lưu ý:

Khi đặt ẩn phụ cần xét tính đơn điệu của ẩn đặt trên khoảng đang xét.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{m \cos x + 1}{\cos x - m}$, m là tham số. Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Do hàm số $y = \cos x$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số nghịch biến, khi đó bài toán trở thành tìm

m để hàm số $y = f(t) = \frac{mt - 1}{t - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx-3}{2x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $(-\sqrt{6}; 6]$. B. $[-6; 6]$. C. $[-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. D. $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$.

Lời giải

Chọn D.

$$y = \frac{mx-3}{2x-m} \Rightarrow y' = \frac{-m^2+6}{(2x-m)^2}.$$

Theo yêu cầu bài toán: $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -m^2+6 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

- A. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$. B. $1 < m < 2$.
C. $1 \leq m \leq 2$. D. $m > 2$ hoặc $m < 1$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3-m\}$.

$$y' = \frac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}.$$

YCBT $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2-3m+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2-3x+m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

- A. $m > -2$. B. $m \geq -2$. C. $m \leq -2$. D. $m < -2$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{TXĐ } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}. \quad f'(x) = \frac{2x^2-8x+6-m}{(x-2)^2}.$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng xác định.

$$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (\forall x \in D) \Leftrightarrow 2x^2-8x+6-m \geq 0 (\forall x \in D) \Leftrightarrow 2(x-2)^2 \geq m+2 (\forall x \in D).$$

Suy ra $m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 4: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ là.

A. $-2 < m \leq -1$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn A.

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}, (x \neq -m).$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } (-\infty; 1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx-6m+5}{x-m}$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

A. $1 < m \leq 3$.

B. $1 \leq m \leq 3$.

C. $1 < m < 3$.

D. $1 \leq m < 3$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$y' = \frac{-m^2 + 6m - 5}{(x-m)^2}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 6m - 5 > 0 \\ m \leq 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 3$$

Câu 6: Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là khoảng $(a; b)$. Tính $P = b - a$.

A. $P = -3$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{3-m\}. \text{ Đạo hàm } y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x+m-3)^2}$$

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \neq 3-m \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 2 \Leftrightarrow m \in (1; 2) \equiv (a; b) \Leftrightarrow P = b - a = 1.$$

- Câu 7:** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.
- A. $m \in (1;2)$. B. $m \in [1;2)$. C. $m \in [1;2]$. D. $m \in (1;2]$.

Lời giải

Chọn B.

Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$, $y' = \frac{m^2-4}{(m-x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-3;1)$ khi $\begin{cases} m^2-4 < 0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -3 \text{ hoặc } m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$.

Vậy $m \in [1;2)$.

- Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $|y| = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{5}; \pi\right)$.
- A. $p \geq -4$. B. $p > -4$. C. $p < -4$. D. $p \leq -4$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $w = \sqrt{x-4}$, với $\begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{5}; \pi\right) \\ x \neq 4 \end{cases} \longrightarrow w \in (3;4)$.

Hàm số trở thành $|y| = \frac{w+4}{w-4} \longrightarrow |y| = \frac{-4-p}{(w-4)^5}$.

Ta có $w \in (3;4)$, do đó $w = \sqrt{x-4}$ **nghịch biến** trên $\left(\frac{\pi}{5}; \pi\right)$.

Do đó YCBT $\iff |y|$ **đồng biến** trên khoảng $(3;4) \iff |y| > 3/\forall w \in (3;4)$

$\iff \begin{cases} -4-p > 3 \\ w-4 \neq 0 \end{cases} / \forall w \in (3;4) \iff -4-p > 3 \iff p < -4$.

- Câu 9:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m > 2$. B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
C. $m \leq 2$. D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{-\sin x(\cos x - m) + \sin x(\cos x - 2)}{(\cos x - m)^2} = \frac{\sin x(m-2)}{(\cos x - m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \iff y' < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} m-2 < 0 \\ \cos x \neq m \end{cases} \iff \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$

Câu 10: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \cos x; x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Ta có:

$$y = \frac{-t + m}{1 - t^2} \Rightarrow y' = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(-t^2 + 1)}.$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(-t^2 + 1)} \leq 0 \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 1 \geq 0 \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t} \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} g(t) \Rightarrow m \leq \frac{5}{4}$$

$$\text{Với } g(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của chúng.

A. $m > 1$.

B. $m > -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{1+m}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m^2x-4}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m = 1, m = 2, m = 3$

B. $m = 0, m = -1, m = -2$

C. $m = -1, m = 0, m = 1$

D. $m = 0, m = 1, m = 2$

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{-m^2+4}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Vậy $m = -1, m = 0, m = 1$

Câu 3: Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

A. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

B. $m \geq 1$.

C. $-1 < m < 2$.

D. $1 \leq m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x-m)^2}$$

Điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty) \Leftrightarrow y' > 0 \forall x \in (-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng xác định của nó.

A. $m \in (1; 2)$.

B. $m \in [2; +\infty)$.

C. $m \in (2; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \frac{m-2}{(x-1)^2}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó thì

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{m-2}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x \in D \Leftrightarrow m > 2 \text{ suy ra } m \in (2; +\infty).$$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trên $(-1;1)$ hàm số $y = \frac{mx+6}{2x+m+1}$ nghịch biến:

- A. $-4 < m < 3$. B. $\begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ 1 < m \leq 3 \end{cases}$. C. $1 \leq m < 4$. D. $\begin{cases} -4 < m \leq -3 \\ 1 \leq m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.Điều kiện xác định: $x \neq \frac{-m-1}{2}$.

Ta có $y' = \frac{m^2+m-12}{(2x+m+1)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{-m-1}{2} \notin (-1; 1) \\ y' < 0, \forall x \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-12 < 0 \\ -m-1 \notin (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-4; 3) \\ m \notin (-3; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m \leq -3 \\ 1 \leq m < 3 \end{cases}$$

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn C.♦ Nếu $m = 0$, ta có $y = \frac{x}{4}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (thỏa).♦ Nếu $m \neq 0$:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{m} \right\}$; $y' = \frac{4-m^2}{(mx+4)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $\begin{cases} 4-m^2 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2 < m < 2 \end{cases}$.

Vậy kết hợp hai trường hợp ta có 3 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7: Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x-2}{x-m} \Rightarrow y' = \frac{-m+2}{(x-m)^2}.$$

$$\text{Để hàm số đồng biến trên khoảng } (-\infty; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > -1 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y = \frac{2x-1}{x-m}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq \frac{1}{2}$.

D. $0 \leq m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{m\}; y' = \frac{-2m+1}{(x-m)^2}.$$

$$\text{Hàm đã cho đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ khi } \begin{cases} -2m+1 > 0 \\ m \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S .

A. 1.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\}$$

$$y' = \frac{m^2-4}{(2x+m)^2}.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \begin{cases} -\frac{m}{2} \leq 0 \\ -\frac{m}{2} \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Câu 10: Số các giá trị m nguyên để hàm số $y = \frac{(m+1)x+4m+10}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ là:

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \frac{m^2 - 3m - 10}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ thì $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty; -2) \\ -m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 10 < 0 \\ m \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2 < m \leq 2$. Vậy có 4 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. $-2 < m \leq -1$.B. $-2 \leq m \leq -1$.C. $-2 \leq m \leq 2$.D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$

Câu 12: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có $y' = 3 - \frac{m^2 + 3m}{(x+1)^2} = \frac{3x^2 + 6x + 3 - m^2 - 3m}{(x+1)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \neq -1 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 - m^2 - 3m \geq 0 \quad \forall x \neq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 + 3(m^2 + 3m) - 9 \leq 0 \\ m^2 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 0$

Mà m nguyên nên $m \in \{-2, -1\}$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \leq 0$ hoặc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3$.

D. $0 \leq m < 3$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(\sin x - m) - (\sin x - 3)\cos x}{(\sin x - m)^2} = \frac{\cos x(3 - m)}{(\sin x - m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \leq \sin 0 \\ m \geq \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > m \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Câu 14: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x + m}{mx + 4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C.

Trường hợp 1: $m = 0$ ta có hàm số $y = \frac{1}{4}x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$, hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-4}{m}\right\}$ và $y' = \frac{4 - m^2}{(mx + 4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các số nguyên m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định là $\{-1; 0; 1\}$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng

$\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

A. $-1 \leq m < 2$.

B. $m < 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right) \Rightarrow t \in (-1; 0)$. Khi đó ta có $t'_x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Do đó tính đồng biến của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ giống như hàm số $f(t) = \frac{t-2}{t-m}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t-2}{t-m} \forall t \in (-1; 0)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \frac{2-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (-1; 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0 \forall t \in (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq -1 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [0; 2) \\ m \geq 0 \end{cases}$$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng.

$$\left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

A. $m \in [1; +\infty)$

B. $m \in (3; +\infty)$.

C. $m \in [2; 3)$.

D. $m \in (-\infty; 1] \cup [2; 3)$

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Hàm số trở thành $|(\mathfrak{w}) = \frac{\mathfrak{w}-5}{\mathfrak{w}-\mathfrak{p}+4} \longrightarrow |(\mathfrak{w}) = \frac{6-\mathfrak{p}}{(\mathfrak{w}-\mathfrak{p}+4)^5}$.

Ta có $\mathfrak{w}^{\mathfrak{k}} = \frac{4}{\mathfrak{frv}^5} > 3/\mathfrak{w}' \{ \in \left(3; \frac{\pi}{7}\right) \}$, do đó $\mathfrak{w} = \mathfrak{w} \mathfrak{q} \{$ **đồng biến trên** $\left(3; \frac{\pi}{7}\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow |(\mathfrak{w})$ đồng biến trên khoảng $(3\mathfrak{A}) \longleftrightarrow |(\mathfrak{w}) > 3/\forall \mathfrak{w} \in (3\mathfrak{A})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ t-m+1 \neq 0 \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 \neq t \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ m-1 \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 2 \leq m < 3 \end{cases}$$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $m \in (-1; 1)$.

B. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$, ta có: $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1 < 0 \\ -m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m-\cos x}{\sin^2 x}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y = \frac{m-\cos x}{1-\cos^2 x}$. Đặt $\cos x = t$, vì $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ và lưu ý rằng hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số trở thành $y = \frac{m-t}{1-t^2}$. Ta có, hàm số $y = \frac{m-t}{1-t^2}$ xác định trên x và có đạo hàm

$$y' = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(1-t^2)^2}.$$

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số ở $y = \frac{m-t}{1-t^2}$ phải nghịch biến trên x

$$\Rightarrow -t^2 + 2mt - 1 < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2m < t + \frac{1}{t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Xét } f(t) = t + \frac{1}{t} \text{ có } f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

x	0	$\frac{1}{2}$
y'		-
y	$+\infty$	$\frac{5}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $2m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 12A.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $(0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6} = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6x^8 + 6}{x^7}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

$$\text{Suy ra } m \geq g(x), \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in (0; +\infty)} g(x) = g(1) = -4$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}.$$

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (0; +\infty)$.

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow 2(m-1) \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}.$$

Xét $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6}$ với $\forall x \in (0; +\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x - \frac{6}{x^7}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

$$2(m-1) \leq g(x) \Leftrightarrow 2(m-1) \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương thỏa mãn bài toán.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

- A. $m > 2$. B. $-2 < m < 2$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $1 \leq m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(m-4x)^2}$. Để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

$$\text{Khi đó ta có } y' > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2-4}{(m-4x)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 < 0 \\ \frac{m}{4} \notin \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in [1; 2).$$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- A. 3. B. 0. C. Vô số. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x \neq -3m$.

$$y' = \frac{3m-1}{(x+3m)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } (6; +\infty) &\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -3m \notin (6; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy có 3 giá trị nguyên.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

- A. 2. B. 6. C. Vô số. D. 1.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = (-\infty; -3m) \cup (-3m; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ -6 \leq -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2.$

Mà m nguyên nên $m = \{1; 2\}$.

Câu 4: Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 0$.

D. Không có m .

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \frac{m^2+3m+2}{(x+m)^2}$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2+3m+2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -1$

Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2; -1)$.

Câu 5: Tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ là:

A. $-4 < m \leq -1$.

B. $-4 \leq m < 1$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.

D. $m < -4$ hoặc $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn B.

YCBT: $\begin{cases} x = m \notin (-1; 2) \\ -m^2 - 3m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -1$

Câu 6: Hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-4}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$ khi:

A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$

C. $-2 \leq m \leq 2$

D. $-2 < m < 2$

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-4}$ với $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(x-4)^2}; \forall x \neq 4$.

Yêu cầu bài toán trở thành $y' > 0; \forall x \neq 4 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 4}{(x-4)^2} > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 7: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = \frac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Tính tổng T của các phần tử trong S .

A. $T = 35$.

B. $T = 40$.

C. $T = 45$.

D. $T = 50$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{TXĐ: } \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}. \text{ Đạo hàm } y' = \frac{m^2 - 10m}{(2mx+1)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^5 - 43p < 3 \\ \frac{-4}{5p} \end{cases} \quad \forall \{ > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} p^5 - 43p < 3 \\ \frac{-4}{5p} \notin (6; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^5 - 43p < 3 \\ \frac{-4}{5p} \leq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < p < 43 \xrightarrow{p \in \mathbb{Z}} p \in \{4, 5, 6, \dots, 42\} \longrightarrow W = 781$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị.

A. $m > 0$.

B. $m > -1$.

C. $m < 0$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 + 8x + 8 - m}{(x+2)^2}$$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'$ 2 lần đổi dấu $\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 8x + 8 - m$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$-2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - 2(8 - m) > 0 \\ g(-2) = 8 - 16 + 8 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 9: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{m\}. \text{ Ta có } y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

Vì $\Delta_g' = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

$$\text{Điều kiện tương đương là } \begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2.$$

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10: Hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 + 1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi giá trị của m là:

- A. $m = 1$. B. $m > 1$. C. $m \leq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x(1-m)}{(x^2+1)^2}$$

+) Với $m = 1 \Rightarrow y' = 0$, khi đó hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow y' = 0$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $m = 1$

loại. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' = \frac{2x(1-m)}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x(1-m) > 0, \forall x \in \mathbb{R}. (*)$$

+) Với $m > 0 \Rightarrow 1-m < 0$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (không đúng).

+) Với $m < 1 \Rightarrow 1-m > 0$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (không đúng).

Vậy không có giá trị của m làm cho hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 11: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx-16}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;5)$ là:

- A. $\begin{cases} m < -4 \\ m \geq 5 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m > 4 \end{cases}$. D. $4 < m \leq 5$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{YCBT: } \begin{cases} x = m \notin (-1;5) \\ -m^2 + 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 5 \\ m < -4 \\ m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m \geq 5 \end{cases}$$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{mx+2015m+2016}{-x-m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tính số phần tử của S .

- A. 2017. B. 2015. C. 2018. D. 2016.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = \frac{-m^2 + 2015m + 2016}{(x+m)^2}, \forall x \neq -m$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' > 0, \forall x \neq -m$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 2015m + 2016 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2016$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{0; 1; \dots; 2015\}$.

Vậy số phần tử của tập S là 2016.

Câu 13: Tìm m để hàm số $y = \frac{2 \cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $m \in (-\infty; -2)$.

B. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $m \in (-2; +\infty)$.

D. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \cot x, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t+1}{t+m}$ trên khoảng $(0; 1), t \neq -m$.

Ta có $f'(t) = \frac{2m-1}{(t+m)^2}, \forall t \in (0; 1), t \neq -m$.

Khi đó để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $f(t)$ nghịch biến trên khoảng

$(0; 1)$ (vì $t' = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (0; 1), t \neq -m$).

Điều kiện: $\begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ -m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 14: Hàm số $y = \frac{2m \cos x - m}{4 \cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì điều kiện đầy đủ của tham số m là:

A. $m < -2$ hoặc $m > 0$. B. $m < -2$ hoặc $m \geq 4$.

C. $-2 < m \leq 4$. D. $-2 < m < 0$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = \cos x \xrightarrow{x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)} t \in (-1; 0)$. Do $t = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$. (Có thể

dùng hàm số kiểm tra: $t' = -\sin x > 0, \forall x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.)

Nêu yêu cầu bài toán sẽ giữ nguyên đồng biến $\rightarrow$ đồng biến hay bài toán được phát biểu lại thành” Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2mt - m}{4t + m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ “.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với $y' = \frac{2m^2 + 4m}{(4t + m)^2} > 0, \forall t \in (-1; 0) (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{m}{4} \notin (-1; 0) \\ 2m^2 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{4} \leq -1 \\ -\frac{m}{4} \geq 0 \end{cases} \text{ với hoặc } \begin{cases} m < -2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \\ m < -2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 4 \end{cases}$$

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

A. $1 \leq m < 2$.

B. $m \leq 0; 1 \leq m < 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện $\tan x \neq m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là $m \notin (0; 1)$

$$y' = \frac{2 - m}{\cos^2 x (\tan x - m)^2}.$$

Ta thấy: $\frac{1}{\cos^2 x (\tan x - m)^2} > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right); m \notin (0; 1)$

Để hs đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 > 0 \\ m \leq 0; m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } 1 \leq m < 2$

Câu 16: Hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right] \setminus \{-1\}$.

B. $m \in (-1; 2] \setminus \{-1\}$.

C. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

D. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right]$.

Giải

Chọn D.

$y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \frac{x^2 + 2mx - 4m}{(x + m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases}$

$$x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow 2m(x-2) \geq -x^2, \forall x \in [1; +\infty) \quad (1)$$

Do $x = 2$ thỏa bất phương trình $2m(x-2) \geq -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x \neq 2$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq \frac{-x^2}{x-2}, \forall x \in [1; 2) \\ 2m \geq \frac{-x^2}{x-2}, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{-x^2}{x-2}$ trên $[1; +\infty) \setminus \{2\}$ có $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{Bảng biến thiên}$$

x	1	2	4	$+\infty$
y'	+		+ 0 -	
y	1	$+\infty$	-8	$+\infty$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2m \leq 1 \\ 2m \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \leq -1$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{-mx+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -mx+1 \geq 0 \quad (1), \forall x \in (0; +\infty)$$

☐ $m = 0$ (1) đúng

☐ $m > 0 \Leftrightarrow -mx+1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{m}$. Vậy (1) không thỏa mãn

☐ $m < 0 \Leftrightarrow -mx+1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{m}$. khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{m} < 0$ thỏa mãn

Vậy $m \leq 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $m \in [-4; -1)$.

B. $m \in (-\infty; -6] \cup [-4; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in (-1; 2)$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{x-1} \xrightarrow{x \in (17;37)} t \in (4;6)$. Do $t = \sqrt{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(17;37)$ nên bài toán được phát biểu lại như sau: “Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{(m-1)t+2}{t+m}$ đồng biến trên khoảng $(4;6)$ ”.

Giải ta được đáp án B.

Câu 19: Cho hàm số $y = \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^3 - m\left(2x^2-2x\sqrt{x^2+1}+1\right) - \frac{m-6}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5.

B. Vô số.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}-x = f(x)$. Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{x-|x|}{\sqrt{x^2+1}} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy

ra hàm số $t = f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Suy ra $t > 0$.

Nên yêu cầu bài toán sẽ thay đổi nghịch biến thành đồng biến hay bài toán được phát biểu lại như sau: “Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = t^3 - mt^2 - (m-6)t - 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ ”.

Giải ta được đáp án D.

Câu 20: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{(2m^2-1)\tan x}{\tan^2 x + \tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $m < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ hoặc $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{-1}{\sqrt{2}} < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C.

$$y' = \frac{(2m^2 - 1)(t^2 + t + 1) - (2m^2 - 1)t(2t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{(1 - 2m^2)(t^2 - 1)}{(t^2 + t + 1)^2}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t; x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow t \in (0; 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad y' < 0 \Leftrightarrow (1 - 2m^2)(t^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

BÀI 40: XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

* Bước 1:

* Bước 2:

Với **đường tiệm cận ngang** ta xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

Sử dụng máy tính bỏ túi:

☐ Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $f(x)$ CALC 10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng 10^6 .

☐ Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $f(x)$ CALC -10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng -10^6 .

Với **đường tiệm cận đứng** ta xét:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

Sử dụng máy tính bỏ túi:

☐ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$: $f(x)$ CALC $x_0 + 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .

☐ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$: $f(x)$ CALC $x_0 - 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là

- A. $y = 2$. B. $x = 1$. C. $y = 1$. D. $x = 2$.

Câu 2: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-1}$?

- A. $y = 1$. B. $y = \frac{1}{3}$. C. $y = \frac{3}{2}$. D. $y = \frac{1}{2}$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \frac{-3x+1}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là

- A. $x = -2$, $y = -3$. B. $x = -2$, $y = 3$.
C. $x = -2$, $y = 1$. D. $x = 2$, $y = 1$.

Câu 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ B. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$
C. $y = \sqrt{x^2-1}$ D. $y = \frac{x}{x+1}$

Câu 5: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{3x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
C. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$. D. $y = \frac{x^2+x+1}{x-2}$.

Câu 6: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$ là

- A. 2. B. 3.
C. 4. D. 1.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

- A. 0. B. 3.
C. 1. D. 2.

Câu 8: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 2.
C. 0. D. 1.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y			$+\infty$		5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đường tiệm cận ngang là

- A. $y = 1$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $y = -1$.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x+1}$ là

- A. $x = 1$. B. $y = -1$. C. $x = -1$. D. $x = 3$.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-3}$ là

- A. $y = 1$. B. $y = -\frac{2}{3}$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $y = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = \frac{7-2x}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng?

- A. $x = -3$. B. $x = 2$. C. $x = -2$. D. $x = 3$.

Câu 5: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$?

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Câu 6: Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ là

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 7: Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^3-3x-2}$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 9: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 10: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

- A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 11: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 12: Số các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 13: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ B. $y = \frac{1}{x^4+1}$ C. $y = \frac{1}{x^2+1}$ D. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	2

Đồ thị (C) của hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	1	2	1

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	
y			$+\infty$	1

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		-
y					

Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		-
y					

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu tiệm cận ?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	-	-	-	
y	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		+	+	0	-
y					

The graph shows a function $y = f(x)$ with a vertical asymptote at $x = -1$ and a horizontal asymptote at $y = 2$. The function passes through the point $(1, 2)$. The graph is shaded in the region $x < -1, y > 3$.

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm $f(x)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1:** Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x^2-5}$?
 A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.
- Câu 2:** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là
 A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 3:** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là
 A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 4:** Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 5:** Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu tiệm cận?
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 6:** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?
 A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.
- Câu 7:** Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}}$ là
 A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.
- Câu 8:** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-2x+x}}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 9:** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 10:** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$ là
 A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 12: Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 13: Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$ có đúng bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2}}$ có đồ thị (C). Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 15: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2019}}{|x|-2019}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +		+
y	-3	$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow 3$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

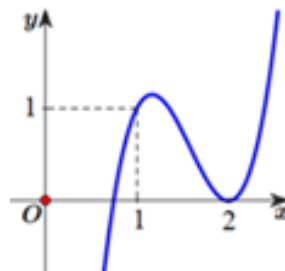
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A. 4.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 2.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



- A. 3.
- B. 4.
- C. 6.
- D. 5.

BÀI 40: XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

* Bước 1: Xác định tập xác định của hàm số.

* Bước 2: Dựa vào định nghĩa về các đường tiệm cận để xác định.

Với đường tiệm cận ngang ta xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

Sử dụng máy tính bỏ túi:

- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC 10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng 10^6 .
- Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC -10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng -10^6 .

Với đường tiệm cận đứng ta xét:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

Sử dụng máy tính bỏ túi:

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC $x_0 + 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .
- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC $x_0 - 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là

A. $y = 2$.

B. $x = 1$.

C. $y = 1$.

D. $x = 2$

Lời giải**Chọn D**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số nhận $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Câu 2: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-1}$?

A. $y = 1$.

B. $y = \frac{1}{3}$.

C. $y = \frac{3}{2}$

D. $y = \frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ làm tiệm cận ngang.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \frac{-3x+1}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x = -2$, $y = -3$

B. $x = -2$, $y = 3$.

C. $x = -2$, $y = 1$.

D. $x = 2$, $y = 1$.

Lời giải**Chọn A**

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-3x+1}{x+2} = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận $x = -2$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x+1}{x+2} = -3$ nên đồ thị hàm số nhận $y = -3$ là tiệm cận ngang.

Câu 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

D. $y = \frac{x}{x+1}$

Lời giải**Chọn D**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 5: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{3x+1}{x-1}$

B. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ **D.** $y = \frac{x^2 + x + 1}{x-2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = 3$.

$\Rightarrow y = 3$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 6: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận

ngang là $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} \right) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} \right) = +\infty$.

Suy ra đồ thị có hai đường tiệm cận đứng là $x = -1, x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.**Lời giải****Chọn D**

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 8: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.**Lời giải****Chọn D**

Tập xác định của hàm số: $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \Rightarrow$ TCD: $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6} \rightarrow x = 0$ không là TCD

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

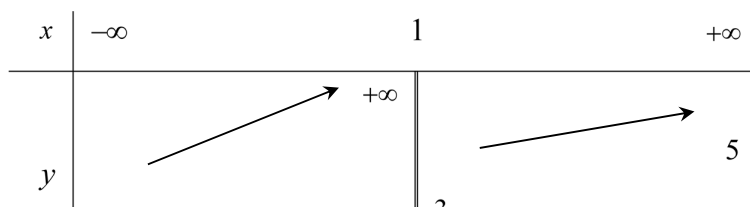
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.**Lời giải****Chọn C**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$

và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

KL: Đồ thị hàm số có tổng số ba đường tiệm cận.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $y = 1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $y = -1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x+1}$ là

A. $x = 1$.

B. $y = -1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty.$$

Vậy đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-3}$ là

A. $y = 1$.

B. $y = -\frac{2}{3}$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

D. $y = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2x-3} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2x-3} = 1 \text{ nên } y = 1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị}$$

$$\text{hàm số } y = \frac{2x+1}{2x-3}.$$

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = \frac{7-2x}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng?

A. $x = -3$.

B. $x = 2$.

C. $x = -2$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{7-2x}{x-2} = +\infty \text{ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên là } x = 2.$$

Câu 5: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$?

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

Câu 6: Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm}$$

cận đứng là $x = -2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 7: Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^3-3x-2}$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

$$+) \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\infty, \text{ suy ra } x = -1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x+1)^2(x-2)} = +\infty, \text{ suy ra } x = 2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \text{ suy ra } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng và ngang.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2

B. 0

C. 1

D. 3

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+4}{x^2+2x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận ngang $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x+4}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả hai đường tiệm cận. Chọn đáp án A.

Câu 9: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A. 2

B. 0

C. 1

D. 3

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = [-25; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x} = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 10: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 0

B. 3

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định hàm số $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \frac{1}{8}$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 11: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Tại $x=0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$

và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$.

Suy ra $x=0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tại $x=-1$, ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = +\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$).

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 12: Số các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

+) Tập xác định $D = [-3; +\infty) \setminus \{-1; 1\}$.

+)Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{8}$.

+) Tương tự ta được $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \frac{1}{8}$ suy ra $x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

+) Do $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{x+3}-2) = \sqrt{2}-2 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2-1) = 0 \\ x^2-1 > 0, \text{ khi } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = -\infty$.

Vậy đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Câu 13: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

B. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$

C. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	2

Đồ thị (C) của hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	1	2	1

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -3$ do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		
y			$-\infty$	$+\infty$	0

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		-
y			$-\infty$	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là: $x = -2$; $x = 0$ và 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'			+		-	
y						

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu tiệm cận ?

A. 3

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng bên trái.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng bên phải.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang bên phải.

Suy ra đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'		-	-	-
y	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty \Rightarrow x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \Rightarrow x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		+	+	0	-
y					

$1 \rightarrow 3$
 $-\infty \rightarrow 2 \rightarrow -1$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm $f(x)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm $f(x)$ là 3.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x^2-5}$?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.**Lời giải****Chọn D**

Cho $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^+} \frac{2-x}{x^2-5} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^-} \frac{2-x}{x^2-5} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})^+} \frac{2-x}{x^2-5} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})^-} \frac{2-x}{x^2-5} = +\infty$.

Nên đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x^2-5}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = \sqrt{5}$ và $x = -\sqrt{5}$.

Câu 2: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.**Lời giải****Chọn D**

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ có tập xác định $D = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Vì: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}$.

và $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$.

nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 3: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn C**

Tập xác định: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Do $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4} \quad \text{nên}$$

đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = (-5; 5)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và tiệm cận xiên.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow (-5)^+} \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = -\infty \text{ nên đường thẳng } x = -5 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = +\infty \text{ nên đường thẳng } x = 5 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 5: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-3; 1\}$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{x-1}{x^2+2x-3} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{x-1}{x^2+2x-3} \right) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Đường thẳng } x = -3 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x^2+2x-3} \right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x-1}{x^2+2x-3} \right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Đường thẳng } x = 1 \text{ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}{x - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải**Chọn A**Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}{x - 1} = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - 3x + 5} = \sqrt{3}, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \text{ và } x - 1 > 0, \forall x > 1.$$

 $\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

 $\Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = -1.$$

 $\Rightarrow y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận đứng và ngang.

Câu 7: Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.**Lời giải****Chọn D**Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}} = 0 \text{ nên đường thẳng } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị}$$

hàm số.

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3 - 1} = 0$; $\sqrt{x^3 - 1} > 0, \forall x > 1$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^3 - 1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3 - 1}}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1}{1 - \frac{1}{x}} = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1}{1 - \frac{1}{x}} = 0.$$

Nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là: $y = 2$ và $y = 0$.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{1}{x}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{1}{x}} = 0.$$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta lại có: $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x} = +\infty.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x} = -\infty.$

Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 10: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4\sqrt{3x+1}-3x-5=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x+1}=3x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 16(3x+1)=9x^2+30x+25 \\ 3x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}.$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$

do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3}$

Do đó đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Kết luận: Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(5 - \frac{8}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{8}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = 5 \Rightarrow y = 5 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(5 - \frac{8}{x}\right)}{(-x) \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x} - 5}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = -5 \Rightarrow y = -5 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = +\infty \Rightarrow x = 3 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 12: Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} = -\infty.$$

Do đó đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x - 8}{(x-2)(x+1)^2} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x - 8}{(x-2)(x+1)^2} = 0.$$

Do đó đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2.

Câu 13: Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$ có đúng bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = [0; +\infty) \setminus \{1; 2\}$.

$$y = \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x-2)}, \forall x \in D.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x-2)} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x-2)} = -\infty.$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \text{Đường thẳng } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2}}$ có đồ thị (C). Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2}} = -\infty \Rightarrow x = -1 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+2}} = 0 \Rightarrow x=1 \text{ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).}$$

Như vậy đồ thị (C) có đúng 1 đường tiệm cận đứng.

Câu 15: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2019}}{|x|-2019}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2019}}{|x|-2019}$ (1). Điều kiện xác định: $-2019 < x \neq 2019$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2019}}{x-2019} = 0$ nên đồ thị hàm số (1) có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2019^+} y = \lim_{x \rightarrow 2019^+} \frac{\sqrt{x+2019}}{x-2019} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=2019$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1).

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -2019^+} y = \lim_{x \rightarrow -2019^+} \frac{\sqrt{x+2019}}{-x-2019} = \lim_{x \rightarrow -2019^+} \frac{-1}{\sqrt{x+2019}} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-2019$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1).

Vậy đồ thị hàm số (1) có 3 đường tiệm cận.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+	+
y	-3	$+\infty$	-2	$+\infty$	3

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -3 \Rightarrow y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	2	0	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.**
- C. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số chỉ có tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'	-	0 +		+ 0 -	
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$ (1)

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (với $x_1 < -2 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4$).

Mặt khác hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5} = g(x)$ có tử thức là hằng số nên ta suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ là

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x) = \frac{1}{2f(x) - 1}$.

Tiệm cận ngang: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Tiệm cận đứng: Xét phương trình: $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

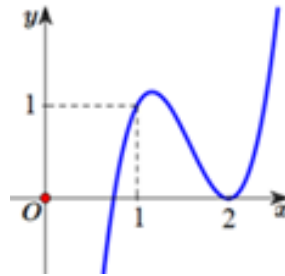
Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là bốn.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$$

có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (0;1) \\ x = 2 \end{cases} \text{ trong đó nghiệm } x = 2 \text{ là nghiệm kép và } x = x_1 \text{ là nghiệm đơn.}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \in (1;2) \\ x = x_3 > 2 \end{cases} \text{ trong đó các nghiệm trên đều là nghiệm đơn.}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } g(x) &= \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-1]} = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2 x \cdot (x-x_1)(x-2)^2 (x-1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}. \end{aligned}$$

Dựa trên điều kiện $x \geq 1$ nên đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 2$, $x = x_2$ và $x = x_3$.

BÀI 41: THAM SỐ M BÀI TOÁN VỀ TIỆM CẬN.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tham số m để đồ thị hàm số có tiệm cận

1. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots$$

Chú ý:

- ☐ Thông thường tại giá trị x_0 hàm số $f(x)$
- ☐ Thông thường, nếu $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ thì $x = x_0$ là của $q(x)$ nhưng của $p(x)$.

Sử dụng máy tính bỏ túi:

- ☐ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC $x_0 + 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .
- ☐ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC $x_0 - 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .

2. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

Chú ý:

- ☐ Thông thường, nếu $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, để tìm giới hạn khi $x \rightarrow \pm\infty$, ta đưa số mũ cao nhất của tử và mẫu ra ngoài.
- ☐ Lưu ý trong việc đưa x ra khỏi $\sqrt{\quad}, |\quad|$.

Sử dụng máy tính bỏ túi:

- ☐ Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC 10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng 10^6 .
- ☐ Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: Nhập hàm $f(x)$ CALC -10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng -10^6 .

3. Một số đồ thị thường gặp:

- ☐ Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = a^{ax+b}$ có tiệm cận ngang $y = 0$ và không có tiệm cận đứng.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = \log_a(ax+b)$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{b}{a}$ và không có tiệm cận ngang.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{x-n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính giá trị biểu thức $P = m + n$.
- A. $P = 0$. B. $P = 2$.
C. $P = -1$. D. $P = 1$.
- Câu 2.** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2-6x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?
- A. -27 . B. 9 hoặc -27 .
C. 0 . D. 9 .
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x^2-3mx+1}$ có hai tiệm cận đứng và khoảng cách giữa chúng bằng 1.
- A. $m = \pm 1$. B. $-1 < m < 1$.
C. $m = 1$. D. $m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Câu 4.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị biểu thức $m+n$.
- A. 2 . B. 8 .
C. -6 . D. 9 .
- Câu 5.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3-2}{x^2-3x+2}$ có hai đường tiệm cận đứng.
- A. $m \neq 2$ và $m \neq \frac{1}{4}$.
B. $m \neq 1$ và $m \neq 2$.
C. $m \neq 1$.
D. $m \neq 0$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang và khoảng cách giữa chúng bằng 1.
- A. $0 < m < 4$.
B. $\frac{1}{4} < m < 4$.
C. $m = 4$
D. $m = \frac{1}{4}$

Câu 7. Tìm tất cả tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{(m-1)x^2 + 1}}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận ngang?

A. $m = 1$.

B. $m \in (1; 4) \cup (4; +\infty)$.

C. $m < 1$.

D. $m > 1$.

Câu 8. Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $m < 0$ và $m \neq -9$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. $m = 0$ hoặc $m = -9$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}}$ có tiệm cận ngang.

A. $a \leq 0$.

B. $a \geq 0$.

C. $a > 0$.

D. $a = 1$ hoặc $a = 4$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{9x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5;2)$?
A. $m = -4$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 6$. **D.** $m = 4$.
- Câu 2.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.
A. $m = 2$. **B.** $m = \frac{5}{2}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.
- Câu 3.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{mx^2+4x+m}$ có hai tiệm cận đứng.
A. $(-4;4)$. **B.** $(-4;4) \setminus \{0\}$. **C.** $(-2;2) \setminus \{0\}$. **D.** $(-2;2)$.
- Câu 4.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^3-3x+m}$ có ba tiệm cận đứng.
A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **D.** $(-1;1)$.
- Câu 5.** Tìm tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận.
A. $m < 4$ và $m \neq -12$. **B.** $m > 4$.
C. $m < 4$. **D.** $m = -12$ hoặc $m = 4$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+mx+1}$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$ sao cho $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$.
A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $\begin{cases} 2 < m < \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} < m < -2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases}$.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{x}{x^3-m^3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. Đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận với mọi m .
B. Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
C. Khi $m < 0$ đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.
D. Khi $m \neq 0$ đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.
- Câu 8.** Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là
A. $\{0\}$. **B.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
C. $\emptyset$. **D.** $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{x-m}$ có tiệm cận đứng.
A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m \neq 0$

- Câu 10.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận thì giá trị của $a+b$ là
A. 2. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -10.
- Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3-1}{x^2-3x+2}$ có hai đường tiệm cận đứng.
A. $m \neq \left\{\frac{1}{8}; 0\right\}$. **B.** $m \neq \left\{0; \frac{1}{8}; 1\right\}$ **C.** $m \neq \left\{\frac{1}{8}; 1\right\}$. **D.** $m \neq \left\{0; \frac{1}{8}; 1\right\}$
- Câu 12.** Biết đồ thị của thị hàm số $y = \frac{x^4+ax^2+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = ab$.
A. $S = 2$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 1$
- Câu 13.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^4+ax^3+bx^2+c}{(x-1)^3}$ không có tiệm cận đứng. Tính giá trị của biểu thức $T = a+2b+3c$.
A. $T = \frac{8}{3}$. **B.** $T = \frac{1}{3}$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 2$.
- Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{(m^2-1)x^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang và khoảng cách giữa chúng bằng 4.
A. $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m = \pm \sqrt{5}$. **C.** $m = \pm \sqrt{3}$. **D.** $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2+3x+2)(x+m)}$ có đúng hai đường tiệm cận.
A. $m \leq 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m < 1$.
- Câu 16.** Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{3x-\sqrt{mx^2+1}}$ có 3 đường tiệm cận.
A. $m > 0$. **B.** $0 < m < 9$. **C.** $0 < m \neq 9$. **D.** $m > 9$.
- Câu 17.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
A. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- Câu 18.** Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{(m+2)x^2-3x-3m}-|x|}{x-2}$ có đồ thị (C) . Khi m thuộc tập hợp nào sau đây thì đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận?
A. $(-1; 2)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-3; -1)$.

Câu 19. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2x + m - \sqrt{4x^2 + x + 1}$ (với m là tham số) là

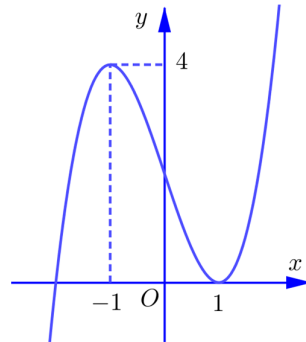
A. $y = \frac{4m+1}{4}$.

B. $y = \frac{4m-1}{4}$.

C. $y = \frac{2m+1}{2}$.

D. $y = \frac{2m-1}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^{18}-1}}{f^3(x)-f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+4}{mx-1}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;2)$.
- A. $m = -2$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.
- Câu 2.** Đồ thị hàm số $y = \frac{(2m+1)x+3}{x+1}$ có đường tiệm cận đi qua điểm $A(-2;7)$ khi và chỉ khi
- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = -3$. D. $m = -1$.
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{m^2x-4}{mx-1}$ có tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;4)$.
- A. $m = 0$. B. $m = 4$. C. $m \in \{0;4\}$. D. $m \in \{0;-4\}$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{mx+1}{mx-2}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 4.
- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 8$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \frac{\pm 1}{2}$.
- Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2x^3-3x^2+m}$ có ba tiệm cận đứng.
- A. $(-1;0)$. B. $(-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$. C. $(0;1)$. D. $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.
- Câu 6.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)(x^2-2x+m)}$ có ba tiệm cận đứng.
- A. $(-\infty;1)$. B. $(-\infty;+\infty) \setminus \{0;1\}$. C. $(-1;1) \setminus \{0\}$. D. $(-\infty;1) \setminus \{0\}$.
- Câu 7.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-2)(x^2-2x+m^2)}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
- A. $\{-1;1\}$. B. $\{-1;0;1\}$. C. $\{0;1\}$. D. $[-1;1]$.
- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có hai tiệm cận đứng.
- A. $-1 < m < 4$. B. $m > 4$ hoặc $m < -1$.
C. $m > 4$ hoặc $-5 \neq m < -1$. D. $m \in \{-5;-1;4\}$.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng.
- A. $m \in \{-1;4\}$. B. $m \in (-1;4)$.
C. $m \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty)$. D. $m \in \{-5;-1;4\}$.

Câu 10. Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm $y = \frac{2x-1}{4x^2+4mx+1}$ có đúng một đường tiệm cận là

- A. $[-1; 1]$. B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 11. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. B. $-2 < m < 2$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2-m}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận là

- A. $m = 0$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2+mx+n}$ có hai tiệm cận đứng $x = x_1$ và $x = x_2$ sao cho

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}.$$

- Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $m+n = -1$. B. $m+n = -7$. C. $m+n = 1$. D. $m+n = 7$.

Câu 14. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+1}{(mx^2-x-1)(2x^2+mx+2)}$$

- có đúng một tiệm cận.
A. $\{0\}$ B. $\left(-4; -\frac{1}{4}\right) \cup \{0\}$. C. $\left(-4; -\frac{1}{4}\right)$. D. $\left[-4; -\frac{1}{4}\right] \cup \{0\}$

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x^2+mx+1}{x^2-m^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số luôn có ba tiệm cận với mọi m .
B. Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
C. Khi $m < 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.
D. Khi $m \neq 0$ đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{2x^2+mx+2}$ có đúng một tiệm cận đứng?

- A. $m = \pm 4$. B. $-4 < m < 4$. C. $m \geq 4$. D. $m \leq -4$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2+2}{x^2-2mx+m^2-1}$ có đồ thị là (C) , với m là tham số thực. Khẳng định nào sau đây là sai

- A. (C) có tiệm cận ngang là $y = 1$.
B. (C) luôn có hai tiệm cận đứng và khoảng cách giữa chúng bằng 2.
C. Tồn tại m để (C) không có tiệm cận đứng
D. (C) luôn có ba đường tiệm cận.

- Câu 18.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = b + c$.
- A. $S = 9$. B. $S = 4$. C. $S = 1$. D. $S = 7$.
- Câu 19.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có đúng ba đường tiệm cận.
- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0] \setminus \{-9\}$. C. $\{-9; 0\}$. D. $(-\infty; 0) \setminus \{-9\}$.
- Câu 20.** Với giá trị nào của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận?
- A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ C. $m \in \mathbb{R}$ D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$
- Câu 21.** Cho hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{(m-2)x^2+3}}{x-1}$ (với m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận.
- A. $m > 2$. B. $m = 2$ hoặc $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m \geq 2$.
- Câu 22.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = a.b$.
- A. $S = -2$. B. $S = 2$. C. $S = \frac{15}{16}$. D. $S = -\frac{15}{16}$.
- Câu 23.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5x+1} + ax + b}{(x-3)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = a + 2b$.
- A. $S = -\frac{11}{4}$. B. $S = \frac{29}{8}$. C. $S = -\frac{39}{8}$. D. $S = -\frac{27}{8}$.
- Câu 24.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x+1} + ax + b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $a - b$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{7}{3}$. C. -2 . D. 1 .
- Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{3x - \sqrt{mx^2+2}}{x+1}$ có hai đường tiệm cận ngang.
- A. $m > 0$. B. $0 < m < 9$. C. $0 < m < 3$. D. $0 < m \neq 9$.
- Câu 26.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{mx+7-4\sqrt{x+3}}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng:
- A. $\{-1\}$. B. $\{1\}$. C. $\emptyset$. D. $\{-1; 1\}$.
- Câu 27.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{mx^2+1} + \sqrt{(1-m)x^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang?

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - (1-m)x + 2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 29. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{mx^2 - x + 1} + 1$ có tiệm cận ngang

A. $m = 4$.

B. $m = -4$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = m\sqrt{x^2 + x + 1} + x$ có tiệm cận ngang.

A. $m \neq \pm 1$.

B. $m = \pm 1$.

C. $0 < m \neq 1$.

D. $-1 \neq m < 0$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x^2 - mx + 1} - \sqrt{x^2 + mx + 1}$ có hai tiệm cận ngang và khoảng cách giữa chúng bằng 4.

A. $m = \pm 1$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $m = \pm 2$.

D. $-1 < m < 1$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

A. $m \geq 1$.

B. $0 \leq m < 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2mx - \sqrt{3x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

BÀI 41: THAM SỐ M BÀI TOÁN VỀ TIỆM CẬN.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tham số m để đồ thị hàm số có tiệm cận

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

Chú ý:

- Thông thường tại giá trị x_0 hàm số $f(x)$ không xác định.
- Thông thường, nếu $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ thì $x = x_0$ là nghiệm của $q(x)$ nhưng không là nghiệm của $p(x)$

Sử dụng máy tính bỏ túi:

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$: $f(x)$ $x_0 + 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .
- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$: $f(x)$ $x_0 - 10^{-12}$. Nếu ERROR , thay bằng 10^{-6} .

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

Chú ý:

- Thông thường, nếu $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, để tìm giới hạn khi $x \rightarrow \pm\infty$, ta đưa số mũ cao nhất của tử và mẫu ra ngoài.
- Lưu ý trong việc đưa x ra khỏi $\sqrt{\quad}$, $|\quad|$.

Sử dụng máy tính bỏ túi:

- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $f(x)$ 10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng 10^6 .
- Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $f(x)$ -10^{12} . Nếu ERROR , thay bằng -10^6 .

3. Một số đồ thị thường gặp:

- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- Đồ thị hàm số $y = a^{ax+b}$ có tiệm cận ngang $y = 0$ và không có tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số $y = \log_a(ax+b)$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{b}{a}$ và không có tiệm cận ngang.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{x-n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính giá trị biểu thức $P = m + n$.
- A.** $P = 0$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 1$.

Lời giải**Chọn A**

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = m+1$ và tiệm cận đứng $x = n-1$.

Do đó, đồ thị hàm số nhận trục tung và trục hoành làm tiệm cận khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+1=0 \\ n-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow m+n=0.$$

- Câu 2.** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2-6x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?
- A.** -27 . **B.** 9 hoặc -27 . **C.** 0 . **D.** 9 .

Lời giải**Chọn B**

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+ Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 6x + m = 0$ có nghiệm kép hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ \Delta' = 9-m > 0 \\ (-3)^2 - 6(-3) + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ m=-27 \end{cases}.$$

- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x^2-3mx+1}$ có hai tiệm cận đứng và khoảng cách giữa chúng bằng 1.
- A.** $m = \pm 1$. **B.** $-1 < m < 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải**Chọn D**

Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2 - 3mx + 1 = 0$ (1) có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 4 > 0 \\ 0^2 + 3m \cdot 0 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1) thì hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = x_1$ và $x = x_2$ nên khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng bằng 1.

$$\Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 9m^2 - 4 = 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

- Câu 4.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị biểu thức $m+n$.
- A. 2. B. 8. C. -6. **D. 9.**

Lời giải

Chọn D

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = 2m-n$, đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $2m-n=0$.

Do đồ thị hàm số nhận trục tung $x=0$ làm tiệm cận nên $x=0$ là nghiệm của $x^2 + mx + n - 6 = 0$ nên $n=6 \Rightarrow m=3 \Rightarrow m+n=9$.

- Câu 5.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m \neq 2$ và $m \neq \frac{1}{4}$. B. $m \neq 1$ và $m \neq 2$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn A

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

Để hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số thì $x=1$ và $x=2$ không là nghiệm của tử số $mx^3 - 2$. Tức là

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m.2^3 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang và khoảng cách giữa chúng bằng 1.

A. $0 < m < 4$. B. $\frac{1}{4} < m < 4$. **C. $m = 4$** D. $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy rằng khi $m \leq 0$ thì đồ thị hàm số không thể có tiệm cận ngang.

Khi $m > 0$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Như vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và $y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Do khoảng cách giữa hai đường tiệm cận là 1 nên $\left| \frac{2}{\sqrt{m}} \right| = 1 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 7. Tìm tất cả tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{(m-1)x^2 + 1}}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận ngang?

A. $m = 1$.

B. $m \in (1; 4) \cup (4; +\infty)$.

C. $m < 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ hữu hạn.

Để hàm số xác định trên $(-\infty; +\infty)$ thì $m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{(m-1)x^2 + 1}}{x-1} = 2 - \sqrt{m-1}$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 2 - \sqrt{m-1}$ làm tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{(m-1)x^2 + 1}}{x-1} = 2 + \sqrt{m-1}$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 2 + \sqrt{m-1}$ làm tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang thì $2 - \sqrt{m-1} \neq 2 + \sqrt{m-1} \Leftrightarrow \sqrt{m-1} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Vậy $m > 1$.

Câu 8. Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $m < 0$ và $m \neq -9$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. $m = 0$ hoặc $m = -9$.

Lời giải

Chọn D

$+\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{m}{x^2}}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{m}{x^2}}} = -1 \Rightarrow y = \pm 1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+ đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có đúng một đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 + m = 0$ có đúng một nghiệm kép khác 3

hay có 2 nghiệm trong đó 1 nghiệm $= 3$ và nghiệm khác 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -9 \end{cases}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}}$ có tiệm cận ngang.

A. $a \leq 0$.

B. $a \geq 0$.

C. $a > 0$.

D. $a = 1$ hoặc $a = 4$.

Lời giải

Chọn B

- Để hàm số xác định trên $(-\infty; +\infty)$ thì $a \geq 0$.
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{ax^2 + 2} (x + \sqrt{x^2 + 1})} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sqrt{ax^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) \sqrt{a + \frac{2}{x^2}}} = 0$$

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{9x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$y = ax + \sqrt{9x^2 + 1} = \frac{(a^2 - 9)x^2 - 1}{ax - \sqrt{9x^2 + 1}}.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Với } a = 3 \Rightarrow y = \frac{-1}{3x - \sqrt{9x^2 + 1}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x \left(3 + \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}\right)} = 0.$$

$$\text{Với } a = -3 \Rightarrow y = \frac{-1}{-3x - \sqrt{9x^2 + 1}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left(-3 - \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}\right)} = 0.$$

Vậy có 2 giá trị a để hàm đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5;2)$?
- A. $m = -4$. B. $m = -1$. C. $m = 6$. D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -m+1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m+1=5 \Leftrightarrow m=-4$.

- Câu 2.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.
- A. $m = 2$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{m+1}{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

- Câu 3.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{mx^2+4x+m}$ có hai tiệm cận đứng.
- A. $(-4;4)$. B. $(-4;4) \setminus \{0\}$. C. $(-2;2) \setminus \{0\}$. D. $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng thì phương trình $mx^2+4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 16 - 4m^2 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

- Câu 4.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^3-3x+m}$ có ba tiệm cận đứng.
- A. $(-2;2)$. B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $(-1;1)$.

Lời giải

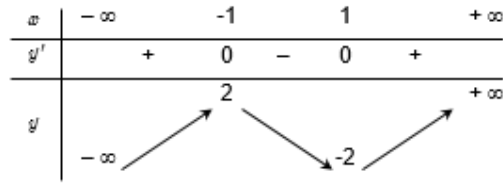
Chọn A

Để đồ thị hàm số có ba tiệm cận đứng thì phương trình $x^3-3x+m=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = -m$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$



Dựa vào BBT để phương trình có ba nghiệm phân biệt thì $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Câu 5. Tìm tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m < 4$ và $m \neq -12$

B. $m > 4$.

C. $m < 4$.

D. $m = -12$ hoặc $m = 4$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1 :

$$+ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2-4x+m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{m}{x^2}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

+ đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ (-2)^2 - 4(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases}$$

Cách 2 :

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$

Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ (-2)^2 - 4(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \neq m < 4.$$

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+mx+1}$ có hai tiệm

cận đứng là các đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$ sao cho $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $-2 < m < 2$

C. $\begin{cases} 2 < m < \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} < m < -2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$ thì phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -1 . Tức là

$$\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \quad (*)$$

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7 \Leftrightarrow \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 x_2^2} > 7 \Leftrightarrow \frac{((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 7$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 9 \Leftrightarrow (m^2 + 1)(m^2 - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty) \text{ (thỏa điều kiện } (*) \text{)}$$

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^3 - m^3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận với mọi m .

B. Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

C. Khi $m < 0$ đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

D. Khi $m \neq 0$ đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^3 - m^3} = 0; \forall m.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Khi $m = 0$ phương trình $x^3 - m^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng và lúc này đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

$$\text{Khi } m \neq 0 \text{ phương trình } x^3 - m^3 = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - xm + m^2) = 0 \Leftrightarrow x = m$$

$$\text{do } x^2 - xm + m^2 = \left(x + \frac{1}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 > 0 \forall m \neq 0$$

do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Vậy đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận với mọi m .

- Câu 8.** Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là
- A. $\{0\}$. B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
C. $\emptyset$. D. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Để $y = 0$ là tiệm cận ngang duy nhất xảy ra hai điều kiện sau:

- $m = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{4x^2+1}$ nên hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.
- $m \neq 0$, hai phương trình $mx^2 - 2x + 1 = 0$ và $4x^2 + 4mx + 1 = 0$ vô nghiệm
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$ (Vô lý).

Vậy $m = 0$.

Chú ý: Ta có thể đặc biệt hóa

- $m = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{4x^2+1}$ nên hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.
- $m = 2$ đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$, tiệm cận đứng $x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{x-m}$ có tiệm cận đứng.
- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m \neq 0$

Lời giải

Chọn D

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có TCD là $x = m$.

Nếu $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = \frac{x^2}{x}$ nên đồ thị hàm số không có TCD.

- Câu 10.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận thì giá trị của $a+b$ là
- A. 2. B. 10. C. 15. D. -10.

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang $\Rightarrow 4a - b = 0(1)$

+ Đồ thị hàm số nhận trục tung là tiệm cận đứng $\Rightarrow b-12=0(2)$.

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} 4a-b=0 \\ b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow a+b=15.$$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m \neq \left\{ \frac{1}{8}; 0 \right\}$. B. $m \neq \left\{ 0; \frac{1}{8}; 1 \right\}$ **C. $m \neq \left\{ \frac{1}{8}; 1 \right\}$.** D. $m \neq \left\{ 0; \frac{1}{8}; 1 \right\}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện xác định của hàm số } x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Như vậy hai đường tiệm cận đứng nếu có chỉ có thể là hai đường thẳng $x=1$, $x=2$.

Để đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ làm tiệm cận đứng thì 1 và 2 không phải

$$\text{là nghiệm của phương trình } mx^3 - 1 = 0; \text{ điều này tương đương } \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 8m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{1}{8} \end{cases}$$

Câu 12. Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{x^4 + ax^2 + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = ab$.

A. $S = 2$. B. $S = -1$. **C. $S = -2$** D. $S = 1$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết ta có thể phân tích } x^4 + ax^2 + b = (x-1)(x-1)A(x)$$

Thực hiện phép chia ta được:

$$x^4 + ax^2 + b = (x-1)(x^3 + x^2 + (a+1)x + a+1) + a+b+1;$$

$$x^3 + x^2 + (a+1)x + a+1 = (x-1)(x^2 + 2x + b+3) + 2a+4$$

Để đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng thì phần dư của hai phép chia trên phải bằng 0.

$$\text{Do đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} a+b+1=0 \\ 2a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow S = ab = -2.$$

Câu 13. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^4 + ax^3 + bx^2 + c}{(x-1)^3}$ không có tiệm cận đứng. Tính giá trị của biểu thức

$$T = a + 2b + 3c.$$

A. $T = \frac{8}{3}.$

B. $T = \frac{1}{3}.$

C. $T = 3.$

D. $T = 2.$

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c = (x-1)^3 \cdot g(x).$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx; \quad f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b.$$

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 3a + 2b = -4 \\ 6a + 2b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{3} \\ b = 2 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b + 3c = \frac{1}{3}.$$

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{(m^2-1)x^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang và khoảng cách giữa chúng bằng 4.

A. $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $m = \pm \sqrt{5}.$

C. $m = \pm \sqrt{3}.$

D. $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện: } (m^2-1)x^2+1 > 0.$$

□ Nếu $m = \pm 1$ thì hàm số trở thành $y = x+1$ không có tiệm cận ngang.

□ Nếu $m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-m^2}} < x < \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}.$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

□ Nếu $m^2-1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m^2-1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}.$$

Suy ra đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{(m^2-1)x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{m^2-1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}.$$

Suy ra đường thẳng $y = -\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

Lúc đó khoảng cách giữa hai đường tiệm cận là: $\frac{2}{\sqrt{m^2-1}}$.

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{2}{\sqrt{m^2-1}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2-1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện vậy $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2+3x+2)(x+m)}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m \leq 1$.

B. $m > 1$.

C. $m \geq 1$

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2+3x+2)(x+m)} = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x+2)(x+m)} = \frac{1}{(x+2)(x+m)\sqrt{x+1}}$$

Điều kiện xác định của $\sqrt{x+1}$ là $x \geq -1$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)(x+m)\sqrt{x+1}} = 0$, không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)(x+m)\sqrt{x+1}}$ nên hàm số chỉ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.
- Mẫu số có nghiệm $x = -1, x = -2, x = -m$ không là nghiệm của tử số.
- Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận thì hai tiệm cận đó là tiệm cận ngang $y = 0$ và tiệm cận đứng $x = -1$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-2 \leq -1$ và $-m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 16. Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{3x - \sqrt{mx^2+1}}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $m > 0$.

B. $0 < m < 9$

C. $0 < m \neq 9$.

D. $m > 9$.

Lời giải

Chọn B

$$+ y = \frac{2x}{3x - \sqrt{mx^2 + 1}} = \frac{2x(3x + \sqrt{mx^2 + 1})}{(9 - m)x^2 - 1}$$

Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và tiệm cận

$$\text{đứng} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 9 \end{cases}.$$

+ TH1: $m = 0$, $y = \frac{2x}{3x - 1}$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận $x = \frac{1}{3}$ và $y = \frac{2}{3}$, không thỏa mãn.

+TH2: $\begin{cases} m > 0 \\ m < 9 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{6 - 2\sqrt{m}}{9 - m}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{6 + 2\sqrt{m}}{9 - m} \Rightarrow y = \frac{6 \pm 2\sqrt{m}}{9 - m}$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$(9 - m)x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{9 - m}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{9 - m}}\right)^+} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{9 - m}}\right)^-} y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{9 - m}} \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy $0 < m < 9$ thì đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Câu 17. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$

B. $(0; +\infty)$.

C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

D. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = [-1; +\infty)$.

Ta có $\sqrt{x^2 - mx - 3m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3m = 0(1) \Leftrightarrow x^2 = m(x + 3) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x + 3} = m$

YBCT $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1

Đặt $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$ với $x \in [-1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x + 3)^2}$;

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \notin [-1; +\infty) \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-1	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: YCBT $\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{(m+2)x^2 - 3x - 3m} - |x|}{x-2}$ có đồ thị (C). Khi m thuộc tập hợp nào sau đây thì đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận?

- A. $(-1; 2)$ B. $(-2; 0)$ C. $(1; +\infty)$ D. $(-3; -1)$.

Lời giải

Chọn A

+ Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{(m+2)x^2 - 3x - 3m} - |x|}{x-2}$ có ba đường tiệm cận $\Rightarrow$ có một đường tiệm

cận đứng và hai đường tiệm cận ngang $\Rightarrow m+2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x^2 - 3x - 3m}{(x-2)(\sqrt{(m+2)x^2 - 3x - 3m} + \sqrt{x^2})} = \frac{m+1}{\sqrt{m+2}+1},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m+1)x^2 - 3x - 3m}{(x-2)(\sqrt{(m+2)x^2 - 3x - 3m} + \sqrt{x^2})} = -\frac{m+1}{\sqrt{m+2}+1}.$$

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $\Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

$$\text{Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng } x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1).2^2 - 3.2 - 3m \neq 0 \\ (m+2).2^2 - 3.2 - 3m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \geq -2 \end{cases}$$

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \\ m \geq -2 \end{cases}.$$

Câu 19. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2x + m - \sqrt{4x^2 + x + 1}$ (với m là tham số) là

- A. $y = \frac{4m+1}{4}$ B. $y = \frac{4m-1}{4}$ C. $y = \frac{2m+1}{2}$ D. $y = \frac{2m-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

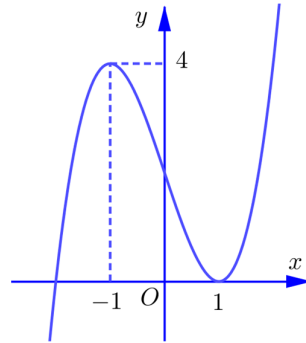
Ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + m - \sqrt{4x^2 + x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+m)^2 - (4x^2 + x + 1)}{2x+m+\sqrt{4x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4m-1)x + m^2 - 1}{2x+m+\sqrt{4x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4m-1) + \frac{m^2-1}{x}}{2 + \frac{m}{x} + \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{4m-1}{4}. \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + m - \sqrt{4x^2 + x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + m + x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{m}{x} + \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = \frac{4m-1}{4}$.

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^{18}-1}}{f^3(x)-f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \frac{1}{a}, (a \neq 0) \Rightarrow 2$ tiệm cận ngang

$$\text{Ta lại có } f^3(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -1 \\ x = 1 \left((x-1)^2 = 0 \right) \\ x = b < -1 \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d > 1 \\ x = e < -1 \end{cases}.$$

Suy ra có 5 đường tiệm cận đứng là $x = a, x = 1, x = b, x = d, x = e$

loại $x = c$ vì $x^{18} - 1 < 0$

Vậy có 7 đường tiệm cận.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+4}{mx-1}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;2)$.

A. $m = -2$.B. $m = 1$.C. $m = 2$.D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Để đường tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;2)$ thì đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Do đó $x = 1$ là nghiệm của mẫu.

Vậy $m = 1$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \frac{(2m+1)x+3}{x+1}$ có đường tiệm cận đi qua điểm $A(-2;7)$ khi và chỉ khi

A. $m = 3$.B. $m = 1$.C. $m = -3$.D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2m+1$ và tiệm cận đứng $x = -1$.

Để tiệm cận đi qua điểm $A(-2;7)$ thì $2m+1 = 7 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{m^2x-4}{mx-1}$ có tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;4)$.

A. $m = 0$.B. $m = 4$.C. $m \in \{0; 4\}$.D. $m \in \{0; -4\}$.

Lời giải

Chọn B.

Để đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;4)$ thì đường tiệm cận ngang là $y = 4$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = m$. Do đó $m = 4$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{mx+1}{mx-2}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 4.

- A.** $m = \pm 1$.

- ### B. $m = \pm 8$.

- ### C. $m = \pm 2$.

- D.** $m = \frac{\pm 1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đề đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì $m \neq 0$.

Đường tiệm cận đứng: $x = \frac{2}{m}$.

Đường tiệm cận ngang: $y = 1$.

Diện tích HCN tạo bởi hai đường tiệm cận và các trục tọa độ là: $\left| \frac{2}{m} \right| = 4 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 + m}$ có ba tiệm cận đứng.

- A.** $(-1; 0)$.

- B.** $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **C.** $(0; 1)$.

- D.** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chon C

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 + m}$ có ba tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $2x^3 - 3x^2 + m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Ta có $2x^3 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2x^3 + 3x^2 \quad (1).$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x^2$:

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	1	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (0; 1)$.

- Câu 6.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)(x^2-2x+m)}$ có ba tiệm cận đứng.
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0; 1\}$. C. $(-1; 1) \setminus \{0\}$. D. $(-\infty; 1) \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)(x^2-2x+m)}$ có ba tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $(x-m)(x^2-2x+m) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = 1-m > 0 \\ m^2-2m+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m^2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

- Câu 7.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-2)(x^2-2x+m^2)}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
- A. $\{-1; 1\}$. B. $\{-1; 0; 1\}$. C. $\{0; 1\}$. D. $[-1; 1]$.

Lời giải

Chọn B

YCBT $\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x+m^2) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$x^2-2x+m^2=0$ có nghiệm kép khác 2 hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 1-m^2 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \neq 2 \\ \Delta' = 1-m^2 > 0 \\ 2^2-2.2+m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = 0 \end{cases}$$

- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có hai tiệm cận đứng.
- A. $-1 < m < 4$. B. $m > 4$ hoặc $m < -1$.
 C. $m > 4$ hoặc $-5 \neq m < -1$. D. $m \in \{-5; -1; 4\}$.

Lời giải.

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 > 0 \\ (-1)^2 + 2m(-1) + 3m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4 \text{ hoặc } -5 \neq m < -1.$$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 + 2mx + 3m + 4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng.

A. $m \in \{-1; 4\}$.

B. $m \in (-1; 4)$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

D. $m \in \{-5; -1; 4\}$.

Lời giải

Chọn D.

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 + 2mx + 3m + 4 = 0$ có nghiệm kép hoặc có nghiệm $x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 = 0 \\ (-1)^2 - 2m + 3m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 10. Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm $y = \frac{2x-1}{4x^2 + 4mx + 1}$ có đúng một đường tiệm cận là

A. $[-1; 1]$.

B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn D

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+ Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận $\Leftrightarrow 4x^2 + 4mx + 1 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Câu 11. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị có một tiệm cận ngang vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2 - mx + 1} = 0$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ phải có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } 2, \text{ do đó: } \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 4 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$$

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 - m}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận là

A. $m = 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2 - m}$ có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì đồ thị hàm số cần có 2 tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow x^2 - m = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 13. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + mx + n}$ có hai tiệm cận đứng $x = x_1$ và $x = x_2$ sao cho

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \text{ . Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

A. $m + n = -1$.

B. $m + n = -7$.

C. $m + n = 1$.

D. $m + n = 7$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + mx + n}$ có hai tiệm cận đứng $x = x_1$ và $x = x_2 \Rightarrow x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khác 1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + x_2 \\ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + x_2 \\ x_2 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 3. \Rightarrow \begin{cases} m = -(x_1 + x_2) = -1 \\ n = x_1 x_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow m + n = -7$$

$$\text{Với } x_2 = -3 \Rightarrow x_1 = 2. \Rightarrow \begin{cases} m = -(x_1 + x_2) = 1 \\ n = x_1 x_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow m + n = -5$$

Câu 14. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+1}{(mx^2 - x - 1)(2x^2 + mx + 2)}$$
 có đúng một tiệm cận.

A. $\{0\}$

B. $\left(-4; -\frac{1}{4}\right) \cup \{0\}$

C. $\left(-4; -\frac{1}{4}\right)$

D. $\left[-4; -\frac{1}{4}\right] \cup \{0\}$

Lời giải:

Chọn B

Vì bậc của tử luôn bé hơn bậc ở mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ hay hàm số luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó hàm số có đúng một tiệm cận khi và chỉ khi hàm số đó không có thêm tiệm cận đứng. Tức là các điều kiện sau phải đồng thời thỏa mãn:

□ Phương trình $2x^2 + mx + 2 = 0$ vô nghiệm. Suy ra $\Delta = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < m < 4$

□ Phương trình $mx^2 - x - 1 = 0$ vô nghiệm hoặc suy biến thành phương trình bậc nhất có nghiệm bằng -1.

+ Nếu $m \neq 0$: $\Delta = 1 + 4m < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{4}$

+ Nếu $m = 0$, phương trình trở thành $-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn).

Vậy điều kiện chung của bài toán là $m \in \left(-4; -\frac{1}{4}\right) \cup \{0\}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + mx + 1}{x^2 - m^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số luôn có ba tiệm cận với mọi m .

B. Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

C. Khi $m < 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

D. Khi $m \neq 0$ đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + mx + 1}{x^2 - m} = 1; \forall m$. Suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số do đó loại Chọn C.

Khi $m = 0$ phương trình $x^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ có một nghiệm do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng Nên loại Chọn A.

Khi $m \neq 0$ phương trình $x^2 - m^2 = 0$ có hai nghiệm do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng nên đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận chọn Chọn D.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + mx + 2}$ có đúng một tiệm cận đứng?

A. $m = \pm 4$

B. $-4 < m < 4$.

C. $m \geq 4$.

D. $m \leq -4$.

Lời giải

Chọn A.

$$YCBT \Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 = 0 \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$ có đồ thị là (C) , với m là tham số thực. Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. (C) có tiệm cận ngang là $y = 1$.

B. (C) luôn có hai tiệm cận đứng và khoảng cách giữa chúng bằng 2.

C. Tồn tại m để (C) không có tiệm cận đứng

D. (C) luôn có ba đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện xác định: } x^2 - 2mx + m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m-1 \\ x \neq m+1 \end{cases}.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1} = 1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow (m-1)^+} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (m-1)^+} \frac{x^2 + 2}{(x - m - 1)(x - m + 1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (m-1)^-} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (m-1)^-} \frac{x^2 + 2}{(x - m - 1)(x - m + 1)} = +\infty$$

Do đó, đường thẳng $x = m - 1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow (m+1)^+} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (m+1)^+} \frac{x^2 + 2}{(x - m - 1)(x - m + 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (m+1)^-} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (m+1)^-} \frac{x^2 + 2}{(x - m - 1)(x - m + 1)} = -\infty$$

Do đó, đường thẳng $x = m + 1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = m - 1$ và $x = m + 1$

Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng là $|(m+1) - (m-1)| = 2$.

Như vậy, với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số luôn có đường tiệm cận đứng.

- Câu 18.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = b + c$.
- A. $S = 9$. B. $S = 4$. C. $S = 1$. D. $S = 7$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có thể phân tích $x^3 + ax^2 + bx + c = (x-2)(x-2)A(x)$

Thực hiện phép chia ta được ta có:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-2)(x^2 + (a+2)x + 2a+b+4) + 4a+2b+c+8;$$

$$x^2 + (a+2)x + 2a+b+4 = (x-2)(x+a+4) + 4a+b+12$$

Để đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng thì phần dư của hai phép chia trên phải bằng 0.

$$\text{Do đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4a+2b+c+8=0 \\ 4a+b+12=0 \end{cases} \Rightarrow b+c=4.$$

Cách 2. Xét bài toán tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{(x-a)^m}$ không có tiệm cận đứng khi

và chỉ khi $f(x) = 0$ có nghiệm bội $x = a$ bậc $n \geq m$. Điều này tương đương với hệ điều kiện

$$\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \\ \dots \\ f^{(m-1)}(a) = 0 \end{cases} \quad \text{Áp dụng kết quả trên ta có đồ thị hàm số } y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x-2)^2} \text{ không có tiệm cận}$$

đứng khi và chỉ khi phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm bội $x = 2$ bậc $n \geq 2$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c+8=0 \\ 4a+b+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow b+c=4$$

- Câu 19.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có đúng ba

đường tiệm cận.

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0] \setminus \{-9\}$. C. $\{-9; 0\}$. D. $(-\infty; 0) \setminus \{-9\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta dễ thấy: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{m}{x^2}}} = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{m}{x^2}}} = 1$.

Suy ra các đường thẳng $y = -1$ và $y = 1$ là hai tiệm cận của đồ thị hàm số.

□ Nếu $m > 0$ thì $\sqrt{x^2+m} > 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

□ Nếu $m = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$ nên đồ thị hàm số sẽ nhận đường thẳng $x = 0$ làm tiệm cận đứng.

□ Nếu $m < 0$ ta có $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-(\sqrt{-m})^2}}$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = -\sqrt{-m}$ và

$$x = \sqrt{-m}.$$

Nếu $\sqrt{-m} = 3 \Leftrightarrow m = -9$ thì đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = \sqrt{-m}$.

Suy ra, để đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận thì $m \in \{-9, 0\}$.

Câu 20. Với giá trị nào của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $x^2+3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Xét $x^2+(m+1)x-m-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -m-2$.

$$y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \frac{-x+1}{(x-1)(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-1}{(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}.$$

Đồ thị hàm số nếu có thêm 1 tiệm cận đứng thì tiệm cận đứng là $x = -m-2$.

Để $x = -m-2$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 \geq 0 \\ -m-2 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{2x-\sqrt{(m-2)x^2+3}}{x-1}$ (với m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận.

A. $m > 2$.

B. $m = 2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn B

+ Đồ thị hàm số có tối đa một tiệm cận đứng. Muốn đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận thì $m-2 \geq 0$

+TH1: $m > 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{m-2 + \frac{3}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = 2 - \sqrt{m-2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \sqrt{m-2 + \frac{3}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = 2 + \sqrt{m-2}$$

$\Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{m-2}$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

ycbt $\Leftrightarrow 2 - \sqrt{m-2} + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn $m > 2$)

+TH2: $m = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+ $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - \sqrt{3}}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - \sqrt{3}}{x-1} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng

là đường thẳng $x = 1$.

Vậy $m = 2$ hoặc $m = 3$.

Câu 22. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = a.b$.

A. $S = -2$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{15}{16}$.

D. $S = -\frac{15}{16}$.

Lời giải

Chọn C

YCBT $\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b = 0$ có nghiệm bội 2 $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Do đó $a.b = \frac{15}{16}$.

Câu 23. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5x+1} + ax + b}{(x-3)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $S = a + 2b$.

A. $S = -\frac{11}{4}$.

B. $S = \frac{29}{8}$.

C. $S = -\frac{39}{8}$.

D. $S = -\frac{27}{8}$.

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5x+1}+ax+b}{(x-3)^2}$ không có tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình

$\sqrt{5x+1}+ax+b=0$ có nghiệm bội $x=3$ bậc $n \geq 2$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4+3a+b=0 \\ \frac{5}{8}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{8} \\ b=-\frac{47}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = a+2b = -\frac{39}{8}.$$

Câu 24. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x+1}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $a-b$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{-7}{3}$.

C. -2 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{4x+1}+ax+b = (x-2)^2 \cdot g(x)$.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}} + a \text{ hay } f'(x) = [(x-2)^2 \cdot g(x)]' = 2(x-2) \cdot g'(x)$$

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2a+b=0 \\ \frac{2}{3}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=-\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy $a-b=1$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{3x-\sqrt{mx^2+2}}{x+1}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m > 0$.

B. $0 < m < 9$.

C. $0 < m < 3$.

D. $0 < m \neq 9$.

Lời giải.

Chọn A.

Xét $m=0$ ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-\sqrt{2}}{x+1} = 3$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang, loại $m=0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \sqrt{mx^2 + 2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{m + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ hữu hạn khi } m > 0, \text{ khi đó đồ thị hàm số có}$$

1 tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{mx^2 + 2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \sqrt{m + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ hữu hạn khi } m > 0, \text{ khi đó đồ thị hàm số có}$$

1 tiệm cận ngang.

Vậy $m > 0$.

Câu 26. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{mx+7-4\sqrt{x+3}}{(x-1)^2}$ không

có tiệm cận đứng:

A. $\{-1\}$.

B. $\{1\}$.

C. $\emptyset$.

D. $\{-1;1\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đồ thị hàm số } y = \frac{mx+7-4\sqrt{x+3}}{(x-1)^2} \text{ không có tiệm cận đứng} \Rightarrow m \cdot 1 + 7 - 4\sqrt{1+3} = 0 \Rightarrow m = 1.$$

$$\text{Thử lại với } m = 1: y = \frac{x+7-4\sqrt{x+3}}{(x-1)^2} = \left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \right)^2 = \left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)^2}.$$

$$\text{Ta có } (\sqrt{x+3}+2)^2 > 0, \forall x \in [-3; +\infty) \setminus \{1\} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.}$$

Câu 27. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{mx^2+1} + \sqrt{(1-m)x^2+1}} \text{ có hai tiệm cận ngang?}$$

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } m = 0: y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

Với $m=1$ $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$ là tiệm cận ngang.

Với $0 < m < 1$. TXĐ: $D = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm \frac{1}{\sqrt{m+\sqrt{1-m}}} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{m+\sqrt{1-m}}}$ là tiệm cận ngang.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+2m}}$ có hai tiệm cận đứng?
 A. 0. **B. 2.** C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \geq -1 \\ f(x) = x^2 - (1-m)x + 2m > 0 \end{cases}$.

Ta có $1+\sqrt{x+1} > 0$ với mọi $x \geq -1$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 1 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ \frac{1-m}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 + 2\sqrt{6} \\ m < 5 - 2\sqrt{6} \\ m > -2 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 5 - 2\sqrt{6}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.

Cách 2: Theo Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$

$$\text{Cần có } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 > -1 \\ x_2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 + 2 > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 1 > 0 \\ 1 - m + 2 > 0 \\ 2m + 1 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 + 2\sqrt{6} \\ m < 5 - 2\sqrt{6} \\ m > -2 \\ m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 5 - 2\sqrt{6}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.

- Câu 29.** Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{mx^2 - x + 1} + 1$ có tiệm cận ngang
- A.** $m = 4$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(4-m)x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{mx^2 - x + 1}} + 1 \right] .$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

- Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = m\sqrt{x^2 + x + 1} + x$ có tiệm cận ngang.
- A.** $m \neq \pm 1$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $0 < m \neq 1$. **D.** $-1 \neq m < 0$.

Lời giải.

Chọn B.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (m\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m^2(x^2 + x + 1) - x^2}{m\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m^2 - 1)x^2 + mx + m}{m\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ hữu hạn

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 .$$

- Câu 31.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x^2 - mx + 1} - \sqrt{x^2 + mx + 1}$ có hai tiệm cận ngang và khoảng cách giữa chúng bằng 4 .
- A.** $m = \pm 1$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $-1 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - mx + 1} - \sqrt{x^2 + mx + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2mx}{\sqrt{x^2 - mx + 1} + \sqrt{x^2 + mx + 1}} = -m$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2mx}{\sqrt{x^2 - mx + 1} + \sqrt{x^2 + mx + 1}} = m$$

Đồ thị có hai đường tiệm cận ngang khi $m \neq -m \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó khoảng cách giữa chúng là $|2m| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

- Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.
- A.** $m \geq 1$. **B.** $0 \leq m < 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

TH1: $m < 0$ hàm số có tập xác định là $D = \left[-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}} \right]$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH2: $m = 0$ ta được $y = x - 1$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH3: $m > 0$ hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x}} \right) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - mx^2 - 1}{x + \sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-m)x^2 - 1}{x + \sqrt{mx^2 + 1}}$$

Suy ra để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2mx - \sqrt{3x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4m^2 - 3)x^2 - 1}{2mx + \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4m^2 - 3)x - \frac{1}{x}}{2m + \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\text{Giới hạn này hữu hạn khi } \begin{cases} 4m^2 - 3 = 0 \\ 2m + \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4m^2 - 3)x^2 - 1}{2mx + \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4m^2 - 3)x - \frac{1}{x}}{2m - \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\text{Giới hạn này hữu hạn khi } \begin{cases} 4m^2 - 3 = 0 \\ 2m - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ là giá trị cần tìm.

BÀI 42: LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI TIẾP ĐIỂM.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

❖ Các dạng bài toán thường gặp:

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Phương pháp giải.

.....

.....

.....

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải.

.....

.....

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0 .

Phương pháp giải.

.....

.....

.....

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;1)$.

A. $y = -x + 2$. B. $y = x + 2$.

C. $y = -x$. D. $y = x$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;-1)$.

A. $y = 3x - 6$. B. $y = 3x - 7$.

C. $y = 3x - 4$. D. $y = 3x - 5$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tung độ tiếp điểm bằng 9

A. $\begin{cases} y = 18x + 81 \\ y = -9x \\ y = 18x - 27 \end{cases}$. B. $\begin{cases} y = x + 81 \\ y = 9x \\ y = 9x - 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} y = 18x + 1 \\ y = -9x \\ y = 9x - 7 \end{cases}$. D. $\begin{cases} y = x + 81 \\ y = -9x \\ y = 9x - 2 \end{cases}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hoành độ tiếp điểm bằng 0.

A. $y = -3x + 12$. B. $y = -3x + 11$.

C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x + 2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3

A. $y = 9x - 1$ hay $y = 3$. B. $y = 9x - 4$ hay $y = 3$.

C. $y = 9x - 3$ hay $y = 3$. D. $y = 9x - 13$ hay $y = 3$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 1

A. $y = 2$. B. $y = 1$.

C. $y = 3$. D. $y = 4$.

Câu 7. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung.

Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A. $y = -2x - 1$. B. $y = 2x + 1$.

C. $y = 2x - 1$. D. $y = x - 2$.

Câu 8. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

A. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}, y = 4x + 14.$

B. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}, y = 4x + 1.$

C. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}, y = 4x + 1.$

D. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}, y = 4x + 14.$

Câu 9. Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C) . Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M .

A. $y = -9.$

B. $y = -64.$

C. $y = -12.$

D. $y = -8.$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$

B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}.$

C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}.$

D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}.$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ (C) tại điểm $M(1; 2)$ là:

- A. $y = 3x - 1$. B. $y = 2x + 2$.
C. $y = 2 - x$. D. $y = x + 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = x - \frac{2}{3}$.
C. $y = -3x + 2$. D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là:

- A. $y = -3x - 5$. B. $y = 3x + 13$.
C. $y = 3x + 5$. D. $y = -3x + 13$.

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A. $2x - y = 0$. B. $2x - y - 4 = 0$.
C. $x - y - 1 = 0$. D. $x - y - 3 = 0$.

Câu 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = -x + 1$. B. $y = -x - 3$.
C. $y = x - 3$. D. $y = -x + 3$.

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là

- A. $y = -3x - 5$. B. $y = -3x + 13$.
C. $y = 3x + 13$. D. $y = 3x + 5$.

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$

- A. $y = -x + 3$. B. $y = -x - 3$.
C. $y = -x - 1$. D. $y = -x + 1$.

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $2x - y = 0$ B. $2x - y - 4 = 0$.
C. $x - y - 1 = 0$. D. $x - y - 3 = 0$.

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x \ln x$ tại điểm có hoành độ bằng e là:

- A. $y = 2x + 3e$. B. $y = ex - 2e$.
C. $y = x + e$. D. $y = 2x - e$.

- Câu 10.** Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là
- A. $y = 20x - 35$.
 B. $y = -20x - 35$ và $y = 20x + 35$.
 C. $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$.
 D. $y = -20x + 35$.
- Câu 11.** Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là
- A. $y = 9x - 7$. B. $y = 9x + 7$.
 C. $y = -9x - 7$. D. $y = -9x + 7$.
- Câu 12.** (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018) Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tính $S = a - b$.
- A. $S = \frac{1}{2}$. B. $S = 2$.
 C. $S = -1$. D. $S = 1$.
- Câu 13.** Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;4)$ là:
- A. $y = 3x + 1$. B. $y = 7x - 3$.
 C. $y = 7x + 2$. D. $y = -x + 5$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0;2)$ là
- A. $y = 7x + 2$. B. $y = -7x + 2$.
 C. $y = 7x - 2$. D. $y = -7x - 2$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến tại điểm N của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là $M(-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm N .
- A. $N(0;1)$. B. $N(-1;0)$.
 C. $N(2;7)$. D. $N(1;2)$.
- Câu 16.** (THPT KINH MÔN - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ tại điểm M có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$.
- A. $y = 6x - 9$. B. $y = 9x + 6$.
 C. $y = 9x - 6$. D. $y = 6x + 9$.
- Câu 17.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; \frac{-1}{2}\right)$.
- A. $y = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}$. B. $y = \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{2}$.
 C. $y = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}$. D. $y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$.

Câu 18. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. D. $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

A. $y = 2x + 2$. B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 6$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{2x+m+1}{x-1}$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

A. $\begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 2; m = \frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = 7; m = \frac{28}{9} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = \frac{28}{9} \end{cases}$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ bằng:

- A. -2 . B. 1 .
C. 2 . D. 0 .

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = -x + 3$. B. $y = -x - 3$.
C. $y = x - 1$. D. $y = -x + 1$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1; 2)$ bằng

- A. 3 . B. -5 .
C. 25 D. 1 .

Câu 4. Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là?

- A. $k = 12$. B. $k = 3$.
C. $k = 5$. D. $k = 4$.

Câu 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - x + 1$ biết hoành độ tiếp điểm bằng 1 .

- A. $y = 6x - 4$ B. $y = x + 2$
C. $y = -3x + 5$ D. $y = 5x - 3$

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là.

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = -x - 1$.
C. $y = -x + 1$. D. $y = 2x + 2$.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; -2)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M .

- A. $y = 2$. B. $y = -2$.
C. $y = -2x$. D. $y = 2x$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tung độ tiếp điểm bằng -2 .

- A. $y = -4x - 2$. B. $y = 4x + 2$.
C. $y = 4x - 2$. D. $y = -4x + 2$.

Câu 9. (HK1-THPT Lương Thế Vinh-2016-2017) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{2-x}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ có hệ số góc là:

- A. 1 . B. $\frac{7}{9}$. C. 7 . D. $\frac{1}{9}$.

- Câu 10. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - TP Hồ Chí Minh - HKI - 2018)** Phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{x+2}{2x-3}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là:
- A. $y = \frac{1}{7}(x+2)$. B. $y = -\frac{1}{7}(x+2)$.
 C. $y = -\frac{1}{7}(x-2)$. D. $y = \frac{-x}{7}$.
- Câu 11. (Cơ sở bồi dưỡng văn hóa 218 Lý Tự Trọng - Quận 1-2018)** Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$. Tính $a + 8b$.
- A. 8. B. 9.
 C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{25}{16}$.
- Câu 12. (Sở GD&ĐT Đồng Tháp - Diễn tập THPT QG - 2018)** Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5(C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M \in (C)$ và có hoành độ bằng 3 là
- A. $y = 18x + 49$. B. $y = -18x - 49$.
 C. $y = -18x + 49$. D. $y = 18x - 49$.
- Câu 13. (THPT Yên Lạc- Vĩnh Phúc- Lần 1-2018)** Cho đồ thị $(H): y = \frac{2x-4}{x-3}$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox .
- A. $y = 2x$. B. $y = -2x + 4$.
 C. $y = -2x - 4$. D. $y = 2x - 4$.
- Câu 14. (THPT Chuyên sư phạm-Hà Nội-Lần 1-2018)** Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là
- A. $y = 20x - 35$. B. $y = -20x - 35, y = 20x + 35$.
 C. $y = 20x - 35, y = -20x - 35$. D. $y = -20x + 35$.
- Câu 15. (THPT Ngô Quyền-Hải Phòng-L2-2018)** Cho hàm số $y = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục tung.
- A. $y = 2x + 2$. B. $y = x + 2$.
 C. $y = -2x + 2$. D. $y = 2x - 2$.
- Câu 16. (THPT Ngô Gia Tự - Bắc Ninh – Lần 3 – 2018)** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
- A. $4x - 3y - 2 = 0$. B. $4x + 3y - 2 = 0$.
 C. $4x + 3y + 2 = 0$. D. $4x - 3y + 2 = 0$.

- Câu 17.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x$ tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$.
- A. $y = -x - 2$. B. $y = x - 2$.
C. $y = -x + 2$. D. $y = x + 2$.
- Câu 18.** (HK1 THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m(C)$ với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Tìm m để tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất
- A. $\frac{16}{13}$. B. $-\frac{13}{16}$.
C. $\frac{13}{16}$. D. $-\frac{16}{13}$.
- Câu 19.** (THPT Hàm Nghi- Hà Tĩnh -Lần 2-2018) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Biết đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B với mọi tham số m . Đặt k_1, k_2 tương ứng là hệ số góc của các tiếp tuyến tại A, B . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = k_1^{2018} + k_2^{2018}$?
- A. $P_{\min} = 1$.
B. $P_{\min} = 3$.
C. $P_{\min} = 4$.
D. $P_{\min} = 2$.
- Câu 20.** (Cơ sở bồi dưỡng văn hóa 218 Lý Tự Trọng - Quận 1-2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 4$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $y = ax + b$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N . Biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M, N có cùng hệ số góc là 2. Tính $a + b$.
- A. -4 .
B. 4 .
C. 2 .
D. -2 .
- Câu 21.** (Cơ sở bồi dưỡng văn hóa 218 Lý Tự Trọng - Quận 1-2018) Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi S là tập hợp các số thực k sao cho trên (C) có hai điểm phân biệt M, N mà các tiếp tuyến của (C) có cùng hệ số góc k , đồng thời diện tích ΔOMN bằng 6 (O là gốc tọa độ). Tính tổng tất cả các số thuộc S .
- A. -5 .
B. -3 .
C. 0 .
D. 7 .

BÀI 42: LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI TIẾP ĐIỂM.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \text{ với } (y_0 = f(x_0))$$

❖ Các dạng bài toán thường gặp:

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Giải.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x = x_0$.

Giải:

Tính $y_0 = f(x_0), y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0 .

Giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Giải phương trình $f(x) = y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0 .

Tính $y'(x_0)$ và thay vào phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;1)$.

- A. $y = -x + 2$. B. $y = x + 2$. C. $y = -x$. D. $y = x$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'(1) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(1) \cdot (x - 1) + 1 = -1(x - 1) + 1 = -x + 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; -1)$.

- A. $y = 3x - 6$. B. $y = 3x - 7$. C. $y = 3x - 4$. D. $y = 3x - 5$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6 \Rightarrow y'(1) = 3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 3(x - 1) - 1 = 3x - 4$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tung độ tiếp điểm bằng 9

- A. $\begin{cases} y = 18x + 81 \\ y = -9x \\ y = 18x - 27 \end{cases}$. B. $\begin{cases} y = x + 81 \\ y = 9x \\ y = 9x - 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 18x + 1 \\ y = -9x \\ y = 9x - 7 \end{cases}$. D. $\begin{cases} y = x + 81 \\ y = -9x \\ y = 9x - 2 \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Ta có: $y_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2, x_0 = -4$.

- $x_0 = -4 \Rightarrow y'(x_0) = 18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x + 4) + 9 = 18x + 81$
- $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = -9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -9(x + 1) + 9 = -9x$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x - 2) + 9 = 18x - 27$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hoành độ tiếp điểm bằng 0.

- A. $y = -3x + 12$. B. $y = -3x + 11$. C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x + 2$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1, y'(x_0) = -3$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -3x + 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3

- A. $y = 9x - 1$ hay $y = 3$. B. $y = 9x - 4$ hay $y = 3$.
C. $y = 9x - 3$ hay $y = 3$. D. $y = 9x - 13$ hay $y = 3$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y_0 = 3 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = -1$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 3$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 9$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 13$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 1

- A. $y = 2$. B. $y = 1$. C. $y = 3$. D. $y = 4$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $y' = 4x^3 + 2x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có $y_0 = 1 \Leftrightarrow x_0^4 + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, y'(x_0) = 0$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 1$

Câu 7. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung.

Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

- A. $y = -2x - 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = x - 2$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

$$y = \frac{x-1}{x+1}; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Giao điểm của (C) và trục tung là $M(0; -1)$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại M là: $y + 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

Câu 8. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

- A. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}$, $y = 4x + 14$. B. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$, $y = 4x + 1$.
C. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}$, $y = 4x + 1$. D. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$, $y = 4x + 14$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) :

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến trục Oy bằng 2 suy ra $x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2; \frac{2}{3}\right)$, $M(2; 6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ là: $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2; 6)$ là: $y = 4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$, $y = 4x + 14$.

- Câu 9.** Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C) . Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M .
- A. $y = -9$. B. $y = -64$. C. $y = -12$. D. $y = -8$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

$$\begin{cases} M \in (C) \\ d(M, Ox) = 2d(M, Oy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ |y_M| = 2|x_M| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = \pm 2x_M \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = 2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ 2x_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ 3x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_M = \frac{4}{3} \\ y_M = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vì M không trùng với gốc tọa độ O nên chỉ nhận $M\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 8x - 8$.

$$(*) \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = -2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ -2x_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = -8 \end{cases} \text{ (do } M \neq O \text{)}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = -8$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$.
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$. D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Từ $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$ (*), cho $x=0$ ta có $[f(1)]^2 + [f(1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $4.f(2x+1).f'(2x+1) - 3[f(1-x)]^2.f'(1-x) = 1$.

Cho $x=0$ ta được $4f(1).f'(1) - 3.[f(1)]^2.f'(1) = 1 \Leftrightarrow f(1).f'(1).[4 - 3f(1)] = 1$ (**).

Nếu $f(1) = 0$ thì (**) vô lý, do đó $f(1) = -1$, khi đó (**) trở thành

$$-f'(1).[4 + 3] = 1 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$$

Phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{1}{7}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ (C) tại điểm $M(1;2)$ là:
A. $y = 3x - 1$. **B.** $y = 2x + 2$. **C.** $y = 2 - x$. **D.** $y = x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(1;2)$ là: $y = 1(x - 1) + 2 = x + 1$.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

- A.** $y = 3x - 2$. **B.** $y = x - \frac{2}{3}$. **C.** $y = -3x + 2$. **D.** $y = -x + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$y' = x^2 + 2x - 2$ suy ra $y'(1) = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

$$y = 1(x - 1) + \frac{1}{3} = x - \frac{2}{3}.$$

- Câu 3.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là:
A. $y = -3x - 5$. **B.** $y = 3x + 13$. **C.** $y = 3x + 5$. **D.** $y = -3x + 13$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -3 là:

$$y = f'(-3)(x + 3) + f(-3) \Leftrightarrow y = 3(x + 3) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 13.$$

- Câu 4.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:
A. $2x - y = 0$. **B.** $2x - y - 4 = 0$. **C.** $x - y - 1 = 0$. **D.** $x - y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x = 1 \Rightarrow y = -2$.

$$y' = 2x - 1; y'(1) = 1.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ là: $y = 1(x - 1) - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.

- Câu 5.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.
A. $y = -x + 1$. **B.** $y = -x - 3$. **C.** $y = x - 3$. **D.** $y = -x + 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y(-1) = -2 \text{ và } y' = \frac{-4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(-1; -2)$ là: $y = -(x + 1) - 2 = -x - 3$.

- Câu 6.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là
A. $y = -3x - 5$. **B.** $y = -3x + 13$. **C.** $y = 3x + 13$. **D.** $y = 3x + 5$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số.

$$\text{Theo giả thiết } x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 4 \text{ suy ra } M(-3; 4). \text{ Có } y' = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(-3) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-3; 4)$ là: $y = 3x + 13$.

- Câu 7.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$
- A. $y = -x + 3$. **B.** $y = -x - 3$. C. $y = -x - 1$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'_{(-1)} = -\frac{4}{(-1-1)^2} = -1.$$

Do đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1; -2)$ và nhận $y'_{(-1)} = -1$ làm hệ số góc là: $y + 2 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 3$.

- Câu 8.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là
- A. $2x - y = 0$ B. $2x - y - 4 = 0$. C. $x - y - 1 = 0$. **D.** $x - y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số. Theo giả thiết: $M(1; -2)$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M .

Ta có $y' = 2x - 1$, $k = y'(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 1(x - 1) - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$

- Câu 9.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x \ln x$ tại điểm có hoành độ bằng e là:
- A. $y = 2x + 3e$. B. $y = ex - 2e$. C. $y = x + e$. **D.** $y = 2x - e$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$$y'(e) = 2, \quad y(e) = e.$$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 2(x - e) + e \Leftrightarrow y = 2x - e$.

A. $y = 20x - 35$.

C. $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$.

D. $y = -20x + 35$.

Chọn C

☑ $y = 20(x - 2) + 5 = 20x - 35$.

A. $y = 9x - 7$.

B. $y = 9x + 7$.

C. $y = -9x - 7$.

D. $y = -9x + 7$.

Chọn A

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm (1;2) có dạng $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 9x - 7$.

Câu 12. (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018) Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tính $S = a - b$.

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 2$.

C. $S = -1$.

D. $S = 1$.

Bài giải

Chọn D

Ta có:

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}.$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a - b = 1.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;4)$ là:

A. $y = 3x + 1$.

B. $y = 7x - 3$.

C. $y = 7x + 2$.

D. $y = -x + 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 4x$. Do đó $y'(1) = 7$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;4)$ là $y = 7x - 3$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0;2)$ là

A. $y = 7x + 2$.

B. $y = -7x + 2$.

C. $y = 7x - 2$.

D. $y = -7x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 6x + 7$. Do đó $y'(0) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 7x + 2$.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến tại điểm N của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là $M(-1; -2)$. Tìm tọa độ điểm N .

- A. $N(0; 1)$. B. $N(-1; 0)$. C. $N(2; 7)$. **D. $N(1; 2)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 2x + 1$. Gọi $N(x_0; y_0) \in (C)$ suy ra $N(x_0; x_0^3 - x_0^2 + x_0 + 1)$

Phương trình tiếp tuyến tại N : $y = (3x_0^2 - 2x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0^2 + x_0 + 1$ (d).

Vì $M(-1; -2) \in (d)$ suy ra: $-2 = (3x_0^2 - 2x_0 + 1)(-1 - x_0) + x_0^3 - x_0^2 + x_0 + 1$

$$\Leftrightarrow x_0^3 + x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } N(1; 2).$$

Câu 16. (THPT KINH MÔN - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ tại điểm M có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$.

- A. $y = 6x - 9$. **B. $y = 9x + 6$.** C. $y = 9x - 6$. D. $y = 6x + 9$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$, $y'' = -6x + 6$.

$$f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 24 \text{ và } y'(2) = 9.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9(x - 2) + 24 \Leftrightarrow y = 9x + 6$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; \frac{-1}{2}\right)$.

- A. $y = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}$. B. $y = \frac{1}{4}(x + 1) + \frac{1}{2}$. **C. $y = \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2}$.** D. $y = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; \frac{-1}{2}\right)$ là: $y = y'(1)(x - 1) - \frac{1}{2}$

Vậy (d): $y = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}$.

Câu 18. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **B.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. **C.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **D.** $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$.

Suy ra $4.f(1+2x).f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x)f'(1-x)$.

Cho $x=0$ ta được $f^2(1) = -f^3(1)$, (1)

và $4.f(1).f'(1) = 1 + 3f^2(1)f'(1)$, (2).

Từ (1) suy ra $f(1) = -1$ vì $f(1) = 0$ không thỏa mãn (2).

Thay vào (2) ta được $f'(1) = -\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ hay $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

A. $y = 2x + 2$. **B.** $y = 4x - 6$. **C.** $y = 2x - 6$. **D.** $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Từ $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ (*), cho $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2$

Lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được $4f'(2x) - 2f'(1-2x) = 24x$, cho $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$ ta được

$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x=1$ là $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow y = 4(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{2x+m+1}{x-1}$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

A. $\begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m = 2; m = \frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = 7; m = \frac{28}{9} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m = 2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = \frac{28}{9} \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \frac{-m-3}{(x-1)^2}$

Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = m+5$, $y'(x_0) = -m-3$. Phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là: $y = (-m-3)(x-2) + m+5 = (-m-3)x + 3m+11$.

• $\Delta \cap Ox = A \Rightarrow A\left(\frac{3m+11}{m+3}; 0\right)$, với $m+3 \neq 0$

• $\Delta \cap Oy = B \Rightarrow B(0; 3m+11)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \frac{(3m+11)^2}{|m+3|}$

Theo giả thiết bài toán ta suy ra: $\frac{1}{2} \frac{(3m+11)^2}{|m+3|} = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow (3m+11)^2 = 25|m+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 66m + 121 = 25m + 75 \\ 9m^2 + 66m + 121 = -25m - 75 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 41m + 46 = 0 \\ 9m^2 + 91m + 196 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ bằng:

A. -2 .**B.** 1 .**C.** 2 .**D.** 0 .**Lời giải****Chọn A**

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = -1$ bằng $y'(-1)$.

Ta có $y' = x^3 + x$, vậy $y'(-1) = -2$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

A. $y = -x + 3$.**B.** $y = -x - 3$.**C.** $y = x - 1$.**D.** $y = -x + 1$.**Lời giải****Chọn B**

Tọa độ tiếp điểm $M(-1; -2)$.

$y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1 \Rightarrow PTTT$ của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại $M(-1; -2)$ là:

$y = -1(x+1) - 2$ hay $y = -x - 3$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1; 2)$ bằng

A. 3 .**B.** -5 .**C.** 25 **D.** 1 .**Lời giải****Chọn D**

$y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow k = y'(-1) = 1$.

Câu 4. Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là?

A. $k = 12$.**B.** $k = 3$.**C.** $k = 5$.**D.** $k = 4$.**Lời giải****Chọn B**

Ta có $k = y'(1) = 3$.

Câu 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - x + 1$ biết hoành độ tiếp điểm bằng 1.

A. $y = 6x - 4$

B. $y = x + 2$

C. $y = -3x + 5$

D. $y = 5x - 3$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 6x^2 - 1$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$ và $y'(1) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 5(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 5x - 3$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là.

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = -x - 1$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = 2x + 2$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 3x^2 - 1$, giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $M(0, -1)$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = -x - 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; -2)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M .

A. $y = 2$.

B. $y = -2$.

C. $y = -2x$.

D. $y = 2x$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Với $x_0 = 2$; $y_0 = -2$ và $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(2) = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -2$.

- Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tung độ tiếp điểm bằng -2 .
- A. $y = -4x - 2$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x - 2$. D. $y = -4x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = -2 \Leftrightarrow \frac{2x_0+2}{x_0-1} = -2 \Leftrightarrow 4x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Từ đó ta có $y'(x_0) = y'(0) = -4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = -4(x-0) - 2 = -4x - 2$.

- Câu 9.** (HK1-THPT Lương Thế Vinh-2016-2017) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{2-x}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ có hệ số góc là:

- A. 1. B. $\frac{7}{9}$. C. 7. D. $\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Chọn D

$$y = \frac{2x-3}{2-x} = \frac{2x-3}{-x+2} \Rightarrow y' = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

$$y'(-1) = \frac{1}{9}.$$

- Câu 10.** (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - TP Hồ Chí Minh - HKI - 2018) Phương trình tiếp tuyến với (C): $y = \frac{x+2}{2x-3}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

- A. $y = \frac{1}{7}(x+2)$. B. $y = -\frac{1}{7}(x+2)$. C. $y = -\frac{1}{7}(x-2)$. D. $y = \frac{-x}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y_o = 0 \Rightarrow \frac{x_o + 2}{2x_o - 3} = 0 \Leftrightarrow x_o = -2$

$$y' = \frac{-7}{(2x-3)^2} \Rightarrow y'(-2) = -\frac{1}{7}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{7}(x+2)$.

Câu 11. (Cơ sở bồi dưỡng văn hóa 218 Lý Tự Trọng - Quận 1-2018) Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$. Tính $a + 8b$.

- A.** 8. **B.** 9. **C.** $\frac{9}{16}$. **D.** $\frac{25}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 2x$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{13}{16} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{16}$.

Vậy $a + 8b = 8$.

Câu 12. (Sở GD&ĐT Đồng Tháp - Diễn tập THPT QG - 2018) Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5(C)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M \in (C)$ và có hoành độ bằng 3 là

- A.** $y = 18x + 49$. **B.** $y = -18x - 49$. **C.** $y = -18x + 49$. **D.** $y = 18x - 49$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = -6x^2 + 12x, f'(3) = -18$.

$x = 3 \Rightarrow y = -5$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = -18(x - 3) - 5 \Leftrightarrow y = -18x + 49$.

Câu 13. (THPT Yên Lạc- Vĩnh Phúc- Lần 1-2018) Cho đồ thị $(H): y = \frac{2x-4}{x-3}$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox .

- A.** $y = 2x$. **B.** $y = -2x + 4$. **C.** $y = -2x - 4$. **D.** $y = 2x - 4$.

Lời giải

Chọn B

(H) giao Ox tại điểm $(2;0)$. Ta có $y' = \frac{-2}{(x-3)^2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= -2(x-2) + 0 = -2x + 4 \end{aligned}$$

Câu 14. (THPT Chuyên sư phạm-Hà Nội-Lần 1-2018) Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

- A. $y = 20x - 35$. B. $y = -20x - 35, y = 20x + 35$.
C. $y = 20x - 35, y = -20x - 35$. D. $y = -20x + 35$.

Lời giải

Chọn C.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình $x^4 - 3x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$y'(x) = 4x^3 - 6x.$$

Phương trình các tiếp tuyến tại các điểm $(-2;5)$, $(2;5)$ lần lượt là:

$$y = y'(-2)(x+2) + 5 = -20x - 35, y = y'(2)(x-2) + 5 = 20x - 35.$$

Câu 15. (THPT Ngô Quyền-Hải Phòng-L2-2018) Cho hàm số $y = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục tung.

- A.** $y = 2x + 2$. B. $y = x + 2$. C. $y = -2x + 2$. D. $y = 2x - 2$.

Lời giải

Chọn A.

$$(C) \cap Oy = (0;2), y' = \frac{2}{(1-x)^2} \Rightarrow y'(0) = 2.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 2x + 2$.

Câu 16. (THPT Ngô Gia Tự - Bắc Ninh - Lần 3 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

- A. $4x - 3y - 2 = 0$. B. $4x + 3y - 2 = 0$. **C.** $4x + 3y + 2 = 0$. D. $4x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Gọi } M_0(x_0; y_0) = (C) \cap Ox \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{4}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành:

$$y = -\frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow 4x + 3y + 2 = 0.$$

Câu 17. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x$ tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$.

- A.** $y = -x - 2$. **B.** $y = x - 2$. **C.** $y = -x + 2$. **D.** $y = x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2$.

Theo đề $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$; $y'(-1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ là

$$y = (x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Câu 18. (HK1 THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m(C)$ với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Tìm m để tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y - 1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất

- A.** $\frac{16}{13}$. **B.** $-\frac{13}{16}$. **C.** $\frac{13}{16}$. **D.** $-\frac{16}{13}$.

Lời giải

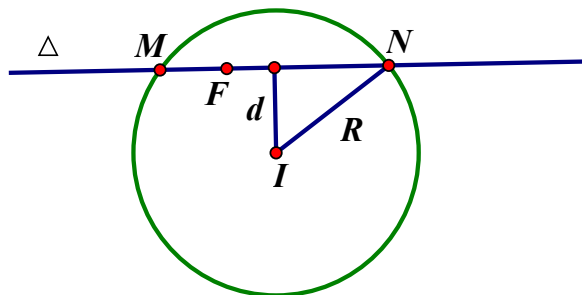
Chọn C

Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y - 1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1); R = 2$.

Ta có $A(1;1-m)$; $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$.

Suy ra phương trình $\Delta: y = (4 - 4m)(x - 1) + 1 - m$. Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định

$F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ) .



Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N . Thế thì ta có: $MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I; \Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I; \Delta)}$.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$.

Khi đó đường Δ có 1 vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IF} = \left(\frac{3}{4}; -1\right)$ nên ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 1 \cdot \frac{3}{4} - (4 - 4m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}.$$

Câu 19. (THPT Hàm Nghi- Hà Tĩnh -Lần 2-2018) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng

$d: y = -x + m$. Biết đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B với mọi tham số m . Đặt k_1, k_2 tương ứng là hệ số góc của các tiếp tuyến tại A, B . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = k_1^{2018} + k_2^{2018}$?

A. $P_{\min} = 1$.

B. $P_{\min} = 3$.

C. $P_{\min} = 4$.

D. $P_{\min} = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Suy ra đặt } k_1 = \frac{2}{(x_A+1)^2}, k_2 = \frac{2}{(x_B+1)^2}, x_A \neq -1, x_B \neq -1, x_A \neq x_B.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x-1}{x+1} = -x+m, (x \neq -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } x_A, x_B \text{ là nghiệm của phương trình } (*) \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = m-2 \\ x_A \cdot x_B = -m-1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = \frac{4}{(x_A \cdot x_B + x_A + x_B + 1)^2} = \frac{4}{(m-2-m-1+1)^2} = 1.$$

$$\text{Suy ra } P = k_1^{2018} + k_2^{2018} \geq 2\sqrt{(k_1.k_2)^{2018}} = 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } k_1 = k_2 \Leftrightarrow x_A + x_B = -2 \Leftrightarrow m = 0$$

Câu 20. (Cơ sở bồi dưỡng văn hóa 218 Lý Tự Trọng - Quận 1-2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 4$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $y = ax + b$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N . Biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M, N có cùng hệ số góc là 2. Tính $a + b$.

A. -4.

B. 4.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6x - 6$$

$$\text{Xét phương trình } y' = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 6 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{3} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{3} \end{cases}$$

$$+) x = \frac{3 + \sqrt{33}}{3} \Rightarrow y\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{3}\right) = \frac{-36 - 16\sqrt{33}}{9} \Rightarrow M\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{3}; \frac{-36 - 16\sqrt{33}}{9}\right)$$

$$+) x = \frac{3 - \sqrt{33}}{3} \Rightarrow y\left(\frac{3 - \sqrt{33}}{3}\right) = \frac{-36 + 16\sqrt{33}}{9} \Rightarrow N\left(\frac{3 - \sqrt{33}}{3}; \frac{-36 + 16\sqrt{33}}{9}\right)$$

$$\overline{MN}\left(-\frac{2\sqrt{33}}{3}; \frac{32\sqrt{33}}{9}\right) \Rightarrow \text{đường thẳng } MN \text{ có hệ số góc } k = -\frac{16}{3}.$$

$$\text{Đường thẳng } MN \text{ có phương trình: } y = -\frac{16}{3}\left(x - \frac{3 + \sqrt{33}}{3}\right) + \frac{-36 - 16\sqrt{33}}{9}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{16}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{16}{3} + \frac{4}{3} = -4.$$

Câu 21. (Cơ sở bồi dưỡng văn hóa 218 Lý Tự Trọng - Quận 1-2018) Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x + 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi S là tập hợp các số thực k sao cho trên (C) có hai điểm phân biệt M, N mà các tiếp tuyến của (C) có cùng hệ số góc k , đồng thời diện tích ΔOMN bằng 6 (O là gốc tọa độ). Tính tổng tất cả các số thuộc S .

A. -5.

B. -3.

C. 0.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{- Ta có: } y = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x+1} = 2x+1 + \frac{4}{x+1} \Rightarrow y' = 2 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = k \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{(x+1)^2} = k \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{2-k}} \text{ (với } k < 2), \text{ đặt } a = \sqrt{\frac{4}{2-k}} > 0$$

$$\Rightarrow M = \left(-1-a; -1-2a-\frac{4}{a}\right), N = \left(-1+a; -1+2a+\frac{4}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \left(2a; 4a + \frac{8}{a}\right) \Rightarrow MN = 2a\sqrt{1 + \left(2 + \frac{4}{a^2}\right)^2}; \text{ đường thẳng } MN \text{ có phương trình:}$$

$$\left(2 + \frac{4}{a^2}\right)x - y + 1 + \frac{4}{a^2} = 0 \Rightarrow d(O; MN) = \frac{1 + \frac{4}{a^2}}{\sqrt{1 + \left(2 + \frac{4}{a^2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow 6 = S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{1 + \left(2 + \frac{4}{a^2}\right)^2} \cdot \frac{1 + \frac{4}{a^2}}{\sqrt{1 + \left(2 + \frac{4}{a^2}\right)^2}} = a\left(1 + \frac{4}{a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - \sqrt{5} \\ a = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{12 - 6\sqrt{5}}{7 - 3\sqrt{5}} \\ k_2 = \frac{12 + 6\sqrt{5}}{7 + 3\sqrt{5}} \end{cases}$$

Vậy $k_1 + k_2 = -3$.

BÀI 43: LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN BIẾT HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết hệ số góc của tiếp tuyến là k .

❖ Các dạng bài toán:

Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ có hệ số góc là k.	PP: + + + + + + + + +
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = ax + b$.	PP: + + + + + + + + +
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = ax + b$.	PP: + + + + + + + + +

Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc bằng α	PP: + + + + + + + + + +
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc bằng α.	PP: + + + + + + + + + +

B. VÍ DỤ MINH HỌA

- Câu 1.** Cho đường cong $(C): y = x^3$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 12$ có phương trình là
A. $y = 12x + 16$ hoặc $y = 12x - 16$. **B.** $y = 12x + 8$ hoặc $y = 12x - 8$.
C. $y = 12x + 2$ hoặc $y = 12x - 2$. **D.** $y = 12x + 4$ hoặc $y = 12x - 4$.
- Câu 2.** Cho đường cong $(C): y = -x^4 - x^2 + 6$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -6$ có phương trình là
A. $y = -6x + 1$. **B.** $y = -6x + 6$. **C.** $y = 6x + 10$. **D.** $y = -6x + 10$.
- Câu 3.** Cho đường cong $(C): y = \frac{x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -2$ có phương trình là
A. $y = -2x + 73$. **B.** $y = -2x + 7$ hoặc $y = -2x - 1$.
C. $y = -2x$ hoặc $y = -2x + 3$. **D.** $y = -2x + 5$ hoặc $y = -2x + 7$.
- Câu 4.** Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x-2}$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -\frac{3}{4}$ có phương trình là
A. $y = -\frac{3}{4}x + 2$ hoặc $y = -\frac{3}{4}x + 13$. **B.** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ hoặc $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$.
C. $y = -\frac{3}{4}x - 1$. **D.** $y = -\frac{3}{4}x - 2$.
- Câu 5.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 8x + 2$
A. $y = 8x + \frac{1}{3}, y = 8x - \frac{7}{3}$. **B.** $y = 8x + \frac{2}{3}, y = 8x$.
C. $y = \frac{-1}{8}x + \frac{11}{3}, y = \frac{-1}{8}x - \frac{97}{3}$. **D.** $y = 8x + \frac{11}{3}, y = 8x - \frac{97}{3}$.
- Câu 6.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 3x + 2$
A. $y = 3x + 10, y = 3x - 11$. **B.** $y = 3x + 1, y = 3x - \frac{29}{3}$.
C. $y = 3x + 2$. **D.** $y = 3x + 10, y = 3x - 1$.
- Câu 7.** Cho đường cong $(C): y = -x^3 + 3x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x - 9y + 3 = 0$ có phương trình là
A. $y = -9x + 16$ hoặc $y = -9x - 16$. **B.** $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 16$.
C. $y = -9x - 20$ hoặc $y = -9x + 20$. **D.** $y = 9x + 20$ hoặc $y = 9x - 20$.

Câu 8. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{1-x}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng

$d: 12x + 3y + 2 = 0$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

B. $y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

C. $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-3}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với trục hoành góc 45° có phương trình là

A. $y = -x + 1$ hoặc $y = -x - 1$.

B. $y = -x - 11$ hoặc $y = -x + 1$.

C. $y = x + 11$ hoặc $y = x - 1$.

D. $y = -x + 11$ hoặc $y = -x - 1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng

$d: y = -\frac{1}{2}x + 5$ góc 45° có hệ số góc là

A. $3; -\frac{1}{3}$.

B. $\sqrt{3}; -\frac{1}{3}$.

C. $-3; -\frac{1}{3}$.

D. $-3; \frac{1}{3}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1.** Cho đường cong $(C): y = \frac{2x+3}{1-x}$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 5$ có phương trình là
- A. $y = 5x + 3$ hoặc $y = 5x - 3$. B. $y = 5x + 1$ hoặc $y = 5x - 15$.
 C. $y = 5x + 3$ hoặc $y = 5x$. D. $y = 5x - 3$ hoặc $y = 5x - 7$.
- Câu 2.** Cho đường cong $(C): y = -x^3 - 3x + 4$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 15x + y + 12 = 0$ có phương trình là
- A. $y = -15x + 20$ hoặc $y = -15x - 12$. B. $y = -15x + 20$.
 C. $y = -15x - 20$ hoặc $y = -15x - 40$. D. $y = -15x - 40$ hoặc $y = -15x - 12$.
- Câu 3.** Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-3}{x-1}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: y = -x + 66$ có phương trình là
- A. $y = -x + 3$ hoặc $y = -x - \frac{13}{3}$. B. $y = x - 3$ hoặc $y = x - \frac{13}{3}$.
 C. $y = x + 1$ hoặc $y = x + \frac{7}{3}$. D. $y = x + 3$ hoặc $y = x + \frac{13}{3}$.
- Câu 4.** Cho đường cong $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -7$ có phương trình là.
- A. $y = -7x + \frac{37}{13}$ B. $y = -7x - \frac{11}{3}$. C. $y = -7x + \frac{11}{3}$. D. $y = -7x - \frac{29}{3}$.
- Câu 5.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 9x - y = 0$ có phương trình là
- A. $y = 9x + 40$. B. $y = 9x - 40$. C. $y = 9x + 32$. D. $y = 9x - 32$.
- Câu 6.** Cho đường cong $(C): y = \frac{5-x}{x+2}$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x + 7y - 5 = 0$ có phương trình là
- A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$ hoặc $y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$.
 C. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$ hoặc $y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$. D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$.
- Câu 7.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 9y - 1 = 0$ có phương trình là.
- A. $y = -\frac{1}{9}x + 18$ hoặc $y = -\frac{1}{9}x + 5$. B. $y = \frac{1}{9}x + 18$ hoặc $y = -\frac{1}{9}x + 5$.
 C. $y = 9x + 18$ hoặc $y = 9x - 14$. D. $y = 9x + 18$ hoặc $y = 9x + 5$.

- Câu 8.** Cho đường cong $(C): y = -x^4 + x^2$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 2$ có phương trình là
A. $y = 2x + 21$ hoặc $y = 2x + 32$. **B.** $y = 2x$ hoặc $y = 2x + 2$.
C. $y = 2x + 2$ **D.** $y = 2x$ hoặc $y = 2x + 3$.
- Câu 9.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 9$ có phương trình là
A. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 15$. **B.** $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 16$.
C. $y = 9x + 17$ hoặc $y = 9x - 15$. **D.** $y = 9x - 17$ hoặc $y = 9x + 15$.
- Câu 10.** Cho đường cong $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$ có phương trình là
A. $y = 3x - 4$. **B.** $y = 3x + 2$. **C.** $y = 3x + 14$. **D.** $y = 3x + 4$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$
A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $d: x - 4y + 1 = 0$
A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.
- Câu 13.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m - 3$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y - 4 = 0$
A. $m = -2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 4$.
- Câu 14.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-4}{x+1}$ tại điểm M có dạng $y = kx + m$. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $d: 3x - 2y + 19 = 0$. Khi đó, $k + m$ có giá trị bằng
A. 11. **B.** 4. **C.** -8. **D.** -1.
- Câu 15.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 2x + m^2$ tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.
A. $\{2\}$. **B.** $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. **C.** $\{-1; 1\}$. **D.** $\{-2; 2\}$.
- Câu 16.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C) . Gọi $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hệ số góc tiếp tuyến nhỏ nhất. Tỉ số $T = 2m : k$ có giá trị bằng
A. $T = -7$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = 7$.
- Câu 17.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Hai điểm A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn $AB = 4\sqrt{2}$ là

A. $A(-2;1), B(2;-3)$ B. $A(-2;0), B(2;4)$. C. $A(0;-1), B(4;3)$. D. $A(-3;2), B(1;-2)$.

Câu 18. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành

A. 0. B. 1. C. 2 D. 3.

Câu 19. Cho đường cong $(C): y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm A có tung độ bằng -1 . Tiếp tuyến của

(C) tại A có hệ số góc $k = -3$. Các giá trị của a và b là

A. $a=1, b=1$. B. $a=2, b=1$. C. $a=1, b=2$. D. $a=2, b=2$.

Câu 20. Cho đường cong $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ và điểm $M \in (C_m)$, biết $x_M = -1$. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song đường thẳng $d: 5x - y = 0$

A. $m = 4$ B. $m = -4$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Cho đường cong $(C): y = x^3 + 2x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 5$ có phương trình là
- A. $y = 5x + 1$ hoặc $y = 5x + 3$. B. $y = 5x - 1$ hoặc $y = 5x - 3$.
 C. $y = 5x - 1$ hoặc $y = 5x + 3$ D. $y = 5x + 1$ hoặc $y = 5x - 3$.

- Câu 2.** Cho đường cong $(C): y = \frac{x+3}{x+1}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$ là
- A. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ hoặc $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ hoặc $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
 C. $y = 2x + 3$ hoặc $y = 2x - 7$. D. $y = 2x - 5$ hoặc $y = 2x - 7$.

- Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Khi đó giá trị m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 3$ là
- A. $\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. đáp số khác.

- Câu 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2019$. Khi đó $x_1 + x_2$ có giá trị là
- A. -1. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

- Câu 5.** Cho đường cong $(C): y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 4x + y + 6 = 0$ có phương trình là
- A. $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$. B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.
 C. $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$. D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

- Câu 6.** Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.
- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{1}{4}$. C. $m = \frac{7}{16}$. D. $m = \frac{9}{16}$.

- Câu 7.** Cho đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 18y + 18 = 0$ có phương trình là
- A. $y = 18x + 8$ hoặc $y = 18x - 27$. B. $y = 18x + 8$ hoặc $y = 18x - 2$.
 C. $y = 18x + 81$ hoặc $y = 18x - 2$. D. $y = 18x + 81$ hoặc $y = 18x - 27$.

- Câu 8.** Cho đường cong $(C): y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$. Tìm các điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó với (C) vuông góc với đường thẳng $d: y = x + 4$ có phương trình là
- A. $(1 + \sqrt{3}; 5 + 3\sqrt{3}); (1 - \sqrt{3}; 5 - 3\sqrt{3})$ B. $(2; 12)$.
C. $(0; 0)$. D. $(-2; 0)$.
- Câu 9.** Cho đường cong $(C): y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là
- A. $y = 5x - 3$. B. $y = -3x - 5$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 4$.
- Câu 10.** Cho đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x - y = 0$ có phương trình là
- A. $y = x - 4$ hoặc $y = x + 28$ B. $y = x + 4$ hoặc $y = x + 28$.
C. $y = x - 4$ hoặc $y = x - 28$. D. $y = x + 4$ hoặc $y = x - 28$.
- Câu 11.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 9$ có phương trình là
- A. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 15$. B. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 16$.
C. $y = 9x - 15$ hoặc $y = 9x + 17$. D. $y = 9x - 16$ hoặc $y = 9x + 15$.
- Câu 12.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng trục Oy có phương trình là
- A. $y = 2$ hoặc $y = -1$ B. $y = 3$ hoặc $y = -1$.
C. $y = 3$ hoặc $y = -2$. D. $x = 3$ hoặc $x = -1$.
- Câu 13.** Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Để (C) đi qua $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ có hệ số góc $k = -3$ thì mối liên hệ giữa a và b là
- A. $4a - b = 1$ B. $a - 4b = 1$. C. $4a - b = 0$. D. $a - 4b = 0$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = \frac{ax + 2}{bx + 3}$ có đồ thị (C) . Tại điểm $M(-2; -4)$ thuộc (C) tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 7x - y + 5 = 0$ thì mối liên hệ giữa a và b là
- A. $b - 2a = 0$ B. $a - 2b = 0$. C. $b - 3a = 0$. D. $a - 3b = 0$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = \frac{x + b}{ax - 2}$ có đồ thị (C) . Tại điểm $M(1; -2)$ thuộc (C) tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị $T = a + b$ là
- A. $T = a + b = 2$ B. $T = a + b = 2$. C. $T = a + b = 2$. D. $T = a + b = 2$.
- Câu 16.** Cho hàm số $y = \frac{5 - 4x}{3 - 2x}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: y = 3x - 1$ góc 45° có phương trình là
- A. $y = -2x - 3$ hoặc $y = -2x - 7$. B. $y = -x - 1$ hoặc $y = -x + 5$.
C. $y = x + 11$ hoặc $y = x - 7$. D. $y = -2x + 7$ hoặc $y = -2x + 3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3 + 4$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: \sqrt{3}y - x + 6 = 0$ góc 30° có phương trình là

- A. $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$ hoặc $y = 4$.
 B. $y = \sqrt{3}x + \frac{11 + \sqrt{3}}{3}$ hoặc
 C. $y = 4$.
 D. $y = 4$ hoặc $y = \sqrt{3}x + \frac{11 + \sqrt{3}}{3}$ hoặc $y = \sqrt{3}x + \frac{11 - \sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. Cho đường cong $(C): y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = -3x + 2$ có phương trình là

- A. $y = -3x - 3$ hoặc $y = -3x - 11$.
 B. $y = -3x - 3$ hoặc $y = -3x + 11$.
 C. $y = -3x + 3$ hoặc $y = -3x - 11$.
 D. $y = -3x - 3$ hoặc $y = 3x - 11$.

Câu 19. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox . Tìm tổng các phần tử của S .

- A. -2 .
 B. 5 .
 C. -5 .
 D. 3 .

Câu 20. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C) . Tập các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x = 1$ song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$.

- A. $\{2; 3\}$.
 B. $\{-2; 2\}$.
 C. $\{-2; 3\}$.
 D. $\{-3; 3\}$.

BÀI 43: LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN BIẾT HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết hệ số góc của tiếp tuyến là k .

❖ Các dạng bài toán:

Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ có hệ số góc là k.	PP: +Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm. + Theo đề bài: $f'(x_0) = k$ (*) +Giải phương trình (*), tìm được $x_0 \Rightarrow f(x_0)$. +Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = ax + b$.	PP: +Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm. +Tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ song song với $\Delta: y = ax + b$ $\Rightarrow f'(x_0) = a$ (*) +Giải phương trình (*), tìm được $x_0 \Rightarrow f(x_0)$. +Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ <u>Lưu ý:</u> phải loại đi phương trình tiếp tuyến nào trùng với phương trình của đường thẳng Δ.
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = ax + b$	PP: +Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm. +Tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ vuông góc với $\Delta: y = ax + b$ $\Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ (*) +Giải phương trình (*), tìm được $x_0 \Rightarrow f(x_0)$. +Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc bằng α	PP: +Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm. + Tính $f'(x)$ +Giải phương trình $f'(x_0) = \tan \alpha$, ta tìm được $x_0 \Rightarrow f(x_0)$. +Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

	$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc bằng α .	PP: + Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm. + Tính $f'(x)$ + tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc bằng α nên ta có: $\left \frac{k - a}{1 + ka} \right = \tan \alpha$, ta tìm được k. + Giải phương trình $f'(x_0) = k$, ta tìm được $x_0 \Rightarrow f(x_0)$. + Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho đường cong $(C): y = x^3$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 12$ có phương trình là

A. $y = 12x + 16$ hoặc $y = 12x - 16$

B. $y = 12x + 8$ hoặc $y = 12x - 8$.

C. $y = 12x + 2$ hoặc $y = 12x - 2$.

D. $y = 12x + 4$ hoặc $y = 12x - 4$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2$.

$$\text{Theo đề bài: } k = 3x_0^2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 8 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -8 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; 8)$ là: $y = 12(x - 2) + 8 = 12x - 16$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; -8)$ là: $y = 12(x + 2) - 8 = 12x + 16$.

Câu 2. Cho đường cong $(C): y = -x^4 - x^2 + 6$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -6$ có phương trình là

- A. $y = -6x + 1$. B. $y = -6x + 6$. C. $y = 6x + 10$. **D. $y = -6x + 10$.**

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -4x^3 - 2x$.

Theo đề bài: $k = -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 4)$ là: $y = -6(x - 1) + 4 = -6x + 10$.

Câu 3. Cho đường cong $(C): y = \frac{x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -2$ có phương trình là

- A. $y = -2x + 73$. **B. $y = -2x + 7$ hoặc $y = -2x - 1$.**
C. $y = -2x$ hoặc $y = -2x + 3$. D. $y = -2x + 5$ hoặc $y = -2x + 7$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Theo đề bài: $k = \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; 3)$ là: $y = -2(x - 2) + 3 = -2x + 7$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; -1)$ là: $y = -2(x - 0) - 1 = -2x - 1$.

Câu 4. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x-2}$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -\frac{3}{4}$ có phương trình là

A. $y = -\frac{3}{4}x + 2$ hoặc $y = -\frac{3}{4}x + 13$.

B. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ hoặc $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$.

C. $y = -\frac{3}{4}x - 1$.

D. $y = -\frac{3}{4}x - 2$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$.

Theo đề bài: $k = \frac{-3}{(x_0-2)^2} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{2} \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(4; \frac{7}{2}\right)$ là: $y = -\frac{3}{4}(x-4) + \frac{7}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$ là: $y = -\frac{3}{4}(x-0) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

Câu 5. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 8x + 2$

A. $y = 8x + \frac{1}{3}, y = 8x - \frac{7}{3}$.

B. $y = 8x + \frac{2}{3}, y = 8x$.

C. $y = \frac{-1}{8}x + \frac{11}{3}, y = \frac{-1}{8}x - \frac{97}{3}$.

D. $y = 8x + \frac{11}{3}, y = 8x - \frac{97}{3}$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 8x + 2$ nên $y'(x_0) = 8$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{13}{3} \\ x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = \frac{23}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(-1; -\frac{13}{3}\right)$ là: $y = 8(x+1) - \frac{13}{3} = 8x + \frac{11}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(5; \frac{23}{3}\right)$ là: $y = 8(x-5) + \frac{23}{3} = 8x - \frac{97}{3}$.

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 3x + 2$

A. $y = 3x + 10, y = 3x - 11$.

B. $y = 3x + 1, y = 3x - \frac{29}{3}$.

C. $y = 3x + 2$.

D. $y = 3x + 10, y = 3x - 1$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 3x + 2$ nên $y'(x_0) = 3$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; 1)$ là: $y = 3(x - 0) + 1 = 3x + 1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(4; \frac{7}{3}\right)$ là: $y = 3\left(x - 4\right) + \frac{7}{3} = 3x - \frac{29}{3}$.

Câu 7. Cho đường cong $(C): y = -x^3 + 3x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x - 9y + 3 = 0$ có phương trình là

A. $y = -9x + 16$ hoặc $y = -9x - 16$

B. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 16$.

C. $y = -9x - 20$ hoặc $y = -9x + 20$.

D. $y = 9x + 20$ hoặc $y = 9x - 20$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 9y + 3 = 0$ nên

$$y'(x_0) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow -3x_0^2 + 3 = -9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; -2)$ là: $y = -9(x - 2) - 2 = -9x + 16$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; 2)$ là: $y = -9(x + 2) + 2 = -9x - 16$.

Câu 8. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{1-x}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 12x+3y+2=0$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

B. $y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

C. $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ hoặc $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 12x+3y+2=0$ nên $y'(x_0) = -\frac{1}{(-4)} \Leftrightarrow y'(x_0) = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x_0)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{2} \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(3; -\frac{5}{2}\right)$ là: $y = \frac{1}{4}(x-3) - \frac{5}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ là: $y = \frac{1}{4}(x+1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-3}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với trục hoành góc 45° có phương trình là

A. $y = -x+1$ hoặc $y = -x-1$.

B. $y = -x-11$ hoặc $y = -x+1$.

C. $y = x+11$ hoặc $y = x-1$.

D. $y = -x+11$ hoặc $y = -x-1$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{-9}{(x-3)^2}$.

Tiếp tuyến của (C) tạo với trục hoành góc 45° nên

$$|f'(x_0)| = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \left| \frac{-9}{(x_0-3)^2} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-3=3 \\ x_0-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=6 \Rightarrow y_0=5 \\ x_0=0 \Rightarrow y_0=-1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(6; 5)$ là: $y = -1(x-6) + 5 = -x+11$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; -1)$ là: $y = -1(x-0) - 1 = -x-1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng

$d : y = -\frac{1}{2}x + 5$ góc 45° có hệ số góc là

A. $3; -\frac{1}{3}$.

B. $\sqrt{3}; -\frac{1}{3}$.

C. $-3; -\frac{1}{3}$

D. $-3; \frac{1}{3}$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x - 12$.

$d : y = -\frac{1}{2}x + 5$ có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2}$

Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d : y = -\frac{1}{2}x + 5$ góc 45° nên

$$\left| \frac{y'(x_0) + \frac{1}{2}}{1 + y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = \frac{1}{3} \\ y'(x_0) = -3 \end{cases}$$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x+3}{1-x}$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 5$ có phương trình là

A. $y = 5x + 3$ hoặc $y = 5x - 17$

B. $y = 5x + 1$ hoặc $y = 5x - 15$.

C. $y = 5x + 3$ hoặc $y = 5x$.

D. $y = 5x - 3$ hoặc $y = 5x - 7$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{5}{(1-x)^2}$.

Theo đề bài: $k = \frac{5}{(1-x_0)^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -7 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; 3)$ là: $y = 5(x - 0) + 3 = 5x + 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; -7)$ là: $y = 5(x - 2) - 7 = 5x - 17$.

Câu 2. Cho đường cong $(C): y = -x^3 - 3x + 4$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 15x + y + 12 = 0$ có phương trình là

A. $y = -15x + 20$ hoặc $y = -15x - 12$.

B. $y = -15x + 20$

C. $y = -15x - 20$ hoặc $y = -15x - 40$.

D. $y = -15x - 40$ hoặc $y = -15x - 12$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -3x^2 - 3$.

Theo đề bài: $k = -3x_0^2 - 3 = -15 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -10 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 18 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; -10)$ là: $y = -15(x - 2) - 10 = -15x + 20$ (nhận).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; 18)$ là: $y = -15(x + 2) + 18 = -15x - 12$ (loại).

Câu 3. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-3}{x-1}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: y = -x + 66$ có phương trình là

A. $y = -x + 3$ hoặc $y = -x - \frac{13}{3}$.

B. $y = x - 3$ hoặc $y = x - \frac{13}{3}$.

C. $y = x + 1$ hoặc $y = x + \frac{7}{3}$.

D. $y = x + 3$ hoặc $y = x + \frac{13}{3}$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Theo đề bài: $k = \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; 3)$ là: $y = 1(x-0) + 3 = x + 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(-2; \frac{7}{3}\right)$ là: $y = 1(x+2) + \frac{7}{3} = x + \frac{13}{3}$.

Câu 4. Cho đường cong (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -7$ có phương trình là.

A. $y = -7x + \frac{37}{13}$

B. $y = -7x - \frac{11}{3}$.

C. $y = -7x + \frac{11}{3}$.

D. $y = -7x - \frac{29}{3}$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = x^2 - 4x - 3$.

Theo đề bài: $k = x_0^2 - 4x_0 - 3 = -7 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\frac{31}{3}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(2; -\frac{31}{3}\right)$ là: $y = -7(x-2) - \frac{31}{3} = -7x + \frac{11}{3}$.

Câu 5. Cho đường cong (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 9x - y = 0$ có phương trình là

A. $y = 9x + 40$.

B. $y = 9x - 40$.

C. $y = 9x + 32$.

D. $y = 9x - 32$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 9x - y = 0$ nên

$y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 4 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0;0)$ là: $y = 9x$ (loại).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(4;4)$ là: $y = 9(x-4) + 4 = 9x - 32$ (nhận).

Câu 6. Cho đường cong $(C): y = \frac{5-x}{x+2}$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x + 7y - 5 = 0$ có phương trình là

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$.

B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$ hoặc $y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$.

C. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$ hoặc $y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$.

D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{-7}{(x+2)^2}$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x + 7y - 5 = 0$ nên

$$y'(x_0) = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{-7}{(x_0+2)^2} = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -9 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-9; -2)$ là: $y = -\frac{1}{7}(x+9) - 2 = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(5; 0)$ là: $y = -\frac{1}{7}(x-5) + 0 = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$.

Câu 7. Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 9y - 1 = 0$ có phương trình là.

A. $y = -\frac{1}{9}x + 18$ hoặc $y = -\frac{1}{9}x + 5$.

B. $y = \frac{1}{9}x + 18$ hoặc $y = -\frac{1}{9}x + 5$.

C. $y = 9x + 18$ hoặc $y = 9x - 14$.

D. $y = 9x + 18$ hoặc $y = 9x + 5$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 9y - 1 = 0$ nên

$$y'(x_0) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; 4)$ là: $y = 9(x-2) + 4 = 9x - 14$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; 0)$ là: $y = 9(x+2) + 0 = 9x + 18$.

- Câu 8.** Cho đường cong $(C): y = -x^4 + x^2$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 2$ có phương trình là
- A. $y = 2x + 21$ hoặc $y = 2x + 32$. B. $y = 2x$ hoặc $y = 2x + 2$.
C. $y = 2x + 2$ D. $y = 2x$ hoặc $y = 2x + 3$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -4x^3 + 2x$.

Theo đề bài: $k = -4x_0^3 + 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-1; 0)$ là: $y = 2(x + 1) + 0 = 2x + 2$.

- Câu 9.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 9$ có phương trình là
- A. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 15$. B. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 16$.
C. $y = 9x + 17$ hoặc $y = 9x - 15$ D. $y = 9x - 17$ hoặc $y = 9x + 15$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

Theo đề bài: $k = 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; 3)$ là: $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; -1)$ là: $y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17$.

- Câu 10.** Cho đường cong $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$ có phương trình là
- A. $y = 3x - 4$. B. $y = 3x + 2$. **C.** $y = 3x + 14$ D. $y = 3x + 4$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$ nên

$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-1; -1)$ là: $y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$ (loại).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-3; 5)$ là: $y = 3(x+3) + 5 = 3x + 14$ (nhận)

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1.

Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng

$$d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$$

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(1) = -3$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; -2) \in (C)$ là: $\Delta: y = -3(x-1) - 2$ hay $\Delta: y = -3x + 1$

$$\text{Khi đó: } \Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = m^2 - 4 \\ 2m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \Leftrightarrow m = -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Câu 12. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $d: x - 4y + 1 = 0$

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại M . Khi đó Δ có hệ số góc là $y'(1) = -4m$.

$$d: x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$\text{Khi đó: } \Delta \perp d \Leftrightarrow -4m = -\frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m - 3$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y - 4 = 0$

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 4$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 2m - 1 = -3(x^2 - 2x + 1) + 2m + 2 = -3(x-1)^2 + 2m + 2 \leq 2m + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: GTLN của y' là $2m + 2$, đạt tại $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4m - 2$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 4m - 2)$. Khi đó Δ có hệ số góc là $y'(1) = 2m + 2$.

$$d: x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\text{Khi đó: } \Delta \perp d \Leftrightarrow 2m + 2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow m = -2.$$

- Câu 14.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-4}{x+1}$ tại điểm M có dạng $y = kx + m$. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $d: 3x - 2y + 19 = 0$. Khi đó, $k + m$ có giá trị bằng
- A. 11. B. 4. C. -8. **D. -1.**

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{6}{(x+1)^2}.$$

Tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: 3x - 2y + 19 = 0$ nên

$$y'(x_0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{(x_0+1)^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của } (C) \text{ tại } M(-3; 5) \text{ là: } d: y = \frac{3}{2}(x+3) + 5 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2} \text{ (loại).}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của } (C) \text{ tại } M(1; -1) \text{ là: } d: y = \frac{3}{2}(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } k = \frac{3}{2}, m = -\frac{5}{2} \Rightarrow k + m = -1.$$

- Câu 15.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 2x + m^2$ tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.
- A. $\{2\}$. B. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. C. $\{-1; 1\}$. **D. $\{-2; 2\}$.**

Lời giải:

Chọn đáp án D.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = 2x + m^2$ là:

$$\frac{2x+3}{x+1} = 2x + m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x^2 + m^2x + m^2 - 3 = 0(*) \end{cases}$$

đường thẳng $y = 2x + m^2$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow m^4 - 4(m^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 12 > 0, \forall m$$

Gọi x_A, x_B là nghiệm của $(*)$. Khi đó hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau khi

$$\text{và chỉ khi } y'(x_A) = y'(x_B) \Leftrightarrow (x_A + 1)^2 = (x_B + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \text{ (loại)} \\ x_A + 1 = -x_B - 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy ycbt } \Leftrightarrow x_A + x_B + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 16. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C) . Gọi $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hệ số góc tiếp tuyến nhỏ nhất. Tỉ số $T = 2m : k$ có giá trị bằng

A. $T = -7$

B. $T = -5$

C. $T = 5$

D. $T = 7$

Lời giải:

Chọn đáp án A.

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 - 6x = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}, \forall x$$

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)$ nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{2}$ khi $x_0 = \frac{1}{2}$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của } (C) \text{ tại } M\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right) \text{ là: } y = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}$$

$$\text{Vậy } k = -\frac{3}{2}, m = \frac{21}{4} \Rightarrow T = 2m : k = -7.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Hai điểm A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn $AB = 4\sqrt{2}$ là

A. $A(-2; 1), B(2; -3)$

B. $A(-2; 0), B(2; 4)$

C. $A(0; -1), B(4; 3)$

D. $A(-3; 2), B(1; -2)$

Lời giải:

Chọn đáp án B.

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Hai điểm A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên

$$y'(x_A) = y'(x_B) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \text{ (loại)} \\ x_A = -x_B \end{cases}$$

$$A(a; a^3 - 3a + 2), B(-a; -a^3 + 3a + 2) \Rightarrow AB = \sqrt{4a^2 + (-2a^3 + 6a)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Vậy $A(-2; 0); B(2; 4)$ hoặc $A(2; 4); B(-2; 0)$

Câu 18. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành

A. 0.

B. 1.

C. 2

D. 3.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$.

$$\text{Tiếp tuyến của } (C) \text{ song song với trục hoành } y = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; 1)$ là: $y = 0(x - 0) + 1 = 1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 0)$ là: $y = 0(x - 1) + 0 = 0$ (loại)

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-1; 0)$ là: $y = 0(x + 1) + 0 = 0$ (loại)

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa ycbt.

Câu 19. Cho đường cong $(C): y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm A có tung độ bằng -1 . Tiếp tuyến của

(C) tại A có hệ số góc $k = -3$. Các giá trị của a và b là

A. $a = 1, b = 1$.

B. $a = 2, b = 1$

C. $a = 1, b = 2$.

D. $a = 2, b = 2$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có $A(0; -1)$ là tiếp điểm.

$$y' = \frac{-a-b}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y'(0) = -3 \\ A(0; -1) \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b = -3 \\ \frac{b}{-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Câu 20. Cho đường cong $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ và điểm $M \in (C_m)$, biết $x_M = -1$. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song đường thẳng $d: 5x - y = 0$

A. $m = 4$

B. $m = -4$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có $A(-1; y_M)$ là tiếp điểm.

$$y' = x^2 - mx$$

tiếp tuyến của (C_m) tại M song song đường thẳng $d: 5x - y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) = 5 \\ y_M + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m = 5 \\ -\frac{1}{3} - \frac{m}{2} + \frac{1}{3} + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m \neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Cho đường cong $(C): y = x^3 + 2x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 5$ có phương trình là
- A. $y = 5x + 1$ hoặc $y = 5x + 3$. B. $y = 5x - 1$ hoặc $y = 5x - 3$.
- C. $y = 5x - 1$ hoặc $y = 5x + 3$ D. $y = 5x + 1$ hoặc $y = 5x - 3$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2$.

$$\text{Theo đề bài: } k = 3x_0^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 4)$ là: $y = 5(x - 1) + 4 = 5x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-1; -2)$ là: $y = 5(x + 1) - 2 = 5x + 3$.

- Câu 2.** Cho đường cong $(C): y = \frac{x+3}{x+1}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$ là
- A. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ hoặc $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ hoặc $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
- C. $y = 2x + 3$ hoặc $y = 2x - 7$. D. $y = 2x - 5$ hoặc $y = 2x - 7$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2}{(x+1)^2}.$$

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0+1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 2)$ là: $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-3; 0)$ là: $y = -\frac{1}{2}(x + 3) + 0 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

- Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Khi đó giá trị m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 3$.
- A. $\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. đáp số khác.

Lời giải:**Chọn đáp án B.**Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó $A = (C) \cap Oy \Rightarrow A(0; -m)$ Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m + 1 \Rightarrow y'(0) = m + 1$.Tiếp tuyến của (C) tại A vuông góc với $\Delta: y = 2x - 3 \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m + 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2019$. Khi đó $x_1 + x_2$ có giá trị là

A. -1.

B. $-\frac{4}{3}$.C. $\frac{1}{3}$.**D. $\frac{4}{3}$.****Lời giải:****Chọn đáp án D.**Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$.Tiếp tuyến của (C) tại M, N vuông góc với $y = -x + 2019 \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm phương trình:

$$3x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{4}{3}.$$

Câu 5. Cho đường cong $(C): y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng

 $d: 4x + y + 6 = 0$ có phương trình là

$$\text{A. } y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \text{ hoặc } y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

$$\text{B. } y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \text{ hoặc } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

$$\text{C. } y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \text{ hoặc } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

$$\text{D. } y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \text{ hoặc } y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Lời giải:**Chọn đáp án A.**Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 2)^2}.$$

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 4x + y + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 4}{(x_0 + 2)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = -\frac{5}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-3; -2)$ là: $y = \frac{1}{4}(x + 3) - 2 = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ là: $y = \frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

Câu 6. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.

A. $m = \frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{1}{4}$.

C. $m = \frac{7}{16}$.

D. $m = \frac{9}{16}$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow M\left(-1; m + \frac{1}{4}\right)$

Ta có: $y' = 4(2m-1)x^3$.

Tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow y'(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -8m + 4 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{9}{16}$$

Câu 7. Cho đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 18y + 18 = 0$ có phương trình là

A. $y = 18x + 8$ hoặc $y = 18x - 27$.

B. $y = 18x + 8$ hoặc $y = 18x - 2$.

C. $y = 18x + 81$ hoặc $y = 18x - 2$.

D. $y = 18x + 81$ hoặc $y = 18x - 27$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 18y + 18 = 0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{18} \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 - 6 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 9 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 9 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-4; 9)$ là: $y = 18(x + 4) + 9 = 18x + 81$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; 9)$ là: $y = 18(x - 2) + 9 = 18x - 27$.

Câu 8. Cho đường cong $(C): y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$. Tìm các điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó với (C) vuông góc với đường thẳng $d: y = x + 4$ có phương trình là

A. $(1 + \sqrt{3}; 5 + 3\sqrt{3})$; $(1 - \sqrt{3}; 5 - 3\sqrt{3})$

B. $(2; 12)$.

C. $(0; 0)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2}.$$

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với

đường thẳng $d: y = x + 4$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0 - 5}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 5 + 3\sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 5 - 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $M(1 + \sqrt{3}; 5 + 3\sqrt{3}), M(1 - \sqrt{3}; 5 - 3\sqrt{3})$

Câu 9. Cho đường cong $(C): y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là

A. $y = 5x - 3$ **B.** $y = -3x - 5$ **C.** $y = 2x - 3$ **D.** $y = x + 4$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 1.$$

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 4x_0^3 + 1 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 4x_0^3 = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{5} \sqrt[3]{6}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 2)$ là: $y = 5(x - 1) + 2 = 5x - 3$.

Câu 10. Cho đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x - y = 0$ có phương trình là

A. $y = x - 4$ hoặc $y = x + 28$ **B.** $y = x + 4$ hoặc $y = x + 28$.
C. $y = x - 4$ hoặc $y = x - 28$. **D.** $y = x + 4$ hoặc $y = x - 28$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 + 6x - 8.$$

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x - y = 0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 - 8 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -3 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 25 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; -3)$ là: $y = 1(x - 1) - 3 = x - 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-3; 25)$ là: $y = 1(x + 3) + 25 = x + 28$.

- Câu 11.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 9$ có phương trình là
- A. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 15$. B. $y = 9x + 16$ hoặc $y = 9x - 16$.
C. $y = 9x - 15$ hoặc $y = 9x + 17$. D. $y = 9x - 16$ hoặc $y = 9x + 15$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

$$\text{Theo đề bài: } k = 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2; 3)$ là: $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; -1)$ là: $y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17$.

- Câu 12.** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng trục Oy có phương trình là
- A. $y = 2$ hoặc $y = -1$ B. **$y = 3$ hoặc $y = -1$.**
C. $y = 3$ hoặc $y = -2$. D. $x = 3$ hoặc $x = -1$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng trục $Oy: x = 0$

nên tiếp tuyến có dạng $d: y = c$ $d: y = c$ là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ x^3 - 3x + 1 = c \end{cases} (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ c = x^3 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ c = -1 \\ x = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 3$ hoặc $y = -1$.

- Câu 13.** Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Để (C) đi qua $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ có hệ số góc $k = -3$ thì mối liên hệ giữa a và b là
- A. $4a - b = 1$ B. $a - 4b = 1$. **C. $4a - b = 0$.** D. $a - 4b = 0$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = \frac{(2ax - b)(x - 2) - ax^2 + bx}{(x - 2)^2}$$

$$k = y'(0) \Leftrightarrow -3 = \frac{2b}{4} \Rightarrow b = -6$$

$$A\left(-1; \frac{5}{2}\right) \in (C) \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{a+b}{-3} \Leftrightarrow a+b = -\frac{15}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Vậy $4a - b = 0$.

- Câu 14.** Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{bx+3}$ có đồ thị (C) . Tại điểm $M(-2; -4)$ thuộc (C) tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 7x - y + 5 = 0$ thì mối liên hệ giữa a và b là
- A.** $b - 2a = 0$ **B.** $a - 2b = 0$. **C.** $b - 3a = 0$. **D.** $a - 3b = 0$!

Lời giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = \frac{3a - 2b}{(bx + 3)^2}$$

$$M(-2; -4) \in (C) \Rightarrow -4 = \frac{-2a + 2}{3 - 2b} \Rightarrow \begin{cases} a + 4b = 7 \\ 3 - 2b = \frac{a - 1}{2} \end{cases} (1)$$

Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-2; -4)$ song song với đường thẳng $d: 7x - y + 5 = 0$

$$\Rightarrow y'(-2) = 7 \Leftrightarrow \frac{3a - 2b}{(3 - 2b)^2} = 7 \Leftrightarrow \frac{4(3a - 2b)}{(a - 1)^2} = 7 (2)$$

$$\text{Giải (1) và (2), ta được: } \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ a = 3 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

Vậy với $a = 3, b = 1 \Rightarrow a - 3b = 0$.

- Câu 15.** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ có đồ thị (C) . Tại điểm $M(1; -2)$ thuộc (C) tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị $T = a + b$ là
- A.** $T = a + b = 2$ **B.** $T = a + b = 2$. **C.** $T = a + b = 2$. **D.** $T = a + b = 2$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

$$y' = \frac{-2 - ab}{(ax - 2)^2}$$

$$M(1; -2) \in (C) \Rightarrow -2 = \frac{1+b}{a-2} \Rightarrow b = 3 - 2a$$

Tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$

$$\Rightarrow y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2 - ab}{(a - 2)^2} = -3 \Leftrightarrow -2 - a(3 - 2a) = -3(a - 2)^2 (1)$$

$$\text{Giải (1), ta được: } \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 1 \\ a = 2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

Vậy với $a = 1, b = 1 \Rightarrow a + b = 2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{5-4x}{3-2x}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: y = 3x - 1$ góc

45° có phương trình là

A. $y = -2x - 3$ hoặc $y = -2x - 7$.

B. $y = -x - 1$ hoặc $y = -x + 5$.

C. $y = x + 11$ hoặc $y = x - 7$.

D. $y = -2x + 7$ hoặc $y = -2x + 3$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = \frac{-2}{(3-2x)^2}$.

$d: y = 3x - 1$ có hệ số góc bằng 3

Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: y = 3x - 1$ góc 45° nên

$$\left| \frac{y'(x_0) - 3}{1 + y'(x_0) \cdot 3} \right| = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = -2 \\ y'(x_0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow \frac{-2}{(3-2x)^2} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1;1)$ là: $y = -2(x-1) + 1 = -2x + 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2;3)$ là: $y = -2(x-2) + 3 = -2x + 7$.

$$\text{Với } y'(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{(3-2x_0)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 \in \emptyset$$

Câu 17. Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3 + 4$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: \sqrt{3}y - x + 6 = 0$ góc 30° có phương trình là

A. $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$ hoặc $y = 4$.

B. $y = \sqrt{3}x + \frac{11+\sqrt{3}}{3}$ hoặc

C. $y = 4$.

D. $y = 4$ hoặc $y = \sqrt{3}x + \frac{11+\sqrt{3}}{3}$ hoặc $y = \sqrt{3}x + \frac{11-\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3\sqrt{3}x^2$.

$d: \sqrt{3}y - x + 6 = 0$ có hệ số góc bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: \sqrt{3}y - x + 6 = 0$ góc 30° nên

$$\left| \frac{y'(x_0) - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + y'(x_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \right| = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = \sqrt{3} \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } y'(x_0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Hai phương trình tiếp tuyến của (C) là: $y = \sqrt{3}x + \frac{11 + \sqrt{3}}{3}$ hoặc $y = \sqrt{3}x + \frac{11 - \sqrt{3}}{3}$.

Với $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$ thì pttt của (C) là $y = 4$.

Câu 18. Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng

$d: y = -3x + 2$ có phương trình là

A. $y = -3x - 3$ hoặc $y = -3x - 11$.

B. $y = -3x - 3$ hoặc $y = -3x + 11$.

C. $y = -3x + 3$ hoặc $y = -3x - 11$.

D. $y = -3x - 3$ hoặc $y = 3x - 11$.

Lời giải:

Chọn đáp án A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}.$$

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = -3x + 2$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 3}{(x_0 + 2)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2} \\ x_0 = -\frac{5}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là: $y = -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = -3x - 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$ là: $y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} = -3x - 11$.

Câu 19. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox. Tìm tổng các phần tử của S.

A. -2.

B. 5.

C. -5.

D. 3.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x.$$

$$\text{Tiếp tuyến của } (C) \text{ song song với trục hoành } y = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = m - 2 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = m - 3 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = m - 3 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy $S = \{2; 3\}$

Câu 20. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C) . Tập các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x = 1$ song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$.

A. $\{2; 3\}$.

B. $\{-2; 2\}$.

C. $\{-2; 3\}$.

D. $\{-3; 3\}$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó $M = (C) \cap d \Rightarrow M(1; -2m^2 + 2m + 2)$

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x \Rightarrow y'(1) = -4m^2 + 4$.

Tiếp tuyến của (C) song song với $\Delta: y = -12x + 4$

$$\Rightarrow y'(1) = -12 \Leftrightarrow -4m^2 + 4 = -12 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Với $m = -2: M(1; -10) \notin \Delta$, với $m = 2: M(1; -2) \notin \Delta$ nên $m = -2, m = 2$ thỏa ycbt.

BÀI 44: BIỆN LUẬN SỐ TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Biện luận số tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến đồ thị hàm số

* Bước 1: Lập phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng

$$d: y = k(\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots \quad (*)$$

* Bước 2: d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = \dots\dots\dots \\ f'(x) = \dots\dots\dots \end{cases}$ có nghiệm.

* Bước 3: Số nghiệm của phương trình (*) thỏa mãn tập xác định là số tiếp tuyến của đồ thị hàm số

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Trên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành ?

- A. 0
- B. 1
- C. 2 .
- D. 3 .

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 6x + 2$. Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm $A(1; -3)$

- A. 0
- B. 1
- C. 2 .
- D. 3 .

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2(C)$. Trên đường thẳng $d : y = 4$ có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

- A. 0
- B. 1
- C. 2 .
- D. 3 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hoành độ $x = 1$ có bao nhiêu giao điểm với đường thẳng $y = x^2 + \frac{4}{3}$

- A. 0
- B. 1
- C. 2 .
- D. 3 .

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x + m$ khi:

- A. $m = 2\sqrt{2}$.
- B. $m \neq 1$.
- C. $m = \pm 2\sqrt{2}$.
- D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{5x^3}{6} + mx - \frac{2m}{3}(C)$. Xác định m để từ $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ kẻ đến đồ thị hàm số (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau:

- A. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.
- B. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.
- C. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$.
- D. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 (C)$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng $d : y = (m^2 - 4)x + m$

- A. 0
- B. ± 1
- C. ± 2 .
- D. ± 3 .

Câu 8: Cho hàm số $y = 3x - x^3 (C)$. Tìm trên đường thẳng $y = -x$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

- A. $M(-2; 2), N(2; -2)$.
- B. $M(1; -1), N(2; -2)$.
- C. $M(-2; 2), N(3; -3)$.
- D. $M(-2; 2), N(0; 0)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1} (C)$. Tìm trên trục tung các điểm $M(0; a)$ mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành. Khi đó điều kiện của a là

- A. $a \in (-1; +\infty) \setminus \{1\}$.
- B. $a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.
- C. $a \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.
- D. $a \in \left(-\frac{13}{12}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = (|x|+1)^2 (|x|-1)^2 (C)$. Có bao nhiêu điểm trên trục hoành để có thể từ điểm đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

- Câu 1:** Trên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành ?
A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**
- Câu 2:** Trên đồ thị hàm số $y = -x^3 - x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành ?
A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**
- Câu 3:** Cho hàm số $y = x^3 - 6x$. Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm $A(1; -3)$
A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**
- Câu 4:** Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2$. Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm $A(1; -3)$
A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**
- Câu 5:** Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C) . Trên đường thẳng $d: y = -2$ có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C).
A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**
- Câu 6:** Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) . Trên đường thẳng $d: x = 1$ có bao nhiêu điểm có tung độ nguyên mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).
A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**
- Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^2 + 6f(x) = -3x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hoành độ $x = 1$ có bao nhiêu giao điểm với đường thẳng $y = x^2 + \frac{4}{3}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến dương.
A. 0 **B. 1**
C. 2 **D. 3**
- Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^3 + 6f(x) = -7x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hoành độ $x = 2$ có bao nhiêu giao điểm với đường thẳng $y = x^2$
A. 0 **B. 1**
C. 2 **D. 3**
- Câu 9:** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x-1}$. Biết đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m$, khi đó có bao nhiêu giá trị của m thỏa mãn
A. 0 **B. 1**
C. 2 **D. 3**
- Câu 10:** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{2x-1}$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 2mx$ tại điểm có hoành độ dương khi $m = \frac{8-3\sqrt{a}}{10}$, giá trị của a là
A. 2 **B. 4**
C. 6 **D. 8**

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 + mx(C)$. Giá trị m thỏa mãn đáp án nào sau đây để từ $A(1;0)$ kẻ đến đồ thị hàm số (C) được ba tiếp tuyến phân biệt.

A. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

B. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$.

D. $m = \frac{1}{3}$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - 1(C)$. Xác định m để từ $A(2;-1)$ kẻ đến đồ thị hàm số (C) hai tiếp tuyến song song với nhau, biết hoành độ tiếp điểm khác 0.

A. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

B. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

C. $m = 18$ hoặc $m = -2$.

D. $m = -18$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1(C)$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của m để kẻ được hai tiếp điểm tại điểm M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 1)x + m$.

A. 0

B. $m \in [0;1]$

C. $m \in \emptyset$.

D. $\forall m$.

Khi đó phương trình phải có hai nghiệm phân biệt $\Delta' = 3m^2 + 6 > 0$ với mọi m

Câu 14: Cho hàm số $y = 3x^3 - 3x^2 - 1(C)$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 3. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng $d: y = (9m^2 - 4)x$

A. $\pm \frac{7}{3}$

B. ± 1

C. ± 2 .

D. ± 3 .

Câu 15: Cho hàm số $y = -3x - x^3(C)$. Tìm trên đường thẳng $y = -2x$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

A. $M(-2;2), N(2;-2)$.

B. $M(1;-1), N(2;-2)$.

C. $M(-2;2), N(3;-3)$.

D. Không tồn tại.

Câu 16: Cho hàm số $y = 1 + x - x^2(C)$. Tìm trên đường thẳng $y = 1$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) , khi đó hoành độ tiếp điểm đó thỏa mãn điều kiện nào?

A. $a < 0 \cup a > 1$.

B. $a \in (0;1)$.

C. $a \in [1;2]$.

D. Tất cả đều sai.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Tìm trên trục tung các điểm $M(0;a)$ mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành. Khi đó điều kiện của a là

A. $a \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

B. $a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

C. $a \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

D. $a \in \left(-\frac{13}{12}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1} (C)$. Tìm trên trục tung các điểm $M(0; a)$ mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành. Khi đó điều kiện của a là

A. $a \in \left(-\frac{7}{9}; -\frac{1}{22}\right)$.

B. $a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

C. $a \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

D. $a \in \left(-\frac{13}{12}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = (|x|+2)^2 (|x|-2)^2 (C)$. Có bao nhiêu điểm trên trục hoành để có thể từ điểm đó kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 20: $\begin{cases} f(-2) = 16 + 8a = 0 \\ \Delta' = 4a^2 - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$ Cho hàm số $y = (|x|+3)^2 (|x|-3)^2 (C)$. Có bao nhiêu điểm trên trục hoành để có thể từ điểm đó kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m-3 (C_m)$. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: x-2y-4=0$

A. -2.

B. -1.

C. 0.

D. 4.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Giả sử đường thẳng $d: y = kx+m$ là tiếp tuyến của (C) , biết rằng d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O . Tổng $k+m$ có giá trị bằng

A. 1.

B. -1.

C. 3.

D. -3.

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 2x+m^2$ tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau

A. $\{2\}$.

B. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

C. $\{-1; 1\}$.

D. $\{-2; 2\}$.

Câu 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-4}{x+1}$ tại M có dạng $y = kx+m$. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $\Delta: 3x-2y+10=0$. Khi đó tổng $k+m$ có giá trị âm là

A. 11.

B. 4.

C. -8.

D. -1.

- Câu 5:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ tại M có dạng $y = kx + m$. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $\Delta: x - y + 19 = 0$. Khi đó, tổng $k - m$ có giá trị dương bằng
- A. 11. B. 4. C. 8. D. -1.
- Câu 6:** Cho hàm số $(C): y = \frac{-x+1}{2x+1}$. Giả sử đường thẳng $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của đồ thị đã cho và tiếp tuyến này đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục hoành. Tỉ số $\frac{k}{m}$ có giá trị bằng
- A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.
- Câu 7:** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x (C)$. Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$ một góc α sao cho $\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên có phương trình là
- A. $y = 9x; y = 9x - 32$. B. $y = 9x - 21; y = 9x + 7$.
C. $y = 9x; y = 9x + 32$. D. $y = 9x + 21; y = 9x - 7$.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết hoành độ tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $(7x-11).f'(x) = 10$
- A. $y = \frac{-2}{5}x + \frac{83}{10}$. B. $y = 9x - 21$.
C. $y = 9x$. D. $y = 9x - 7$.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là điểm giao thứ hai của Δ với (C) . Tính diện tích S của tam giác OAB , với O là gốc tọa độ.
- A. $S = 12$. B. $S = 37$. C. $S = 15$. D. $S = 24$.
- Câu 10:** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2} (C)$. Biết a, b là các giá trị nguyên dương sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Tính $a + b$.
- A. $a + b = 0$. B. $a + b = -1$.
C. $a + b = 2$. D. $a + b = 1$.
- Câu 11:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C) . Tìm giá trị lớn nhất của d
- A. $d_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $d_{\max} = \sqrt{5}$.
C. $d_{\max} = \sqrt{3}$. D. $d_{\max} = \sqrt{6}$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị (C) . Nếu điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$ có hoành độ âm và từ điểm M kẻ được duy nhất 1 tiếp tuyến tới đồ thị (C) thì tọa độ điểm M là
- A. $M(-2; 2), N(2; -2)$. B. $M(2; 5), N(1; 3)$.
C. $M(-2; 2), N(3; -3)$. D. $M(-2; 2), N(0; 0)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Nếu điểm M thuộc (C) cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 6 thì phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm M là

A. $M(-2;2), N(2;-2)$.

B. $M(-1;-2), N(3;2)$.

C. $M(-2;2), N(3;-3)$.

D. $M(-2;2), N(0;0)$.

Câu 14: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}(C)$ cách đều hai điểm $A(-2;4), B(4;-2)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là điểm giao thứ hai của Δ với (C) . Tính chu vi của tam giác OAB , với O là gốc tọa độ.

A. $\sqrt{26} + \sqrt{2426} + 2\sqrt{33}$.

B. $\sqrt{26} + \sqrt{2426} + \sqrt{733}$.

C. $\sqrt{26} + \sqrt{246} + 2\sqrt{733}$.

D. $\sqrt{26} + \sqrt{2426} + 2\sqrt{733}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{ax-b}(C)$. Biết a, b là các giá trị sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;2)$ vuông góc với đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 0$.

B. $a + b = -1$.

C. $a + b = 2$.

D. $a + b = 1$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{2x-6}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C) . Biết khoảng cách từ tâm đối xứng đến tiếp tuyến có dạng $\frac{|ax_0^2 + bx_0 + c|}{2\sqrt{25 + (x_0 - 2)^4}}$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm. Khi đó giá trị $a + b + c$ là

A. 67.

B. 55.

C. 60.

D. -64.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$ có hoành độ dương và từ điểm M kẻ được duy nhất 1 tiếp tuyến tới đồ thị (C) ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 1(C)$. Nếu điểm M thuộc (C) có hoành độ nguyên cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo thành một tam giác vuông tại M thì có bao nhiêu điểm thỏa mãn?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 20: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-2}{x-2}(C)$ cách đều hai điểm $A(-2;1), B(1;-2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

BÀI 44: BIÊN LUẬN SỐ TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Biên luận số tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến đồ thị hàm số

* Bước 1: Lập phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng

$$d: y = k(x - x_A) + y_A \quad (*)$$

* Bước 2: d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

* Bước 3: Số nghiệm của phương trình (*) thỏa mãn tập xác định là số tiếp tuyến của đồ thị hàm số

B. VÍ DỤ MINH HỌA**Câu 1:** Trên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành ?**A.0****B.1****C.2****D.3****Lời giải****Chọn D**Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị. Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên

$$y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm 1 \end{cases}. \text{ Vậy có 3 tiếp tuyến.}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 6x + 2$. Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm $A(1; -3)$ **A.0****B.1****C.2****D.3****Lời giải****Chọn C**Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 - 6 \\ y_0 = x_0^3 - 6x_0 + 2 \end{cases}$ Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -3)$ nên ta có:

$$-3 = (3x_0^2 - 6)(1 - x_0) + x_0^3 - 6x_0 + 2$$

$$\Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = 1 \end{cases}. \text{ Vậy có 2 tiếp tuyến kẻ được qua } A$$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2(C)$. Trên đường thẳng $d: y = 4$ có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .**A.0****B.1****C.2****D.3****Lời giải****Chọn D**Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 - 3 \\ y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 2 \end{cases}$ Gọi điểm $M(a; 4)$ thuộc đường thẳng d Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; 4)$ nên ta có:

$$4 = (3x_0^2 - 3)(a - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$$

$$\Leftrightarrow (3x_0^2 - 3)(a - x_0) + (x_0 + 2)(x_0 - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)[-2x_0^2 + x_0(3a - 2) + 3a - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ f(x_0) = -2x_0^2 + x_0(3a - 2) + 3a - 2 = 0(1) \end{cases}$$

Để kẻ được hai tiếp tuyến khi phương trình (1) có nghiệm kép hoặc có 1 nghiệm khác 1

Xét phương trình $-2x_0^2 + x_0(3a-2) + 3a-2 = 0(1)$ với $\Delta = (3a-2)(3a+4)$

TH1: Phương trình (1) có nghiệm kép khác 1

$$\Rightarrow \Delta = (3a-2)(3a+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{2-3a}{-2} = 0 \\ a = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{2-3a}{-2} = -3 \end{cases} \text{ thỏa mãn}$$

TH2: Phương trình (1) có một nghiệm là 1

$$f(1) = 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Vậy có 3 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hoành độ $x = 1$ có bao nhiêu giao điểm với đường thẳng $y = x^2 + \frac{4}{3}$

A.0

B.1

C.2

D.3.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Đạo hàm hai vế đẳng thức $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ ta có

$$3f(x).f'(x) + 6f'(x) = -3$$

$$\text{Thay } x_0 = 1 \text{ ta có hệ } \begin{cases} 3f(1)f'(1) + 6f'(1) = -3 \\ [f(1)]^3 + 6f(1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow f(1) = 1; f'(1) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy tiếp tuyến dạng } y = -\frac{1}{3}(x-1) + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy số giao của } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ và } y = x^2 + \frac{4}{3} \text{ là } 2$$

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x + m$ khi:

A. $m = 2\sqrt{2}$.

B. $m \neq 1$.

C. $m = \pm 2\sqrt{2}$

D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Để hai đồ thị tiếp xúc nhau khi:

$$\begin{cases} f_{(x)} = g_{(x)} \\ f'_{(x)} = g'_{(x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x-1} = 2x+m \\ \frac{1}{(x-1)^2} = 2 \end{cases} \quad \text{với } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x-1} = 2x+m \\ x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2\sqrt{2} \\ m = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy $m = \pm 2\sqrt{2}$ thỏa mãn.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{5x^3}{6} + mx - \frac{2m}{3}(C)$. Xác định m để từ $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ kẻ đến đồ thị hàm số (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau:

A. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$. B. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$. D. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{5x^2}{2} + m$

$$\Rightarrow f'_{(x_0)} = \frac{5}{2}x_0^2 + m$$

Phương trình tiếp tuyến qua $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ nên:

$$0 = \left(\frac{5}{2}x_0^2 + m\right)\left(\frac{2}{3} - x_0\right) + \frac{5x_0^3}{6} + mx_0 - \frac{2m}{3}$$

$$-\frac{5x_0^3}{3} + \frac{5x_0^2}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f'_{(0)} \cdot f'_{(1)} = m\left(m + \frac{5}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow m = -2; m = -\frac{1}{2}$$

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2(C)$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + m$

A. 0

B. ± 1

C. ± 2

D. ± 3

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Tại hoành độ $x_0 = 1$ ta có hệ số góc tiếp tuyến là $f'(1) = -3$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + m$

nên $f'(1) = -3 = m^2 - 4 \Leftrightarrow m = \mp 1$

Câu 8: Cho hàm số $y = 3x - x^3 (C)$. Tìm trên đường thẳng $y = -x$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

A. $M(-2; 2), N(2; -2)$. B. $M(1; -1), N(2; -2)$.

C. $M(-2; 2), N(3; -3)$. D. $M(-2; 2), N(0; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = -3x_0^2 + 3 \\ y_0 = -x_0^3 + 3x_0 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a; -a)$ thuộc đường thẳng $y = -x$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; -a)$ nên ta có :

$$-a = (-3x_0^2 + 3)(a - x_0) - x_0^3 + 3x_0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3ax^2 + 4a = 0 \quad (1)$$

Số tiếp tuyến tương ứng là số nghiệm của phương trình (1)

Xét hàm số $y = 2x^3 - 3ax^2 + 4a$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm khi $y_C \cdot y_{CT} = 0$

$$\text{Ta có: } y' = 6x^2 - 6ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 4a \\ x = a; y = -a^3 + 4a \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} a \neq 0 \\ 4a(-a^3 + 4a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 2 \Rightarrow M(-2; 2), N(2; -2)$$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1} (C)$. Tìm trên trục tung các điểm $M(0; a)$ mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành. Khi đó điều kiện của a là

A. $a \in (-1; +\infty) \setminus \{1\}$. B. $a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

C. $a \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. D. $a \in \left(-\frac{13}{12}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = \frac{-3}{(x_0 - 1)^2} \\ y_0 = \frac{x_0 + 2}{x_0 - 1} \end{cases}$

Gọi điểm $M(0; a)$ thuộc đường thẳng $x = 0$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(0; a)$ nên ta có : $a = \frac{3x_0}{(x_0 - 1)^2} + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 1}$

Xét phương trình $(a - 1)x^2 - 2x(a + 2) + 2 + a = 0$ (1) với $x \neq 1$

Gọi hoành độ tiếp điểm lần lượt là $A\left(x_1; \frac{x_1 + 2}{x_1 - 1}\right), B\left(x_2; \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1}\right)$

Theo giả thiết ta có điều kiện $\begin{cases} a \neq 1 \\ f(1) \neq 0(l) \\ \Delta > 0 \\ \frac{x_1 + 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a + 6 > 0 \\ \frac{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-2; +\infty) \setminus \{1\} \\ \frac{2+a}{a-1} + \frac{4a+8}{a-1} + 4 \\ \frac{2+a}{a-1} - \frac{2a+4}{a-1} + 1 \end{cases} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-2; +\infty) \setminus \{1\} \\ \frac{9a+6}{-3} < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\frac{13}{12}; +\infty\right) \setminus \{1\} \\ a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Câu 10: Cho hàm số $y = (|x| + 1)^2 (|x| - 1)^2$ (C). Có bao nhiêu điểm trên trục hoành để có thể từ điểm đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $y = (|x|+1)^2 (|x|-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 \\ y_0 = x_0^4 - 2x_0^2 + 1 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a; 0)$ thuộc trục hoành

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; 0)$ nên ta có : $0 = (4x_0^3 - 4x_0)(a - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 + 1$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 1)(3x_0^2 - 4ax_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ 3x_0^2 - 4ax_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 1 = 0$ (1)

TH1: Phương trình (1) có một nghiệm kép khác ± 1

$$\Delta' = 4a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

TH2: Phương trình (1) có một nghiệm là 1 và nghiệm còn lại khác -1

$$\begin{cases} f(1) = 4 - 4a = 0 \\ \Delta' = 4a^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

TH3: Phương trình (1) có một nghiệm là -1 và nghiệm còn lại khác 1

$$\begin{cases} f(-1) = 4 + 4a = 0 \\ \Delta' = 4a^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: Trên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành ?

A.0

B.1

C.2.

D.3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$

Câu 2: Trên đồ thị hàm số $y = -x^3 - x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành ?

A.0

B.1

C.2

D.3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -\frac{2}{3}$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 6x$. Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm $A(1; -3)$

A.0

B.1

C.2.

D.3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6 \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 - 6$

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 - 6 \\ y_0 = x_0^3 - 6x_0 \end{cases}$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm A nên ta có

$$-1 = (3x_0^2 - 6)(1 - x_0) + x_0^3 - 6x_0$$

$$\Leftrightarrow 5 = -2x_0^3 \Rightarrow 1 \text{ nghiệm}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2$. Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm $A(1; -3)$

A.0

B.1

C.2.

D.3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 12x^3 - 12x \Rightarrow y'(x_0) = 12x_0^3 - 12x_0$

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 12x_0^3 - 12x_0 \\ y_0 = 3x_0^4 - 6x_0^2 \end{cases}$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm A nên ta có

$$-3 = (12x_0^3 - 12x_0)(1 - x_0) + 3x_0^4 - 6x_0^2$$

$$\Leftrightarrow -9x_0^4 + 12x_0^3 + 6x_0^2 - 12x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x (C)$. Trên đường thẳng $d : y = -2$ có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A.0

B.1

C.2.

D.3

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 - 3 \\ y_0 = x_0^3 - 3x_0 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a; -2)$ thuộc đường thẳng $y = -2$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; -2)$ nên ta có :

$$-2 = (3x_0^2 - 3)(a - x_0) + x_0^3 - 3x_0$$

Xét phương trình $-2 = (3x^2 - 3)(a - x) + x^3 - 3x$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x(a-2) + 3a+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f(x) = 2x^2 + 3x(a-2) + 3a+2 = 0 \end{cases} \quad \text{Từ điểm } M \text{ kẻ}$$

được đúng hai tiếp tuyến khi $2x^2 + 3x(a-2) + 3a+2 = 0$ thỏa mãn

$$\text{TH1: } \Delta = 9(a-2)^2 - 8(3a+2) = 9a^2 - 60a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{TH2: } f(1) = 6a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2 (C)$. Trên đường thẳng $d : x = 1$ có bao nhiêu điểm có tung độ nguyên mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A.0

B.1

C.2.

D.3

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 \\ y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 2 \end{cases}$

Gọi điểm $M(1; a)$ thuộc đường thẳng $d : x = 1$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(1; a)$ nên ta có :

$$a = (3x_0^2 - 6x_0)(1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$$

Xét phương trình $a = -2x^3 + 9x^2 - 9x + 2$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đường thẳng $\begin{cases} y = a \\ y = -2x^3 + 9x^2 - 9x + 2 \end{cases}$

Xét hàm số $y = -2x^3 + 9x^2 - 9x + 2 \Rightarrow y' = -6x^2 + 18x - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_{CT} \approx 1,05 \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_C \approx -1,55 \end{cases}$$

Vậy để kẻ được 3 tiếp tuyến khi $a \in (y_C; y_{CT})$ do đó có 3 điểm có tung độ nguyên.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^2 + 6f(x) = -3x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hoành độ $x = 1$ có bao nhiêu giao điểm với đường thẳng $y = x^2 + \frac{4}{3}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến dương.

A.0

B.1

C.2.

D.3.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Ta có: $[f(x)]^2 + 6f(x) = -3x + 10 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x) = -3$

Vậy với $x = 1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} [f(1)]^2 + 6f(1) = 7 \\ 2f(1) \cdot f'(1) + 6f'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow f'(1) = -\frac{3}{8} \\ f(1) = -7 \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến $y = \frac{3}{8}(x - 1) - 7 = \frac{3}{8}x - \frac{59}{8}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{3}{8}x - \frac{59}{8} = x^2 + \frac{4}{3} \Rightarrow$ vô nghiệm

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^3 + 6f(x) = -7x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hoành độ $x = 2$ có bao nhiêu giao điểm với đường thẳng $y = x^2$

A.0

B.1

C.2

D.3.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Ta có: $3[f(x)]^2 f'(x) + 6f'(x) = -7$

Vậy với $x = 2$ ta có hệ

$$\begin{cases} [f(2)]^3 + 6f(2) = -7 \\ 3[f(2)]^2 f'(2) + 6f'(2) = -7 \end{cases} \Leftrightarrow f(2) = -1 \Rightarrow f'(2) = -\frac{7}{9}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{7}{9}(x-2)-1 = -\frac{7}{9}x + \frac{5}{9}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-\frac{7}{9}x + \frac{5}{9} = x^2 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{229}}{18}$

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x-1}$. Biết đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m$, khi đó có

bao nhiêu giá trị của m thỏa mãn

A. 0 .

B. 1.

C. 2

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m$ khi $\begin{cases} 1 = \frac{2}{(x-1)^2} \\ x + m = \frac{x-3}{x-1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{2}{(x-1)^2} \\ x + m = \frac{x-3}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ giá trị } m$

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{2x-1}$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 2mx$ tại điểm có

hoành độ dương khi $m = \frac{8-3\sqrt{a}}{10}$, giá trị của a là

A. 2 .

B. 4 .

C. 6

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m$ khi

$\begin{cases} 2m = \frac{4}{(2x-1)^2} \\ 2mx = \frac{2x-3}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x(2x-1)} = \frac{4}{(2x-1)^2} \\ m = \frac{2x-3}{2x(2x-1)} \end{cases}$

Xét phương trình $\frac{2x-3}{x(2x-1)} = \frac{4}{(2x-1)^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$

Với $x = \frac{3+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow m = \frac{8-3\sqrt{6}}{10} \Rightarrow a = 6$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 + mx(C)$. Giá trị m thỏa mãn đáp án nào sau đây để từ $A(1;0)$ kẻ đến đồ thị hàm số (C) được ba tiếp tuyến phân biệt.

A. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$. B. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$. D. $m = \frac{1}{3}$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + m \Rightarrow f'_{(x_0)} = 3x_0^2 + m$ Phương trình tiếp tuyến qua $A(1;0)$ nên:

$$0 = (3x_0^2 + m)(1 - x_0) + x_0^3 + mx_0 \Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2 = -m$$

$$\text{Xét hàm số } y = -2x^3 + 3x^2 \Rightarrow y' = -6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 1; y = 1 \end{cases}$$

Vậy để kẻ được ba tiếp tuyến khi $m \in (0;1)$

Câu 12: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - 1(C)$. Xác định m để từ $A(2;-1)$ kẻ đến đồ thị hàm số (C) hai tiếp tuyến song song với nhau, biết hoành độ tiếp điểm khác 0.

A. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$. **B.** $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

C. $m = 18$ hoặc $m = -2$. **D.** $m = -18$ ✓

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx$

$$\Rightarrow f'_{(x_0)} = 3x_0^2 + 2mx_0$$

Phương trình tiếp tuyến qua $A(2;-1)$ nên:

$$-1 = (3x_0^2 + 2mx_0)(2 - x_0) + x_0^3 + mx_0^2 - 1 \Leftrightarrow -2x_0^2 + (6 - m)x_0 + 4m = 0 \quad (1)$$

Để kẻ được hai tiếp tuyến song song với nhau khi $f'_{(a)} = 3a^2 + 2ma = f'_{(b)} = 3b^2 + 2mb$

$$\Leftrightarrow 3(a + b) + 2m = 0 \text{ với } a, b \text{ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1)}$$

$$\text{Áp dụng định lý Viète ta có: } a + b = \frac{6 - m}{2}$$

$$\text{Do đó: } 3(a + b) + 2m = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{6 - m}{2} + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -18$$

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1(C)$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của m để kẻ được hai tiếp điểm tại điểm M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 1)x + m$.

A. 0

B. $m \in [0;1]$

C. $m \in \emptyset$.

D. $\forall m$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = m^2 - 1$$

Khi đó phương trình phải có hai nghiệm phân biệt $\Delta' = 3m^2 + 6 > 0$ với mọi m

Câu 14: Cho hàm số $y = 3x^3 - 3x^2 - 1(C)$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 3. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng $d: y = (9m^2 - 4)x$

A. $\pm \frac{7}{3}$

B. ± 1

C. ± 2

D. ± 3

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = 9x^2 - 6x \Rightarrow y'(3) = 45 = 9m^2 - 4 \Leftrightarrow m = \pm \frac{7}{3}$

Câu 15: Cho hàm số $y = -3x - x^3 (C)$. Tìm trên đường thẳng $y = -2x$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

A. $M(-2; 2), N(2; -2)$. B. $M(1; -1), N(2; -2)$. C. $M(-2; 2), N(3; -3)$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = -3x_0^2 - 3 \\ y_0 = -x_0^3 - 3x_0 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a; -2a)$ thuộc đường thẳng $y = -2x$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; -2a)$ nên ta có :

$$-2a = (-3x_0^2 - 3)(a - x_0) - x_0^3 - 3x_0 \Leftrightarrow a = \frac{2x_0^3}{1 + 3x_0^2}$$

Xét hàm số $y = \frac{2x^3}{1 + 3x^2}$ và đường thẳng $y = a$

Ta có $y' = \frac{6x^2 + 6x^4}{(1 + 3x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Do $y' \geq 0$ với mọi x nên hàm số luôn đồng biến, do đó số tiếp tuyến kẻ được là duy nhất

Câu 16: Cho hàm số $y = 1 + x - x^2 (C)$. Tìm trên đường thẳng $y = 1$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) , khi đó hoành độ tiếp điểm đó thỏa mãn điều kiện nào?

A. $a < 0 \cup a > 1$. B. $a \in (0; 1)$. C. $a \in [1; 2]$. D. Tất cả đều sai.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = -2x_0 + 1 \\ y_0 = -x_0^2 + x_0 + 1 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a; 1)$ thuộc đường thẳng $y = 1$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; 1)$ nên ta có :

$$1 = (-2x_0 + 1)(a - x_0) - x_0^2 + x_0 + 1 \Leftrightarrow a = \frac{x_0^2}{2x_0 - 1}$$

Xét phương trình $x^2 - 2ax + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \Delta' = a^2 - a > 0 \\ \frac{1}{4} - a + a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < 0 \cup a > 1$$

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Tìm trên trục tung các điểm $M(0; a)$ mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành. Khi đó điều kiện của a là

A. $a \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. **B.** $a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

C. $a \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **D.** $a \in \left(-\frac{13}{12}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với
$$\begin{cases} f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} \\ y_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} \end{cases}$$

Gọi điểm $M(0; a)$ thuộc đường thẳng $x = 0$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(0; a)$ nên ta có : $a = \frac{2x_0}{(x_0 - 1)^2} + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$

Xét phương trình $(a - 1)x^2 - 2x(a + 1) + 1 + a = 0(1)$ với $x \neq 1$

Gọi hoành độ tiếp điểm lần lượt là $A\left(x_1; \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}\right), B\left(x_2; \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}\right)$

Theo giả thiết ta có điều kiện
$$\begin{cases} a \neq 1 \\ f(1) \neq 0(1) \\ \Delta > 0 \\ \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 2a + 2 > 0 \\ \frac{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-1; +\infty) \setminus \{1\} \\ \frac{1+a}{a-1} + \frac{2a+2}{a-1} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-1; +\infty) \setminus \{1\} \\ \frac{4a+2}{-3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-1; +\infty) \setminus \{1\} \\ a \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$$

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ (C). Tìm trên trục tung các điểm $M(0; a)$ mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành. Khi đó điều kiện của a là

A. $a \in \left(-\frac{7}{9}; -\frac{1}{22}\right)$. B. $a \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.
C. $a \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. D. $a \in \left(-\frac{13}{12}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = \frac{-5}{(2x_0-1)^2} \\ y_0 = \frac{x_0+2}{2x_0-1} \end{cases}$

Gọi điểm $M(0; a)$ thuộc đường thẳng $x = 0$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(0; a)$ nên ta có : $a = \frac{2x_0}{(2x_0-1)^2} + \frac{x_0+2}{2x_0-1}$

Xét phương trình $(4a-2)x^2 - x(4a+5) + 2+a = 0$ (1) với $x \neq 1$

Gọi hoành độ tiếp điểm lần lượt là $A\left(x_1; \frac{x_1+2}{2x_1-1}\right), B\left(x_2; \frac{x_2+2}{2x_2-1}\right)$

Theo giả thiết ta có điều kiện $\begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0(l) \\ \Delta > 0 \\ \frac{x_1+2}{2x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{2x_2-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ 12a^2 + 34a + 29 > 0(l) \\ \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1} < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ \frac{5+4a}{4a-2} + 2 \cdot \frac{a+2}{4a-2} + 4 < 0 \\ 4 \cdot \frac{5+4a}{4a-2} - 2 \cdot \frac{a+2}{4a-2} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ \frac{22a+1}{18a+14} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ a \in \left(-\frac{7}{9}; -\frac{1}{22}\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{7}{9}; -\frac{1}{22}\right)$$

Câu 19: Cho hàm số $y = (|x|+2)^2 (|x|-2)^2 (C)$. Có bao nhiêu điểm trên trục hoành để có thể từ điểm đó kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A.1.

B.2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn D

Ta có : $y = (|x|+2)^2 (|x|-2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x-x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 4x_0^3 - 16x_0 \\ y_0 = x_0^4 - 8x_0^2 + 16 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a;0)$ thuộc trục hoành

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a;0)$ nên ta có : $0 = (4x_0^3 - 16x_0)(a-x_0) + x_0^4 - 8x_0^2 + 16$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 4)(3x_0^2 - 4ax_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 2 \\ 3x_0^2 - 4ax_0 + 4 = 0 \end{cases} \text{ Xét phương trình}$$

$$f(x) = 3x^2 - 4ax + 4 = 0 \quad (1)$$

TH1: Phương trình (1) có một nghiệm kép khác ± 2

$$\Delta' = 4a^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

TH2: Phương trình (1) có một nghiệm là 2 và nghiệm còn lại khác -2

$$\begin{cases} f(2) = 16 - 8a = 0 \\ \Delta' = 4a^2 - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$$

TH3: Phương trình (1) có một nghiệm là -2 và nghiệm còn lại khác 2

Câu 20: $\begin{cases} f(-2) = 16 + 8a = 0 \\ \Delta' = 4a^2 - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$ Cho hàm số $y = (|x|+3)^2 (|x|-3)^2 (C)$. Có bao nhiêu điểm trên

trục hoành để có thể từ điểm đó kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A.1.

B.2

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $y = (|x|+3)^2 (|x|-3)^2 = x^4 - 18x^2 + 81$

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 4x_0^3 - 36x_0 \\ y_0 = x_0^4 - 18x_0^2 + 81 \end{cases}$

Gọi điểm $M(a; 0)$ thuộc trục hoành

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; 0)$ nên ta có : $0 = (4x_0^3 - 36x_0)(a - x_0) + x_0^4 - 18x_0^2 + 81$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 9)(3x_0^2 - 4ax_0 + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 3 \\ 3x_0^2 - 4ax_0 + 9 = 0 \end{cases} \text{ Xét phương trình}$$

$$f(x) = 3x^2 - 4ax + 9 = 0 \quad (1)$$

TH1: Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Delta' = 4a^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

TH2: Phương trình (1) hai nghiệm là 3 và -3

$$\begin{cases} f(3) = 36 - 12a = 0 \\ f(-3) = 36 + 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 3 \text{ loại}$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m - 3$ (C_m). Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: x - 2y - 4 = 0$

A. -2.

B. -1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có: } y' = -3x^2 + 6x + 2m - 1 = -3(x-1)^2 + 2m + 2$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -3(x_0 - 1)^2 + 2m + 2 \leq 2m + 2$$

$$\text{Do đó hệ số góc lớn nhất là } k = 2m + 2$$

$$\text{Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng } k \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow 2m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = -2$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Giả sử đường thẳng $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của (C), biết rằng d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O . Tổng $k + m$ có giá trị bằng

A. 1.

B. -1.

C. 3.

D. -3.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Do tam giác } OAB \text{ cân tại } O \text{ nên } |k| = \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=1 \Rightarrow x=-1; y=1 \\ 2x+3=-1 \Rightarrow x=-2; y=0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = -1; y_0 = 1 \Rightarrow y = -1(x+1) + 1 = -x$$

$$\text{Với } x_0 = -2; y_0 = 0 \Rightarrow y = -1(x+2) = -x-2 \Rightarrow k+m = -3$$

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 2x + m^2$ tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau

A. $\{2\}$. B. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. C. $\{-1; 1\}$. D. $\{-2; 2\}$.**Lời giải****Chọn D**

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } \frac{2x+3}{x+1} = 2x + m^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + m^2x + m^2 - 3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi } \begin{cases} \Delta = m^4 - 2m^2 + 6 > 0 \\ f(-1) = -1 \neq 0 \end{cases} \text{ luôn đúng}$$

Gọi hoành độ hai tiếp điểm là x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1)

$$\text{Ta có: } k_1 = \frac{-1}{(x_1+1)^2} \text{ và } k_2 = \frac{-1}{(x_2+1)^2} \text{ là hai hệ số góc của hai tiếp điểm}$$

Do hai tiếp tuyến song song $\frac{-1}{(x_2+1)^2} = \frac{-1}{(x_1+1)^2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2 = 0$

Áp dụng định lí viết ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{m^2}{2}$

Vậy $-\frac{m^2}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

- Câu 4:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-4}{x+1}$ tại M có dạng $y = kx + m$. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 2y + 10 = 0$. Khi đó tổng $k + m$ có giá trị âm là
- A. 11. B. 4. C. -8. D. -1

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \frac{6}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{6}{(x_0+1)^2}$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 2y + 10 = 0$ nên

$\frac{6}{(x_0+1)^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+1=2 \\ x_0+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1; y_0=-1 \\ x_0=-3; y_0=5 \end{cases}$ Với

$x_0=1; y_0=-1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x-1) - 1 = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow k + m = -1$

$x_0=-3; y_0=5 \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x+3) + 5 = \frac{3}{2}x + 14 \Rightarrow k + m > 0$ loại

- Câu 5:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ tại M có dạng $y = kx + m$. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $\Delta: x - y + 19 = 0$. Khi đó, tổng $k - m$ có giá trị dương bằng
- A. 11. B. 4. C. 8. D. -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{4}{(x_0+1)^2}$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: x - y + 19 = 0$ nên

$\frac{4}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+1=2 \\ x_0+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1; y_0=-1 \\ x_0=-3; y_0=2 \end{cases}$

Với $x_0=1; y_0=-1 \Rightarrow y = (x-1) - 1 = x - 2 \Rightarrow k + m = -1$

$x_0=-3; y_0=2 \Rightarrow y = (x+3) + 2 = x + 7 \Rightarrow k + m = 8$ loại

- Câu 6:** Cho hàm số $(C): y = \frac{-x+1}{2x+1}$. Giả sử đường thẳng $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của đồ thị đã cho và tiếp tuyến này đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục hoành. Tỉ số $\frac{k}{m}$ có giá trị bằng
- A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

Lời giải

Chọn A

Tiếp cận đứng $x = -\frac{1}{2}$ suy ra giao điểm với trục hoành là $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Vì tiếp tuyến đi qua giao điểm của đường tiếp cận và trục hoành nên $0 = -\frac{k}{2} + m \Rightarrow \frac{k}{m} = 2$

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x (C)$. Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$ một góc α sao cho $\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên có phương trình là

A. $y = 9x; y = 9x - 32$ **B.** $y = 9x - 21; y = 9x + 7$.

C. $y = 9x; y = 9x + 32$ **D.** $y = 9x + 21; y = 9x - 7$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 - 12x_0 + 9 \\ y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{41}{16} \Rightarrow \tan \alpha = \pm \frac{5}{4}$$

Đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$ có hệ số góc là $k = -1$ nên ta có:

$$|\tan \alpha| = \left| \frac{f'(x_0) - k}{1 + f'(x_0) \cdot k} \right| \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \left| \frac{f'(x_0) + 1}{1 - f'(x_0)} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 9 \\ f'(x_0) = \frac{1}{9} \end{cases} (I)$$

$$\text{Với } f'(x_0) = 9 = 3x_0^2 - 12x_0 + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0; y_0 = 0 \\ x_0 = 4; y_0 = 4 \end{cases}$$

Khi đó ta có hai tiếp tuyến là $y = 9x; y = 9x - 32$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết hoành độ tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $(7x-11).f'(x) = 10$

A. $y = \frac{-2}{5}x + \frac{83}{10}$ **B.** $y = 9x - 21$.

C. $y = 9x$ **D.** $y = 9x - 7$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = \frac{-10}{(x_0 - 3)^2} \\ y_0 = \frac{3x_0 + 1}{x_0 - 3} \end{cases}$$

Do hoành độ tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $(7x-11).f'(x) = 10$ nên

$$f'(x_0) = \frac{10}{7x_0 - 11} = \frac{-10}{(x_0 - 3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3(l) \\ x_0 = 7 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = 7 \text{ ta có } \begin{cases} f'(x_0) = -\frac{2}{5} \\ y_0 = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-2}{5}x + \frac{83}{10}$$

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là điểm giao thứ hai của Δ với (C) . Tính diện tích S của tam giác OAB , với O là gốc tọa độ.

A. $S = 12$.

B. $S = 37$.

C. $S = 15$.

D. $S = 24$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f(x_0) = x_0^3 + 3x_0^2 + 1 = 5 \\ f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 4$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } 9x - 4 = x^3 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \Rightarrow B(5; -49) \\ x = 1 \Rightarrow A(1; 5) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{OA}(1; 5) \\ \overline{OB}(5; -49) \end{cases} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} |-49 - 25| = 37$$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ (C). Biết a, b là các giá trị nguyên dương sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 0$.

B. $a + b = -1$.

C. $a + b = 2$.

D. $a + b = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y'(1) = \frac{-2-b}{(a-2)^2} = -3 \text{ do tiếp tuyến song song với đường thẳng } d: 3x + y - 4 = 0$$

$$\text{Mà đồ thị đi qua điểm } M(1; -2) \text{ nên } -2 = \frac{1+b}{a-2}$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2 + ab = 3(a-2)^2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; a = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\text{Với } a = 2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a + b = 1$$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C) . Tìm giá trị lớn nhất của d

$$\text{A. } d_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{B. } d_{\max} = \sqrt{5}.$$

$$\text{C. } d_{\max} = \sqrt{3}.$$

$$\text{D. } d_{\max} = \sqrt{6}.$$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = \frac{-3}{(x_0 - 2)^2} \\ y_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x + y(x_0 - 2)^2 - x_0^2 - 2x_0 + 2 = 0$$

Hai đường tiệm cận lần lượt là $x = 2; y = 1 \Rightarrow I(2; 1)$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } d_{(I; \Delta)} &= \frac{|6 + (x_0 - 2)^2 - x_0^2 - 2x_0 + 2|}{\sqrt{9 + (x_0 - 2)^4}} = \frac{6|x_0 - 2|}{\sqrt{9 + (x_0 - 2)^4}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0 - 2)^2} + (x_0 - 2)^2}} \leq \frac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị (C) . Nếu điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$ có hoành độ âm và từ điểm M kẻ được duy nhất 1 tiếp tuyến tới đồ thị (C) thì tọa độ điểm M là **A.** $M(-2; 2), N(2; -2)$. **B.** $M(2; 5), N(1; 3)$. **C.** $M(-2; 2), N(3; -3)$. **D.** $M(-2; 2), N(0; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng } y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2} \\ y_0 = \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1} \end{cases}$$

Gọi điểm $M(a; 2a+1)$ thuộc $d: 2x - y + 1 = 0$ Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; 2a+1)$ nên ta có :

$$2a + 1 = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2}(a - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$$

$$ax_0^2 - 2(a+2)x_0 + 3a + 2 = 0$$

$$\text{Xét phương trình } f(x) = ax^2 - 2(a+2)x + 3a + 2 = 0 \quad (1)$$

TH1: Phương trình (1) có nghiệm kép khác 1

$$\Delta' = -2a^2 + 2a + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1(l) \\ a = 2 \Rightarrow M(2;5) \end{cases}$$

TH2: Phương trình (1) có một nghiệm là 1

$$\{f(1) = 2a = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow M(1;3)$$

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Nếu điểm M thuộc (C) cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 6 thì phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm M là

A. $M(-2;2), N(2;-2)$. **B.** $M(-1;-2), N(3;2)$.

C. $M(-2;2), N(3;-3)$. **D.** $M(-2;2), N(0;0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm $M(a; a^3 - 3a^2 + 2) \in (C)$

Ta có: $y' = 3x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0;2) \\ x = 2 \Rightarrow B(2;-2) \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} \overline{AM} = (a; a^3 - 3a^2) \\ \overline{AB} = (2; -4) \end{cases} \Rightarrow S_{AMB} = \frac{1}{2} |-4a - 2a^3 + 6a^2| = 6$

Câu 14: $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a^2 + 2a = 6 \\ a^3 - 3a^2 + 2a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow M(3;2) \\ a = -1 \Rightarrow M(-1;-2) \end{cases}$ Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị

$y = \frac{2x-1}{x-1}(C)$ cách đều hai điểm $A(-2;4), B(4;-2)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $\begin{cases} f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} \\ y_0 = \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} \end{cases}$

$\Rightarrow x + y(x_0^2 - 2x_0 - 1) + 2x_0 - 1 = 0 (\Delta)$

Do tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2;4), B(4;-2)$ nên

TH1: A, B cùng phía khi đó: $\overline{AB} \cdot \vec{n}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 6 - 6(x_0^2 - 2x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

TH2: A, B khác phía khi đó trung điểm $I(1;1)$ của đoạn thẳng AB thuộc (Δ)

$\Rightarrow 1 + x_0^2 - 2x_0 - 1 + 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là điểm giao thứ hai của Δ với (C) . Tính chu vi của tam giác OAB , với O là gốc tọa độ.

A. $\sqrt{26} + \sqrt{2426} + 2\sqrt{33}$.

B. $\sqrt{26} + \sqrt{2426} + \sqrt{733}$.

C. $\sqrt{26} + \sqrt{246} + 2\sqrt{733}$.

D. $\sqrt{26} + \sqrt{2426} + 2\sqrt{733}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f(x_0) = x_0^3 + 3x_0^2 + 1 = 5 \\ f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 4$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } 9x - 4 = x^3 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \Rightarrow B(5; -49) \\ x = 1 \Rightarrow A(1; 5) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } OA = \sqrt{26}, OB = \sqrt{2426}, BC = 2\sqrt{733}$$

$$\text{Vậy chu vi tam giác } OBC \text{ là } \sqrt{26} + \sqrt{2426} + 2\sqrt{733}$$

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{ax-b}(C)$. Biết a, b là các giá trị sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;2)$ vuông góc với đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 0$.

B. $a + b = -1$.

C. $a + b = 2$.

D. $a + b = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y'(1) = \frac{-b-a}{(a-b)^2} \cdot (-1) = -1 \text{ do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng } d: x + y - 4 = 0$$

$$\text{Mà đồ thị đi qua điểm } M(1;2) \text{ nên } 2 = \frac{2}{a-b} \Leftrightarrow a - b = 1$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{2x-6}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C) . Biết khoảng cách từ tâm đối xứng đến tiếp tuyến có

$$\text{dạng } \frac{|ax_0^2 + bx_0 + c|}{2\sqrt{25 + (x_0 - 2)^4}}, \text{ với } x_0 \text{ là hoành độ tiếp điểm. Khi đó giá trị } a + b + c \text{ là}$$

A. 67.

B. 55.

C. 60.

D. -64.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = \frac{-5}{(x_0 - 3)^2} \\ y_0 = \frac{3x_0 + 1}{2x_0 - 6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x + y(x_0 - 3)^2 - 6x_0^2 + 11x_0 + 6 = 0 \quad (\Delta)$$

$$\text{Hai đường tiệm cận lần lượt là } x = 3; y = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(3; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Khi đó } d_{(I; \Delta)} = \frac{\left|15 + \frac{3}{2}(x_0 - 3)^2 - 6x_0^2 + 11x_0 + 6\right|}{\sqrt{25 + (x_0 - 3)^4}} = \frac{|9x_0^2 - 4x_0 - 69|}{2\sqrt{25 + (x_0 - 2)^4}}$$

$$\Rightarrow a + b + c = -64$$

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$

có hoành độ dương và từ điểm M kẻ được duy nhất 1 tiếp tuyến tới đồ thị (C) ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng } y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = \frac{-8}{(2x_0 - 1)^2} \\ y_0 = \frac{2x_0 + 3}{2x_0 - 1} \end{cases}$$

Gọi điểm $M(a; a+1)$ thuộc $d: x - y + 1 = 0$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(a; a+1)$ nên ta có :

$$a + 1 = \frac{-8}{(2x_0 - 1)^2}(a - x_0) + \frac{2x_0 + 3}{2x_0 - 1}$$

$$4ax_0^2 - 4(a+4)x_0 + 9a + 4 = 0$$

$$\text{Xét phương trình } f(x) = 4ax^2 - 4(a+4)x + 9a + 4 = 0 \quad (1)$$

TH1: Phương trình (1) có nghiệm kép khác $\frac{1}{2}$

$$\Delta' = 4a^2 + 23a + 60 = 0 \Rightarrow l$$

TH2: Phương trình (1) có một nghiệm là $\frac{1}{2}$

$$\left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) = a - 2a - 8 + 9a + 4 = 0 \Leftrightarrow 5a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \right.$$

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 1(C)$. Nếu điểm M thuộc (C) có hoành độ nguyên cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo thành một tam giác vuông tại M thì có bao nhiêu điểm thỏa mãn?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm $M(a; a^3 - a^2 + 1) \in (C)$

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0; 1) \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow B\left(\frac{2}{3}; \frac{23}{27}\right) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-a; -a^3 + a^2) \\ \overrightarrow{MB} = \left(\frac{2}{3} - a; \frac{-4}{27} - a^3 + a^2\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a - \frac{2}{3}\right) + (-a^3 + a^2)\left(\frac{-4}{27} - a^3 + a^2\right) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ thỏa mãn}$$

Câu 20: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-2}{x-2}(C)$ cách đều hai điểm $A(-2; 1), B(1; -2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng } y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ với } \begin{cases} f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 2)^2} \\ y_0 = \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + y(x_0^2 - 4x_0 + 4) - 2x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0 (\Delta)$$

Do tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2; 1), B(1; -2)$ nên

$$\text{TH1: } A, B \text{ cùng phía khi đó: } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 6 - 3(x_0^2 - 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{TH2: } A, B \text{ khác phía khi đó trung điểm } I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ của đoạn thẳng } AB \text{ thuộc } (\Delta)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}x_0^2 - 2x_0 + 2 - 2x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$