

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) .

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f'(x_0) = 5x_0 + 7$.

Câu 2. (1,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2 = 0$.
- 2) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2 - 6i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = 2z + 1$.

Câu 3. (1,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $\log_2(x-1) + 3\log_{\frac{1}{8}}(3x-2) + 2 = 0$
- 2) Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất.

Câu 4. (1,0 điểm) Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^2 (1 + x\sqrt{1-x^2}) dx$

Câu 5. (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 4)$, $B(1; 0; 0)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB và tìm điểm M trên tia Oy sao cho $MA = MB\sqrt{13}$.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Câu 7. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ ($BAD = ADC = 90^\circ$) có đỉnh $D(2; 2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên đường chéo AC . Điểm $M\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC . Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C , biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$.

Câu 8. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + y - x - 9 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x^2 + 5x + y - 8} \\ x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \end{cases}$$

Câu 9. (1,0 điểm) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} + \frac{xy}{x+y} - (x^2 + y^2)$$

----- **HẾT** -----

Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên học sinh : Số báo danh :

Chữ kí giám thị 1: Chữ kí giám thị 2:

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ (1,0)

2) Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 + 6x$ và $y'' = f''(x) = 6x + 6$

Khi đó $f''(x_0) = 5x_0 + 7 \Leftrightarrow 6x_0 + 6 = 5x_0 + 7 \Leftrightarrow x_0 = 1$ (0,25)

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$ và $y'(x_0) = y'(1) = 9$ (0,25)

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) là: $y - 2 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 7$ (0,5)

Câu 2.

1) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$ (0,25)

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0,25)$$

2) Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$, khi đó:

$$(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2 - 6i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + (3-i)(a-bi) = 2 - 6i \Leftrightarrow 4a - 2b - 2bi = 2 - 6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ -2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3i \quad (0,25)$$

$$\text{Do đó } w = 2z + 1 = 2(2 + 3i) + 1 = 5 + 6i$$

Vậy số phức w có phần thực là 5, phần ảo là 6. (0,25)

Câu 3.

1) Điều kiện: $x > 1$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log_2(x-1) - \log_2(3x-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(4x-4) = \log_2(3x-2) \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Kết hợp với điều kiện phương trình có nghiệm $x = 2$. (0,25)

2) Ta có: $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$ (0,25)

Gọi A là biến cố “4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất”

$$\text{Khi đó } n(A) = C_4^1 C_5^2 C_6^1 = 240$$

$$\text{Vậy } p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{91} \quad (0,25)$$

$$\text{Câu 4. } I = \int_0^1 x^2 (1 + x\sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad (0,5)$$

$$I_2 = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-t^2 \Rightarrow x dx = -t dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; \quad x=1 \Rightarrow t=0$$

$$\Rightarrow I_2 = -\int_1^0 (1-t^2)t^2 dt = \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \quad (0,25)$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = \frac{7}{15} \quad (0,25)$$

Câu 5.

+ Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB và I là trung điểm của AB.

$$\text{Ta có } I(-1;0;2), \quad AB = 4\sqrt{2} \quad (0,25)$$

Khi đó mặt cầu (S) có tâm I và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8 \quad (0,25)$$

$$+ M \in Oy \Rightarrow M(0;t;0)$$

khi đó

$$MA = MB\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(-3)^2 + (-t)^2 + 4^2} = \sqrt{1^2 + (-t)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{13} \Leftrightarrow 25 + t^2 = 13(1+t^2) \Leftrightarrow t = \pm 1 \quad (0,25)$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow M(0;1;0)$$

$$t = -1 \Rightarrow M(0;-1;0) \quad (0,25)$$

Câu 6.

+ Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $A'H \perp (ABC)$ và $(A'C, (ABC)) = A'CH = 60^\circ$. Do đó

$$A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2} \quad (0,25)$$

$$\text{Thể tích của khối lăng trụ là } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \quad (0,25)$$

+Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên AC; K là hình chiếu vuông góc của H trên A'I. Suy ra $HK = d(H, (ACC'A'))$

$$\text{Ta có } HI = AH \cdot \sin IAH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{13}}{26} \quad (0,25)$$

$$\text{Do đó } d(B, (ACC'A')) = 2d(H, (ACC'A')) = 2HK = \frac{3a\sqrt{13}}{13} \quad (0,25)$$

Câu 7.

Gọi E là trung điểm của đoạn DH. Khi đó tứ giác ABME là hình bình hành $\Rightarrow ME \perp AD$ nên E là trực tâm tam giác ADM. Suy ra $\Rightarrow AE \perp DM$ mà $AE \parallel DM \Rightarrow DM \perp BM$ (0,25)

Phương trình đường thẳng BM : $3x + y - 16 = 0$

$$\text{Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4;4) \quad (0,25)$$

$$\text{Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có } \frac{AB}{CD} = \frac{IB}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{DI} = 2\overline{IB} \Rightarrow I\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

Phương trình đường thẳng AC : $x + 2y - 10 = 0$

$$\text{phương trình đường thẳng DH : } 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow H\left(\frac{14}{5}; \frac{18}{5}\right) \Rightarrow C(6;2) \quad (0,25)$$

$$\text{Từ } \overline{CI} = 2\overline{IA} \Rightarrow A(2;4). \quad (0,25)$$

$$\text{Câu 8. Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ y \leq 12 \\ y(12 - x^2) \geq 0 \\ x^2 + 5x + y - 8 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y(12-x^2)} = 12 - x\sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq 12 \\ 12x^2 - 24x\sqrt{12-y} + 12(12-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq 12 \\ (x - \sqrt{12-y})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x^2 \\ -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}; 0 \leq y \leq 12 \end{cases} \quad (0,25)$$

Thay vào phương trình (1) ta được: $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x) + (x+1 - \sqrt{3x+1}) + (x+2 - \sqrt{5x+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) \left(3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} \right) = 0 \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1. \text{ Khi đó ta được nghiệm } (x; y) \text{ là } (0;12) \text{ và } (1;11). \quad (0,5)$$

Câu 9.

$$\text{Đặt } t = x + y \Rightarrow xy = 3 - t; x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = t^2 - 2(3 - t) = t^2 + 2t - 6 \quad (0,25)$$

$$\text{Ta có } xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \Rightarrow 3 - t \leq \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{3(x^2 + y^2) + 3(x + y)}{xy + x + y + 1} + \frac{xy}{x + y} - (x^2 + y^2) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2} \quad (0,25)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2} \text{ với } t \geq 2$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -2t + 1 - \frac{2}{t^2} < 0, \forall t \geq 2. \text{ Suy ra hàm số } f(t) \text{ nghịch biến với } t \geq 2 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow P \leq f(t) \leq f(2) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ bằng } \frac{3}{2} \text{ khi } x = y = 1. \quad (0,25)$$