

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
AN GIANG
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Khóa ngày 13/4/2024
Môn : TOÁN

(Đề thi gồm 01 trang)

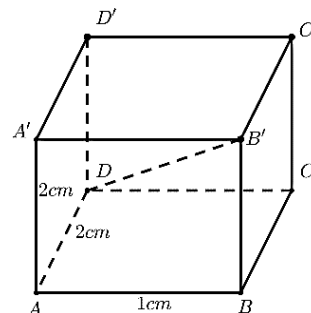
Thời gian làm bài 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1: (3,0 điểm) Cho bảng các tích của m số lẻ và n số chẵn. Tính tổng của các tích trong bảng sau

	1	3	5	...	$2m - 1$
2	2	6	10	...	$4m - 2$
4	4	12	20	...	$8m - 4$
⋮	⋮				⋮
$2n$	$2n$	$6n$	$10n$	...	$2n(2m - 1)$

Câu 2: (3,0 điểm) Cho cấp số cộng có 20 số hạng $a_1; a_2; \dots; a_{20}$. Đặt $A = a_1 + a_3 + \dots + a_{19}$ và $B = a_2 + a_4 + \dots + a_{20}$. Biết $B - A = 110; \sqrt{B} - \sqrt{A} = \sqrt{10}$. Tìm số hạng đầu tiên và số hạng thứ 20 của cấp số.

Câu 3: (2,0 điểm) Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $AB = 1\text{cm}; AD = 2\text{cm}; AA' = 2\text{cm}$ và đường chéo DB' . Tìm các đường đi ngắn nhất để một con chuột bò trên các cạnh hoặc đường chéo, xuất phát từ đỉnh A đi qua tất cả các đỉnh đúng một lần và kết thúc tại đỉnh C' .



Câu 4: (2,0 điểm) Cho tứ diện $OABC$ có $OA; OB; OC$ đôi một vuông góc nhau, $OA = a; OB = b; OC = c$. Gọi M, N là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC . Tính độ dài đoạn OM, AN theo a, b, c .

Câu 5: (2,0 điểm) Người ta dùng bốn màu: Xanh, Đỏ, Tím, Vàng để sơn 15 thanh chắn lắp song song và cách đều nhau của một ngôi trường mẫu giáo. Hỏi có bao nhiêu cách sơn sao cho hai thanh kề nhau thì khác màu và hai thanh đối xứng nhau qua thanh chính giữa thì cùng màu?



Câu 6: (2,0 điểm) Một con cào cào nhảy ngẫu nhiên trên bốn chiếc lá. Trong mỗi lượt, xác suất để cào cào nhảy tới mỗi chiếc lá trong ba chiếc lá còn lại đều bằng $\frac{1}{3}$. Tính xác suất để con cào cào qua bốn lần nhảy quay trở lại vị trí ban đầu?

Câu 7: (2,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và điểm $M(2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $(\Delta): y = 2x$.

Câu 8: (2,0 điểm) Tính $3a + 5b$ với a, b là hai số dương thỏa mãn:

$$\log_{a+2b+1}(a^2 + b^2 + 1) + \log_{2ab+1}(a + 2b + 1) = 2$$

Câu 9: (2,0 điểm) Cho đa thức $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ($n \geq 2$). Biết $P(1) = 2; P(2) = 3; \dots; P(n-1) = n; P(n) = 1$. Tính a_0 .

-----HẾT-----

(Thí sinh không sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài)

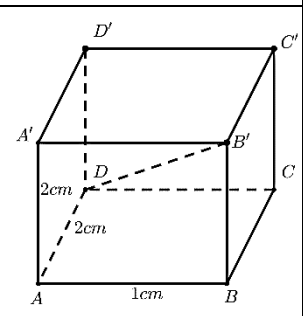
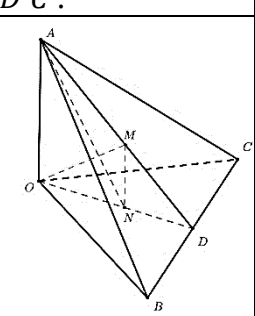
Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.

ĐÁP ÁN

Chú ý:

+ Học sinh giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

+ Điểm có thể chia nhỏ đến 0,25 theo sự thống nhất trước khi chấm.

Câu	Lược giải	Điểm
Câu 1	Tổng hàng thứ nhất $2(1 + 3 + \dots + 2m - 1) = 2m^2$ Tổng ở hàng thứ hai $4(1 + 3 + \dots + 2m - 1) = 4m^2$... Tổng ở hàng thứ n là $2n(1 + 3 + \dots + 2m - 1) = 2n \cdot m^2$ Tổng các tích trong bảng $S = 2m^2 + 4m^2 + \dots + 2n \cdot m^2 =$ $= 2m^2(1 + 2 + \dots + n) = 2m^2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)m^2.$	3,0 đ
Câu 2	$A = a_1 + a_3 + \dots + a_{17} + a_{19}$ và $B = a_2 + a_4 + \dots + a_{18} + a_{20}$. Điều kiện: $A; B \geq 0; B - A = 110 \Leftrightarrow (\sqrt{B} + \sqrt{A})(\sqrt{B} - \sqrt{A}) = 110$ $\sqrt{B} + \sqrt{A} = \frac{110}{\sqrt{10}} = \frac{110}{10} \sqrt{10} = 11\sqrt{10}$ $\begin{cases} \sqrt{B} + \sqrt{A} = 11\sqrt{10} \\ \sqrt{B} - \sqrt{A} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{A} = 5\sqrt{10} \\ \sqrt{B} = 6\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 250 \\ B = 360 \end{cases}$ Mặt khác $A = a_1 + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + 18d) = 10a_1 + (2 + 4 + \dots + 18)d$ $= 10a_1 + 90d$ $B = (a_1 + d) + (a_1 + 3d) + \dots + (a_1 + 19d) = 10a_1 + 100d$ $\begin{cases} 10a_1 + 90d = 250 \\ 10a_1 + 100d = 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -74 \\ d = 11 \end{cases}$ Vậy số hạng đầu tiên của cấp số là -74, số hạng thứ 20 là 135.	3,0 đ
Câu 3	Khối hộp có ba kích thước $1\text{ cm}, 2\text{ cm}, 2\text{ cm}$ nên độ dài đường chéo $DB' = 3\text{ cm}$. Xuất phát từ A ta có $\rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B' \rightarrow A' \rightarrow D' \rightarrow C'$: độ dài 11 cm $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C'$: độ dài 11 cm $\rightarrow B' \rightarrow A' \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow C'$: độ dài 11 cm $\rightarrow D' \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C'$: độ dài 13 cm $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow A' \rightarrow D' \rightarrow C'$: độ dài 11 cm $\rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow C'$: độ dài 15 cm $A \rightarrow A' \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C'$: độ dài 15 cm Vậy các đoạn đi đường ngắn nhất có độ dài 11 cm là $ABCDB'A'D'C'$; $ABCDD'A'B'C'$; $ABB'A'D'DCC'$; $ADCBB'A'D'C'$.	 2,0 đ
Câu 4	Gọi D là giao điểm của AM và ON. $AD; OD$ là đường trung tuyến của các tam giác ABC, OBC. $\frac{DM}{DA} = \frac{1}{3} = \frac{DN}{DO} = \frac{MN}{AO}$ $\Rightarrow MN \text{ song song } AO \text{ và } MN = \frac{1}{3}a$ Mặt khác $MN \perp (OBC)$ do MN song song AO Tam giác OBC vuông, OD là trung tuyến $\Rightarrow ON = \frac{2}{3}OD = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}BC\right) = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2}$	 2,0 đ

	Vậy $OM = \sqrt{MN^2 + ON^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{1}{9}(b^2 + c^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $AN = \sqrt{AO^2 + ON^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{9}(b^2 + c^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{9a^2 + b^2 + c^2}$.	
Câu 5	Ta sơn màu 8 thanh chắn tính từ thanh chính giữa ra bên, 7 thanh còn lại sơn đối xứng với 7 thanh vừa tô, trừ thanh chính giữa. Thanh chính giữa có 4 cách sơn, mỗi thanh còn lại có 3 cách sơn, trừ đi màu thanh vừa sơn trước đó Vậy có $4.3.3.3.3.3.3 = 4.3^7 = 8748$ cách sơn.	2,0 đ
Câu 6	Đánh số bốn chiếc lá là 1; 2; 3; 4 qua bốn lần nhảy con cào cào ở vị trí là chữ số cuối cùng của số có năm chữ số tạo từ các số trên với điều kiện không có hai chữ số liền kề giống nhau (cào cào không thể nhảy từ vị trí 1 đến 1). Số không gian mẫu là số có 5 chữ số, chữ số đầu tiên là 1. Có $1.3.3.3.3 = 81$ số. Ta tìm các số có năm chữ số có chữ số đầu là 1 và chữ số cuối cùng là 1, do bước cuối cùng là chữ số 1 nên số thứ tư không thể là 1 Chữ số thứ hai có 3 cách sắp (trừ đi chữ số 1), Chữ số thứ ba có 3 cách sắp nhưng ta chia thành hai trường hợp - Nếu chữ số thứ ba bằng 1 khi đó chữ số thứ tư có 3 cách sắp. hay có $3.3=9$ - Nếu chữ số thứ ba khác 1 (có hai vị trí) khi đó chữ số thứ tư có 2 cách sắp trừ chữ số 1 ở vị trí thứ năm, hay có $3.2.2=12$. Số các biến cố thuận lợi là $9+12=21$ Vậy xác suất cào cào về vị trí ban đầu là $p = \frac{21}{81} = \frac{7}{27}$ Cách khác Sơ đồ cây sau đây biểu thị bốn lần nhảy của con cào cào Có $3+2+2+3+2+2+3+2+2=21$ trường hợp thuận lợi. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{21}{81} = \frac{7}{27}$ (Thí sinh có thể dùng công thức xác suất có điều kiện)	2,0 đ
Câu 7	Phương trình đường thẳng (d): $y = ax + b$; đi qua $M(2; 1) \Rightarrow y = ax + 1 - 2a$ Phương trình hoành độ giao điểm (d); (E) $\frac{x^2}{25} + \frac{(ax + 1 - 2a)^2}{16} = 1$ $\Leftrightarrow 16x^2 + 25(a^2x^2 + 2a(1 - 2a)x + (1 - 2a)^2) = 400$ $\Leftrightarrow 16x^2 + 25(a^2x^2 + 2a(1 - 2a)x + (1 - 2a)^2) - 400 = 0$ $\Leftrightarrow (16 + 25a^2)x^2 + 50a(1 - 2a)x + 25(1 - 2a)^2 - 400 = 0$ Giao điểm có hoành độ là $x_1; x_2$ trung điểm của AB là I $\Rightarrow x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{50a(1 - 2a)}{16 + 25a^2}; y_I = ax_I + 1 - 2a$ Điểm I thuộc $y = 2x \Rightarrow ax_I + 1 - 2a = 2x_I \Leftrightarrow (a - 2)x_I + 1 - 2a = 0$	2,0 đ

	$\Leftrightarrow -\frac{a-2}{2} \cdot \frac{50a(1-2a)}{16+25a^2} + 1 - 2a = 0$ $\Leftrightarrow (1-2a)(-25a^2 + 50a + 16 + 25a^2) = 0 \Leftrightarrow (1-2a)(50a + 16) = 0$ $a = \frac{1}{2}; a = \frac{-16}{50} = -\frac{8}{25}$ Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $y = \frac{1}{2}x; y = \frac{-8}{25}x + \frac{41}{25}$	
Câu 8	$\log_{a+2b+1}(a^2 + b^2 + 1) + \log_{2ab+1}(a + 2b + 1) = 2$ Do $a > 0; b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 1 > 1 \\ a + 2b + 1 > 1 \\ 2ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{a+2b+1}(a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{2ab+1}(a + 2b + 1) > 0 \end{cases}$ Áp dụng Cô si ta được $\begin{aligned} & \log_{a+2b+1}(a^2 + b^2 + 1) + \log_{2ab+1}(a + 2b + 1) \geq \\ & \geq 2\sqrt{\log_{a+2b+1}(a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{2ab+1}(a + 2b + 1)} \\ & = 2\sqrt{\log_{2ab+1}(a^2 + b^2 + 1)} \end{aligned}$ $\Leftrightarrow 2 \geq 2\sqrt{\log_{2ab+1}(a^2 + b^2 + 1)} \Leftrightarrow \log_{2ab+1}(a^2 + b^2 + 1) \leq 1$ $a^2 + b^2 + 1 \leq 2ab + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \leq 0$ $\Leftrightarrow a = b$ Điều kiện xảy ra khi $\log_{a+2b+1}(a^2 + b^2 + 1) = \log_{2ab+1}(a + 2b + 1)$ $\Leftrightarrow \log_{3a+1}(2a^2 + 1) = \log_{2a^2+1}(3a + 1)$ $\Leftrightarrow 2a^2 + 1 = 3a + 1 \Leftrightarrow a = 0 \text{ (loại)}; a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = b = \frac{3}{2}$ Vậy $3a + 5b = 12$.	2,0 đ
Câu 9	$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Biết $P(1) = 2; P(2) = 3; \dots; P(n-1) = n; P(n) = 1$. + Đặt $g(x) = P(x+1) - P(x) - 1 \Rightarrow g(0) = P(1) - P(0) - 1 = 1 - a_0$ $\Rightarrow a_0 = 1 - g(0)$ Ta chứng minh rằng $g(x)$ có bậc $n-1$ và hệ số bậc cao nhất là n + Ta có $g(x) = P(x+1) - P(x) - 1 =$ $= ((x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots + a_0) - (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) - 1$ Ta quan tâm đến hệ số của x^n và x^{n-1} $= [(x^n + nx^{n-1} + \dots) + a_{n-1}(x^{n-1} + \dots) + \dots] - (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots) - 1$ $= nx^{n-1} + \dots$ Vậy bậc của $g(x)$ là $n-1$ và hệ số bậc cao nhất bằng n + Mặt khác $g(1) = P(2) - P(1) - 1 = 0; g(2) = 0; \dots; g(n-2) = P(n-1) - P(n-2) - 1 = n - (n-1) - 1 = 0$. Các số $1; 2; \dots; (n-2)$ là nghiệm phương trình $g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = n(x-1)(x-2) \dots (x-n+2)(x+b); b \in \mathbb{R}$ + Ta tính b, ta có: $g(n-1) = n(n-2)(n-3) \dots 1(n-1+b)$ vì $g(n-1) = P(n) - P(n-1) - 1 = 1 - n - 1 = -n$ $g(n-1) = -n \Leftrightarrow -n = n \underbrace{(n-2)(n-3) \dots 1}_{n-2 \text{ số}} \cdot (n-1+b)$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{(n-2)!} = n-1+b \Leftrightarrow b = -n+1 - \frac{1}{(n-2)!}$ $\Rightarrow g(0) = n \underbrace{(-1)(-2) \dots (-n+2)}_{n-2 \text{ số}} \left[-n+1 - \frac{1}{(n-2)!} \right]$ $= n(-1)^{n-2}(n-2)! \left[-n+1 - \frac{1}{(n-2)!} \right] = (-1)^{n-1}(n! + n)$ $a_0 = 1 - (-1)^{n-1}(n! + n)$ Vậy $a_0 = 1 - (-1)^{n-1}(n! + n)$	2,0 đ