

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ THI HỌC KÌ 2 NĂM HỌC 2018-2019
Môn thi: TOÁN - Lớp 10
Thời gian: 90 phút - Không kể thời gian giao đề.

Bài 1. (2đ) Giải các bất phương trình:

a) $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} - \frac{1}{x - 4} \leq 0$

b) $\frac{-x^2 + x - 1}{\sqrt{x - 3} - x} > 0$

Bài 2. (1,5đ)

a) Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m^2x - 16 < -x + m^2 \\ 4x + 1 > -x + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

b) Tìm m để hàm số $y = \frac{3}{\sqrt{(m+1)x^2 + 4mx + m+1}}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Bài 3. (1,5đ)

a) Chứng minh $2 \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos \left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Chứng minh $4(\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x) + 2 \cos 5x \cdot \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \leq \sqrt{2}$.

Bài 4. (1đ) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 2m - 3$ trên $[-1; 3]$ bằng 7.

Bài 5. (3đ) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có tâm $I(3; 1)$ và bán kính $R = 5$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường tròn (C) với trục Ox .

b) Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng AB , biết $A(657; 12)$, $B(625; 36)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): 8x + 6y + 1 = 0$.

Bài 6. (1đ) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

a) Tính diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E)

b) Có bao nhiêu điểm $M \in (E)$ thỏa $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{8}{F_1F_2}$.

– HẾT –

STAR EDUCATION
STAR TEAM

ĐỀ THI HỌC KÌ 2 PTNK
Năm học 2019 - 2020
Môn thi: TOÁN 10

LỜI GIẢI

Bài 1. a) $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} - \frac{1}{x - 4} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{(x - 4)(x - 1)} - \frac{1}{x - 4} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2 - x}{(x - 4)(x - 1)} \leq 0$

Bảng xét dấu:

x	1	2	4
$f(x)$	+	- 0 +	-

Vậy $S = (1; 2] \cup (4; +\infty)$

b) $\frac{-x^2 + x - 1}{\sqrt{x - 3} - x} > 0$ (1)

Điều kiện: $x \geq 3$

Ta có: $-x^2 + x - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall x$

Từ đó suy ra:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x - 3} - x < 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x - 3} < x \quad (x \geq 3)$
 $\Leftrightarrow x - 3 < x^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Vậy $S = [3; +\infty)$

Bài 2. a) $\begin{cases} 2m^2x - 16 < -x + m^2 \\ 4x + 1 > -x + 6 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (2m^2 + 1)x < m^2 + 16 \\ 5x > 5 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{m^2 + 16}{2m^2 + 1} \\ x > 1 \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$\frac{m^2 + 16}{2m^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 16 \leq 2m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{15} \\ m \leq -\sqrt{15} \end{cases}$

b) $y = \frac{3}{\sqrt{(m + 1)x^2 + 4mx + m + 1}}$

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m+1)x^2 + 4mx + m+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = (m+1)x^2 + 4mx + m+1$

- Với $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Khi đó $f(x) = -4x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (vô lý).

$\Rightarrow m = -1$ không thỏa yêu cầu đề bài.

- Với $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Khi đó $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 3m^2 - 2m - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -\frac{1}{3} < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 1$$

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ thì hàm số trên xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. a) Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin a \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos a \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \left(\cos a \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin a + \cos a + \cos a - \sin a \\ &= 2 \cos a \end{aligned}$$

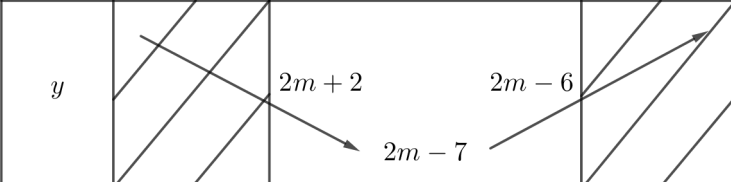
$$\begin{aligned} \text{b) } & 4(\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x) + 2 \cos 5x \cdot \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \\ &= 4 \sin x \cos x (\cos^3 x - \sin^2 x) + 2 \cos 5x \cdot \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x + \sin 6x - \sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \\ &= \sin 6x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 4. $y = x^2 - 4x + 2m - 3$

Hoành độ đỉnh của đồ thị hàm số: $x = \frac{-b}{2a} = 2$

$$f(-1) = 2m + 2; f(3) = 2m - 6; f(2) = 2m - 7$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
y					

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 3]$ là 7 khi và chỉ khi $2m + 2 = 7 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$

Bài 5. Phương trình đường tròn: $(C) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

a) Gọi $M(x_M; 0)$ là giao điểm của đường tròn (C) với trục Ox .

$$\text{Ta có: } (x_M - 3)^2 + (0 - 1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 - 6x_M + 9 + 1 = 25$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 - 6x_M - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 + 2\sqrt{6} \\ x_M = 3 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của đường tròn (C) với Ox là: $M_1(3 + 2\sqrt{6}; 0); M_2(3 - 2\sqrt{6}; 0)$

b) Đường thẳng AB đi qua $A(657; 12)$ có vtcp $\overrightarrow{AB} = (-32; \Rightarrow \Rightarrow vtpt \overrightarrow{n_{AB}} = (3; 4)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: 3(x - 657) + 4(y - 12) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2019 = 0$$

$$d(I; AB) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2019|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2006}{5}$$

c) Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.

$$\Delta \perp (d) \Rightarrow \overrightarrow{n_d} = \overrightarrow{u_\Delta} = (8; 6) \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta} = (3; -4)$$

$$\text{Phương trình tổng quát của } \Delta : 3x - 4y + c = 0$$

Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi:

$$d(I; \Delta) = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow |5 + c| = 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + c = 25 \\ 5 + c = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 20 \\ c = -30 \end{cases}$$

Vậy $\Delta : 3x - 4y + 20 = 0$ hoặc $\Delta : 3x - 4y - 30 = 0$

Bài 6. Ta có: $(E) : 9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

a) $a = 5; b = 3; c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

Diện tích hình chữ nhật cơ sở là: $S = 2a \cdot 2b = 60$ (đvdt)

b) Ta có: $MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x_M, MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x_M, F_1F_2 = 8$

$$\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{8}{F_1F_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MF_1 + MF_2}{MF_1 \cdot MF_2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(5 + \frac{4}{5}x_M\right) \left(5 - \frac{4}{5}x_M\right) = 10$$

$$\Leftrightarrow 25 - \frac{16}{25}x_M^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 = \frac{375}{25} \Rightarrow y_M^2 = \frac{9}{16}$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn đề bài là $\left(\frac{5\sqrt{15}}{4}; \frac{3}{4}\right); \left(-\frac{5\sqrt{15}}{4}; \frac{3}{4}\right); \left(\frac{5\sqrt{15}}{4}; -\frac{3}{4}\right);$

$$\left(-\frac{5\sqrt{15}}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$