

Ths. Trần Đình Cư
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

Chủ đề 1: Các phép toán cơ bản

Chủ đề 2: Biểu diễn số phức

Chủ đề 3: Tập hợp điểm

- Tuyển tập hơn 100 bài toán và câu hỏi trắc nghiệm khác quan
- Tất cả đều có đáp án và lời giải chi tiết
- Cung cấp một số kĩ thuật casio

HUẾ, NGÀY 24/02/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN3

CHỦ ĐỀ 2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ PHỨC28

CHỦ ĐỀ 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.....40

(BỘ CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC BAO GỒM 9 CHỦ ĐỀ)

(SẼ UPDATE TRONG THỜI GIAN TỚI)

CHỦ ĐỀ 1. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN

Phương pháp

Cho hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) ta cần nhớ các định nghĩa và phép tính cơ bản sau:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i; \quad z - z' = (a - a') + (b - b')i.$$

$$z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{aa' + bb' + (ab' - a'b)i}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Vận dụng các tính chất trên ta có thể dễ dàng giải các bài toán sau.

Ta cũng cần chú ý kết quả sau: Với i^n , $n \in \mathbb{Z}$ thì

- Nếu $n = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1$
- Nếu $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k}i = 1 \cdot i = i$
- Nếu $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k}i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- Nếu $n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k}i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

I. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho số phức: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Tính các số phức sau: $\bar{z}$; z^2 ; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$.

Giải

Ta có

- $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Tính $(\bar{z})^3$

$$\begin{aligned} (\bar{z})^3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}i + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}i\right)^3 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8}i - \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i = i \end{aligned}$$
- $1 + z + z^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$

Dùng MTCT như sau:

Bước 1: Chọn chương trình số	Màn hình hiển thị
phức: MODE 2	

	CMPLX □ Math
Bước 2: Lưu $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \rightarrow A$	CMPLX □ Math ▲ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \rightarrow A$ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
Bước 3: Tính $\bar{z}$ ấn SHIFT 2 2 ALPHA A Ta được $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	CMPLX □ Math ▲ Conjg(A) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
Bước 4: Tính z^2 ấn ANPHA A² Ta được $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	CMPLX □ Math ▲ A ² $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
Bước 4: Tính $(\bar{z})^3$ ta ấn (SHIFT 2 2 ALPHA A) x² =	CMPLX □ Math ▲ (Conjg(A)) ³ i
Bước 5: Tính $1 + z + z^2$ Ta được: $1 + z + z^2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$	CMPLX □ Math ▲ $1 + A + A^2$ $\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$

Ví dụ 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức:

- a) $z = (9 + 5i) - (1 - 2i)$; b) $z = (4 - 3i)(4 + 5i)$;
c) $z = (2 + i)^3$; d) $z = \frac{2i}{i + 1}$.

Giải

a) Ta có: $z = (9 + 5i) - (1 - 2i) = 9 - 1 + (5 + 2)i = 8 + 7i$

Vậy phần thực $a = 8$; phần ảo $b = 7$.

Dùng MTCT:

CMPLX □ Math ▲

$$(9 + 5i) - (1 - 2i)$$

$$8 + 7i$$

b) Ta có: $z = (4 - 3i)(4 + 5i) = 16 + 20i - 12i + 15 = 31 + 8i$

Vậy phần thực $a = 31$; phần ảo $b = 8$.

Dùng MTCT:

CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$

$$(4-3i)(4+5i)$$

$$31+8i$$

c) Ta có: $z = (2+i)^3 = 8 + 3.4.i + 3.2.i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

Vậy phần thực $a = 2$; phần ảo $b = 11$.

Dùng MTCT:

CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$

$$(2+i)^3$$

$$2+11i$$

d) Ta có: $z = \frac{2i}{i+1} = \frac{2i(i-1)}{i^2-1^2} = \frac{-2+2i}{-2} = 1+i$

Vậy phần thực $a = 1$; phần ảo $b = 1$.

Dùng MTCT:

CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$

$$\frac{2i}{1+i}$$

$$1+i$$

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \frac{1}{(1+i)(4-3i)}$; b) $B = \frac{-5+6i}{4+3i}$; c) $C = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

d) $D = \frac{3-2i}{i}$; e) $\left(\frac{1+7i}{4+3i}\right)^{2026}$

Giải

a) Ta có: $A = \frac{1}{(1+i)(4-3i)} = \frac{1}{4-3i+4i-3i^2} = \frac{1}{7+i} = \frac{7-i}{7^2-i^2} = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$

Dùng MTCT:

CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$

$$\frac{1}{(1+i)(4-3i)}$$

$$\frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$$

b) Ta có: $B = \frac{-5+6i}{4+3i} = \frac{(-5+6i)(4-3i)}{4^2-(3i)^2} = \frac{-2+39i}{25} = -\frac{2}{25} + \frac{39}{25}i$

Dùng MTCT:

CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$

$$\frac{-5+6i}{4+3i}$$

$$-\frac{2}{25} + \frac{39}{25}i$$

c) Ta có: $C = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{2(1 + \sqrt{3}i)}{1^2 - 3i^2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Dùng MTCT:

d) Ta có: $D = \frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)(-i)}{-i^2} = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$.

Dùng MTCT:

e) Ta có:

$$\left(\frac{1+7i}{4+3i}\right)^{2026} = \left[\frac{(1+7i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}\right]^{2026} = (1+i)^{2026} = \left[(1+i)^2\right]^{1013} = (2i)^{1013} = 2^{1013} \cdot i^{1013} = 2^{1013} \cdot i^{1012} \cdot i = 2^{1013} \cdot i.$$

Dùng MTCT:

Bước 1: Tính $\frac{1+7i}{4+3i}$	
Bước 2: $(1+i)^{2026} = \left[(1+i)^2\right]^{1013} = (2i)^{1013}$ Tìm dư của phép chia 1013 cho 4. Suy ra: $i^{2013} = i$	

Vậy $\left(\frac{1+7i}{4+3i}\right)^{2026} = 2^{1013} \cdot i.$

Ví dụ 4. Viết các số phức sau đây dưới dạng $a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$):

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i);$

b) $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i};$

c) $z = \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i) - 3(1+i)};$

d) $z = \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3};$

e) $z = \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5}.$

Giải

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i)$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 - \left[1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 \right] - (6 - 3i - 2i + i^2)$$

$$= 8 + 12i - 6 - i - (1 + 6i - 12 - 8i) - (6 - 5i - 1) = 8 + 18i.$$

Dùng MTCT:

Calculator screen showing the calculation $(2+i)^3 - (1+2i)^3$ resulting in $8+18i$.

$$b) z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i}$$

$$= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(2-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{1+2i+i^2}{1+1} + \frac{6+i-i^2}{4+1} - \frac{1+i-2i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} + \frac{7+i}{5} - \frac{3+i}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Dùng MTCT:

Calculator screen showing the calculation $\frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i}$ resulting in $-\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

$$c) z = \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)} = \frac{(4+i^2+4i)(1+i)}{-1-5i}$$

$$= -\frac{(3+4i)(1+i)}{1+5i} = -\frac{3+4i^2+7i}{1+5i} = \frac{(1-7i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}$$

$$= \frac{1+35i^2-12i}{1+25} = \frac{-34-12i}{26} = -\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i.$$

Dùng MTCT:

Calculator screen showing the calculation $\frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)}$ resulting in $-\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i$.

$$d) z = \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3} = \left(\frac{2+i}{1-2i} \right)^3 (2+i)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \right)^3 (4+i^2+4i).$$

$$= \left(\frac{5i}{1+4} \right)^3 (3+4i) = i^3(3+4i) = -i(3+4i) = 4-3i$$

Dùng MTCT:

Calculator screen showing the calculation $\frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3}$ resulting in $4-3i$.

$$e) z = \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5} = \frac{(1+i)^6}{2^5(1-i)^5} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 (1+i)$$

$$= \frac{1}{32} \cdot i^4 \cdot i(1+i) = \frac{1}{32} \cdot i(1+i) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{32}i.$$

Dùng MTCT:

Ví dụ 5. Tìm nghịch đảo của số phức sau:

a) $z = 3 + 4i$; b) $z = -3 - 2i$; c) $z = \frac{1+i\sqrt{5}}{3-2i}$; d) $z = (3+i\sqrt{2})^2$.

Giải

a) Xét $z = 3 + 4i$. Ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{3^2 - (4i)^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Vậy nghịch đảo của số phức z là $\frac{1}{z} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

Dùng MTCT:

b) Xét $z = -3 - 2i$. Ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-3-2i} = \frac{-1}{3+2i} = \frac{-1(3-2i)}{9+4} = \frac{-3+2i}{13} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

Vậy nghịch đảo của số phức z là $\frac{1}{z} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$.

Dùng MTCT:

c) Xét $z = \frac{1+i\sqrt{5}}{3-2i}$. Ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{3-2i}{1+i\sqrt{5}} = \frac{(3-2i)(1-i\sqrt{5})}{1^2+5} = \frac{3-2\sqrt{5}-2+3\sqrt{5}}{6} = \frac{1-2\sqrt{5}}{6} + \frac{3\sqrt{5}-2}{6}i$$

Dùng MTCT:

d) Xét $z = (3+i\sqrt{2})^2 = 7+6\sqrt{2}i$. Ta có

Dùng MTCT:

$$\frac{1}{7+6\sqrt{2}i} = \frac{7}{121} - 0.070126292i$$

Lời bình: Nếu đề bài cho trắc nghiệm thì đối với câu này có thể dò kết quả từ đáp án trắc nghiệm giữa hai con số $\frac{6\sqrt{2}}{121} \approx 0,070126$.

Nhận xét: Quá trình thực hiện trên, thực ra ta đang dùng công thức sau: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Ví dụ 6. Cho $z = (2a - 1) + (3b + 5)i, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Tìm các số a, b để

- a) z là số thực b) z là số ảo.

Giải

a) z là số thực $\Leftrightarrow 3b + 5 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{3}$

b) z là số ảo $\Leftrightarrow 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để:

- a) Số phức $z = 1 + (1 + mi) + (1 + mi)^2$ là số thuần ảo.

b) Số phức $z = \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}$ là số thực.

Định hướng: Ta cần biến đổi số phức z về dạng $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Lúc đó: z là số thuần ảo (ảo) khi $a=0$ và z là số thực khi $b=0$

Giải

- a) Ta có:

$$z = 1 + (1 + mi) + (1 + mi)^2 = 1 + 1 + mi + 1 + 2mi + i^2 m^2 = 3 - m^2 + 3mi.$$

z là số thuần ảo $\Leftrightarrow 3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

- b) Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi} = \frac{(m-1+2(m-1)i)(1+mi)}{(1-mi)(1+mi)} \\ &= \frac{m-1-m(2m-2)+[m(m-1)+2m-2]i}{1+m^2}. \end{aligned}$$

$$z \text{ là số thực} \Leftrightarrow m(m-1)+2m-2=0 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=-2.$$

Ví dụ 8. Tìm các số thực x, y sao cho $z = z'$, với từng trường hợp

a) $z = (-3x - 9) + 3i, z' = 12 + (5y - 7)i;$

b) $z = (2x - 3) - (3y + 1)i, z' = (2y + 1) + (3x - 7)i.$

c) $(x^2 + 2y + i)(3 - i)^2 + y(x + 1)(1 - i)^3 = 26 - 14i.$

d) $(x^2 + y^2 + 2i)(\sqrt{3}i - 1)^6 + (y^2 + 2x)\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^4} = 320 + 896i$

Giải

a) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 9 = 12 \\ 3 = 5y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $x = -7; y = 2.$

b) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 2y + 1 \\ -3y - 1 = 3x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy $x = 2; y = 0.$

c) Ta có $(3 - i)^2 = 8 - 6i; (1 - i)^3 = -2 - 2i$ nên đẳng thức đã cho có dạng

$$(x^2 + 2y + i)(8 - 6i) + y(x + 1)(-2 - 2i) = 26 - 14i$$

Hay $8x^2 - 2xy + 14y + 6 + (8 - 6x^2 - 2xy - 14y) = 26 - 14i$

Suy ra: $\begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \\ 3x^2 + xy + 7y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \\ x^2 + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10, (1) \\ 2y = 3 - x^2, (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}$

Vậy các cặp số thực cần tìm là

$$(x; y) = (1; 1), (-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-1 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

d) Ta có $(\sqrt{3}i - 1)^6 = 64, \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^4} = 128i$ nên $64(x^2 + y^2 + 2i) + 128i(y^2 + 2x) = 320 + 896i$

Hay $x^2 + y^2 + 2i(y^2 + 2x + 1) = 5 + 14i$

Vì thế ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 = 6 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

Vậy các cặp số cần tìm là: $(x; y) = (1; 2), (1; -2).$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $3(1 + i)^{100} = 4i(1 + i)^{98} - 4(1 + i)^{96}.$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3(1 + i)^{100} - 4i(1 + i)^{98} + 4(1 + i)^{96} &= (1 + i)^{96} [3(1 + i)^4 - 4i(1 + i)^2 + 4] \\ &= (1 + i)^{96} [3(2i)^2 - 4i(2i) + 4] = (1 + i)^{96} . 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh.

Ví dụ 10. a) Tính mô-đun của số phức z biết $z = 3i(2-i) + 2i^3$.

b) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của số phức $\bar{z} + iz$.

Giải

a) Ta có $z = 3i(2-i) + 2i^3 = 6i - 3i^2 - 2i = 3 + 4i$.

Vậy mô-đun của z là $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Dùng MTCT:

Calculator screen showing the calculation of the modulus of $z = 3i(2-i) + 2i^3$. The display shows $|3i(2-i) + 2i^3|$ and the result is 5.

b) Ta có:

$$(1-\sqrt{3}i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{3}i) + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}i)^2 - (\sqrt{3}i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i = -8$$

Do đó:

$$\frac{z}{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i} = \frac{-8}{1-i} = -4 - 4i$$

Suy ra:

$$\bar{z} + iz = -4 - 4i + i(-4 + 4i) = -8 - 8i \Rightarrow |\bar{z} + iz| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

Dùng MTCT:

Bước 1: Tính $\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i} \rightarrow A$	Calculator screen showing the result of step 1: $\text{Ans} \rightarrow A = -4 - 4i$.
Bước 2: Tính $ A + i\bar{A} $	Calculator screen showing the result of step 2: $A + i\text{Conjg}(A) = 8\sqrt{2}$.

Ví dụ 11. Xét số phức: $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$. Tìm m để $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{2}$

Giải

Ta có:

$$z = \frac{i-m}{(1-m^2)+2mi} = \frac{(-m+i)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2)^2+4m^2}$$

$$= \frac{-m(1-m^2) + 2m + i(1-m^2+2m^2)}{(1+m^2)^2} = \frac{m(1+m^2) + i(1+m^2)}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{m}{1+m^2} + \frac{1}{1+m^2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{m}{1+m^2} - \frac{1}{1+m^2}i$$

$$\text{Do đó } z \cdot \bar{z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2+1}{(m^2+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{m^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2+1=2 \Leftrightarrow m=\pm 1.$$

Lời bình: Ta có thể tính z bằng cách biến đổi ở mẫu như sau:

$$1-m(m-2i)=1-m^2+2mi=-(m^2-2mi+i^2)=-(m-i)^2.$$

$$\text{Lúc đó: } z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-(m-i)^2} = \frac{m-i}{(m-i)^2} = \frac{1}{m-i} = \frac{m+i}{m^2+1} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{1}{m^2+1}i$$

Ví dụ 12. Tính $S=1+i+i^2+i^3+\dots+i^{2012}$.

Giải

Cách 1. Ta có:

$$S=1+i+i^2+i^3+\dots+i^{2012} \Rightarrow iS=i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{2012}+i^{2013}$$

Suy ra:

$$S-iS=1-i^{2013} \Rightarrow S=\frac{1-i^{2013}}{1-i}=\frac{1-i}{1-i}=1$$

Cách 2. Dãy số $1, i, i^2, i^3, \dots, i^{2012}$ lập thành một cấp số nhân gồm 2013 số hạng, có công bội là i , số hạng đầu là 1.

Do đó:

$$S=1+i+i^2+i^3+\dots+i^{2013}=1 \cdot \frac{1-i^{2013}}{1-i}=1$$

Ví dụ 13. Số phức $z=x+2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: $P=x-y$.

Giải

$$\text{Ta có } |z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+4y^2=1 \quad (1)$$

$$\text{Từ } P=x-y \Rightarrow y=x-P, \text{ thay vào (1) ta được } 5x^2-8Px+4P^2-1=0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 16P^2 - 5(4P^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } P = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10}i. \text{ Với } P = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10}i.$$

Suy ra:

$$\min P = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ khi } z = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10}i; \max P = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ khi } z = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10}i.$$

Ví dụ 14. Cho số phức $z = \cos 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)i$, với số α thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $|z|$.

Giải

Ta có:

$$|z| = \sqrt{\cos^2 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \sqrt{\cos^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 1}$$

$$= \sqrt{-\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 2}$$

Đặt $t = \sin 2\alpha$, $-1 \leq t \leq 1$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t + 2$, $t \in [-1; 1]$

Ta có: $f'(t) = -2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$. Ta có: $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$

Suy ra:

- $\max f(t) = \frac{9}{4}$ khi $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$
- $\min f(t) = 0$ khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy $\max |z| = \frac{3}{2}$, $\min |z| = 0$

Ví dụ 15. (Đề Minh họa của bộ). Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

- A. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$. B. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$. D. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2 .

Hướng dẫn giải

Ta có: $\bar{z} = 3 + 2i \Rightarrow$ phần thực là 3 và phần ảo là 2 .

Ví dụ 16. (Đề Minh Họa của Bộ). Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

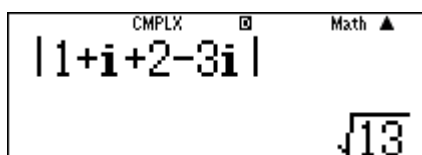
- A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. C. $|z_1 + z_2| = 1$. D. $|z_1 + z_2| = 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Vậy chọn đáp án A

Dùng MTCT:



Ví dụ 17. (Đề minh họa của bộ). Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

- A. $w = 7 - 3i$. B. $w = -3 - 3i$. C. $w = 3 + 7i$. D. $w = -7 - 7i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = 2 + 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 5i \Rightarrow w = iz + \bar{z} = i(2 + 5i) + 2 - 5i = -3 - 3i$.

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT:

CMPLX Math ▲
 $i \times (2+5i) + \text{Conjg}(i)$
 $-3-3i$

Ví dụ 17. (Đề thử nghiệm lần 1 của Bộ). Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i+1)$

A. $\bar{z} = 3-i$

B. $\bar{z} = -3+i$

C. $\bar{z} = 3+i$

D. $\bar{z} = -3-i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = i(3i+1) = i-3 \rightarrow \bar{z} = -3-i$.

Vậy chọn đáp án D.

Dùng MTCT:

CMPLX Math ▲
 $\text{Conjg}(i(3i+1))$
 $-3-i$

Ví dụ 18: (Đề thử nghiệm lần 1 của Bộ). Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$

A. $|z| = \sqrt{34}$.

B. $|z| = 34$

C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$

D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$z(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} \Leftrightarrow z = \frac{(1-13i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$\rightarrow z = \frac{2+i-26i+13}{4+i} = \frac{15-25i}{5} = 3-5i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT:

CMPLX Math ▲
 $\left| \frac{1-13i}{2-i} \right|$
 $\sqrt{34}$

Ví dụ 19: (Đề Thử nghiệm lần 1-Bộ Giáo dục). Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$

B. $|z| > 2$

C. $|z| < \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có

$$(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i \Leftrightarrow (|z|+2) + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow (|z|+2) + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{|z|}$$

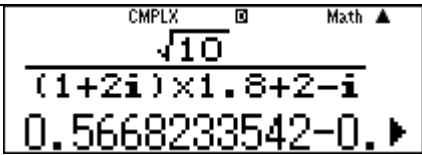
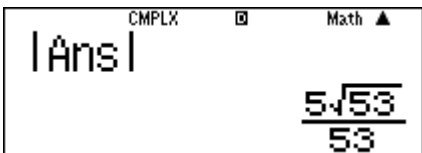
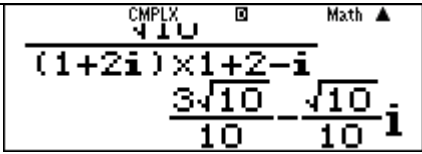
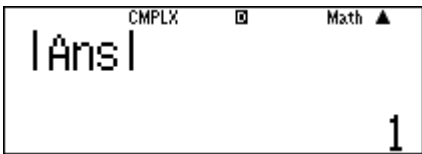
$$\Leftrightarrow ((|z|+2))^2 + (2|z|-1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|=1$$

Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Dùng MTCT

Ta có: $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{(1+2i)|z| + 2 - i}$

Để cho đơn giản ta tiến hành thử các đáp án:

Thử phương án A: Cho $ z = 1,8$. Lúc đó:	 Ấn tiếp  Mẫu thuẫn ban đầu $z = 1,8$. Như vậy loại A
Tương tự ta sẽ loại được B,C.	
Thử phương án D. Cho $ z = 1$. Lúc đó z bằng kết quả ở bên	 Ấn tiếp  Vậy chọn D.

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho $z_1 = 1 - 3i, z_2 = 2 + i, z_3 = 3 - 4i$. Tính:

1.1. Tính $z_1 + 2z_2 - \overline{z_3}$

- A. $1 + 4i$ B. $2 - 4i$ C. $2 - 5i$ D. $4 - 6i$

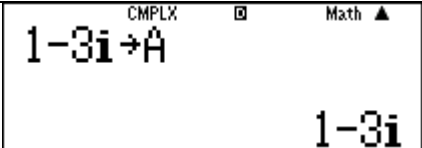
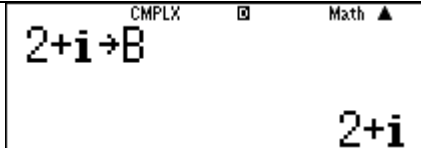
1.2. Tính $\overline{z_1 z_2} + z_2 \overline{z_3}$

- A. $1 + 4i$ B. $2 - 3i$ C. $2 + 5i$ D. $1 - 6i$

1.3. Tính $\overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^2 z_3$

- A. $11 + 45i$ B. $20 - 33i$ C. $20 + 35i$ D. $11 + 61i$

Hướng dẫn giải

		
---	--	---

1.1. Ta có:

$$z_1 + 2z_2 - \overline{z_3} = (1 - 3i) + 2(2 + i) - \overline{(3 - 4i)} = 1 - 3i + 4 + 2i - (3 + 4i) = 2 - 5i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Dùng MTCT:

CMPLX Math ▲
A+2B-Conjg(C)
2-5i

1.2. Ta có:

$$z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} = (1-3i)(2+i) + (2+i)(3-4i) = (1-3i)(2-i) + (2+i)(3+4i) \\ = 2-3-7i+6-4+11i = 1+4i.$$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT:

CMPLX Math ▲
AConjg(B)+BConjg(A)
1+4i

1.3. Ta có:

$$\overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^2 \overline{z_3} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} + z_2^2 \overline{z_3} = (1+3i)(2-i)(3+4i) + (2+i)^2 (3-4i) \\ = (2+3+5i)(3+4i) + (4-1+4i)(3-4i) \\ = (5+5i)(3+4i) + (3+4i)(3-4i) = 15-20+35i+9+16 = 20+35i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
Conjg(ABC)+B^2C
20+35i

Câu 2. Tính lũy thừa $(1+i)^{2006}$ bằng

- A. $2^{1003}i$ B. $-2^{1003}i$ C. $2^{2006}i$ D. $-2^{2006}i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1+i)^{2006} = \left[(1+i)^2 \right]^{1003} = (2i)^{1003} = -2^{1003}i.$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 3. Tính lũy thừa $(2+3i)^3$ bằng

- A. $-46+9i$ B. $-4+9i$ C. $4+19i$ D. $6+12i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2+3i)^3 = 2^3 + 3.2^2.3i + 3.2.(3i)^2 + (3i)^3 = -46+9i.$

Vậy chọn đáp án A

Dùng MTCT:

CMPLX Math ▲
 $(2+3i)^3$
 $-46+9i$

Câu 4. Tính lũy thừa $\left[(4+5i)-(4+3i)\right]^5$ bằng

A. $32i$

B. $9i$

C. $19i$

D. $12i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left[(4+5i)-(4+3i)\right]^5 = (2i)^5 = 32i$.

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
 $((4+5i)-(4+3i))^5$
 $32i$

Câu 5. Tính lũy thừa $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2$ bằng

A. $-4+2\sqrt{3}i$

B. $-1-2\sqrt{6}i$

C. $-3+\sqrt{3}i$

D. $6+\sqrt{3}i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2 = 2-3-2\sqrt{2}\sqrt{3}i = -1-2\sqrt{6}i$.

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
 $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2$
 $-1-2\sqrt{6}i$

Câu 6. Tính lũy thừa $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ bằng

A. 6

B. -4

C. 4

D. 1

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{-1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1 \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án D.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
 $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
 1

Câu 7. Viết các số phức $z = \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$ dưới dạng $a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

A. $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{i\sqrt{5}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2i\sqrt{7}}{3}$

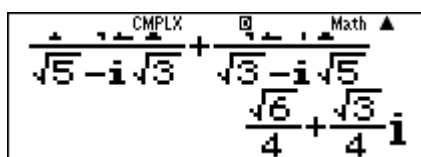
Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}} = \frac{(1-i\sqrt{2})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-i\sqrt{3})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}+i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-i\sqrt{5})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{6} + i\sqrt{3} - i\sqrt{10}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5} + i\sqrt{10} + i\sqrt{3})}{5+3} = \frac{2\sqrt{6} + 2i\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT



Câu 8. Viết các số phức $z = \frac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}}$ dưới dạng $a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

A. $-\frac{4}{133} - \frac{7i}{133}$

B. $-\frac{8}{113} + \frac{7i}{113}$

C. $-\frac{4}{23} + \frac{7i}{23}$

D. $-\frac{4}{123} - \frac{5i}{123}$

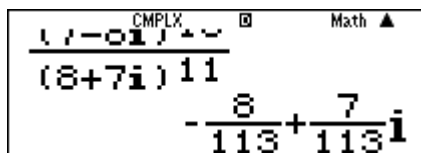
Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}} = \left(\frac{7-8i}{8+7i} \right)^{10} \frac{1}{8+7i} = \left(\frac{(7-8i)(8-7i)}{(8+7i)(8-7i)} \right)^{10} \frac{8-7i}{(8+7i)(8-7i)} \\ &= \left(\frac{56 + 56i^2 - 49i - 64i}{64 + 49} \right)^{10} \frac{8-7i}{49+64} = \left(-\frac{113i}{113} \right)^{10} \frac{8-7i}{113} \\ &= (-i)^{10} \frac{8-7i}{113} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 \frac{8-7i}{113} = -\frac{8}{113} + \frac{7i}{113}. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT



Câu 9. Tính $A = \frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$

A. i

B. i

C. $-i$

D. -1

Hướng dẫn giải

Ta có: $i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = -i$

$$\text{Do đó: } A = \frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right) = \frac{1}{2i} \left(-i + \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{-i^2 + 1}{i} \right) = \frac{2}{-2} = -1.$$

Vậy chọn đáp án D.

Dùng MTCT:

Câu 10. Tính $B = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i};$

A. $13-3i$

B. $33-31i$

C. $13-32i$

D. $3-32i$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1+1} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{33} = i^{33} = (i^2)^{16} \cdot i = i$$

Ta lại có:

- $(1-i)^{10} = \left[(1-i)^2 \right]^5 = (1+i^2-2i)^5 = (-2i)^5 = -32i$
- $(2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i} = 13-i$

$$\text{Vậy } B = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i} = i - 32i + 13 - i = 13 - 32i$$

Vậy chọn đáp án C.

Dùng MTCT:

Câu 11. Tính $C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức của cấp số nhân:

Ta có:

$$C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20} = u_1 \cdot \frac{1-q^{21}}{1-q}$$

$$= 1 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i}.$$

Ta có:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$\Rightarrow (1+i)^{21} = (1+i)^{20} \cdot (1+i) = (2i)^{10} \cdot (1+i) = -2^{10}(1+i) = -2^{10} - i \cdot 2^{10}$$

$$\text{Do đó: } C = \frac{1+2^{10}+i \cdot 2^{10}}{-i} = -2^{10} + (1+2^{10})i.$$

Câu 12. Cặp số thực x, y thỏa mãn $2x+1+(1-2y)i=2-x+(3y-2)i$ là:

A. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{3}{5}$ **B.** $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{5}$ **C.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{5}$ **D.** $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$2x+1+(1-2y)i=2-x+(3y-2)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=2-x \\ 1-2y=3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ 5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Vậy chọn đáp án **A**.

Câu 13. Cặp số thực x, y thỏa mãn $4x+3+(3y-2)i=y+1+(x-3)i$ là:

A. $x = \frac{5}{11}, y = \frac{2}{11}$ **B.** $x = -\frac{5}{11}, y = \frac{2}{11}$ **C.** $x = \frac{5}{11}, y = -\frac{2}{11}$ **D.** $x = -\frac{5}{11}, y = -\frac{2}{11}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có:

$$4x+3+(3y-2)i=y+1+(x-3)i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3=y+1 \\ 3y-2=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y=-2 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{11} \\ y=\frac{2}{11} \end{cases}.$$

Vậy chọn đáp án **B**.

Cách 2: Thử trực tiếp các kết quả {Dùng MTCT}

Cách 3:

Câu 14. Cặp số thực x, y thỏa mãn $x(3+5i)+y(1-2i)^3=7+32i$ là:

A. $x=-6; y=1$ **B.** $x=-6; y=-1$ **C.** $x=6; y=1$ **D.** $x=6; y=-1$

Hướng dẫn giải

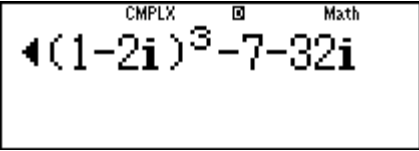
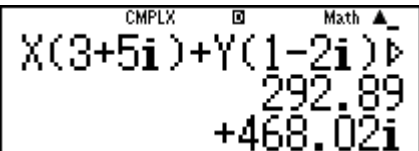
Cách 1: Ta có:

$$x(3 + 5i) + y(1 - 2i)^3 = 7 + 32i \Leftrightarrow 3x + 5xi + y(-11 + 2i) = 7 + 32i$$

$$\Leftrightarrow 3x - 11y + (5x + 2y)i = 7 + 32i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 11y = 7 \\ 5x + 2y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án C.

Cách 2: Dùng MTCT:

• Bước 1: Nhập $X(3 + 5i) + Y(1 - 2i)^3 - 7 - 32i$	
• Bước 2: Ấn CALC cho X=100, Y=0,01 Từ kết quả: 292,89 + 468,02i $\begin{matrix} 2 & & 92, & 89 & + & 4 & & 68, & 02i \\ 3x & -7 & -11y & & 5x & -32 & 2y \end{matrix}$ Ta có được hệ $\begin{cases} 3x - 7 - 11y = 0 \\ 5x - 32 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$	

Câu 15. Cặp số thực x, y thỏa mãn $\frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i}$ là:

A. $x = -1; y = -1$

B. $x = -1; y = -1$

C. $x = \frac{338}{49}; y = \frac{61}{49}$

D. $x = -1; y = 1$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có:

$$\frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i} \Leftrightarrow (x+1)(1+i) = (y-1)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow x+1+(x+1)i = y-1-(y-1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y-1 \\ x+1=-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Dùng MTCT

Câu 16. Các cặp số thực x, y thỏa mãn $\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i$ là:

A. $(x,y) = \{(0;12); (-1;15)\}$

B. $(x,y) = \{(0;2); (1;5)\}$

C. $(x,y) = \{(10;2); (10;5)\}$

D. $(x,y) = \{(1;2); (1;15)\}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} + \frac{y(1+i)}{3(1-i)(1+i)} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{x^2+1} + \frac{y}{6} + i\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6}\right) = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x^2+1} = 1 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=0 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=12 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=15 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 17. Các cặp số thực x, y thỏa mãn $(x+i)(1+yi) = (3+2i)x+1-4i$ là:

- A. $(x, y) = \{(1;1); (-1;2)\}$ B. $(x, y) = \{(1;-2); (-\frac{5}{2};4)\}$
 C. $(x, y) = \{(\frac{1}{2};2); (1;-3)\}$ D. $(x, y) = \{(1;\frac{1}{2}); (2;\frac{3}{2})\}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(x+i)(1+yi) = (3+2i)x+1-4i \Leftrightarrow x-y+(1+xy)i = 3x+1+(2x-4)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3x+1 \\ 1+xy=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 1+x(-2x-1)=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 2x^2+3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 18. Tìm điều kiện cho 2 số thực x , và y để $(x+iy)^2$ là số thực

- A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Do đó, $(x+iy)^2$ là số thực khi $2xy=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 19. Tìm điều kiện cho 2 số thực x , và y để $(x+iy)^2$ là số ảo

- A. $\begin{cases} x=0 \\ 3x=y \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=0 \\ 3x^2=y^2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=0 \\ x=3y \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=0 \\ x^2=3y^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (yi)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

Do đó, $(x+iy)^3$ là số ảo khi

$$x^3 - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 = 3y^2 \end{cases}$$

Câu 20. Tìm số thực m để bình phương của số phức $z = \frac{m+3i}{1-i}$ là số thực.

- A. $m = \pm 2$ B. $m = \pm 3$ C. $m = \pm 4$ D. $m = 5$

Hướng dẫn giải

Viết được $z^2 = \frac{-6m + (m^2 - 9)i}{2}$. Lập luận tìm được $m = \pm 3$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 21. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = iz - \bar{z}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = 3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 2i$.

Khi đó: $w = i(3 - 2i) - (3 + 2i) = -1 + i$.

Vậy, phần thực là -1 , phần ảo là 1 .

Câu 22. Cho $z = 2 + 3i$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Hãy viết dưới dạng đại số của $w = \frac{z^3 - z}{z - 1} + \left(\bar{z}\right)^2 + \bar{z}$.

A. $z = 6$

B. $z = -6$

C. $z = -6 + i$

D. $z = -6 - i$

Hướng dẫn giải

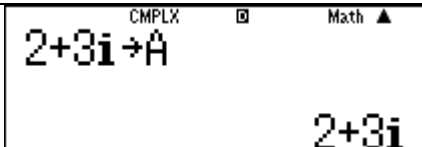
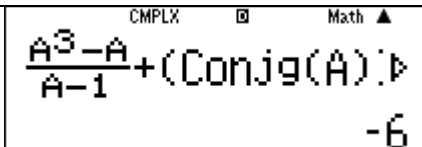
Ta có:

$$w = \frac{z^3 - z}{z - 1} + \left(\bar{z}\right)^2 + \bar{z} = \frac{z(z^2 - 1)}{z - 1} + \left(\bar{z}\right)^2 + \bar{z} = z(z + 1) + \left(\bar{z}\right)^2 + \bar{z}$$

$$\Rightarrow w = z^2 + z + \left(\bar{z}\right)^2 + \bar{z} = 2(a^2 - b^2) + 2a = -6$$

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT

Bước 1: Lưu $2 + 3i \rightarrow A$	
Bước 2: Tính $\frac{A^3 - A}{A - 1} + (\bar{A})^2 + \bar{A}$	

Câu 24. Cho $z = \frac{1+i}{1-i}$. Tính $|z^{2015}|$

A. 1

B. $z = -1$

C. $z = -1 + i$

D. $z = -1 - i$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = i \Rightarrow z^{2016} = i^{2016} = 1$$

Do đó: $|z^{2016}| = 1$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 23. Tính tổng $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2012i^{2012}$.

A. $-1006 + 1006i$

B. $1006 + 1006i$

C. $-1006 - 1006i$

D. $1006 - 1006i$

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Ta có $iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2012i^{2013}$

$$\Rightarrow S - iS = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} - 2012i^{2013}$$

Dãy số $i, i^2, i^3, \dots, i^{2012}$ là một cấp số nhân có công bội $q = i$ và có 2012 số hạng, suy ra:

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} = i \cdot \frac{1 - i^{2012}}{1 - i} = 0$$

$$\text{Do đó: } S - iS = -2012i^{2013} = -2012i \Rightarrow S = \frac{-2012i}{1 - i} = 1006 - 1006i$$

Vậy chọn đáp án D.

Cách 2. dãy số $1, x, x^2, \dots, x^{2012}$ là một cấp số nhân gồm 2013 số hạng và có công bội bằng x .

$$\text{Xét } x \neq 1, x \neq 0 \text{ ta có: } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2012} = \frac{1 - x^{2013}}{1 - x} \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2012x^{2011} = \frac{2012 \cdot x^{2013} - 2013x^{2012} + 1}{(1 - x)^2} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) cho x ta được:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2012x^{2012} = \frac{2012 \cdot x^{2014} - 2013x^{2013} + x}{(1 - x)^2} \quad (3)$$

Thay $x = i$ vào (3) ta được:

$$S = i + 2i^2 + 3i^2 + \dots + 2012i^{2012} = \frac{2012i^{2014} - 2013i^{2013} + i}{(1 - i)^2}$$

$$\text{Với } i^{2014} = -1, i^{2013} = i$$

$$\text{Vậy } S = \frac{-2012 - 2012i}{-2i} = 1006 - 1006i.$$

Câu 24. Cho α, β hai số phức liên hiệp thỏa mãn $\frac{\alpha}{\beta^2} \in \mathbb{R}$ và $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$. Tính $|\alpha|$.

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. 2

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\alpha = x + iy \Rightarrow \beta = x - iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Không giảm tính tổng quát, ta coi $y \geq 0$.

$$\text{Vì } |\alpha - \beta| = 2\sqrt{3} \text{ nên } |2iy| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}.$$

Do α, β hai số phức liên hợp nên $\alpha\beta \in \mathbb{R}$, mà $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha^3}{(\alpha\beta)^2} \in \mathbb{R}$ do đó $\alpha^3 \in \mathbb{R}$. Nhưng ta có

$$\alpha^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i \text{ nên } \alpha^3 \in \mathbb{R} \text{ khi và chỉ khi } 3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1.$$

$$\text{Vậy } |\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Câu 25. Tìm c biết a, b và c các số nguyên dương thỏa mãn: $c = (a + bi)^3 - 107i$.

A. 400

B. 312

C. 198

D. 123

Hướng dẫn giải

Ta có $c = (a + bi)^3 - 107i = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3 - 107)$. Nên c là số nguyên dương thì $3a^2b - b^3 - 107 = 0$. Hay $b(3a^2 - b^2) = 107$.

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và 107 là số nguyên tố nên xảy ra:

- $b = 107; 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{11450}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại).
- $b = 1; 3a^2 - b^2 = 107 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ (thỏa mãn). Vậy nên $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3.6.1^2 = 198$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 26. Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{z}{z+n} = 4i$. Tìm n .

A. $n = 14$

B. $n = 149$

C. 697

D. 789

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + 164i$ ta có:

$$\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow \frac{x+164i}{x+164i+n} = 4i \Leftrightarrow x+164i = -656 + 4(x+n)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -656 \\ x+n = 41 \end{cases} \Rightarrow n = 697.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là 697.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i}$. Tìm mô đun của số phức $\bar{z} + iz$

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 5

D. $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

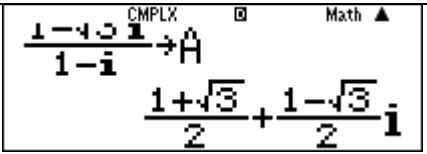
Từ $\bar{z}$ ta phải suy ra được z và thay vào biểu thức $\bar{z} + iz$ rồi tìm mô đun:

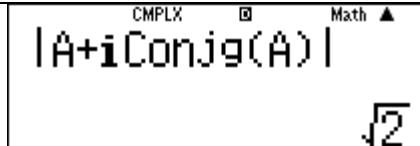
$$\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Suy ra: } z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow iz = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Do đó: $\bar{z} + iz = 1 + i \Rightarrow |\bar{z} + iz| = \sqrt{2}$. **Vậy chọn đáp án A.**

Dùng MTCT:

Bước 1: Lưu $\frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i} \rightarrow A$	
--	--

Bước 2: Tính $ A + i\bar{A} $	
--------------------------------------	--

Lời bình: Nhận thấy rằng với số phức $z = a + bi$ bất kì ta đều có $z + i\bar{z} = (1+i)(a+b)$ hay

$\frac{z + i\bar{z}}{1+i} = a + b \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$. Về phương diện hình học thì $\frac{z + i\bar{z}}{1+i}$ luôn nằm trên trục Ox khi biểu diễn trong mặt phẳng phức.

Câu 28. Tìm số thực m biết: $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ và $z\bar{z} = \frac{2-m}{2}$ (trong đó i là đơn vị ảo)

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$

Định hướng: Quan sát thấy z cho ở dạng thương hai số phức. Vì vậy cần phải đơn giản z bằng cách nhân liên hệ ở mẫu. Từ $z \Rightarrow \bar{z}$. Thay z và $\bar{z}$ vào $z\bar{z} = \frac{2-m}{2}$ ta tìm được m

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{(i-m)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2)^2 + 4m^2} = \frac{-m(1-m^2) + 2m + i(1-m^2+2m^2)}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{m(1+m^2) + i(1+m^2)}{(1+m^2)^2} = \frac{m}{1+m^2} + \frac{i}{1+m^2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{m}{1+m^2} + \frac{i}{1+m^2}$$

Như vậy:

$$z\bar{z} = \frac{2-m}{2} \Rightarrow \frac{m^2+1}{(m^2+1)^2} = -\frac{1}{2}(m-2) \Leftrightarrow \frac{1}{1+m^2} = -\frac{1}{2}(m-2) \Leftrightarrow m^3 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 29. Tìm phần thực của số phức: $z = (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:

$$\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3.$$

- A. 6 B. -8 C. 8 D. 9

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n > 3, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Phương trình } \log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9) = 3$$

$$(n-3)(n+9) = 4^3 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 9 = 0 \Leftrightarrow n = 7 (\text{do } n > 3)$$

$$z = (1+i)^7 = (1+i) \cdot \left[(1+i)^2\right]^3 = (1+i) \cdot (2i)^3 = (1+i) \cdot (-8i) = 8 - 8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 30. Cho số phức $z = \frac{m+3i}{1-i}$ ($m \in \mathbb{R}$). Tìm m , biết số phức $w = z^2$ có môđun bằng 9.

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$w = z^2 = \frac{m^2 - 9 + 6mi}{-2i} = -3m + \left(\frac{m^2 - 9}{2}\right)i \quad |w| = 9 \Leftrightarrow \sqrt{9m^2 + \left(\frac{m^2 - 9}{2}\right)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + 18m^2 + 81} = 9 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 18 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = \pm 3$

Câu 31. Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho tồn tại m

để $|z-1| \geq k$

A. $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

B. $k = \frac{\sqrt{5}+2}{2}$

C. $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $k = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $z = \frac{i-m}{-i^2+mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} \Rightarrow z-1 = \frac{1-m+i}{m-i}$

$$|z-1| = \frac{|1-m+i|}{|m-i|} = \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}} \Rightarrow |z-1| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \frac{m^2-2m+2}{m^2+1} \geq k^2 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{m^2-2m+2}{m^2+1}$

Ta có: $f'(m) = \frac{2(m^2-m+1)}{(m^2+1)^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta có $\min f(m) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ Yêu cầu bài toán $k^2 \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị phải tìm.

Vậy chọn đáp án C.

CHỦ ĐỀ 2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ PHỨC

Phương pháp

- Trong mặt phẳng phức, số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bằng :

- Điểm $M(x; y)$, kí hiệu $M(z)$
- Vecto $\overrightarrow{OM} = (x; y)$
- Vecto $\vec{u} = (x; y)$

- Biểu diễn hình học của $z, -z, \bar{z}$

$M(z)$ và $M(-z)$ đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

$M(z)$ và $M(\bar{z})$ đối xứng với nhau qua trục Ox.

- Biểu diễn hình học của $z + z', z - z', kz$ ($k \in \mathbb{R}$)

Gọi $M, \vec{u}$ lần lượt biểu diễn số phức z ; $M', \vec{v}$ biểu diễn số phức z' . Ta có:

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ và $\vec{u} + \vec{v}$ biểu diễn số phức $z + z'$;

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$ và $\vec{u} - \vec{v}$ biểu diễn số phức $z - z'$;

$k\overrightarrow{OM}$, $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz .

- Với M, A, B lần lượt biểu diễn số phức z, a, b thì :

$$OM = |z|; AB = |b - a|.$$

I. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng biểu diễn các số phức a, b, c . Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G. Các điểm M, G, D lần lượt biểu diễn các số phức m, g, d .

a) Tính các số phức m, g, d theo a, b, c .

b) Nếu thêm giả thiết $|a| = |b| = |c|$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu và chỉ nếu $a + b + c = 0$.

Giải

a) M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(a + b)$.

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow g = \frac{1}{3}(a + b + c)$.

D là điểm đối xứng của A qua G $\Leftrightarrow G$ là trung điểm của AD

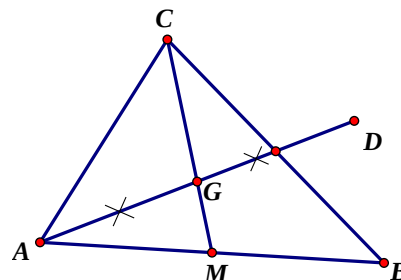
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow 2g = a + d \Leftrightarrow d = 2g - a$$

$$\Leftrightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{3}(a + b + c) - a$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a.$$

b) Giả thiết $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow O$ là tâm đường



tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Như vậy tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$.

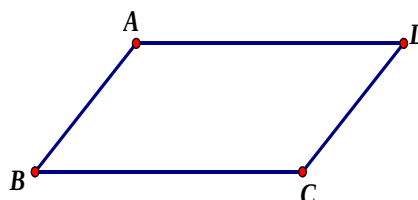
Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 2 - 2i, b = -1 + i, c = 5 + mi$ ($m \in \mathbb{R}$).

- a) Tìm số phức d (biểu diễn điểm D);
b) Định m sao cho ABCD là hình chữ nhật.

Giải

a) ABCD là hình bình hành

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d - c = a - b \\ \Leftrightarrow d &= a + c - b \\ \Leftrightarrow d &= 2 - 2i + 5 + mi - (-1 + i) \\ \Leftrightarrow d &= 8 + (m - 3)i. \end{aligned}$$



b) ABCD là hình chữ nhật

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow AC &= BD \Leftrightarrow |c - a| = |d - b| \\ \Leftrightarrow |5 + mi - 2 + 2i| &= |8 + (m - 3)i + 1 - i| \Leftrightarrow |3 + (m + 2)i| = |9 + (m - 4)i| \\ \Leftrightarrow |3 + (m + 2)i|^2 &= |9 + (m - 4)i|^2 \Leftrightarrow 3^2 + (m + 2)^2 = 9^2 + (m - 4)^2 \\ \Leftrightarrow 9 + m^2 + 4m + 4 &= 81 + m^2 - 8m + 16 \Leftrightarrow 12m = 84 \\ \Leftrightarrow m &= 7. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức :

$$z, \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right) z \text{ và } \frac{i}{\sqrt{3}} z.$$

Chứng minh rằng:

- a) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác OMA vuông tại M;
b) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác MAB là tam giác vuông;
c) $\forall z \in \mathbb{C}$, tứ giác OMAB là hình chữ nhật.

Giải

a) Đặt $a = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right) z$ và $b = \frac{i}{\sqrt{3}} z$.

Ta có: $OM = |z|$

$$OA = |a| = \left| \frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right| |z| = \left| 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right| |z| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$MA = |a - z| = \left| \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) z - z \right| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|.$$

$$\text{Nhận thấy: } OM^2 + MA^2 = |z|^2 + \frac{1}{3} |z|^2 = \frac{4}{3} |z|^2 = OA^2, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Vậy tam giác OMA vuông tại M.

b) Ta có:

$$MA = |a - z| = \left| \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) z - z \right| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} \right| |z| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|$$

$$MB = |b - z| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z - z \right| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} - 1 \right| |z| = |z| \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$AB = |b - a| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z - \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) z \right| = |z|.$$

$$\text{Ta thấy } MA^2 + AB^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |z| \right)^2 + |z|^2 = \frac{1}{3} |z|^2 + |z|^2 = MB^2 \text{ đúng } \forall z \in \mathbb{C}.$$

Vậy tam giác MAB vuông tại A với mọi $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Xét tam giác MOB, ta có:

$$OB = |b| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z \right| = \frac{|z|}{\sqrt{3}}; OM = |z| \text{ và } MB = |b - z| = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|.$$

$$\text{Suy ra: } OM^2 + OB^2 = |z|^2 + \frac{4|z|^2}{3} = MB^2.$$

Vậy tam giác MOB vuông tại O với mọi $\forall z \in \mathbb{C}$.

Tứ giác OMAB có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Lưu ý:

- Ở trên ta sử dụng tính chất $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật

Ví dụ 4. Gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức $a = -1 - i, b = -i, c = 1 + ki, (k \in \mathbb{R})$.

- Định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng;
- Xét hàm số $w = f(z) = z^2$. Đặt $a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c)$. Tính a', b', c'
- Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức a', b', c' . Định k để A', B', C' là ba điểm thẳng hàng;
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z' . Chứng minh rằng $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo.

Áp dụng: Tính k để tam giác A'B'C' vuông tại A'.

Giải

a) **Định hướng:** Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \alpha \overrightarrow{BC} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow a - b = \alpha(c - b)$

$$\Leftrightarrow \frac{a - b}{c - b} = \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a - b}{c - b} \text{ là số thực.}$$

Như vậy, ta giải bài toán này như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a - b}{c - b} &= \frac{-1 - i - i}{1 + ki - i} = \frac{-1 - 2i}{1 + (k-1)i} = \frac{(-1 - 2i)(1 - (k-1)i)}{[1 + (k-1)i][1 - (k-1)i]} \\ &= \frac{-1 - 2i + (k-1)i - 2(k-1)}{1 + (k-1)^2} = \frac{1 - 2k + (k-3)i}{1 + (k-1)^2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{a-b}{c-b}$ là số thực $\Leftrightarrow k-3=0 \Leftrightarrow k=3$.

b) Ta có

$$a' = f(a) = a^2 = (-1-i)^2 = (1+i)^2 = 1+i^2+2i = 2i$$

$$b' = f(b) = b^2 = i^2 = -1$$

$$c' = f(c) = c^2 = (1+ki)^2 = 1-k^2+2ki.$$

c) **Định hướng**: Trước hết ta cần tìm điều kiện để ba điểm A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow a', b', c'$ đôi một khác nhau (*). Để giải (*) ta dùng phương pháp “phần bù”. Kết hợp điều kiện ba điểm A', B', C' thẳng hàng $\Leftrightarrow \overline{B'C'} = \alpha \overline{B'A'}, (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow c'-b' = \alpha(a'-b') \Leftrightarrow \frac{c'-b'}{a'-b'}$ là số thực.

Từ đó ta có lời giải sau:

Hiển nhiên $a' \neq b'$.

$$\text{Ta có } a' = c' \Leftrightarrow 2i = 1-k^2+2ki \Leftrightarrow \begin{cases} 1-k^2=0 \\ 2k=2 \end{cases} \Leftrightarrow k=1$$

Suy ra $a' \neq c' \Leftrightarrow k \neq 1$.

$$\text{Ta có } b' = c' \Leftrightarrow -1 = 1-k^2+2ki \Leftrightarrow \begin{cases} -1=1-k^2 \\ 2k=0 \end{cases} \Leftrightarrow k=\emptyset. \text{ Vậy } b' \neq c'.$$

Tóm lại 3 điểm A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow k \neq 1$.

Ta có

$$\frac{c'-b'}{a'-b'} = \frac{2-k^2+2ki}{1+2i} = \frac{(2-k^2+2ki)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1}{5} [2-k^2+4k+(-4+2k^2+2k)i]. \text{ Suy ra } \frac{c'-b'}{a'-b'} \text{ là số thực}$$

$$\Leftrightarrow 2k^2+2k-4=0 \Leftrightarrow k=1, k=-2 \Leftrightarrow k=-2 \text{ (vì } k \neq 1).$$

Vậy A', B', C' là 3 điểm phân biệt thẳng hàng $\Leftrightarrow k=-2$.

d) Đặt $z=x+iy, z'=x'+iy'$, và $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt biểu diễn số phức $z, z' \Rightarrow \vec{u}=(x;y)$ và $\vec{v}=(x';y')$.

$$\text{Ta có } \frac{z}{z'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')} = \frac{xx'+yy'+(x'y-y'x)i}{x'^2+y'^2}.$$

Như vậy $\frac{z}{z'}$ là số ảo $xx'+yy'=0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Xem tam giác $A'B'C'$ ta có $\overline{A'C'}$ biểu diễn các số phức $z=c'-a'=1-k^2+(2k-2)i$ và $\overline{A'B'}$ biểu diễn

$$z'=b'-a'=-1-2i$$

$$\begin{aligned} \text{số phức } \frac{z}{z'} &= \frac{(1-k^2)+(2k-2)i}{-1-2i} = \frac{[(1-k^2)+(2k-2)i](-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} \\ &= \frac{1}{5} [-1+k^2-2(2k-2)+(2-2k^2-2k+2)i]. \end{aligned}$$

Theo chứng minh trên: tam giác $A'B'C'$ vuông tại $A' \Leftrightarrow \overline{A'C'} \perp \overline{A'B'} \Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo

$$\Leftrightarrow -1+k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow k^2-4k+3=0 \Leftrightarrow k=1 \text{ (loại) và } k=3 \Leftrightarrow k=3.$$

Ví dụ 5. Cho số phức $z = m + (m - 3)i, m \in \mathbb{R}$

- Tìm m để biểu diễn số phức nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ hai $y = -x$
- Tìm m để biểu diễn số phức nằm trên Hyperbol $y = -\frac{2}{x}$
- Tìm m để khoảng cách của điểm biểu diễn số phức đến gốc tọa độ nhỏ nhất.

Giải

- Gọi $M(m; m - 3)$ là điểm biểu diễn số phức $z = m + (m - 3)i$

M nằm trên đường thẳng $y = -x \Leftrightarrow m - 3 = -m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

- M nằm trên Hyperbol $y = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow m - 3 = -\frac{2}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- Ta có:

$$OM = \sqrt{m^2 + (m - 3)^2} = \sqrt{2m^2 - 6m + 9} = \sqrt{2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow OM_{\min} = \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 6. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$\frac{4i}{i-1}; \quad (1-i)(1+2i); \quad \frac{2+6i}{3-i}$$

- Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.
- Tìm số phức biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Giải

- Ta có

$$\frac{4i}{i-1} = \frac{4i(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = 2 - 2i \Rightarrow A(2; -2)$$

$$(1-i)(1+2i) = 3 + i \Rightarrow B(3; 1)$$

$$\frac{2+6i}{3-i} = 2i \Rightarrow C(0; 2).$$

$$\text{Nhận thấy: } \begin{cases} BA = BC \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases} \Rightarrow ABC \text{ vuông cân tại } B.$$

- Gọi D là đỉnh thứ tư của hình vuông $ABCD$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (-1; -3) = (x_D; y_D - 2) \Leftrightarrow D(-1; -1).$$

Vậy D biểu diễn số phức $-1 - i$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng phức cho các điểm: O (gốc tọa độ), A điểm biểu diễn số 1 , B điểm biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Chứng minh rằng: Tam giác OAB và tam giác $OA'B'$ đồng dạng.

Giải

Vì z không phải là số thực nên các điểm O, A, B theo thứ tự biểu diễn các số $0, 1, z$ là các đỉnh của tam giác. Với $z' \neq 0$, xét các điểm A', B' theo thứ tự biểu diễn các số z', zz' thì ta có:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{|z'|}{1} = |z'|, \frac{OB'}{OB} = \frac{|zz'|}{|z|} = |z'|, \frac{A'B'}{AB} = \frac{|zz' - z'|}{|z - 1|} = \frac{|z'(z - 1)|}{|z - 1|} = |z'|$$

Vậy tam giác $OA'B'$ đồng dạng với tam giác OAB .

Lưu ý: Ở trên ta đã sử dụng các tính chất

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- Dựa vào định nghĩa tam giác đồng dạng

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \text{ thì tam giác } OA'B' \text{ đồng dạng với tam giác } OAB.$$

Ví dụ 8. Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số:

$$-1+i, \quad -1-i, \quad 2i, \quad 2-2i.$$

a) Tìm các số z_1, z_2, z_3, z_4 theo thứ tự biểu diễn các vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$.

b) Tính $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_3}{z_4}$ và từ đó suy ra A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Tâm đường tròn biểu diễn số phức nào?

Giải

a) Ta có: $A(-1;1), B(-1;-1), C(0;2), D(2;-2)$

Lúc đó: $\overrightarrow{AC} = (1,1), \overrightarrow{AD} = (3;-3), \overrightarrow{BC} = (1,3), \overrightarrow{BD} = (3,-1)$

Do đó: $z_1 = 1+i, z_2 = 3-3i, z_3 = 1+3i, z_4 = 3-i$.

b) Ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3-3i} = \frac{1}{3}i \text{ là một số ảo nên } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ hay } AC \perp AD \quad (1)$$

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{1+3i}{3-i} = i \text{ là số ảo nên } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ hay } BC \perp BD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A, B, C, D nội tiếp đường tròn đường kính CD . Do đó, tâm là trung điểm của CD nên nó biểu diễn số phức $\frac{2i + (2-2i)}{2} = 1$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Gọi A, B theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số z khác 0 và $z' = \frac{1+i}{2}z$. Lúc đó, tam giác OAB là tam giác gì

A. Tam giác cân

B. Tam giác đều

C. Tam giác vuông

D. Tam giác vuông cân

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ thì ta có $A(x;y)$. Vì $z \neq 0$ nên $x^2 + y^2 > 0$.

$$\text{Ta có } z' = \frac{1+i}{2}z = \frac{1}{2}(1+i)(x+yi) = \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}i.$$

Vậy B có tọa độ: $B\left(\frac{x-y}{2}; \frac{x+y}{2}\right)$

Ta lại có: $OA^2 = x^2 + y^2$; $OB^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$

$AB^2 = \left(x - \frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} OB = AB \\ OA^2 = OB^2 + AB^2 \end{cases}$. Vậy tam giác OAB vuông cân tại B.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 2. Các điểm A, B, C và A', B', C' tương ứng biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 và z'_1, z'_2, z'_3 (trong đó A, B, C và A', B', C' không thẳng hàng). Hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi

A. $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3$

B. $|z_1| + |z_2| + |z_3| = |z'_1| + |z'_2| + |z'_3|$

C. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z'_1 + z'_2 + z'_3|$

D. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z'^2_1 + z'^2_2 + z'^2_3$

Hướng dẫn giải

Đặt

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \\ z_3 = x_3 + y_3 i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x_1; y_1) \\ B(x_2; y_2) \\ C(x_3; y_3) \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Trọng tâm: $G'\left(\frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{3}; \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3}{3}\right)$

Nếu $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = y'_1 + y'_2 + y'_3 \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'$

Vậy hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 3. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $4 + (3 + \sqrt{3})i$; $2 + (3 + \sqrt{3})i$; $1 + 3i$; $3 + i$. Chọn khẳng định đúng

A. ABCD là hình bình hành

B. $AD = 2CB$

C. D là trọng tâm của tam giác ABC

D. Tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn

Hướng dẫn giải

Ta có: $A(4, 3 + \sqrt{3})$; $B(2, 3 + \sqrt{3})$; $C(1, 3)$; $D(3, 1)$.

Ta xét các mệnh đề:

- ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Nhận thấy $\overrightarrow{AB} = (-2; 0) \neq \overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Như vậy ta loại A

- $AD = \sqrt{(3-4)^2 + (1-(3+\sqrt{3}))^2} \approx 3,86$; $CB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$AD \neq 2CB$. Như vậy ta loại B

- Ta thấy: $\frac{4+2+1}{3} = \frac{7}{3} \neq 3$

Suy ra: D không là trọng tâm của tam giác ABC

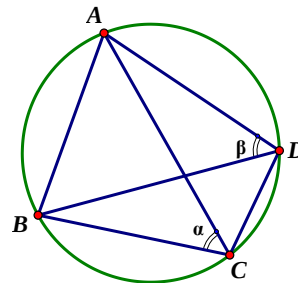
Vậy chọn đáp án D.

Lời bình: Để chứng minh D đúng ta chứng minh như sau:

Đặt $ACB = \alpha$ thì $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Đặt $ADB = \beta$ thì $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{DB}| \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\alpha = \beta = 30^\circ \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn



Chú ý: Cho hai đường thẳng a, b có vectơ chỉ phương là $\vec{a}, \vec{b}$. Gọi $\varphi; \alpha$ lần lượt là góc của hai vectơ

$\vec{a}, \vec{b}$ và hai đường thẳng a, b . Lúc đó: $\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$; $\cos \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$;

Chú ý: $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$; $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Câu 4. Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 1, b = -1 + \alpha i$ và $c = b^2$.

Câu 4.1. Xác định α sao cho A, B, C là ba đỉnh của một tam giác

- A.** $\alpha \neq 1$ **B.** $\alpha \neq -1$ **C.** $\alpha = \pm 1$ **D.** $\alpha \neq 0$

Câu 4.2. Khi A, B, C là ba đỉnh của tam giác. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

- A.** Tam giác cân **B.** Tam giác đều
C. Tam giác vuông **D.** Tam giác vuông cân

Câu 4.3. Tìm số phức d biểu diễn bởi D sao cho ABCD là hình chữ nhật

- A.** $d = 1 - \alpha^2 - \alpha i$. **B.** $d = -1 - \alpha^2 - \alpha i$. **C.** $d = -1 + \alpha^2 - \alpha i$. **D.** $d = -1 - \alpha^2 + \alpha i$.

Hướng dẫn giải

Câu 4.1. Ta có:

$$b - a = -2 + \alpha i \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; \alpha)$$

$$c - a = -\alpha^2 - 2\alpha i \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-\alpha^2; -2\alpha)$$

$$c - b = 2 - \alpha^2 - 3\alpha i \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2 - \alpha^2; -3\alpha)$$

Điều kiện là A, B, C phân biệt và không thẳng hàng $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 4.2. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$. Vậy tam giác ABC vuông.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 4.3. $d = -1 - \alpha^2 - \alpha i$. **Vậy chọn đáp án B**

Câu 5. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3 . Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào?

A. $z_1 + z_2 + z_2$.

B. $-z_1 - z_2 - z_2$

C. $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_2)$

D. $-\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_2)$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_2 nên G biểu diễn số phức $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 6. Xét ba điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

A. $z_1 = z_2 = z_3$

B. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

C. $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$

D. $z_1^2 = z_2^2 = z_3^2$

Hướng dẫn giải

Ba điểm A, B, C theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O (O là gốc tọa độ). Tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi trọng tâm G của nó trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tức $G \equiv O$ hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Câu 7. Cho M, N là hai điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Tam giác OMN là tam giác gì?

A. Tam giác cân

B. Tam giác đều

C. Tam giác vuông

D. Tam giác vuông cân

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Rightarrow \begin{cases} z_2^2 = z_1(z_2 - z_1) \\ z_1^2 = z_2(z_1 - z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_2|^2 = |z_1||z_2 - z_1| \\ |z_1|^2 = |z_2||z_2 - z_1| \end{cases} \quad (*)$$

Vì $z_1, z_2 \neq 0$ nên $|z_1|, |z_2| \neq 0$

$$\text{Từ (*) ta có: } |z_2 - z_1| = \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$$

$$\text{Do đó } |z_2 - z_1| = |z_1| = |z_2|$$

$$\text{Mà } OM = |z_1|; ON = |z_2|; MN = |z_2 - z_1|$$

Vậy tam giác OMN đều.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 8. Cho ba điểm A, B, C biểu diễn các số phức $a = 1 + i, b = a^2$ và $c = x - i, (x \in \mathbb{R})$.

Tìm x sao cho

Câu 8.1. Tam giác ABC vuông tại B

A. $x = -1$

B. $x = -2$

C. $x = -3$

D. $x = -5$

Câu 8.2. Tam giác ABC cân tại C

A. $x = -7$

B. $x = -2$

C. $x = -3$

D. $x = -5$

Hướng dẫn giải

Câu 8.1. Ta có: $a = 1 + i \Rightarrow A(1;1)$

Mặt khác, theo đề thì $b = a^2 = (1+i)^2 = 2i \Rightarrow B(0;2)$

$c = x - i, (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow C(x; -1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1), \overrightarrow{BC} = (x;-3)$

Để tam giác ABC vuông tại B thì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 8.2. Tam giác ABC cân tại C nên $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 9. Cho $\vec{u}, \vec{v}$ là biểu diễn của hai số phức $1 + 3i$ và $3 - 2i$. Gọi $\vec{x}$ là biểu diễn của số phức $6 + 4i$.

Hãy phân tích $\vec{x}$ qua $\vec{u}, \vec{v}$

A. $\vec{x} = -\frac{24}{11}\vec{u} - \frac{14}{11}\vec{v}$

B. $\vec{x} = \frac{24}{11}\vec{u} - \frac{14}{11}\vec{v}$

C. $\vec{x} = \frac{24}{11}\vec{u} + \frac{14}{11}\vec{v}$

D. $\vec{x} = -\frac{24}{11}\vec{u} + \frac{14}{11}\vec{v}$

Giải

Ta có $\vec{u} = (1;3), \vec{v} = (3;2), \vec{x} = (6;4)$

Giả sử $\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} m + 3n = 6 \\ 3m - 2n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{24}{11} \\ n = \frac{14}{11} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \frac{24}{11}\vec{u} + \frac{14}{11}\vec{v}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 10. Tìm các điểm biểu diễn của số phức z biết điểm biểu diễn của các số phức z, z^2, z^3 lập thành

Câu 10.1. Tam giác vuông tại A

A. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = -1$.

B. Quỹ tích của z là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

C. Quỹ tích của z là đường elip $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$.

D. Quỹ tích của z là Parabol $y = \frac{1}{2}x^2$

Câu 10.2. Tam giác vuông tại B

A. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = 0$.

B. Quỹ tích của z là đường thẳng $y = 0$

C. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = 0$, trừ gốc tọa độ

D. Quỹ tích của z là đường thẳng $y = 0$, trừ gốc tọa độ

Câu 10.3 Tam giác vuông tại C

A. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = 2$

B. Quỹ tích của z là đường thẳng $y = 1$

C. Quỹ tích của z là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

D. Quỹ tích của z là hai đường thẳng $y=0, x=0$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) và gọi A, B, C là các điểm biểu diễn tương ứng của z, z^2, z^3

Vì A, B, C tạo thành một tam giác nên phải có: $z \neq z^2 \neq z^3 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z \neq 1 \\ z \neq -1 \end{cases}$

Khi đó $AB = |z^2 - z|, BC = |z^3 - z^2|, AC = |z^3 - z|$.

Câu 10.1. Tam giá ABC vuông tại A ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$|z^2 - z|^2 + |z^3 - z|^2 = |z^3 - z^2|^2 \Leftrightarrow |z^2 - z|^2 + |z^2 - z|^2 \cdot |z + 1|^2 = |z|^2 \cdot |z^2 - z|^2$$

Do A, B, C là ba điểm phân biệt nên từ đẳng thức trên ta có:

$$1 + |z + 1|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow 2 + |z|^2 + z + \bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow z + \bar{z} = -2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Trong trường hợp này quỹ tích của z là đường thẳng $x = -1$.

Vậy chọn đáp án A.

Lưu ý: Ta dễ dàng chứng minh được $|z + 1|^2 = |z|^2 + z + \bar{z} + 1$

Câu 10.2. Tam giá ABC vuông tại B hay $BA^2 + BC^2 = AC^2$

Tương tự như trên ta có quỹ tích của z là đường thẳng $x = 0$ trừ gốc tọa độ.

Vậy chọn đáp án C.

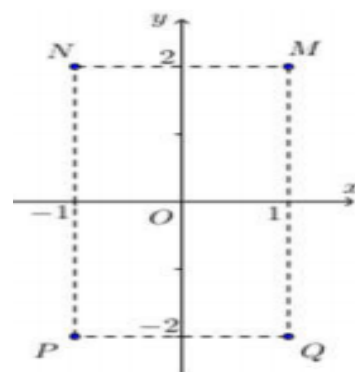
Câu 10.3. Tam giá ABC vuông tại C hay $CA^2 + CB^2 = AB^2$

Tương tự như trên ta có quỹ tích của z là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 11. (Đề minh họa của bộ). Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?

- A.** Điểm P . **B.** Điểm Q .
C. Điểm M . **D.** Điểm N .



Hướng dẫn giải

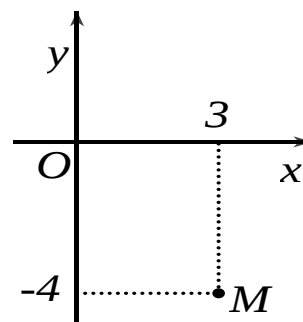
Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) Khi đó: $(1+i)z = 3-i \Leftrightarrow (x-y-3) + (x+y+1)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow Q(1; -2).$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 12. (Đề thử nghiệm lần 1 của bộ). Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
- B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Hướng dẫn giải

Vậy chọn đáp án C.

CHỦ ĐỀ 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp

- Giả sử các điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z, a, b .
 - $|z-a|=|z-b| \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của đoạn AB .
 - $|z-a|+|z-b|=k, (k \in \mathbb{R}, k>0, k>|a-b|) \Leftrightarrow MA+MB=k$
 $\Leftrightarrow M$ thuộc elip (E) nhận A, B là hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng k .
- Giả sử M và M' lần lượt biểu diễn các số phức z và $w=f(z)$.
 Đặt $z=x+iy$ và $w=u+iv (x, y, u, v \in \mathbb{R})$.
 Hệ thức $w=f(z)$ tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa x, y, u, v
 - Nếu biết một hệ thức giữa x, y , ta tìm được một hệ thức giữa u, v và suy ra được tập hợp các điểm M' .
 - Nếu biết một hệ thức giữa u, v ta tìm được một hệ thức giữa x, y và suy ra được tập hợp các điểm M .

I. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Đường thẳng}

a) $|z+i|=|z-i|$; b) $\left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1$; c) $z_0 z + \overline{z_0 z} + 1 = 0$ với $z_0 = 1-i$.

Giải

a) **Cách 1.** Đặt $a=-i$ và $b=i$.

Gọi $A(0;-1)$ và $B(0;1)$ lần lượt biểu diễn các số phức a và b , suy ra

$$|z+i|=|z-a|=MA \text{ và } |z-i|=|z-b|=MB.$$

Ta có $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB , đó chính là trục Ox .

Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox .

Cách 2. Đặt $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\begin{aligned} |z+i|=|z-i| &\Leftrightarrow |x+yi+i|=|x+yi-i| \Leftrightarrow |x+(y+1)i|=|x+(y-1)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = x^2+(y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4y=0 \Leftrightarrow y=0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox .

b) **Cách 1.** Ta có:

$$\left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z+1-3i|=|z-1+i|, (1)$$

Đặt $a=-1+3i$ biểu diễn bởi các điểm $A(-1;3)$ và $b=1-i$ được biểu diễn bởi điểm $B(1;-1)$. Ta có (1)

$$\Leftrightarrow |z-a|=|z-b| \Leftrightarrow MA=MB.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực đoạn AB .

Cách 2. Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Lúc đó:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z+1-3i| = |z-1+i| \Leftrightarrow |x+yi+1-3i| = |x+yi-1+i| \\ &\Leftrightarrow |x+1+(y-3)i| = |x-1+(y+1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6y + 10 = -2x + 2y + 2 \Leftrightarrow 4x - 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Vậy tập điểm M là đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$.

Lời bình: Ở trên ta đã sử dụng công thức $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Phương trình đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$ chính

là phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c) Với $z_0 = 1 - i$, đặt $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có:

$$z_0 \cdot z = (1-i)(x+iy) = x+y+(y-x)i; \quad \overline{z_0 \cdot z} = x+y-(y-x)i.$$

$$\text{Nhu vậy } z_0 z + \overline{z_0 z} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x+y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0.$$

Tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x + 2y + 1 = 0$.

Ví dụ 2. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Đường tròn }

$$\text{a) } |z - (3 - 4i)| = 2; \quad \text{b) } |z - i| = |(1+i)z|$$

$$\text{c) } |z|^2 + 2iz + 2i^3 \bar{z} = 0; \quad \text{d) } |2iz - 1| = \sqrt{5}.$$

Giải

a) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Lúc đó:

$$\begin{aligned} |z - (3 - 4i)| = 2 &\Leftrightarrow |x + yi - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |(x-3) + (y+4)i| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề bài là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$.

b) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Lúc đó:

$$\begin{aligned} |z - i| = |(1+i)z| &\Leftrightarrow |x + yi - i| = |(1+i)(x+iy)| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x-y) + (x+y)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề bài là đường tròn tâm $I(0; -1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.

$$\text{c) Ta có } |z|^2 + 2iz + 2i^3 \bar{z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + 2iz - 2i \bar{z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + 2i(z - \bar{z}) = 0 \quad (1)$$

Giả sử $z = x + yi$, thay vào (1) ta được:

$$x^2 + y^2 + 2i(x + iy - x + iy) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; 2)$, bán kính $R = 2$.

d) Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Suy ra:

$$\begin{aligned} |2iz - 1| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow |2i(x + yi) - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-2y - 1 + 2xi| = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(-2y - 1)^2 + (2x)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức đã cho là một đường tròn có tâm $I\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Elip}:

$$|z - 1| + |z + 1| = 4.$$

Giải

Đặt $a = 1$ và $b = -1$, lần lượt biểu diễn bởi các điểm $A(1;0)$ và $B(-1;0)$.

$$\text{Ta có } |z - 1| + |z + 1| = 4 \Leftrightarrow |z - a| + |z - b| = 4 \Leftrightarrow MA + MB = 4.$$

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) nhận A, B là hai tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 4.

Ví dụ 4. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Áo thực}

$$\text{a) } \frac{2z+1}{z-1} \text{ là số ảo; } \quad \text{b) } \frac{z+1}{z-2i}, (z \neq 2i) \text{ là số thực.}$$

Giải

a) Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Với $z \neq 1$, ta có:

$$\frac{2z+1}{z-1} = \frac{2x+2yi+1}{x+iy-1} = \frac{(2x+1+2yi)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{(2x+1)(x-1)+2y^2+i[2y(x-1)-y(2x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\frac{2z+1}{z-1} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \text{phần thực của } \frac{2z+1}{z-1} \text{ bị triệt tiêu}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)+2y^2=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1+2y^2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{x}{2}+y^2-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\right)+y^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C), tâm $I\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{3}{4}$, bỏ đi điểm $A(1;0)$.

b) Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Với $z \neq 2i$, ta có:

$$\frac{z+1}{z-2i} = \frac{x+1+iy}{x+(y-2)i} = \frac{(x+1+iy)(x-(y-2)i)}{(x+(y-2)i)(x-(y-2)i)} = \frac{x(x+1)+y(y-2)+i[xy-(x+1)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$$

$$\frac{z+1}{z-2i} \text{ là số thực} \Leftrightarrow \text{phần ảo bị triệt tiêu}$$

$$\Leftrightarrow xy-(x+1)(y-2)=0 \Leftrightarrow xy-(xy-2x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+2.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $y = 2x + 2$, bỏ đi điểm A(0;2) vì $z \neq 2i$.

Ví dụ 5. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $z' = 2z + 3 - i$, với $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$

Định hướng: Đặt $\begin{cases} z = a + bi \\ z' = x + yi \end{cases} (a, b, x, y \in \mathbb{R})$

$$\text{Khi đó } z' = 2z + 3 - i \Leftrightarrow x + yi = (2a + 3) + (2b - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = 2a + 3 \\ y = 2b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x-3}{2} \\ b = \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

Bài toán yêu cầu tìm điểm biểu diễn z' nên cái sau cùng ta cần đưa về một biểu thức liên hệ x, y .

Trước hết, từ biểu thức $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$ ta biến đổi về bất đẳng thức theo a, b . Sau đó thế

$a = \frac{x-3}{2}, b = \frac{y+1}{2}$ ta được biểu thức chứa x, y .

Giải

Đặt $\begin{cases} z = a + bi \\ z' = x + yi \end{cases} (a, b, x, y \in \mathbb{R})$

$$\text{Khi đó } z' = 2z + 3 - i \Leftrightarrow x + yi = (2a + 3) + (2b - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = 2a + 3 \\ y = 2b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x-3}{2} \\ b = \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

Theo đề, ta có:

$$\begin{aligned} |3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9 &\Leftrightarrow 9a^2 + (3b + 1)^2 \leq a^2 + b^2 + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 3b - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + \frac{3}{2}(y+1) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 \leq \frac{73}{16} \end{aligned}$$

Vậy quỹ tích biểu diễn số phức z' là hình tròn có tâm $I\left(3; \frac{-7}{4}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{73}}{4}$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Tìm tập hợp biểu diễn số phức $w = 2z - i$.

Giải

$$\text{Gọi } w = x + yi, \text{ với } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Ta có: } w = 2z - i \Leftrightarrow z = \frac{w+i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{x}{2} + \frac{y+1}{2}i \Rightarrow z - 1 = \frac{x-2}{2} + \frac{y+1}{2}i$$

$$\text{Theo bài ra: } |z - 1| = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 4$.

Bình luận: Hầu hết các bài toán số phức đều làm theo cách tự nhiên như lời giải trên (gọi $w = x + yi$). Tuy nhiên các em cũng có thể tham khảo thêm cách sau:

$$w = 2z - i \Leftrightarrow w + i - 2 = 2(z - 1) \Leftrightarrow |w - (2 - i)| = 2|z - 1| = 4 \Rightarrow \text{tập hợp các điểm } w \text{ là đường tròn có tâm } (2; -1), \text{ bán kính } 4 \text{ trong mặt phẳng phức.}$$

Ví dụ 7. Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn:
 $1 < |z - i| < 2$. {Hình vành khăn}

Giải

Giả sử số phức z có dạng: $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } |z - i| = |x + (y - 1)i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$\text{Do đó: } 1 < |z - i| < 2 \Leftrightarrow 1 < |z - i|^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < x^2 + (y - 1)^2 < 4$$

Gọi $(C_1), (C_2)$ là hai đường tròn tâm $I(0;1)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 1, R_2 = 2$. Vậy tập hợp các điểm cần tìm là phần nằm giữa hai đường tròn $(C_1), (C_2)$.

Ví dụ 8. Tìm tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện
 $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$

Giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$\text{Khi đó } 2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = |2(y + 1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(y + 1)^2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Vậy tập hợp điểm M là parabol $(P): y = \frac{x^2}{4}$.

Ví dụ 9. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ta được:

$$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow x + yi + 3x - 3yi = 2\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ -2y = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z cần tìm là phần đường thẳng $y = -\sqrt{3}x$ với $x \geq 0$.

Ví dụ 10. Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương với $z \neq i$;

b) $z^2 = (\bar{z})^2$

c) $z^2 + 2z + 5 \in \mathbb{R}^+$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1$.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2xi}{x^2 + (y-1)^2}$$

$\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x=0 \\ x^2+y^2-1>0 \\ x^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ |y|>1 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm phải tìm là hai tia Ay và $A'y'$ trên trục tung trừ hai điểm $A(0;1)$ và $A'(0;-1)$.

b) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$\begin{aligned} z^2 = (\bar{z})^2 &\Leftrightarrow (x+yi)^2 = (x-yi)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \\ &\Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là các trục tọa độ.

c) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó:

$$z^2 + 2z + 5 = (x+yi)^2 + 2(x+yi) + 5 = x^2 - y^2 + 2x + 5 + 2y(x+1)i$$

$$\text{Để } z^2 + 2z + 5 \in \mathbb{R}^+ \text{ thì } \begin{cases} 2y(x+1) = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x + 5 > 0 \\ x = -1 \\ y^2 < 4 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa đề bài là $\begin{cases} x = -1 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$.

d) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1 &\Leftrightarrow \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z-2| > 7 \\ &\Leftrightarrow |x+yi-2| > 7 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > 49 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm thỏa mãn bài toán nằm ngoài hình tròn tâm $I(2;0)$, bán kính $R=7$.

Ví dụ 11. Gọi M và M' là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \frac{1}{z}, (z \neq 0)$. Đặt

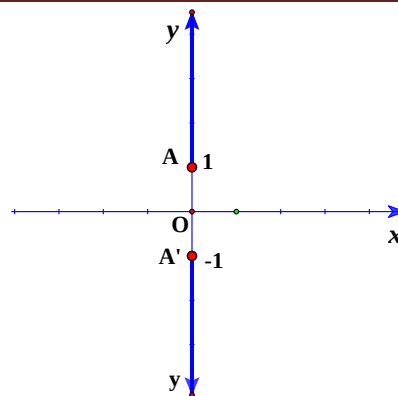
$$z = x + iy \text{ và } z' = x' + iy', (x, y, x', y' \in \mathbb{R})$$

a) Tính x', y' theo x, y và tính x, y theo x', y' .

b) Cho M di động trên đường tròn (C) tâm $A(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Tìm tập hợp các điểm M' .

c) Cho M di động trên đường thẳng $d: y = x + 1$, tìm tập hợp các điểm M' .

Giải



$$a) \text{ Ta có: } z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{z \cdot z} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{|z|^2} \Leftrightarrow x' + y'i = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Tương tự, ta có:

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{z'}{z' \cdot z'} = \frac{z'}{|z'|^2} \Leftrightarrow x + iy = \frac{x' + iy'}{x'^2 + y'^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

b) Đường tròn (C) tâm A(-1;1), bán kính $R = \sqrt{2}$ có phương trình

$$(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Điểm $M \in (C) \Leftrightarrow$ tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (\text{Vì } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ do } z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0 \quad (\text{vì } \frac{x}{x^2 + y^2} = x' \text{ và } \frac{y}{x^2 + y^2} = y' \text{ theo kết quả của câu a)})$$

Suy ra tọa độ của điểm $M'(x';y')$ thỏa mãn phương trình $2x' - 2y' + 1 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường thẳng có phương trình $2x - 2y + 1 = 0$.

c) Điểm M di động trên đường thẳng d: $y = x + 1$ nên tọa độ của $M(x;y)$ thỏa mãn $y = x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 1 \quad (\text{vì theo câu a ta có } y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \text{ và}$$

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}) \Leftrightarrow y' = x' + x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0.$$

Suy ra tọa độ của $M'(x';y')$ thỏa mãn phương trình: $x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường tròn (C') có phương trình: $x^2 + y^2 + x - y = 0$.

Ví dụ 12. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện

$$a) \begin{cases} y - x \leq 1 \\ y \geq 2x^2 \end{cases}; \quad b) 1 < |z| \leq 2.$$

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đường thẳng d: $y - x = 1$ và Parabol: $y = 2x^2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y - x \leq 1 \\ y \geq 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y \geq 2x^2 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M là phần giới hạn bởi đường thẳng d và (P).

b) $1 < x^2 + y^2 \leq 4$. Vậy tập hợp điểm là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O bán kính 1 và 2, không lấy đường bên trong.

Chú ý: Với câu c, giả sử đề bài thêm yêu cầu: tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 < |z| \leq 2$ và phần thực không âm thì

$$y_{cbt} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O bán kính 1 và 2, chỉ lấy phần bên phải trục tung và không lấy bên trong.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z . Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện $|z+2|=|i-z|$ là

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$

B. Đường thẳng $4x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y-3=0$

D. Đường thẳng $x+9y-3=0$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Đặt $z=x+yi; (x,y \in \mathbb{R})$. là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z+2|=|i-z| &\Leftrightarrow |(x+2)+yi|=|x+(y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\ &\Leftrightarrow 4x+2y+3=0. \text{ Vậy tập hợp điểm } M \text{ cần tìm là đường thẳng } 4x+2y+3=0 \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án A.

Cách 2. $|z+2|=|i-z| \Leftrightarrow |z-(-2)|=|i-z| (*)$

Đặt $z=x+yi; (x,y \in \mathbb{R})$. là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức,

Điểm A biểu diễn số -2 tức $A(-2;0)$ và điểm B biểu diễn số phức i tức $B(0;1)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA=MB$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của AB: $4x+2y+3=0$.

Câu 2. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2i|=\overline{z}+1-i$ là

A. Đường thẳng $x+y+3=0$

B. Đường thẳng $x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y+3=0$

D. Đường thẳng $x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z=x+yi (x,y \in \mathbb{R})$, điểm $M(x;y)$ biểu diễn z . Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} |x+(y+2)i| &= |(x+1)-(y+1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow 4y+4=2x+2y+2 \Leftrightarrow x-y-1=0 \end{aligned}$$

Suy ra M thuộc đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 3. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $5|(1-i)z+3-2i|=|(1-7i)z+i|$ là

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

A. Đường elip

D. Đường Parabol

Hướng dẫn giải

$$\text{Nhận thấy } 5|1+i|=5\sqrt{2}=|1-7i|$$

$$\text{Ta có } 5|(1-i)z+3-2i|=|(1-7i)z+i|$$

$$\Leftrightarrow |5(1-i)| \cdot \left| z + \frac{3-2i}{5+5i} \right| = |1-7i| \cdot \left| z + \frac{i}{1-7i} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| z + \frac{3-2i}{5+5i} \right| = \left| z + \frac{i}{1-7i} \right| \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{10} - \frac{1}{2}i \right| = \left| z - \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i \right|$$

Vậy tập hợp M là đường trung trực AB, với $A\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{7}{50}; \frac{1}{50}\right)$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 4. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+\bar{z}+3|=4$ là

A. Hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}, x=-\frac{7}{2}$

B. Hai đường thẳng $x=-\frac{1}{2}, x=-\frac{7}{2}$

A. Hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}, x=\frac{7}{2}$

D. Hai đường thẳng $x=-\frac{1}{2}, x=\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$|z+\bar{z}+3|=4 \Leftrightarrow |x+yi+x-yi+3|=4 \Leftrightarrow |2x+3|=4 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+12x-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}; x=-\frac{7}{2}$ song song với trục tung.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 5. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-\bar{z}+1-i|=2$ là

A. Hai đường thẳng $y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

B. Hai đường thẳng $y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

A. Hai đường thẳng $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

D. Hai đường thẳng $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\begin{aligned} |z - \bar{z} + 1 - i| = 2 &\Leftrightarrow |x + yi - x + yi + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 - (2y - 1)i| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + (2y - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ song song với trục hoành.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 6. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$$2|z + 1| = |z - \bar{z} - 2| \text{ là}$$

A. Hai đường thẳng $x = 0, y = 0$.

B. Hai đường thẳng $x = 0, y = -2$.

C. Hai đường thẳng $x = 0, x = -2$.

D. Hai đường thẳng $x = 2, y = -2$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa $2|z + 1| = |z - \bar{z} - 2|$

$$\Leftrightarrow 2|x + yi + 1| = |x + yi - (x - yi) - 2| \Leftrightarrow 2|x + 1 + yi| = |-2 + 2yi|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2y)^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai đường thẳng $x = 0, x = -2$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 7. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện

$$|z - 1 + i| = 2 \text{ là}$$

A. Đường thẳng $x - y - 2 = 0$

B. Đường tròn $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

C. Đường thẳng $x + y - 2 = 0$

D. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Hướng dẫn giải

Xét hệ thức: $|z - 1 + i| = 2$ Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Vậy, tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 8. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{z}{z - 1} \right| = 3$

là

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y - \frac{9}{8} = 0$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$

D. Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{Z}$). Ta có

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3 \Leftrightarrow |z| = 3|z-1| \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$$

Vậy, tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R = \frac{3}{8}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 8. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+3-2i| = |2z+1-2i|$ là

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{8}{3} = 0$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

D. $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$; ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z+3-2i| = |2z+1-2i|$

$$\Leftrightarrow |(x+3) + (y-2)i| = |(2x+1) + (2y-2)i| \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = (2x+1)^2 + (2y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$$

Suy ra: Tập hợp các điểm biểu diễn z là phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 9. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |(1+i)z|$ là

A. Đường tròn $x^2 + (y+1)^2 = 2$

B. Đường tròn $x^2 + (y-1)^2 = 2$

C. Đường tròn $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$; ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Suy ra } |z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow |(1+i)z| = |(1+i)(x+yi)| = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2}$$

$$\text{Nên } |z-i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4i| + |z+4i| = 10$ là

A. Đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

B. Đường elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

C. Đường elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. Đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Hướng dẫn giải

Xét hệ thức: $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Lúc đó

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 4)^2} = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Vậy tập hợp điểm M là đường elip có hai tiêu điểm là $F_1(0;4); F_2(0;-4)$ và độ dài trục lớn là 16.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 10. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2| + |z + 2| = 5$ là

A. Đường tròn

B. Đường elip

C. Đường parabol

D. Đường thẳng

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có: $|z - 2| + |z + 2| = 5$

$$\Leftrightarrow |(x - 2) + yi| + |(x + 2) + yi| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 5 \quad (1)$$

Xét $A(2;0); B(-2;0); I(x;y) \Rightarrow IA + IB = 5$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z chính là tập hợp các điểm I thỏa mãn $IA + IB = 5$, đó chính là

$$\text{một elip có tiêu cự } c = \frac{AB}{2} = 2; a = \frac{IA + IB}{2} = \frac{5}{2}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 11. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2 + z| > |z - 2|$ là

A. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung

B. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung

C. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành

D. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành

Hướng dẫn giải

Xét hệ thức: $|2 + z| > |z - 2| \quad (1)$. Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $(3) \Leftrightarrow 8x > 0$

Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện (1) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức các điểm (x, y) mà $x > 0$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 12. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ là

- A. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 2
- B. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1
- C. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 1
- D. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $I(1;-1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Hướng dẫn giải

b) Xét hệ thực: $1 \leq |z+1-i| \leq 2$ (2). Đặt $z=x+yi$, ($x,y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó: } (2) \Leftrightarrow 1 \leq (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Vậy tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện (2) là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Vậy chọn đáp án B.

Câu 13. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực.

- A. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ
- B. Tập hợp điểm là trục hoành
- C. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$
- D. Tập hợp điểm là trục tung, bỏ đi $A(0;1)$

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi$, ($x,y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)(1-y) + [x(y+1)-x(1-y)]i}{x^2+(1-y)^2}$$

$$\frac{z+i}{z-i} \text{ là số thực} \Leftrightarrow x(y+1)-x(1-y)=0 \Leftrightarrow xy=0.$$

Mặt khác: $x^2+(y-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$ cả mặt phẳng phức bỏ đi điểm $(0;1)$

$$\text{Tóm lại: } ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ (x,y) \neq (0;1) \end{cases}. \text{ Vậy các điểm của mặt phẳng phức cần tìm gồm hai trục tọa độ bỏ đi}$$

điểm $A(0;1)$

Vậy chọn đáp án C

Câu 14. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

- A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$
- B. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$

D. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có:

$$u = \frac{z+2+3i}{z-i} = \frac{[x+2+(y+3)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

$$u \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x-y+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ \begin{cases} (x,y) \neq (0;1) \\ (x,y) \neq (-2;-3) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 15. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện $|x| + |y| = 1$ là

A. Ba cạnh của tam giác

B. Bốn cạnh của hình vuông

C. Bốn cạnh của hình chữ nhật

D. Bốn cạnh của hình thoi

Hướng dẫn giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z .

$$\text{Ta có: } |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ x-y=1 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ -x+y=1 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0 \\ -x-y=1 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là 4 cạnh của hình vuông.

Vậy chọn đáp án B

Câu 16. Gọi M và P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$ và $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau đây:

Câu 16. 1. M thuộc đường thẳng $d: y = 2x$

A. Đường thẳng $(d'): y = -\frac{4}{3}x$

B. Tia $(d'): y = -\frac{4}{3}x, x \leq 0$.

C. Đường thẳng $(d'): y = \frac{4}{3}x$

D. Tia $(d'): y = -\frac{4}{3}x, x > 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$), ta có:

$$w = z^2 \Leftrightarrow u + vi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

M thuộc đường thẳng d: $y = 2x \Rightarrow$ tọa độ của điểm P thỏa mãn

$$\begin{cases} u = x^2 - 4x^2 \\ v = 2x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = -\frac{4}{3}u \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là tia (d'): $y = -\frac{4}{3}x, x \leq 0$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 16.2. M thuộc đường thẳng d: $y = x + 1$

A. Đường thẳng d': $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

B. Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

C. Đường tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{3}$

D. Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Hướng dẫn giải

M thuộc đường thẳng d: $y = x + 1 \Rightarrow$ tọa độ điểm P thỏa mãn

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = x^2 - (x+1)^2 \\ v = 2x(x+1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = -2x - 1 \\ v = 2x^2 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = 2\left(\frac{-u-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-u-1}{2}\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = \frac{1}{2}(u^2 + 2u + 1) - u - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm P là parabol có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 16.3. M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$;

A. Đường thẳng d': $y = x + \frac{1}{3}$.

B. Parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

D. Elip $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có $|zz'| = |z| \cdot |z'|$. Suy ra $|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2$.

M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = |z^2| = |z|^2 = 1$

Vậy tập hợp các điểm P là đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 16.4. M thuộc hypebol (C): $y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$.

A. Đường thẳng $d': x = 2$

B. Đường thẳng $d': y = -2$

C. Đường thẳng $d': y = 1$

D. Đường thẳng $d': y = 2$

Hướng dẫn giải

M thuộc hypebol (C): $y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$. Suy ra tọa độ điểm P(u;v) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2x \cdot \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là đường thẳng có phương trình $y=2$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn

$\frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1}$ là số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$

B. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$ trừ đi hai điểm $(-1; 0)$.

C. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}$

D. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}$ trừ đi hai điểm $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ và điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

$$\text{Ta có: } \frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} = \frac{2|z|^2 + z + \bar{z} + i(z + \bar{z}) + 2i}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} = \frac{2(x^2 + y^2) + 2x + 2(x+1)i}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2) + 2x = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ bỏ đi điểm $(-1;0)$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 19. Tìm quỹ tích các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức $w = iz + 1$, biết z là số phức thỏa mãn: $\left|\bar{z} - 2i + 1\right|^3 = 8$.

A. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

B. Đường tròn (C): $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 2$

C. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

D. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Hướng dẫn giải

Ta có $|z^3| = |z|^3$ nên $\left|\bar{z} - 2i + 1\right|^3 = 2^3 \Leftrightarrow \left|\bar{z} - 2i + 1\right| = 2 \quad (*)$

Đặt $w = x + yi$

Ta lại có $w = iz + 1 \Leftrightarrow z = i - iw \Rightarrow \bar{z} = -i + i\bar{w}$. (*) trở thành:

$$\left|i\bar{w} - 3i + 1\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2 + (x-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (y+1)^2 + (x-3)^2 = 4$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn w trên mặt phẳng phức là đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: $w = \bar{z} + 2 + i$, biết z là số phức thỏa $|z - 1 + 2i| = 1$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R = \sqrt{2}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 2$

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 1$

D. Đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R = 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số w trên hệ trục Oxy.

$$\bar{z} = w - 2 - i = x - 2 + (y - 1)i \Rightarrow z = x - 2 + (1 - y)i$$

$$|z - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |x - 3 + (3 - y)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R = 1$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 21. Trong mặt phẳng phức Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = (1 - 2i)z + 3$ biết z là số phức thỏa mãn: $|z + 2| = 5$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=5$

C. Đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R=5\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo giả thiết: } |z+2|=5 \Leftrightarrow \left| \frac{a-1+(b-4)i}{1-2i} \right| = 5 \Leftrightarrow |a-1+(b-4)i| = 5|1-2i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-4)^2} = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-4)^2 = 125$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R=5\sqrt{5}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 22. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z' = (1-i\sqrt{3})z - 2$ với $|z+1| \leq 2$.

A. Hình tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R=4$.

C. Hình tròn tâm $I(1;-4)$ bán kính $R=5$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Giả sử ta có } \begin{cases} z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \\ z' = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Khi đó:

$$z' = (1-i\sqrt{3})z - 2 \Leftrightarrow x + yi = (1-i\sqrt{3})(a + bi) - 2 \Leftrightarrow x + yi = a + b\sqrt{3} - 2 + (b - a\sqrt{3})i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b\sqrt{3} - 2 \\ y = b - a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x - y\sqrt{3} + 2}{4} \\ b = \frac{\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$|z+1| \leq 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 \leq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x - y\sqrt{3} + 2}{4} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}}{4} \right)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (x - y\sqrt{3} + 6)^2 + (\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3})^2 \leq 64 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 24x - 8\sqrt{3}y - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2\sqrt{3}y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R=4$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 23. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ biết rằng số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$.

- A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.
- B. Đường tròn tâm $I(3; 3)$ bán kính $R = 4$
- C. Đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.
- D. Hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ và $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có: $|z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 \leq 4 (*)$

Từ

$$\begin{aligned} w &= (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Rightarrow x + yi = (1 + i\sqrt{3})(a + bi) + 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b\sqrt{3} + 2 \\ y = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = a - 1 - b\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(a - 1) + b \end{cases} \\ &\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4[(a - 1)^2 + b^2] \leq 16 \text{ (Do } (*)) \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 24. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z' = 2z + 3 - i$ với $|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9$.

- A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.
- B. Đường tròn tâm $I(3; 3)$ bán kính $R = 4$
- C. Đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.
- D. Hình tròn tâm $I(3; -\frac{7}{4})$, $R = \frac{\sqrt{73}}{4}$

Giải

Giả sử ta có $\begin{cases} z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \\ z' = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$

$$\text{Khi đó } z' = 2z + 3 - i \Leftrightarrow x + yi = (2a + 3) + (2b - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a + 3 \\ y = 2b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x - 3}{2} \\ b = \frac{y + 1}{2} \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9 \Leftrightarrow 9a^2 + (3b + 1)^2 \leq a^2 + b^2 + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 3b - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + \frac{3}{2}(y+1) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 \leq \frac{73}{16}$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I\left(3; -\frac{7}{4}\right)$, $R = \frac{\sqrt{73}}{4}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 25 (Đề minh họa của bộ). Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.

B. $r = 5$.

C. $r = 20$.

D. $r = 22$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Gọi } w = a + bi, \text{ ta có } w = a + bi = (3+4i)z + i &\Leftrightarrow z = \frac{a + (b-1)i}{3+4i} = \frac{[a + (b-1)i](3-4i)}{9-16i^2} \\ &= \frac{3a+4b-4}{25} + \frac{(3b-4a-3)}{25}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{(3a+4b-4)^2 + (3b-4a-3)^2}}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |z| = 4 \text{ nên } \Leftrightarrow (3a+4b-4)^2 + (3b-4a-3)^2 = 100^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z + i$ là một đường tròn nên ta có $a^2 + b^2 - 2b = 399 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} = 20$

Vậy chọn đáp án C.

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 4:

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

HUẾ, 31/03/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ CHỨNG MINH SỐ PHỨC.....	3
I. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KỸ NĂNG	3
II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN.....	12

CHỦ ĐỀ 4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ CHỨNG MINH SỐ PHỨC

Phương pháp: Ta nhắc lại một số công thức cơ bản sau:

Cho số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Lúc đó

- $\bar{z} = x - yi$.
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Công thức này chứng minh dễ dàng như sau:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

I. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \text{b) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \quad \text{c) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (z_2 \neq 0)$$

Áp dụng: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 đều có môđun bằng 1. Chứng minh $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|$.

Giải

Giả sử: $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$)

a) Ta có:

$$\bar{z}_1 = x_1 - y_1 i \quad \text{và} \quad \bar{z}_2 = x_2 - y_2 i \quad \text{nên} \quad \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) i$$

$$\text{Mà } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) i$$

$$\text{Vậy } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

b) Ta có:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Mặt khác:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

$$\text{Vậy } \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

c) Ta cần chứng minh bổ đề sau: $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \forall z \neq 0$

$$\text{Vì } z \cdot \frac{1}{z} = 1 \quad \text{nên ta có} \quad \overline{\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \Leftrightarrow \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2^{-1}} = \overline{z_1} \cdot (\overline{z_2})^{-1} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \quad (\text{ĐPCM})$$

Áp dụng: Vì $|z_1 z_2 z_3| = 1$ nên

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| &= \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1 z_2 z_3|} = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} \right| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| \\ &= |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3| \end{aligned}$$

Lưu ý: Ta có công thức tổng quát sau: Cho n số phức $z_1, z_2, \dots, z_n$ bất kỳ.

Ta luôn có:

$$\begin{aligned} \oplus \quad \overline{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \dots + \overline{z_n} \\ \oplus \quad \overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \dots \overline{z_n}. \end{aligned}$$

Trước hết ta chứng minh: $\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \dots + \overline{z_n}$

Giả sử: $z_k = a_k + b_k i, (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ và $z = \sum_{k=1}^n z_k = a + bi$

Trong đó: $a = \sum_{k=1}^n a_k, b = \sum_{k=1}^n b_k$

Ta có:

$$\overline{z} = a - bi = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k i = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k i) = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$$

Hay $\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \dots + \overline{z_n}$

Bây giờ ta chứng minh $\overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \dots \overline{z_n}$ (***) bằng quy nạp

Với $n=2$: Giả sử $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$

Ta có: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Suy ra: $\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Mặt khác: $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Vậy với $n=2$ đẳng thức đúng.

Giả sử (***) đúng với $n=k, (n > 2)$ ta sẽ chứng minh hệ thứ đúng với $n=k+1$

Thật vậy:

Đặt $z = z_1 z_2 \dots z_k$, ta có: $\overline{z} = \overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \dots \overline{z_k}$

Với hai số phức z và z_{k+1} ta có: $\overline{z \cdot z_{k+1}} = \overline{z} \cdot \overline{z_{k+1}} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \dots \overline{z_k} \cdot \overline{z_{k+1}}$

Hệ thức cuối được chứng minh với $n=k+1$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| ; \quad \text{b) } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Áp dụng: Tìm mô đun các số phức sau:

$$u = \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}}, \quad w = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x - y) + 2i\sqrt{xy}}, \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1.** Đặt $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ và $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Từ đó:

$$\begin{aligned} |z_1||z_2| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$

Do đó:

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2} \quad (1)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh

Cách 2. Vì $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ nên

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Suy ra: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

b) **Cách 1.** Trước hết ta chứng minh bổ đề: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \in \mathbb{C}^*$

Thật vậy: $z \cdot \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ hay $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \in \mathbb{C}^*$

Áp dụng bổ đề trên ta có: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| |z_2^{-1}| = |z_1| |z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Cách 2.

Vì $|\bar{z}_2| = |z_2|$ nên $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \right| = \frac{|z_1 \cdot \bar{z}_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| \cdot |\bar{z}_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Lưu ý: Không có công thức: Với mọi số phức z_1, z_2 : $|z_1 \pm z_2| = |z_1| \pm |z_2|$. Tuy nhiên ta có bất đẳng thức sau: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Thật vậy, gọi $\vec{u_1}$ biểu diễn z_1 , $\vec{u_2}$ biểu diễn z_2 thì $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ biểu diễn $z_1 + z_2$

Ta có: $|z_1 + z_2| = |\vec{u_1} + \vec{u_2}|$

* TH 1: Khi $z_1 z_2 \neq 0$ thì :

$$\begin{aligned} |\vec{u_1} + \vec{u_2}|^2 &= (\vec{u_1} + \vec{u_2})^2 = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + 2\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + 2|\vec{u_1}||\vec{u_2}|\cos(\angle(\vec{u_1}, \vec{u_2})) \\ &\leq \vec{u_1}^2 + \vec{u_2}^2 + 2|\vec{u_1}||\vec{u_2}| = (\vec{u_1} + \vec{u_2})^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned} \quad \text{Do đó:}$$

$$|z_1 + z_2| = |\vec{u_1} + \vec{u_2}| \leq |z_1| + |z_2|$$

* TH 2: Khi $z_1 z_2 = 0$ thì rõ ràng $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

Vậy $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Áp dụng: Ta sẽ áp dụng $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Ta có:

$$u = \frac{\left| \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}} \right|}{\left| \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}} \right|} = \frac{\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}}{\sqrt{2x^2y^2 + x^4 + y^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2}} = 1$$

$$\text{Tương tự: } |w| = \frac{\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x - y) + 2i\sqrt{xy}} \right|}{\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x - y) + 2i\sqrt{xy}} \right|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}}{\sqrt{(x - y)^2 + 4xy}} = \frac{\sqrt{(x + y)^2}}{\sqrt{(x + y)^2}} = 1.$$

Ví dụ 3. a) Chứng minh: Số phức z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$.

Vận dụng: Cho hai số phức z_1, z_2 đều có môđun bằng 1, $z_1 \cdot z_2 \neq -1$. Chứng minh

$$z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \text{ là số thực.}$$

b) Chứng minh: Số phức z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\bar{z}$

Vận dụng: Chứng minh hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2|$ khi và chỉ khi $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo.

Giải

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$

a) Ta có: $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z$ là số thực.

Vậy, z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$

Vận dụng: Ta có:

$$z_1 \bar{z_1} = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1}, \text{ tương tự ta có } \bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$$

$$\text{Xét } \bar{z} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + \overline{z_1 z_2}} = \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = z \text{ (NPCM)}$$

b) Ta có:

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + bi = -(a - bi) \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \text{ là số ảo.}$$

Vậy, z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\bar{z}$

Vận dụng: Ta có

$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} &= -\overline{\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \overline{\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = 0 \\ \Leftrightarrow (z_1 + z_2) \cdot \overline{z_1 - z_2} + (z_1 - z_2) \cdot \overline{z_1 + z_2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{2z-1}{z+1}$ là số thực. Chứng minh rằng z là số thực.

Giải

Ta biết rằng số phức w là số thực $\Leftrightarrow \bar{w} = w$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{2z-1}{z+1} \text{ là số thực} &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{2z-1}{z+1}\right)} = \frac{2z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{2z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{2z-1}{z+1} \\ \Leftrightarrow (2\bar{z}-1)(z+1) &= (2z-1)(\bar{z}+1) \\ \Leftrightarrow 2z\bar{z} + 2\bar{z} - z - 1 &= 2z\bar{z} + 2z - \bar{z} - 1 \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ \Leftrightarrow z &\text{ là số thực.} \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$\text{a) } z = \left(\frac{6+17i}{4+3i}\right)^n + \left(\frac{3-28i}{5-6i}\right)^n \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } z = \left(\frac{13+6i}{4+5i}\right)^{2n} (3+4i)^n \in \mathbb{R}$$

Giải

a) Ta có

$$z = \left(\frac{6+17i}{4+3i}\right)^n + \left(\frac{3-28i}{5-6i}\right)^n = (3+2i)^n + (3-2i)^n$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{(3+2i)^n + (3-2i)^n} = \overline{(3+2i)^n} + \overline{(3-2i)^n} = (\bar{3}+\bar{2i})^n + (\bar{3}-\bar{2i})^n \\ &= (3+2i)^n + (3-2i)^n = z \end{aligned}$$

Vậy z là số thực.

b) Ta có

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{13+6i}{4+5i}\right)^{2n} (3+4i)^n = (2-i)^{2n} (3+4i)^n = \left[(2-i)^2\right]^n (3+4i)^n \\ &= (3-4i)^n (3+4i)^n = [(3-4i)(3+4i)]^n = 25^n \end{aligned}$$

Vậy z là số thực.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng

$$a) |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left[|z|^2 + |z'|^2\right], \forall z, z' \in \mathbb{C}$$

$$b) |1 - \overline{z_1} \cdot z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1 + |z_1 z_2|^2\right) - \left(|z_1| + |z_2|\right)^2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

c) Với mọi số phức z_1, z_2, z_3 . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 \\ &= 4\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right). \end{aligned}$$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z') \cdot \overline{(z+z')} + (z-z') \cdot \overline{(z-z')} \\ &= (z+z')(\overline{z} + \overline{z}') + (z-z')(\overline{z} - \overline{z}') \\ &= z \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{z}' + z' \cdot \overline{z} + z' \cdot \overline{z}' + z \cdot \overline{z} - z \cdot \overline{z}' - z' \cdot \overline{z} + z' \cdot \overline{z}' \\ &= 2|z|^2 + 2|z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2) = VP \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= |1 - \overline{z_1} \cdot z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - \overline{z_1} \cdot z_2) \cdot \overline{(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)} - (z_1 - z_2) \cdot \overline{(z_1 - z_2)} \\ &= (1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - z_1 \overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= 1 + |z_1|^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} VP &= \left(1 + |z_1 z_2|^2\right) - \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 \\ &= 1 + 2|z_1 z_2| + |z_1 z_2|^2 - |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| - |z_2|^2 = 1 + |z_1|^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad (**) \end{aligned}$$

Từ (*) và (**) ta suy ra điều phải chứng minh.

c) Ta có

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3|^2 &= (z_1 + z_2 + z_3) \cdot \overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_3} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} + z_3 \overline{z_2} + z_3 \overline{z_3} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_3} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} + z_3 \overline{z_2} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} |-z_1 + z_2 + z_3|^2 &= (-z_1 + z_2 + z_3) \cdot \overline{(-z_1 + z_2 + z_3)} = (-z_1 + z_2 + z_3)(\overline{-z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) \\ &= z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_1 \overline{z_3} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_1} + z_3 \overline{z_2} + z_3 \overline{z_3} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_1 \overline{z_3} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_1} + z_3 \overline{z_2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2 + z_3|^2 &= (z_1 - z_2 + z_3) \cdot \overline{(z_1 - z_2 + z_3)} = (z_1 - z_2 + z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_2} + \overline{z_3}) \\ &= z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_3} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} - z_3 \overline{z_2} + z_3 \overline{z_3} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_3} - z_2 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} - z_3 \overline{z_2} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2 - z_3|^2 &= (z_1 + z_2 - z_3) \cdot \overline{(z_1 + z_2 - z_3)} = (z_1 + z_2 - z_3) (\overline{z_1} + \overline{z_2} - \overline{z_3}) \\
 &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} - z_1 \overline{z_3} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_1} - z_3 \overline{z_2} + z_3 \overline{z_3} \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1 \overline{z_2} - z_1 \overline{z_3} + z_2 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_1} - z_3 \overline{z_2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 \\
 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2).
 \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu số phức $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ thì $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$.

Giải

Ta có:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right), \text{ mặt khác ta có: } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Do đó:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^3 = \left|z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2 + 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$$

Đặt $a = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ lúc đó ta được

$$a^3 \leq 2 + 3a \Leftrightarrow (a-2)(a+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2 \text{ hay } \left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng nếu $|z| \leq 1$ thì $\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right| \leq 1$.

Giải

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) theo giả thiết ta có $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 1$

Khi đó:

$$\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right| = \left|\frac{2a + (2b-1)i}{(2-b) + ai}\right| = \frac{|2a + (2b-1)i|}{|(2-b) + ai|} = \frac{\sqrt{4a^2 + (2b-1)^2}}{\sqrt{(2-b)^2 + a^2}}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 \left|\frac{2z-i}{2+iz}\right| \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{4a^2 + (2b-1)^2}}{\sqrt{(2-b)^2 + a^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 4a^2 + (2b-1)^2 \leq (2-b)^2 + a^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 1
 \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Cho z_1 và z_2 là hai số phức thỏa $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$. Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta có: $|z_1 + az_2| = |az_1 + z_2|$.

Giải

Giả sử $z_1 = p + qi$, $z_2 = r + si$ với $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
|z_1 + 2z_2| &= |2z_1 + z_2| \Leftrightarrow |(p+2r) + i(q+2s)| = |(2p+r) + i(2q+s)| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(p+2r)^2 + (q+2s)^2} = \sqrt{(2p+r)^2 + (2q+s)^2} \\
&\Leftrightarrow (p+2r)^2 + (q+2s)^2 = (2p+r)^2 + (2q+s)^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 4pr + 4r^2 + q^2 + 4qs + 4s^2 = 4p^2 + 4pr + r^2 + 4q^2 + 4qs + s^2 \\
&\Leftrightarrow r^2 + s^2 = p^2 + q^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
|z_1 + az_2| &= |az_1 + z_2| \Leftrightarrow |(p+ar) + i(q+as)| = |(ap+r) + i(aq+s)| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(p+ar)^2 + (q+as)^2} = \sqrt{(ap+r)^2 + (aq+s)^2} \\
&\Leftrightarrow (p+ar)^2 + (q+as)^2 = (ap+r)^2 + (aq+s)^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 2apr + a^2r^2 + q^2 + 2aqs + a^2s^2 = a^2p^2 + 2apr + r^2 + a^2q^2 + 2aqs + s^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + q^2 - a^2(p^2 + q^2) = r^2 + s^2 - a^2(r^2 + s^2) \\
&\Leftrightarrow (a^2 - 1)(p^2 + q^2) = (a^2 - 1)(r^2 + s^2) \quad (2)
\end{aligned}$$

(2) đúng, dẫn đến điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng với mỗi số phức z , có ít nhất 1 trong hai bất đẳng thức sau

$$\text{xảy ra } |z+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } |z^2+1| \geq 1$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Giả sử ta có đồng thời } \begin{cases} |z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |z^2+1| < 1 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Lúc đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)^2 + b^2 < \frac{1}{2} \\ (1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) + 4a + 1 < 0 \quad (1) \\ (a^2+b^2)^2 + 2(a^2-b^2) < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng (2) về theo về ta được:

$$(a^2+b^2)^2 + (2a+1)^2 < 0 \text{ (vô lý)}. \text{ Từ đó ta được điều phải chứng minh. } \mathbf{V\acute{d}\acute{u} \ 10^*}.$$

Cho z_1, z_2, z_3 là ba số thực phân biệt sao cho $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$. Chứng minh rằng: Nếu $z_1z_2 + z_3, z_2z_3 + z_1, z_3z_1 + z_2$ là các số thực thì $r=1$ và $z_1z_2z_3=1$.

Hướng dẫn giải

Vì z_1, z_2, z_3 là ba số thực phân biệt và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ nên

$$z_1, z_2, z_3, z_1 - z_2, z_2 - z_3, z_3 - z_1 \text{ đều khác không}$$

$$\text{và } \overline{z_1z_1} = \overline{z_2z_2} = \overline{z_3z_3} = r^2.$$

Nếu $z_1z_2 + z_3, z_2z_3 + z_1, z_3z_1 + z_2$ là các số thực thì ta có

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_3 &= \overline{z_1 z_2 + z_3} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_3} \\ z_2 z_3 + z_1 &= \overline{z_2 z_3 + z_1} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} + \overline{z_1} \\ z_3 z_1 + z_2 &= \overline{z_3 z_1 + z_2} = \overline{z_3} \cdot \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\frac{r^2}{z_1 z_2 z_3} = \frac{r^2(z_1 z_2 + z_3)}{z_1 z_2 z_3 (z_1 z_2 + z_3)} = \frac{r^2(z_1 z_2 + z_3)}{z_1 z_1 \cdot z_2 z_2 \cdot z_3 + z_1 z_2 z_3 z_3} = \frac{r^2(z_1 z_2 + z_3)}{r^4 z_3 + r^2 z_1 z_2} = \frac{(z_1 z_2 + z_3)}{z_1 z_2 + r^2 z_3} \text{ Tương}$$

$$\text{tự: } \frac{r^2}{z_1 z_2 z_3} = \frac{z_1 z_2 + z_3}{z_1 z_2 + r^2 z_3} = \frac{z_2 z_3 + z_1}{z_2 z_3 + r^2 z_1} = \frac{z_3 z_1 + z_2}{z_3 z_1 + r^2 z_2}.$$

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Ta có:

$$\frac{r^2}{z_1 z_2 z_3} = \frac{z_1 z_2 + z_3}{z_1 z_2 + r^2 z_3} = \frac{z_1 z_2 + z_3 - (z_2 z_3 + z_1)}{z_1 z_2 + r^2 z_3 - (z_2 z_3 + r^2 z_1)} = \frac{(z_1 - 1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_1 - r^2)} = \frac{z_1 - 1}{z_1 - r^2}$$

Tương tự:

$$\frac{r^2}{z_1 z_2 z_3} = \frac{z_1 - 1}{z_1 - r^2} = \frac{z_2 - 1}{z_2 - r^2} = \frac{z_3 - 1}{z_3 - r^2} \Rightarrow \frac{r^2}{z_1 z_2 z_3} = \frac{z_1 - 1 - (z_2 - 1)}{z_1 - r^2 - (z_2 - r^2)} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2} = 1$$

Suy ra:

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = r^2 \\ \frac{z_1 - 1}{z_1 - r^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 z_2 z_3 = r^2 \\ z_1 - 1 = z_1 - r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

1.1. Phần thực của số phức z bằng:

- A. $z - \bar{z}$ B. $z + \bar{z}$ C. $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$ D. $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$

1.2. Phần ảo của số phức z :

- A. $\frac{1}{2i}(z + \bar{z})$ B. $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ C. $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$ D. $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$\text{Töø ñoù} \begin{cases} z + \bar{z} = 2x \\ z - \bar{z} = 2yi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án 1.1.D và 1.2 B

Câu 2. Cho số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Khẳng định nào sau đây đúng

- A. $a \leq |z|$ và $b \leq |z|$. B. $a > |z|$ và $b \leq |z|$.
C. $a \leq |z|$ và $b > |z|$. D. $a < |z|$ và $b < |z|$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \begin{cases} |z| \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a \\ |z| \geq \sqrt{b^2} = |b| \geq b \end{cases}$$

Vậy $a \leq |z|$ và $b \leq |z|$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 3. Cho z là số phức thỏa mãn $\frac{z+1}{z-1}$ là số ảo. Tìm khẳng định đúng

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. $|z| = 1$ C. $|z| = 2$ D. $|z| = \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{z+1}{z-1} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = \overline{\frac{z+1}{z-1}} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} - \overline{\frac{z+1}{z-1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1) \cdot \overline{z-1} + (z-1) \cdot \overline{\bar{z}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1) \cdot (\bar{z}-1) + (z-1) \cdot (\bar{z}+1) = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Vậy $|z| = 1$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 4. Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Khẳng định nào sau đây sai

A. $\overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ là số thực

B. $z^2 + (\overline{z})^2$ là số thực

C. $\frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3}$ là số ảo

D. $\frac{z^2 - (\overline{z})^2}{1 + z \cdot \overline{z}}$ là số thực

Hướng dẫn giải

Định hướng: Ta sử dụng kết quả sau: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ và z là số ảo khi và chỉ khi $\overline{z} = -z$

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad \overline{z_1 z_2 + z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ &= \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

Vậy $\overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ là số thực

$$\text{B)} \quad \overline{z^2 + (\overline{z})^2} = \overline{z^2} + \overline{(\overline{z})^2} = \overline{z}^2 + z^2 = z^2 + (\overline{z})^2. \text{ Vậy } z^2 + (\overline{z})^2 \text{ là số thực}$$

$$\text{C)} \quad \frac{\overline{z - \overline{z}}}{z^3 + (\overline{z})^3} = \frac{\overline{z - z}}{z^3 + (\overline{z})^3} = -\frac{\overline{z - \overline{z}}}{z^3 + (\overline{z})^3}. \text{ Vậy } \frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3} \text{ là số ảo}$$

$$\text{D)} \quad \frac{\overline{z^2 - (\overline{z})^2}}{1 + z \cdot \overline{z}} = \frac{(\overline{z})^2 - z^2}{1 + z \cdot \overline{z}} = -\frac{z^2 - (\overline{z})^2}{1 + z \cdot \overline{z}}. \text{ Vậy } \frac{z^2 - (\overline{z})^2}{1 + z \cdot \overline{z}} \text{ là số ảo. Vậy đáp án D sai.}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{2z+1}{z-2}$ là số thực. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $z \in \mathbb{R}$

B. z là số ảo

C. $|z| = z$

D. $\overline{z} = z$

Hướng dẫn giải

$$\frac{2z+1}{z-2} \text{ là số thực} \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-2} = \overline{\left(\frac{2z+1}{z-2}\right)} \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-2} = \frac{\overline{2z+1}}{\overline{z-2}} \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-2} = \frac{\overline{2z+1}}{\overline{z}-2}$$

$$\Rightarrow 2z \cdot \overline{z} - 4z + \overline{z} - 2 = 2\overline{z} \cdot z + z - 4\overline{z} - 2 \Leftrightarrow 5\overline{z} = 5z \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

Vậy z là số thực.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 6. Đẳng thức $\frac{1}{4} \left(|z_1 + \overline{z_2}|^2 - |z_1 - \overline{z_2}|^2 + i|z_1 + iz_2| - i|z_1 - iz_2|^2 \right)$ bằng

A. $\frac{z_1}{z_2}$

B. $z_1 \cdot z_2$

C. $z_1 + z_2$

D. $z_1 - z_2$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned}
& \left| z_1 + \overline{z_2} \right|^2 - \left| z_1 - \overline{z_2} \right|^2 + i \left| z_1 + iz_2 \right| - i \left| z_1 - iz_2 \right|^2 \\
&= \left(z_1 \overline{z_2} + z_1 z_2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \right) - \left(z_1 \overline{z_2} - z_1 z_2 - \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \right) \\
&\quad + \left(iz_1 \overline{z_2} + z_1 z_2 - \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + i \overline{z_1} \cdot z_2 \right) - \left(iz_1 \overline{z_2} - z_1 z_2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + i \overline{z_1} \cdot z_2 \right) \\
&= 4z_1 z_2
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{4} \left(\left| z_1 + \overline{z_2} \right|^2 - \left| z_1 - \overline{z_2} \right|^2 + i \left| z_1 + iz_2 \right| - i \left| z_1 - iz_2 \right|^2 \right), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 7. Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

A. $\left| \overline{z_1 z_2} + 1 \right|^2 + \left| z_1 - z_2 \right|^2 = \left(1 + |z_1|^2 \right) \left(1 + |z_2|^2 \right)$

B. $\left| \overline{z_1 z_2} + 1 \right|^2 + \left| z_1 - z_2 \right|^2 = \left(1 - |z_1|^2 \right) \left(1 - |z_2|^2 \right)$

C. b) $\left| \overline{z_1 z_2} + 1 \right|^2 + \left| z_1 - z_2 \right|^2 = \left(1 - |z_1|^2 \right) \left(1 + |z_2|^2 \right)$

D. b) $\left| \overline{z_1 z_2} + 1 \right|^2 + \left| z_1 - z_2 \right|^2 = \left(1 + |z_1|^2 \right) \left(1 - |z_2|^2 \right)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
\left| \overline{z_1 z_2} + 1 \right|^2 + \left| z_1 - z_2 \right|^2 &= \left| \overline{z_1 z_2} \right|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + 1 + |z_1|^2 - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 + |z_2|^2 \\
&= \left(1 + |z_1|^2 \right) \left(1 + |z_2|^2 \right)
\end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 8. Cho số phức z thỏa điều kiện $\left| \frac{6z-i}{2+3iz} \right| \leq 1$. Tìm khẳng định đúng

A. $|z| \geq 1$

B. $|z| \leq 3$

C. $|z| \leq \frac{1}{3}$

D. $|z| > \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left| \frac{6z-i}{2+3iz} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |6z-i| \leq |2+3iz|$

$$\Leftrightarrow |6z-i|^2 \leq |2+3iz|^2 \Leftrightarrow (6z-i)(6\overline{z}-i) \leq (2+3iz)(2-3i\overline{z})$$

$$\Leftrightarrow 27z\overline{z} \leq 3 \Leftrightarrow |z|^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow |z| \leq \frac{1}{3}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 9. Gọi z là số phức khác 0 sao cho $\left| z^3 + \frac{8}{z^3} \right| \leq 9$. Tìm khẳng định đúng

A. $\left|z + \frac{2}{z}\right| \leq 3.$ B. $\left|z + \frac{2}{z}\right| < 3.$ C. $\left|z + \frac{2}{z}\right| \geq 3.$ D. $\left|z + \frac{2}{z}\right| > 3.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left(z + \frac{2}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{8}{z^3} + 3z \cdot \frac{2}{z} \left(z + \frac{2}{z}\right) = z^3 + \frac{8}{z^3} + 6\left(z + \frac{2}{z}\right), \text{ mặt khác ta có:}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \left|\left(z + \frac{2}{z}\right)^3\right| &\leq \left|z^3 + \frac{8}{z^3}\right| + 6\left|z + \frac{2}{z}\right| \\ \Rightarrow \left|z + \frac{2}{z}\right|^3 &\leq \left|z^3 + \frac{8}{z^3}\right| + 6\left|z + \frac{2}{z}\right| \leq 9 + 6\left|z + \frac{2}{z}\right| \\ \Rightarrow \left|z + \frac{2}{z}\right|^3 - 6\left|z + \frac{2}{z}\right| - 9 &\leq 0 \end{aligned}$$

Đặt $a = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ lúc đó ta được:

$$a^3 - 6a - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (a - 3)(a^2 + 3a + 3) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 3.$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 10. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa $a + bi = (c + di)^n$. Tìm khẳng định đúng

A. $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)^n$ B. $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)$
C. $a^2 + b^2 = 2^n(c^2 + d^2)$ D. $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^n$

Hướng dẫn giải

Giả sử: $c + di = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r = \sqrt{c^2 + d^2}$ (1).

Theo đề:

$$(c + di)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = a + bi \Rightarrow r^n = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \quad r = \sqrt{c^2 + d^2} \Leftrightarrow r^{2n} = (c^2 + d^2)^n$$

$$\text{Từ (2)} \quad r^n = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow r^{2n} = a^2 + b^2$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^n.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 11*. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$. Tìm khẳng định đúng

A. $|z| > 1$ B. $|z| = 1$ C. $|z| < 1$ D. $|z| > \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0 \Leftrightarrow z^9(11z + 10i) = 11 - 10iz$.

Hay: $z^9 = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i}$ (*)

Đặt $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Từ (*) suy ra:

$$|z|^9 = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right| = \frac{\sqrt{10^2(x^2 + y^2) + 11^2 + 220y}}{\sqrt{11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y}} = \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{g(x, y)}}$$

Xét các trường hợp:

- Nếu $|z| > 1$ thì $x^2 + y^2 > 1$ nên:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y = 10^2(x^2 + y^2) + 21(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y \\ &> 10^2(x^2 + y^2) + 11^2 + 220y = f(x, y). \end{aligned}$$

Do đó $|z|^9 < 1 \Rightarrow |z| < 1$ (mâu thuẫn).

- Nếu $|z| < 1$ thì $x^2 + y^2 < 1$ nên:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y = 10^2(x^2 + y^2) + 21(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y \\ &< 10^2(x^2 + y^2) + 11^2 + 220y = f(x, y). \end{aligned}$$

Suy ra $|z|^9 > 1 \Rightarrow |z| > 1$ (mâu thuẫn).

- Nếu $|z| = 1$ thì $g(x, y) = f(x, y)$ (thỏa mãn)

Vậy $|z| = 1$. **Vậy chọn đáp án B.**

Cách 2. Casio nhanh chóng bằng cách thử trực tiếp.

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC



CHỦ ĐỀ 5:

SỐ PHỨC THỎA ĐIỀU KIỆN

HUẾ, 1/04/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 5. TÌM SỐ PHỨC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN	3
I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KỸ NĂNG.....	3
II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN	18

CHỦ ĐỀ 5. TÌM SỐ PHỨC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Phương pháp

- Tìm số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thật ra là tìm phần thực x và phần ảo y của nó.
- Chú ý rằng: $z^2 \neq |z|^2$, $\bar{z}^2 = |z|^2$ khi z là số thực
- $z = x + yi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$,
- $z_1 = x_1 + y_1i$; $z_2 = x_2 + y_2i$. Khi đó: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
- $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó z là số ảo (thuần ảo) khi $x = 0$, z là số thực khi $y = 0$.
- Trong trường hợp tìm số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất ta làm như sau:
 - Bước 1: Tìm tập hợp điểm (9) các điểm biểu diễn của z thỏa mãn điều kiện.
 - Bước 2: Tìm số phức z tương ứng với điểm biểu diễn $M \in (9)$ sao cho khoảng cách OM có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất)

I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Tìm số phức z thỏa mãn

- a) $z^2 + |z| = 0$; b) $z^2 + \bar{z} = 0$; c) $z^2 = 2\bar{z}$.
- d) $z^2 + |z| = \bar{z}$; e) $z^3 = \bar{z}$ f) $\frac{z}{z} + z = 2$.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Phương trình $z^2 + |z| = 0$ trở thành :

$$x^2 - y^2 + 2xyi + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = |y| \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \pm y \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy số phức cần tìm là $z = 0$, $z = -i$, $z = i$.

b) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = x - yi \\ z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \end{cases}$

Phương trình $z^2 + \bar{z} = 0$ trở thành:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - y^2 + (2xy - y)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - y^2 = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - y^2 = 0 \\ y(2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - y^2 = 0 \quad (*) \\ y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $y = 0$ thay vào (*) ta được: $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Với $x = \frac{1}{2}$ thay vào (*) ta được: $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là $z = 0, z = -1, z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Phương trình $z^2 = 2\bar{z}$ trở thành

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 2x - 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2x \quad (1) \\ xy = -y \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0, x = -1.$$

Với $y = 0, (1) \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$.

với $x = -1, (1) \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Vậy số phức cần tìm là: $z = 0, z = 2, z = -1 + i\sqrt{3}, z = -1 - i\sqrt{3}$.

d) Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó:

$$z^2 + |z| = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = x - yi$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 2xyi = x - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = x \\ 2xy = -y \end{cases}$$

▪ TH1: $x = -\frac{1}{2}$ ta được $\frac{1}{4} - y^2 + \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = y^2 - \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \frac{3}{4} \geq 0 \\ \frac{1}{4} + y^2 = y^4 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{19}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq \frac{3}{4} \\ 16y^4 - 40y^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

▪ TH2: $y = 0 \Rightarrow x^2 + |x| = x \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn là: $z = 0; z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}i$

e) Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = x - yi$

$$z^3 = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^3 = x - yi \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = x - yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = x \\ y(3x^2 - y^2) = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 0 \\ x = 0, y^2 = 1 \Rightarrow z = \pm i \\ x^2 = 1, y = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình cho có 5 nghiệm $z = 0, z = \pm i, z = \pm 1$

Cách 2: $z^3 = \bar{z} \Leftrightarrow z.z^3 = z.\bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow |z|^4 = |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2(|z|^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \text{ hoặc } |z|^2 - 1 = 0$$

Khi $|z|^2 = 0$ thì $z = 0$, do đó $z = 0$ là một nghiệm của phương trình $z^3 = \bar{z}$

Khi $|z|^2 - 1 = 0 \Rightarrow z \neq 0$ nên phương trình $z^3 = \bar{z} \Leftrightarrow z.z^3 = z.\bar{z}$ hay $z^4 = z.\bar{z} = 1$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 1 = 0 \\ z^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z = \pm i \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm $z = 0, z = \pm i, z = \pm 1$.

f) Gọi số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Điều kiện: $\bar{z} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Ta có: $\frac{z}{z} + z = 2 \Rightarrow z + z.\bar{z} = 2\bar{z} \Leftrightarrow a + bi + a^2 + b^2 = 2(a - bi)$

$$\Leftrightarrow a + a^2 + b^2 + bi = 2a - 2bi \Leftrightarrow \begin{cases} a + a^2 + b^2 = 2a \\ b = -2b \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ (loại)

Thử lại ta thấy $z = 1$ thỏa mãn bài toán. Vậy số phức cần tìm là $z = 1$.

Ví dụ 2. Tìm số phức z thỏa mãn phương trình

a) $(z - 2\bar{z})^3 = 8$; b) $\overline{z^2 + 2011} = 0$; c) $z^2 = |z^3|$

Giải

a) Đặt $t = z - 2\bar{z}$. Ta có phương trình

$$t^3 = 8 \Leftrightarrow t^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (t - 2) \cdot (t^2 + 2t + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 + 2t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 + \sqrt{3}i \\ t = -1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Ta có $t = z - 2\bar{z} = a + bi - 2(a - bi) = -a + 3bi$

$$\text{▪ Với } t = 2 \Leftrightarrow -a + 3bi = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -2$$

$$\text{▪ Với } t = -1 \pm \sqrt{3}i \Leftrightarrow -a + 3bi = -1 \pm \sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -1 \\ 3b = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow z = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

Vậy $z = -2; z = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$

b) Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Khi đó:

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow \bar{z}^2 = (a^2 - b^2) - 2abi \Rightarrow \bar{z}^2 + 2011 = (a^2 - b^2 + 2011) - 2abi$$

$$\text{Do đó } \bar{z}^2 + 2011 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 2011) - 2abi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2011 = 0 \\ -2ab = 0 \end{cases}$$

Nếu $b = 0$ thì $a^2 + 2011 = 0$ (vô lý). Do đó $b \neq 0 \Rightarrow a = 0$. Dẫn đến $b = \pm\sqrt{2011}$

Vậy số phức z cần tìm là: $\pm\sqrt{2011}i$

c) Đặt $z = x + yi$. Ta có:

$$z^2 = |z|^3 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - |z|^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 - |z|^3 = 0 \end{cases} (*)$$

$$x = 0 \text{ thay vào } (*) \Rightarrow y^2 + |z|^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ |z|^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow z = x, \text{ thay vào } (*) \Rightarrow x^2 - |x|^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1.$$

Vậy $z = 0, z = \pm 1$

Ví dụ 3. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn:

$$\text{a) } (1+i)^2(2-i)z = 8+i + (1+2i)z;$$

$$\text{b) } (2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2.$$

c) $(2+3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$;

d) $\bar{z} + 2z = 3 - 2i$.

Giải

a) Ta có:

$$(1+i)^2(2-i)z = 8+i + (1+2i)z \Leftrightarrow z \left[(1+i)^2(2-i) - (1+2i) \right] = 8+i$$

$$\Leftrightarrow z \left[2i(2-i) - 1 - 2i \right] = 8+i \Leftrightarrow z = \frac{8+i}{2i+1} = \frac{(8+i)(1-2i)}{5} = 2-3i$$

Vậy số phức z đã cho có phần thực là 2, phần ảo là -3 .

b) Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Lúc đó:

$$(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2 \Leftrightarrow (2-3i)(x+yi) + (4+i)(x-yi) = -(1+3i)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4y - 2(x+y)i = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy phần thực của z là -2 , phần ảo là 5 .c) Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$(2+3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2 \Leftrightarrow (2+3i)(a+bi) + (4+i)(a-bi) = -(1+3i)^2$$

$$\Leftrightarrow (6a-2b) + (4a-2b)i = 8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b=8 \\ 4a-2b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=17 \end{cases}$$

Vậy số phức z cần tìm có phần thực bằng 7 và phần ảo bằng 17.Phần thực của số phức cần tìm là -3 , phần ảo là 1 .d) Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết ta có:

$$a-bi + 2(a+bi) = 3-2i \Leftrightarrow 3a+bi = 3-2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Vậy số phức z có phần thực bằng 1, phần ảo bằng -2 .**Ví dụ 3.** a) Cho số phức z thỏa mãn $z + (1-2i)\bar{z} = 2(1-2i)$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = z^2 - 3z$.

b) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\frac{25i}{z}$, biết rằng $\frac{z}{2-i} + (4-3i)\bar{z} = 26+6i$.

Giảia) Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} -2x = -4 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow z = 2+i.$$

$$\text{Do đó } w = z^2 - 3z = (2+i)^2 - 3(2+i) = -3+i.$$

b) Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\frac{z}{2-i} + (4-3i)\bar{z} = 26+6i \Leftrightarrow (2+i)(a+bi) + 5(4-3i)(a-bi) = 5(26+6i)$$

$$\Leftrightarrow (22a-16b) + (-14a-18b)i = 130+30i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22a-16b=130 \\ -14a-18b=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow z=3-4i$$

$$\text{Do đó } \frac{25i}{z} = \frac{25i(3+4i)}{25} = -4+3i.$$

Vậy phần thực là -4, phần ảo là 3.

Ví dụ 4. a) Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và z là số ảo.

c) Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và phần thực của nó bằng 2 lần phần ảo.

d) Cho số phức z thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$

e) Tìm số phức z biết $|iz+1| = \sqrt{2}$ và $(1+i)z+1-2i$ là số thuần ảo.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2$$

$$\text{Mặt khác: } z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \text{ là số thuần ảo nên } x^2 - y^2 = 0$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases}$$

Vậy các số phức cần tìm là: $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = -1+i$, $z_4 = -1-i$.

b) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4 \quad (*)$$

Mặt khác: $z = x + yi$ là số ảo nên $x = 0$.

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào } (*) \text{ ta được } y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy các số phức cần tìm là: $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$.

c) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{Z}$). Ta có:

$$|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 25 \quad (*)$$

Mặt khác: Số phức có phần thực của nó bằng 2 lần phần ảo nên $x = 2y$ thay vào phương trình (*) ta được: $5y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5}$.

Vậy số phức cần tìm là: $z_1 = 2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$, $z_1 = -2\sqrt{5} - \sqrt{5}i$.

d) Gọi $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}$)

Ta có $(1 - 3i)z = (1 - 3i)(a + bi) = a + 3b - 3ai + bi = a + 3b + (b - 3a)i$

$(1 - 3i)z$ là số thực $\Leftrightarrow b - 3a = 0 \Leftrightarrow b = 3a$

$z = a - bi$ ta có $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |a - 2 + (-b + 5)i| = 1 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (5 - 3a)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{7}{5} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn là $z = 2 + 6i$; $z = \frac{7}{5} + \frac{21}{5}i$.

e) Đặt $z' = iz + 1 \Leftrightarrow z = \frac{z' - 1}{i}$ (*) và $|z'| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \bar{z}' = \frac{2}{z'}$, khi đó ta có:

$$(1 + i)z + 1 - 2i = \left(\frac{1 + i}{i}\right)(iz + 1) - \frac{1 + i}{i} + 1 - 2i = (1 - i)z'$$

Số phức này là số ảo, do đó ta có: $\overline{(1 - i)z'} = -(1 - i)z' \Leftrightarrow (1 + i)\bar{z}' = -(1 - i)z'$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + i)}{z'} \cdot 2 = -(1 - i)z' \Leftrightarrow z'^2 = -2i \Leftrightarrow z' = \pm(1 - i).$$

Thay vào (*) ta có $z = -1$; $z = 1 + 2i$.

Ví dụ 5. a) Tìm số phức z thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$

b) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$.

c) Tìm số phức z biết: $|z| = 2$ và $(z + 1)(2 - i\sqrt{3}) + (\bar{z} + 1)(2 + i\sqrt{3}) = 14$

d) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời: $\left|\frac{z - i}{z - 1}\right| = 1$ và $\left|\frac{z + i}{z - 3i}\right| = 1$

e) Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$ và $17(z + \bar{z}) - 5z\bar{z} = 0$.

f) Tìm số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 5$ và $z\bar{z} = 34$.

Giải

a) Gọi $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$),

Ta có: $z - (2 + i) = (a - 2) + (b - 1)i$;

Từ giả thiết ta có: $|z - (2 + i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = 10 \quad (1)$

và $z \cdot \bar{z} = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25 \quad (2)$

Giải hệ (1) và (2) ta được $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là: $z = 3 + 4i$ hoặc $z = 5$

b) Gọi $z = x + yi$, ta có: $\bar{z} = x - yi$; $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$$|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8 \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = 8 \quad (1)$$

$$z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được $x = 1$; $y = \pm 1$.

Vậy các số phức cần tìm là $1 + i$ và $1 - i$.

c) Ta có: $2z - z\sqrt{3}i + 2\bar{z} + \bar{z}\sqrt{3}i = 10$

$$\Leftrightarrow 2(z + \bar{z}) - \sqrt{3}i(z - \bar{z}) = 10$$

Đặt $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$

$$\text{Đến đây: } \Rightarrow 2a + \sqrt{3}b = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5 - \sqrt{3}b}{2}$$

Kết hợp với giả thiết ban đầu: $|z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$

Nên kết hợp lại ta được số phức: $z = 1 + \sqrt{3}i$; $z = \frac{13}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}i$

d) Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ y, x \neq 0 \\ y \neq 3 \end{cases}$. Từ bài toán suy ra:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + y^2} \\ \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 8y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy $z = 1 + i$

e) Đặt $z = a + bi$, ta có:

$$|z - 1| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a = 24 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 17(z + \bar{z}) - 5z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{34}{5}a \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) được $\frac{24}{5}a = 24 \Leftrightarrow a = 5$. Kết hợp với (1) có $b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$

Vậy có hai số phức thỏa mãn bài toán là $5+3i$ và $5-3i$.

f) Gọi $z = a + bi \Rightarrow |z+1-2i| = 5 \Leftrightarrow |(a+1) + (b-2)i| = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = 5 \quad (1)$$

Ta có $z \cdot \bar{z} = 34 \Leftrightarrow (a+bi)(a-bi) = 34 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 34 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a - 4b = 20 \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = -7 \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{-29}{5} \end{cases}$$

Vậy $z = 3+5i, z = \frac{-29}{5} + \frac{3}{5}i$.

Ví dụ 6. a) Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(1-i)z + (2+i)\bar{z} = 4+i$. Tính mô-đun của z .

b) Tìm mô-đun của số phức z biết $\bar{z} + 3z = 1+2i$.

c) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $z^2 = (1+i)\bar{z} + 1li$. Tính mô-đun của số phức z .

d) Tìm mô-đun của số phức z , biết rằng $\frac{z}{2-i} + (4-3i)\bar{z} = 26+6i$

e) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa các điều kiện sau: $|z_1 + 3z_2| = 4$ và $|z_1| = |z_2| = 1$. Hãy tính $|3z_1 - z_2|$.

Giải

a) Ta có:

$$(1-i)z + (2+i)\bar{z} = 4+i \quad (*)$$

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$(*) \Leftrightarrow (1-i)(a+bi) + (2+i)(a-bi) = 4+i \Leftrightarrow 3a + 2b - bi = 4+i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$

b) Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó theo giả thiết ta có:

$$(a-bi) + 3(a+bi) = 1+2i \Leftrightarrow 4a + 2bi = 1+2i \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{4} + i$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{16} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

c) Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$z^2 = (1+i)\bar{z} + 11i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = (1+i)(a-bi) + 11i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a + b + (a - b + 11)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a + b \\ 2ab = a - b + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = b + 1 \\ 2ab = a - b + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 2a^2 + 2a + 11 = 0 \text{ (VN)} \\ a = b + 1 \\ 2b^2 + 2b - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \\ a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

d) Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$\frac{z}{2-i} + (4-3i)\bar{z} = 26+6i \Leftrightarrow (2+i)(a+bi) + 5(4-3i)(a-bi) = 5(26+6i)$$

$$\Leftrightarrow (22a-16b) + (-14a-18b)i = 130+30i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22a-16b=130 \\ -14a-18b=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

Vậy $z = 3-4i \Rightarrow |z| = 5$

Cách 1.

$$|z_1 + 3z_2| = 4 \Leftrightarrow |z_1 + 3z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow (z_1 + 3z_2)(\overline{z_1 + 3z_2}) = 16$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + 3z_2)(\bar{z}_1 + 3\bar{z}_2) = 16 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + 3(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2) + 9z_2\bar{z}_2 = 16$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + 3(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2) + 9|z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow 1 + 3(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2) + 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2 = 2$$

Ta có:

$$|3z_1 - z_2|^2 = (3z_1 - z_2)(\overline{3z_1 - z_2}) = (3z_1 - z_2)(3\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= 9z_1\bar{z}_1 - 3(\bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_1) + z_2\bar{z}_2 = 9 - 3.2 + 1 = 4$$

Vậy $|3z_1 - z_2| = 2$.

Cách 2. Đặt $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, ($x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$)

Ta có

$$|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$$

$$\begin{aligned} |z_1 + 3z_2| = 4 &\Leftrightarrow (x_1 + 3x_2)^2 + (y_1 + 3y_2)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + 9(x_2^2 + y_2^2) + 6(x_1x_2 + y_1y_2) = 16 \\ &\Leftrightarrow 6(x_1x_2 + y_1y_2) = 6 \Leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2) = 1 \end{aligned}$$

Lúc đó:

$$\begin{aligned} |3z_1 - z_2|^2 &= (3x_1 - x_2)^2 + (3y_1 - y_2)^2 \\ &= 9(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 6(x_1x_2 + y_1y_2) = 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

Do đó: $|3z_1 - z_2| = 2$.

Ví dụ 7. a) Tìm số phức z thỏa mãn: $(z^2 + i)(z^2 - \bar{z}) = 0$.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{z}} = i$.

c) Tìm số phức z thỏa mãn $z + \frac{1+i}{(1-i)\bar{z}} = (1-i)|z|$.

d) Tìm số phức z thỏa mãn $(z+1)(1+i) + \frac{\bar{z}-i}{1-i} = |z|^2$.

e) Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{2-iz}{2+i} - \frac{z+2i}{1-2i} = 2\bar{z}$.

Giải

a) Ta có:

$$(z^2 + i)(z^2 - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + i = 0 & (1) \\ z^2 - \bar{z} = 0 & (2) \end{cases}$$

▪ Giải (1): Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + i = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + (2xy + 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases} (*)$$

Với $x = y$ thay vào (*) ta được: $2x^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Với $x = -y$ thay vào (*) ta được: $-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Vậy } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

- Giải (2): Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Phương trình (2) trở thành:

$$a^2 - b^2 + 2abi - a + bi = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - a + (2ab + b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - a = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - a = 0 (**) \\ b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $b = 0$ thay vào (**) ta được: $a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Vậy ta được $z_3 = 0, z_4 = 1$

Với $a = -\frac{1}{2}$ thay vào (**) ta được: $\frac{1}{4} - b^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy ta được $z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) Điều kiện: $z \neq 0, |z| \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}(|z|-1)(1+iz)}{|z|^2-1} = i \Leftrightarrow \frac{\bar{z}(|z|-1)(1+iz)}{(|z|-1)(|z|+1)} = i \Leftrightarrow \bar{z}(1+iz) = (|z|+1)i \\ &\Leftrightarrow \bar{z} + i|z|^2 = (|z|+1)i \quad (*) \end{aligned}$$

Giả sử $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó (*) trở thành:

$$\begin{aligned} x - yi + (x^2 + y^2)i &= (\sqrt{x^2 + y^2} + 1)i \Leftrightarrow x + (x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} - y - 1)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - |y| - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $x = 0, y = 1 + \sqrt{2}$ thì $z = (1 + \sqrt{2})i$, thỏa mãn điều kiện.

Nếu $x = 0, y = -1$ thì $z = -i$, khi đó $|z| = 1$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy số phức cần tìm là $z = (1 + \sqrt{2})i$.

c) Đặt $(z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 \neq 0)$. Ta có

$$z + \frac{1+i}{(1-i)z} = (1-i)|z| \Leftrightarrow z\bar{z} + \frac{1+i}{1-i} = |z|(1-i)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + i = \sqrt{x^2 + y^2} (x - y - (x + y)i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} (x - y) \\ 1 = -\sqrt{x^2 + y^2} (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = (x - y) \\ \sqrt{x^2 + y^2} (x + y) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y > 0 \quad (1) \\ xy = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} (x + y) = -1 \quad (2) \end{cases}$$

+) Với $x = 0$, ta có $(2) \Leftrightarrow y\sqrt{y^2} = -1 \Leftrightarrow y = -1$, thỏa mãn (1). Suy ra $z = -i$

+) Với $y = 0$, ta có $(2) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2} = -1 \Leftrightarrow x = -1$, không thỏa mãn (1), loại

d) Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $(z+1)(1+i) + \frac{\bar{z}-i}{1-i} = |z|^2$

$$\Leftrightarrow (x+1+yi)(1+i) + \frac{(x-1-yi)(1+i)}{2} = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x+1-y + (3x+1+y)i = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1-y = 2(x^2 + y^2) \\ 3x+1+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x+1 \\ 10x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = -1 \\ x = -\frac{3}{10}, y = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

Vậy $z = -i$ hoặc $z = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

e) Ta có $\frac{2-iz}{2+i} - \frac{z+2i}{1-2i} = 2\bar{z} \Leftrightarrow (2-iz)(1-2i) - (z+2i)(2+i) = 2(2+i)(1-2i)\bar{z}$

$$\Leftrightarrow (2-4i) - (2+i)z = (4-3i)\bar{z} \quad (1).$$

+) Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Lúc đó: $(1) \Leftrightarrow (2-4i) - (2+i)(a+bi) = (4-3i)(a-bi)$

$$\Leftrightarrow (2-2a+b) - (4+a+2b)i = (4a-3b) - (3a+4b)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a+b = 4a-3b \\ 4+a+2b = 3a+4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b = 1 \\ a+b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1+i$$

Vậy số phức cần tìm là $z = i + 1$.

Ví dụ 8. a) Tính môđun của số phức z biết $z^3 + 12i = \bar{z}$ và z có phần thực dương.

b) Tìm số phức z có phần ảo bằng 164 và $n \in \mathbb{R}^*$ thỏa : $\frac{z}{z+n} = 4i$.

c) Tìm số phức z thỏa mãn hai điều kiện: $|z+1-2i| = |\bar{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{z+i}$ là một số thuần ảo.

d) Tìm số phức z thỏa mãn: $(z-1) \cdot (\bar{z}+2i)$ là số thực và $|z-i| = \sqrt{2}$.

Giải

a) Giả sử $z = x + yi$ ($x > 0, x, y \in \mathbb{R}$)

$$z^3 + 12i = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^3 + 12i = x - yi \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3 + 12)i = x - yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 + 12 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y^2 + 1 \\ 3x^2y - y^3 + 12 = -y \end{cases} \quad (\text{do } x > 0).$$

Thế $x^2 = 3y^2 + 1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$3(y^2 + 1)y - y^3 + 12 = -y \Leftrightarrow 2y^3 + y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ (do } x > 0). \text{ Suy ra}$$

$$z = 2 - y \Rightarrow \text{môđun của số phức } z \text{ là: } |z| = \sqrt{5}$$

b) Gọi $z = a + 164i$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow \frac{a+164i}{a+164i+n} = 4i \Leftrightarrow a+164i = 4i(a+164i+n)$$

$$\Leftrightarrow a+164i \Leftrightarrow -656 + (a+n)i \Leftrightarrow \begin{cases} a = -656 \\ 4(a+n) = 164 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -656 \\ n = 697 \end{cases}$$

c) Giả sử $z = x + yi$. Theo bài ra ta có: $|x+1+(y-2)i| = |x+3+(4-y)i|$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow y = x+5$$

$$\text{Số phức } w = \frac{z-2i}{z+i} = \frac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i} = \frac{x^2 - (y-2)(y-1) + x(2y-3)i}{x^2 + (y-1)^2}.$$

$$w \text{ là một số ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (y-2)(y-1) = 0 \\ 2y-3 \neq 0, x^2 + (y-1)^2 > 0 \\ y = x+5 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{12}{7} \\ y = \frac{23}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = -\frac{12}{7} + \frac{23}{7}i$$

d) Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

Khi đó:

$$\begin{aligned}(z-1) \cdot (\bar{z}+2i) &= [(a-1)+bi] \cdot [a+(2-b)i] \\ &= [a(a-1)-b(2-b)] + (2a+b-2)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a+b=2\end{aligned}\quad (1)$$

$$|z-\sqrt{2}|=\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $a=1, b=0$ hoặc $a=-\frac{1}{5}, b=\frac{12}{5}$

Vậy $z_1=1, z_2=-\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$

Ví dụ 9. a) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+3i|=\frac{3}{2}$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|\bar{z}+3|=10$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

d) Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2+i|=\left|\bar{z}+1-4i\right|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Giải

a) Đặt $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $|z-2+3i|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=\frac{9}{4}$

Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức đã cho nằm trên đường tròn tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=\frac{3}{2}$.

Ta có: $\min|z|$ khi và chỉ khi M nằm trên đường tròn và gần O nhất.

Đó là điểm M_1 (Bạn đọc tự vẽ hình).

Ta có: $OI=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$. Kẻ $M_1H \perp Ox$.

Theo định lý talet ta có:

$$\frac{M_1H}{3} = \frac{OM_1}{OI} = \frac{\sqrt{13}-\frac{3}{2}}{\sqrt{13}} \Rightarrow M_1H = \frac{78-9\sqrt{13}}{26};$$

$$\frac{OH}{2} = \frac{\sqrt{13}-\frac{3}{2}}{\sqrt{13}} \Rightarrow OH = \frac{26-3\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Vậy } z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}i$$

b) Giả sử $z=x+yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó:

$$(z-1)(\bar{z}+2i) = [(x-1)+yi][x+(2-y)i]$$

Để $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực thì $(x-1)(2-y)+xy=0$ hay $2x+y-2=0$. Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực là đường thẳng Δ có phương trình $2x+y-2=0$.

Để $|z|$ nhỏ nhất thì M phải là hình chiếu của $O(0;0)$ lên Δ .

Từ đó tìm được $M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ nên $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

c) Áp dụng công thức: $z.\bar{z}=|z|^2$; $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 100 &= \left(|z-3i|+|\bar{z}+3|\right)^2 = 2\left(|z-3i|^2+|\bar{z}+3|^2\right) - \left(|z-3i|-|\bar{z}+3|\right)^2 \\ &\leq 2\left(|z-3i|^2+|\bar{z}+3|^2\right) \\ &= 2\left((z-3i)\overline{z-3i}+(\bar{z}+3)(\bar{z}+3)\right) = 2\left((z-3i)(\bar{z}+3i)+(\bar{z}+3)(-iz+3)\right) \\ &= 4(z.\bar{z}+9)=4|z|^2+36. \text{ Giải bất phương trình ta có } |z|\geq 4 \end{aligned}$$

Vậy $\min|z|=4$ đạt được khi $\begin{cases} |z-3i|=|\bar{z}+3| \\ |z|=4 \end{cases} \Rightarrow z=4, z=-4$

d) Giả sử $z=a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$z-2+i=(a-2)+(b+1)i \text{ và } \bar{z}+1-4i=(a+1)-(b+4)i$$

$$|z-2+i|=|\bar{z}+1-4i| \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b+4)^2 \Leftrightarrow a=-2-b$$

$$|z|^2=a^2+b^2=2b^2+4b+4=2+2(b+1)^2 \geq 2$$

Vậy $z=-1-i$ thỏa mãn đề bài.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm số phức z thỏa mãn đẳng thức: $z+2(z+\bar{z})=2-6i$.

A. $z = \frac{2}{5} - 6i$

B. $z = \frac{2}{5} + 6i$

C. $z = -\frac{2}{5} - 6i$

D. $z = -\frac{2}{5} + 6i$

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Giả sử $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có } z+2(z+\bar{z})=2-6i \Leftrightarrow x+yi+2(x+yi+x-yi)=2-6i$$

$\Leftrightarrow 5x + yi = 2 - 6i \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{2}{5}; -6\right)$. Vậy $z = \frac{2}{5} - 6i$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Số số phức z thỏa mãn đẳng thức: $|z|^2 + \frac{1}{2}(z - \bar{z}) = 1 + \frac{1}{2}(z + \bar{z})i$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), suy ra

$$\bar{z} = a - bi, |z|^2 = a^2 + b^2, z - \bar{z} = 2bi, z + \bar{z} = 2a.$$

Thay vào phương trình đã cho ta có $a^2 + b^2 + bi = 1 + ai$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 3. Số số phức z thỏa mãn $(z+1)^2 + |z-1|^2 - 10i = \bar{z} + 3$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có $(z+1)^2 + |z-1|^2 + 10i = \bar{z} + 3$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + 2(a+1)bi - b^2 + (a-1)^2 + b^2 + 10i = a - bi + 3$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 - a - 1) + (2ab + 3b + 10)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - a - 1 = 0 \\ 2ab + 3b + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a; b) = (1; -2) \vee (a; b) = \left(-\frac{1}{2}; -5\right)$$

Vậy $z = 1 - 2i$ hoặc $z = -\frac{1}{2} - 5i$. Vậy chọn đáp án C

Câu 4. Biết z_1, z_2 là hai số phức thỏa điều kiện: $2(\bar{z} + 1) + z - 1 = (1-i)|z|^2$. Tính $z_1 + z_2$

A. $-\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

B. $-\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$

C. $\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

D. $\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$

Hướng dẫn giải

$$\Rightarrow 2(\bar{z}+1)+z-1=(1-i)|z|^2 \Leftrightarrow 2(a-bi+1)+a+bi-1=(1-i)(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow (3a+1)-bi=a^2+b^2-i(a^2+b^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+1=a^2+b^2 \\ b=a^2+b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a+1 \\ 3a+1=a^2+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a^2+3a=0 \\ b=3a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{3}{10} \\ b=3a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-\frac{3}{10} \\ b=\frac{1}{10} \end{cases}$$

Có hai số phức cần tìm $z_1 = i; z_2 = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

Suy ra: $z_1 + z_2 = -\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 5. Tìm số phức z thỏa mãn $z + \frac{1+i}{(1-i)z} = (1-i)|z|$

A. $1+i$

B. $-i-1$

C. $-i$

D. i

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \neq 0$. Ta có:

$$z + \frac{1+i}{(1-i)z} = (1-i)|z| \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + \frac{1+i}{1-i} = |z|(1-i)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + i = \sqrt{x^2 + y^2} (x-y - (x+y)i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} (x-y) \\ 1 = -\sqrt{x^2 + y^2} (x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = x-y \\ \sqrt{x^2 + y^2} (x+y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y > 0 \\ xy = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} (x+y) = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x=0$, ta có $(2) \Leftrightarrow y\sqrt{y^2} = -1 \Leftrightarrow y = -1$, thỏa mãn (1). Suy ra $z = -i$.

Với $y=0$, ta có $(2) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2} = -1 \Leftrightarrow x = -1$, không thỏa mãn (1).

Vậy $z = -i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 6. Biết z_1, z_2 là số phức thỏa mãn: $(z+1)^2 + |z-1|^2 + 10i = \bar{z} + 3$. Tính $z_1^2 + z_2^2$.

A. $-\frac{111}{4} + i$

B. $-111 + i$

C. $-111 + 4i$

D. $-44 + i$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta được: $(a+bi+1)^2 + |a+bi-1|^2 + 10i = a-bi+3$

$$\Leftrightarrow (2a^2 - a - 1) + (2ab + 3b + 10)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - a - 1 = 0 \\ 2ab + 3b + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = -5 \end{cases}$$

Vậy $z = 1 - 2i$, $z = -\frac{1}{2} - 5i$. Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = -\frac{111}{4} + i$.

Câu 7. Biết z_1, z_2 là số phức thỏa mãn: thỏa mãn phương trình $\frac{\bar{z}}{1+i} + \frac{10}{z} = 4 + 3i$. Tính

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}.$$

- A. $-\frac{7}{25} - \frac{23}{50}i$ B. $\frac{7}{25} - \frac{23}{50}i$ C. $\frac{7}{25} + \frac{23}{50}i$ D. $-\frac{7}{25} + \frac{23}{50}i$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $z \neq 0$. Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Phương trình đã cho tương đương với:

$$z \cdot \bar{z} + 10(1+i) = (4+3i)(1+i)z \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 10 + 10i = a - 7b + (7a+b)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 10 = a - 7b \\ 7a + b = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 19a + 18 = 0 \\ b = 10 - 7a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{9}{5} \\ b = 10 - 7a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = -4 \\ a = \frac{9}{5}, b = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Vậy $z = 2 - 4i$ hoặc $z = \frac{9}{5} - \frac{13}{5}i$. Suy ra: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{7}{25} + \frac{23}{50}i$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 8. Tìm mô đun số phức z thỏa mãn $\frac{2-iz}{2+i} - \frac{z+2i}{1-2i} = 2\bar{z}$.

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{2-iz}{2+i} - \frac{z+2i}{1-2i} = 2\bar{z} \Leftrightarrow (2-iz)(1-2i) - (z+2i)(2+i) = 2(2+i)(1-2i)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (2-4i) - (2+i)z = (4-3i)\bar{z} \quad (1)$$

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (2-4i)-(2+i)(a+bi)=(4-3i)(a-bi) \\
 &\Leftrightarrow (2-2a+b)-(4+a+2b)i=(4a-3b)-(3a+4b)i \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a+b=4a-3b \\ 4+a+2b=3a+4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z=1+i
 \end{aligned}$$

Vậy số phức cần tìm là $z=1+i \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 9. Tìm số phức z thỏa điều kiện: $(z+\bar{z})(1+i)+(\bar{z}-z)(2+3i)=4-i$.

A. $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. **B.** $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. **C.** $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. **D.** $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có $\begin{cases} z+\bar{z}=2x \\ \bar{z}-z=-2yi \end{cases}$

Phương trình $(z+\bar{z})(1+i)+(\bar{z}-z)(2+3i)=4-i$ trở thành :

$$2x(1+i)-2yi(2+3i)=4-i \Leftrightarrow 2x+2xi-4yi+6y=4-i$$

$$\Leftrightarrow 2x+6y+(2x-4y)i=4-i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y=4 \\ 2x-4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy z cần tìm là: $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 10. Tìm môđun số phức z thỏa điều kiện: $\frac{z+\bar{z}}{1+i}-\frac{i(z-\bar{z})}{2-2i}=4+6i$.

A. $|z|=\sqrt{101}$ **B.** $|z|=10$ **C.** $|z|=1$ **D.** $|z|=11$

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Phương trình $\frac{z+\bar{z}}{1+i}-\frac{i(z-\bar{z})}{2-2i}=4+6i$ trở thành :

$$\frac{2x}{1+i}-\frac{2yi^2}{2(1-i)}=4+6i \Leftrightarrow \frac{2x}{1+i}+\frac{2y}{2(1-i)}=4+6i$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=4+6i \Leftrightarrow \frac{2x+y+(-2x+y)i}{2}=4+6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 \\ -2x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=10 \end{cases}$$

Vậy z cần tìm là $z = -1 + 10i \Rightarrow |z| = \sqrt{101}$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 11. Tìm Số số phức thỏa điều kiện: $\frac{z + \bar{z}}{1+i} - \frac{i(z - \bar{z})}{2-2i} = 4 + 6i$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có:

$$3(a + bi) - 4(a - bi - 1) + a^2 + b^2 = 5 + 7i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a = 1 \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Kết luận $z = i$, $z = 1 + i$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 11. Biết z là số phức thỏa điều kiện: $(1+i)\bar{z} - \frac{z}{1-i} = -5 + 7i$. Tính $w = \frac{1}{z}$

A. $w = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$

B. $w = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$

C. $w = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$

D. $w = -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó (*) trở thành: $2(a - bi) - (a + bi) = 2 + 12i$

$$\Leftrightarrow a - 3bi = 2 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Vậy $z = 2 - 4i \Rightarrow w = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 12. Tìm số phức z thỏa điều kiện $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$

A. $w = -1 + 2i$

B. $w = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}i$

C. $z = \frac{2}{3} + 4i$.

D. $w = -\frac{1}{14} + 2i$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Phương trình đã cho trở thành:

$$x + yi + 2(x - yi) = 2 - 4i \Leftrightarrow 3x - yi = 2 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy $z = \frac{2}{3} + 4i$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 13. Biết z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn điều kiện $z^2 + 2\bar{z} = 0$. Tìm $|z_1 + z_2|$

A. $|z_1 + z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

C. $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$

D. $|z_1 + z_2| = 2$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2(x - yi) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + (2xy - 2y)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2y(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \quad (*) \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Với $y = 0$ thay vào phương trình (*) ta được: $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Với $x = 1$ thay vào phương trình (*) ta được: $y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$.

Vậy $z_1 = \sqrt{3}i, z_2 = -2 - \sqrt{3}i$. Suy ra: $|z_1 + z_2| = 2$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 13. Tìm số số phức thỏa mãn điều kiện $z^2 + 2\bar{z} = 0$.

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

$$\text{Phương trình } z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -2\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2\sqrt{x^2 + y^2} & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ hoặc $y = 0$.

- Với $x = 0, (1) \Leftrightarrow -y^2 = -2\sqrt{y^2} \Leftrightarrow y^2 = 2|y| \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2y \\ y^2 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

Suy ra $z = 0$ hoặc $z = 2i$ hoặc $z = -2i$.

- Với $y = 0, (1) \Rightarrow x^2 = -2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra $z = 0$.

Vậy phương trình $z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ hoặc $z = 2i$ hoặc $z = -2i$.

Vậy chọn đáp án B.

Cách khác: Ta giải phương trình hệ quả rồi thử lại.

$$\text{Phương trình } z^2 + 2|z| = 0 \quad (1) \Rightarrow z^2 = -2|z| \Rightarrow |z^2| = |-2|z|| \Rightarrow |z|^2 = 2|z|$$

$$\Rightarrow |z| = 0 \text{ hoặc } |z| = 2.$$

- Với $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$.
- Với $|z| = 2$, phương trình (1) $\Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z^2 = 4i^2 \Rightarrow z = \pm 2i$.

Thử lại: Ta thế các giá trị của z vừa tìm được vào phương trình (1).

Với $z = 0$, ta có $z^2 = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) được nghiệm đúng.

Với $z = \pm 2i$, ta có $z^2 = (\pm 2i)^2 = 4i^2 = -4$ và $2|z| = 2|\pm 2i| = 2.2 = 4$.

Vậy phương trình $z^2 + 2|z| = 0$ được nghiệm đúng.

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = 0, z_2 = 2i, z_3 = -2i$.

Câu 14. Biết z_1, z_2 là số phức thỏa điều kiện $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$. Tính $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

A. $-i$

B. i

C. $1+i$

D. 0

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Phương trình $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$ trở thành:

$$x^2 - y^2 + 2xyi - (x^2 + y^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 1 + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy số phức z cần tìm là: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}i, z = -\frac{1}{\sqrt{2}}i$. Suy ra $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = 0$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 15. Biết z_1, z_2, z_3, z_4 là các số phức thỏa điều kiện $\frac{\bar{z}^2 + i}{z + 1} = i$. Tính $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. 3

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Phương trình $\frac{\bar{z}^2 + i}{z + 1} = i \Leftrightarrow \bar{z}^2 + i = iz + i$ trở thành

$$(x - yi)^2 = i(x + yi) \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -y + xi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -y \\ -2xy = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y = 0 \\ x(2y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy số phức z cần tìm là: $z = 0, z = i, z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Suy ra $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 3$.

$$|i| + \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = 3$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 17. Biết z là số phức thỏa điều kiện $z^2 + i|z| = 0$. Tìm số phức z có phần ảo âm

- A. $z = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ B. $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ C. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ D. $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ Phương trình $z^2 + i|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -i\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{x^2 + y^2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Leftrightarrow y = \pm x$.

- Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = -\sqrt{2x^2} \Leftrightarrow x = 0$ Suy ra $y = 0$. Vậy $z = 0$.
- Với $y = -x$:

$$(2) \Rightarrow -2x^2 = -\sqrt{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = |x|\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = x\sqrt{2} \\ 2x^2 = -x\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

- Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$
- Với $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Với $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 18. Biết z là số phức thỏa điều kiện $iz^2 + |z| + 1 = 0$. Tìm số phức z có phần thực dương

- A. $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{5}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{5}}{4}i$ B. $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}i$.

C. $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}i.$

D. $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2}i.$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Phương trình $iz^2 + |z| + 1 = 0 \Leftrightarrow i(x^2 - y^2 + 2xyi) + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (-2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1) + (x^2 - y^2)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ -2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \\ -2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$

○ Với $x = y$: $(2) \Leftrightarrow -2x^2 + \sqrt{2x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - |x|\sqrt{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2|x|^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \mp \sqrt{10}}{4}$

Suy ra $y = x = \frac{-\sqrt{2} \mp \sqrt{10}}{4}.$

○ Với $y = -x$, $(2) \Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{2x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + |x|\sqrt{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2|x|^2 + |x|\sqrt{2} + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy số phức z cần tìm là:

$z_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}i$ và $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}i.$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 19. Tìm số phức z thỏa mãn $2z - \bar{z} = (z + \bar{z} + 1)(1 + i) - 2.$

A. $z = -1 - i.$

B. $z = -1 + i.$

C. $z = 1 - i.$

D. $z = 1 + i.$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}).$

Ta có:

$2z - \bar{z} = 2x + 2yi - (x - yi) = x + 3yi$

$(z + \bar{z} + 1)(1 + i) - 2 = (2x + 1)(1 + i) - 2 = 2x - 1 + (2x + 1)i$

Như vậy phương trình đã cho trở thành:

$x + 3yi = 2x - 1 + (2x + 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 1 \\ 3y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $z = 1 + i.$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 20. Tìm số phức z thỏa mãn $(1+2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20$.

A. $z = -1 + i$.

B. $z = -3 + i$.

C. $z = 1 + 2i$.

D. $z = 4 + 3i$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Suy ra:

$$(1+2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20 \Leftrightarrow (-2a - 4b) + (4a - 4b)i = 4i - 20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 10 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } z = 4 + 3i.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 21*. Số số phức z thỏa mãn $z\sqrt{2z\bar{z}+1} = |z|(2+6iz)$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. $z = 4$

Hướng dẫn giải

Xét $z = 0$ là nghiệm của phương trình

Xét $z \neq 0$. Đặt $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$), từ giả thiết ta có:

$$z = \sqrt{3|z|^2 + 1} = 2|z| + 6|z|z.i \Leftrightarrow z.\bar{z}\sqrt{3|z|^2 + 1} = 2|z|.\bar{z} + 6|z|z.i$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 \sqrt{3|z|^2 + 1} = 2|z|(a - bi) + 6|z|^3.i \Leftrightarrow |z|^2 \sqrt{3|z|^2 + 1} = 2a|z| + (6|z|^3 - 2b|z|)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 \sqrt{3|z|^2 + 1} = 2a|z| \\ 6|z|^3 - 2b|z| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \sqrt{3|z|^2 + 1} = 2a \\ 3|z|^2 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 \sqrt{3|z|^2 + 1} = 4a^2 \\ 3|z|^2 - b = 0 \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(b+1) = 12a^2 \\ 3|z|^2 = b \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(b+1) = 12a^2 \quad (1) \\ 3a^2 + 3b^2 = b \quad (2) \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) trừ (2) về theo vế ta có } 9a^2 = 4b^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9}b^2 \quad (3)$$

$$\text{Thế (3) vào (1), ta được: } \frac{16}{3}b^2 = b^2 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{13} \Rightarrow a = \frac{2}{13}, (\text{do } a > 0, b > 0)$$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

Vậy ta có hai số phức cần tìm là $z = 0, z = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i$. Tìm $w = iz + 3$

A. $3 - 4i$

B. $5i$

C. $4i$

D. $z = 1 - 4i$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và a, b không đồng thời bằng 0.

Khi đó $\bar{z} = a - bi$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

Khi đó phương trình $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i \Leftrightarrow a - bi + \frac{25(a - bi)}{a^2 + b^2} = 8 - 6i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + b^2 + 25) = 8(a^2 + b^2) & (1) \\ b(a^2 + b^2 + 25) = 6(a^2 + b^2) & (2) \end{cases}$. Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b = \frac{3}{4}a$, thế vào (1) ta có

$$a = 0 \vee a = 4$$

Với $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (loại)

Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$. Ta có số phức $z = 4 + 3i$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 23. Tìm số phức z biết $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

A. $3 - 4i$

B. $1 - 5i$

C. $z = 2 - i$

D. $z = 1 - 4i$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Theo đề cho ta suy ra:

$$a + bi - (2 + 3i)(a - bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow -a - 3b - (3a - 3b)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = 1 \\ 3a - 3b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Số phức cần tìm là $z = 2 - i$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 24. Tính mô-đun của số phức $z + i$ biết $(z + i)(\bar{z} + i) = 2iz$ (i là đơn vị ảo).

A. $3 - 4i$

B. $1 - 5i$

C. $z = 2 - i$

D. $z = 1 - 4i$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có $(z + i)(\bar{z} + i) = 2iz$

$$\Leftrightarrow z.\bar{z} + i(z + \bar{z}) - 1 = 2iz \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 + 2ai = -2b + 2ai$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = -2b \\ 2a = 2a \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2b + 1 = 2 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 = 2$$

$$|z+i| = |a+(b+1)i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{2}. \text{ Vậy mô-đun của số phức } z+i \text{ bằng } \sqrt{2}.$$

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(1+2i)z + (2-2i)\bar{z} = i$. Tính mô-đun của z .

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$(1+2i)(a+bi) + (2-2i)(a-bi) = i \Leftrightarrow (3a-4b) - bi = i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4b=0 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2(z+1) = 3\bar{z} + i(5-i)$. Tính mô-đun của z .

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. 4

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$2(z+1) = 3\bar{z} + i(5-i) \Leftrightarrow 2(a+bi+1) = 3(a-bi) + 1+5i \Leftrightarrow a-1+5(1-b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 27. Số số phức z thỏa $|z| = 2$ và z^3 là số thực là:

A. 6

B. 2

C. 5

D. 4

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ 3a^2b - b^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ b = 0 \\ b^2 = 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = 4 \\ b^2 = 3a^2 \\ a^2 + 3a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \pm 2 \\ a = \pm 1 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $z = -2, z = 2, z = 1 - \sqrt{3}, z = 1 + \sqrt{3}, z = -1 - \sqrt{3}, z = -1 + \sqrt{3}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 28. Tìm nghịch đảo của số phức z , biết z thỏa mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 2 + 4i|$ và $\frac{z-i}{z+i}$ là số thuần ảo.

- A. $-\frac{1}{4} + \frac{5}{12}i$ B. $-\frac{3}{17} + \frac{5}{17}i$ C. $-\frac{3}{17} - \frac{5}{17}i$ D. $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $|z - 2i| = |\bar{z} + 2 + 4i| \Leftrightarrow a = b - 4$ (1)

Với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 1$, ta có:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{a+(b-1)i}{a-(b-1)i} = \frac{[a+(b-1)i]^2}{a^2+(b-1)^2} = \frac{[a^2-(b-1)^2] + 2a(b-1)i}{a^2+(b-1)^2}$$

Vì $\frac{z-i}{z+i}$ là số thuần ảo nên $a^2 - (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ a = 1-b \end{cases}$

Kết hợp (1) ta có $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}$. Vậy số phức đó là $z = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 29. Tìm mô đun số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và $z + \frac{2}{1+i}$ là số thực.

- A. 2 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Suy ra $z + \frac{2}{1+i} = a + bi + \frac{2(1-i)}{2} = a + 1 + (b-1)i$.

Từ giả thiết $z + \frac{2}{1+i}$ là số thực nên ta có $b = 1$.

Khi đó $|z| = 2 \Leftrightarrow |a+i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$.

Vậy số phức cần tìm là $z = \sqrt{3} + i$ và $z = -\sqrt{3} + i$. Từ đây suy ra $|z| = 2$.

Vậy chọn đáp án

Câu 30. Tính mô-đun của số phức z , biết $z^3 + 12i = \bar{z}$ và z có phần thực dương.

- A. $\sqrt{2}$ B. $|z| = \sqrt{7}$ C. $|z| = \sqrt{3}$ D. $|z| = \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. $z^3 + 12i = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^3 + 12i = x - yi$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3 + 12)i = x - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x & (1) \\ 3x^2y - y^3 + 12 = -y & (2) \end{cases}$$

Do $x > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 = 3y^2 + 1$. Thế vào (2) ta được:

$$3(3y^2 + 1)y - y^3 + 12 = -y \Leftrightarrow 2y^3 + y + 3 = 0 \quad (3)$$

Giải phương trình (3) ta được $y = -1 \Rightarrow x^2 = 4$. Do $x > 0$ nên $x = 2$.

Vậy $z = 2 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 31. Tìm z thỏa mãn điều kiện: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$

- A. $z = 0, z = 1, z = -i$. B. $z = 0, z = 1$ C. $z = i, z = -i$ D. $z = -i, z = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{pt} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = 1 & (1) \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = 1 \\ \frac{z+1}{z-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = -i (\text{loại}) \\ z = 0 \end{cases}; \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = i \\ \frac{z+1}{z-1} = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = 0, z = 1, z = -i$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 32. Tìm số số phức z thỏa mãn: $\left(\frac{iz+2}{z-3}\right)^4 = -7-24i$.

- A. 5 B. 3 C. 4 D. 2

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Nếu làm bằng cách gọi $z = a + bi$, thay vào và tính toán về trái, rồi đồng nhất phần thực và phần ảo của 2 vế sẽ rất dài và dẫn tới hệ đẳng cấp bậc 4 rất cồng kềnh. Áp dụng cách tính căn bậc hai bằng máy tính cầm tay, ta có cách giải ngắn gọn:

Đặt $z' = \frac{iz+2}{z-3} \Rightarrow z = \frac{2+3z'}{z'-i} (*)$. Phương trình đã cho trở thành:

Lần lượt thay z' vừa tìm được vào công thức (*), ta tìm được:

$$z \in \left\{ \frac{11}{2} + \frac{1}{2}i; \frac{19}{10} + \frac{3}{10}i; \frac{11}{4} + \frac{5}{4}i; 2 - \frac{3}{2}i \right\}. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$

Câu 33. Biết z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z-3i|=|1-iz|$ và $z-\frac{9}{z}$ là số thuần ảo. Tính

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2.$$

A. 51

B. 30

C. 41

D. 22

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$|z-3i|=|1-iz| \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|(1-y)-ix| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=(1-y)^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2=(1-y)^2 \Rightarrow y=2$$

Do đó $z = x + 2i$

Như thế

$$z - \frac{9}{z} = x + 2i - \frac{9}{x+2i} = x + 2i - \frac{9(x-2i)}{x^2+4} = \left(x - \frac{9x}{x^2+4}\right) + \left(2 + \frac{18}{x^2+4}\right)i$$

$$\text{Để } z - \frac{9}{z} \text{ là số thuần ảo thì } x - \frac{9x}{x^2+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy có ba số phức thỏa mãn yêu cầu đề toán là $z = 2i, z = -\sqrt{5} + 2i$ và $z = \sqrt{5} + 2i$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 34. Tìm số phức z thỏa mãn: $|z|=5$ và $(z+i)^2$ là số thuần ảo.

A. $z = 2+i, z = -2+i$

B. $z = 2+i, z = -1-2i$

B. $z = -2+i, z = -1-2i$

D. $z = 2+i, z = -2+i, z = 1-2i, z = -1-2i$

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + b - 2 = 0 \\ a^2 = (b+1)^2 \end{cases}$$

Với $b=1 \Rightarrow a=\pm 2 \Rightarrow z=2+i$ hoặc $z=-2+i$

Với $b=-2 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow z=1-2i$ hoặc $z=-1-2i$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 35. Tìm số phức z có phần ảo âm, biết $|z-1|=1$ và số phức $(1+i)(\bar{z}-1)$ có phần ảo bằng 1.

A. $z = -i$

B. $z = -2-i$

C. $z = 1-i$

D. $z = 3-i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có $|z-1|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ (1)

Vì $(1+i)(\bar{z}-1) = (x+y-1) + (x-y-1)i$;

$(1+i)(\bar{z}-1)$ có phần ảo bằng 1 nên $x-y-1=1 \Leftrightarrow x-1=y+1$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $(y+1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow z = 2$

Với $y = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow z = 1-i$

Vậy có hai số phức là $z = 2$ và $z = 1-i$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 36. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $\frac{z+7i}{z+1}$ là số thực.

A. 5

B. 3

C. 4

D. 2

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi \Rightarrow |z|=5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ (1)

Có $w = \frac{z+7i}{z+1} = \frac{x(x+1)-y(y+7)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{xy+(x+1)(y+7)}{(x+1)^2+y^2}i$

w là số thực $\Rightarrow xy+(x+1)(y+7)=0$ (2)

Từ (2) có $y = -\frac{7(x+1)}{2x+1}$ (*), thay vào (1) được phương trình:

$2x^4 + 2x^3 - 25x^2 - x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4)(2x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3; x = -4; x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Thay vào (*) tìm được y tương ứng từ đó tìm được các số phức: $z = 3-4i$; $z = -4-3i$;

$z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{7\sqrt{2}}{2}i$.

Câu 37. Tìm môđun số phức z biết $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo và $|z+1-3i| = |z-1+i|$

A. $|z| = \frac{\sqrt{365}}{5}$

B. $|z| = \frac{\sqrt{265}}{5}$

C. $|z| = \frac{\sqrt{215}}{5}$

D. $|z| = \frac{\sqrt{235}}{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(x+2) + (y+3)i}{x + (y-1)i} = \frac{[(x+2) + (y+3)i][x - (y-1)i]}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) + 2(2x - y + 1)i}{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

u là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ (x, y) \neq (0; 1) \end{cases} \quad (1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} |z+1-3i| = |z-1+i| &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có: $(x; y) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{16}{5}\right) \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{265}}{5}$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 39. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i| = 2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

B. $z = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

C. $z = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

D. $z = -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) ; Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức.

Ta có : $|z-1-2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ có tâm $I(1; 2)$. Đường thẳng OI có phương trình $y = 2x$

Chuyên Đề Số Phức

Số phức z thỏa mãn điều kiện và có môđun nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm biểu diễn số phức đó thuộc đường tròn (C) và gần gốc tọa độ O nhất, điểm đó chỉ là một trong hai giao điểm của đường thẳng OI với (C) , khi đó tọa độ của nó thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ hoặc } x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Chọn $x = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}$ nên số phức $z = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $|z|_{\min} = \sqrt{10} - 3; |z|_{\max} = \sqrt{10} + 3$

B. $|z|_{\min} = -\sqrt{10} - 3; |z|_{\max} = \sqrt{10} + 3$

C. $|z|_{\min} = -\sqrt{10} + 3; |z|_{\max} = \sqrt{10} - 3$

D. $|z|_{\min} = -\sqrt{10} + 3; |z|_{\max} = \sqrt{10} + 3$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$. Từ giả thiết:

$$\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x+2+(y-1)i| = \sqrt{2}|x+1-(y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2\left((x+1)^2 + (y+1)^2\right) \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = 10$$

Tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0; -3)$ bán kính $R = \sqrt{10}$.

Gọi M là điểm biểu diễn của z , ta có:

$$|IM - IO| \leq OM \leq IM + IO \Leftrightarrow \sqrt{10} - 3 \leq OM \leq \sqrt{10} + 3$$

$$|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} = \sqrt{10} - 3; |z|_{\max} \Leftrightarrow OM_{\max} = \sqrt{10} + 3$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $|z|_{\min} = \sqrt{2}$

B. $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$

C. $|z|_{\min} = 2$

D. $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$.

$$\begin{aligned}\text{Từ giả thiết: } w &= (z+3-i)(\bar{z}+1+3i) = (x+3+(y-1)i)(x+1-(y-3)i) \\ &= x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 + 2(x-y-4)i\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x-y-4=0$$

Tập hợp biểu diễn của z là đường thẳng $(d): x-y-4=0$. Gọi M là điểm biểu diễn của z .

$$|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} \Leftrightarrow OM \perp (d)$$

Tìm được $M(-2;2) \Leftrightarrow z = -2+2i$. Suy ra: $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 6:

PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

HUẾ, 1/04/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.....	3
BÀI TOÁN 1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT SỐ PHỨC	3
BÀI TOÁN 2. CĂN BẬC HAI SỐ PHỨC, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.....	9
DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA.....	40
DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN SỐ PHỨC	52

CHỦ ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

BÀI TOÁN 1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT SỐ PHỨC

I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

a) $(2+i)z = z + 2i - 1$;

b) $(1-i)(z-2i) = 2+i$.

Giải

a) Ta có:

$$(2+i)z = z + 2i - 1 \Leftrightarrow z(2+i-1) = -1+2i \Leftrightarrow z(1+i) = -1+2i$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-2i^2+i+2i}{1-i^2} = \frac{1+3i}{1+1} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Vậy số phức z cần tìm là: $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

b) Ta có:

$$(1-i)(z-2i) = 2+i \Leftrightarrow z-2i = \frac{2+i}{1-i} \Leftrightarrow z-2i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow z-2i = \frac{2+i^2+3i}{1-i^2} \Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2} + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Vậy số phức z cần tìm là: $z = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

a) $\frac{2i-1}{i+2}z = \frac{3i+1}{i-3}$;

b) $\frac{z}{(2i+1)^2} = \frac{5i-2}{2i^3+i-1}$.

Giải

a) Ta có: $\frac{2i-1}{i+2}z = \frac{3i+1}{i-3} \Leftrightarrow z = \frac{3i+1}{i-3} \cdot \frac{2i-1}{i+2} = \frac{3i+1}{i-3} \cdot \frac{i+2}{2i-1} = -1$

b) Ta có: $(2i+1)^2 = -3+4i$; $i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$$\frac{z}{(2i+1)^2} = \frac{5i-2}{-i-1} \Leftrightarrow z = \frac{-(5i-2)(2i+1)^2}{i+1} = \frac{37}{2} + \frac{9}{2}i$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

a) $(5-4i)z = (3+2i)(4-i)$;

b) $(z+2)i = (3i-z)(-1+3i)$.

Giải

a) Ta có

$$(5-4i)z = (3+2i)(4-i) \Leftrightarrow z = \frac{(3+2i)(4-i)}{5-4i} = \frac{14+5i}{5-4i} = \frac{50}{41} + \frac{81}{41}i$$

b) Ta có

$$(z+2)i = (3i-z)(-1+3i) \Leftrightarrow i.z + 2i = 3i + 9i^2 + z - 3iz$$

$$\Leftrightarrow (-1+4i)z = -9+i \Leftrightarrow z = \frac{-9+i}{-1+4i} = \frac{13}{17} + \frac{35}{17}i$$

Ví dụ 4. Giải phương trình sau: $(2iz+3)(z-5i)(\bar{z}-3+6i)=0$.

Giải

Ta có:

$$(2iz+3)(z-5i)(\bar{z}-3+6i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2iz+3=0 \\ z-5i=0 \\ \bar{z}-3+6i=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2i} \\ z = 5i \\ \bar{z} = 3-6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{2}i \\ z = 5i \\ z = 3+6i \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = -\frac{3}{2}i$, $z = 5i$, $z = 3+6i$.

Ví dụ 5. a) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z+2z=2$. Tính mô-đun của số phức $w = z+2+3i$.

b) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 1+z+z^2$.

Giải

a) Đặt $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo đề ra ta có: $\begin{cases} 3a-b=2 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ nên $z = 1+i$.

Khi đó $w = z+2+3i = 1+i+2+3i = 3+4i$.

Vậy $|w| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

b) Ta có:

$$(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i \Leftrightarrow (2+i)z = 5 \Leftrightarrow z = 2-i.$$

Khi đó: $w = z+z^2 = 5-5i \Rightarrow |w| = 5\sqrt{2}$.

b) Ta có:

$$(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i \Leftrightarrow (2+i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{5}{2+i} = 2-i.$$

Từ đó $w = 1+z+z^2 = 6-5i$. Suy ra $|w| = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$.

Ví dụ 6. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(2-i)(1+i) + \bar{z} = 4-2i$. Tính mô-đun của z .

Giải

Cách 1. Đặt $z = a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó $\bar{z} = a-bi$. Theo bài ra ta có:

$$(2-i)(1+i) + \bar{z} = 4-2i \Leftrightarrow a+3+(1-b)i = 4-2i \Leftrightarrow \begin{cases} a+3=4 \\ 1-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1+3i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.$$

Cách 2. Ta có:

$$(2-i)(1+i) + \bar{z} = 4-2i \Leftrightarrow \bar{z} = 4-2i - (2-i)(1+i) = 1-3i$$

$$\text{Suy ra: } z = 1+3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$$

II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Giải phương trình $(2+3i)z = z-1$.

A. $z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. **B.** $z = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$. **C.** $z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. **D.** $z = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(2+3i)z = z-1 \Leftrightarrow (2+3i-1)z = -1 \Leftrightarrow (1+3i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+3i} = \frac{-(1-3i)}{1^2+3^2} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Giải phương trình $(2-i)\bar{z} - 4 = 0$.

A. $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. **B.** $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. **C.** $z = \frac{5}{10} + \frac{3}{10}i$. **D.** $z = \frac{1}{13} - \frac{3}{13}i$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (2-i)\bar{z} - 4 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{2-i} = \frac{4(2+i)}{2^2+1^2} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i.$$

$$\text{Vậy } z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$

Câu 2. Giải phương trình $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$.

A. $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. **B.** $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. **C.** $z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$. **D.** $z = \frac{1}{13} - \frac{3}{13}i$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i \Leftrightarrow z = \left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 3. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{2z-1}{z+i} = 1+i$

A. $z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$

B. $z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}i.$

C. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

D. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $z \neq -i$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{2z-1}{z+i} = 1+i &\Leftrightarrow 2z-1 = (1+i)(z+i) \Leftrightarrow 2z-1 = (1+i)z + i + i^2 \\ &\Leftrightarrow (2-1-i)z = i-1+1 \Leftrightarrow (1-i)z = i \Leftrightarrow z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{i+i^2}{1+i} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Vậy z cần tìm là: $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 4. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{i}{z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3+6i}$.

A. $z = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}i.$

B. $z = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i.$

C. $z = \frac{3}{10} + \frac{21}{10}i.$

D. $z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $z \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{i}{z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3+6i} &\Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3(1+2i)} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{2+i}{4+1} + \frac{1-2i}{3(1+2i)(1-2i)} \\ &\Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{2+i}{5} + \frac{1-2i}{3(1+4)} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{3(2+i)}{15} + \frac{1-2i}{15} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{7+i}{15} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{15i}{7+i} = \frac{15i(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{15+105i}{49+1} \Leftrightarrow z = \frac{3}{10} + \frac{21}{10}i. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình: $\left[(1+2i)\bar{z} + 2-i\right]\left(iz + \frac{1}{i}\right) = 0$.

A. $z = 1, z = i$

B. $z = -1, z = i$

C. $z = -i, z = i$

D. $z = -i, z = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left[(1+2i)\bar{z} + 2-i \right] \left(iz + \frac{1}{i} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} iz + \frac{1}{i} = 0 & (1) \\ (1+2i)\bar{z} + 2-i = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow i^2 z + 1 = 0 \Leftrightarrow -z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$

Giải (2):

$$(2) \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-2+2+i+4i}{1+4} \Leftrightarrow \bar{z} = i \Leftrightarrow z = -i$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $z = i$ và $z = -i$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{7+i}{(2i-1)^3} = \frac{3+i}{2z+1}$.

A. $z = 1$

B. $z = i$

C. $z = -i$

D. $z = 2$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $z \neq -\frac{1}{2}$. Ta có: $(2i-1)^3 = 11-2i$.

$$\frac{7+i}{(2i-1)^3} = \frac{3+i}{2z+1} \Leftrightarrow (7+i)(2z+1) = (2i-1)^3 (3+i)$$

$$\Leftrightarrow 2z+1 = \frac{(2i-1)^3 (3+i)}{7+i} = \frac{(11-2i)(3+i)}{7+i} = 5 \Leftrightarrow z = 2.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{2+i-z}{(3-i)^2} = \frac{2z+1}{10+5i}$.

A. $z = 2i$

B. $z = i+1$

C. $z = -i$

D. $z = 2+i$

Hướng dẫn giải

$$\frac{2+i-z}{(3-i)^2} = \frac{2z+1}{10+5i} \Leftrightarrow (2+i-z)(10+5i) = (2z+1)(3-i)^2$$

$$\Leftrightarrow (2+i)(10+5i) - (10+5i)z = 2(3-i)^2 z + (3-i)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(10+5i) + 2(3-i)^2 \right] z = (3-i)^2 - (2+i)(10+5i)$$

$$\Leftrightarrow (26-7i)z = -7-26i \Leftrightarrow z = -i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z-5i}{z-2+i}+2i=3$. Tính mô-đun của số phức $z-2i$.

A. $4\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{z-5i}{z-2+i}+2i=3 \Leftrightarrow z-5i=(3-2i)(z-2+i) \Leftrightarrow z=\frac{4-12i}{2-2i}=4-2i$

Nên $z-2i=4-4i$.. Vậy $|z-2i|=4\sqrt{2}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1-2i)z+\frac{1-3i}{1+i}=2-i$. Tính mô-đun của z .

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1-2i)z+\frac{1-3i}{1+i}=2-i \Leftrightarrow z=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$

Vậy chọn đáp án C.

BÀI TOÁN 2. CĂN BẬC HAI SỐ PHỨC, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

1. Ta nhắc lại căn bậc hai của số phức

Định nghĩa: Cho số phức w . Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w . Mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$.

a) Trường hợp w là số thực

- Căn bậc hai của 0 là 0.
- Xét số thực $w = a \neq 0$

Khi $a > 0$, ta có $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$.

Vậy số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi $a < 0$, ta có $z^2 - a = z^2 - (-ai^2) = (z - \sqrt{-ai})(z + \sqrt{-ai})$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{-ai}$ hoặc $z = -\sqrt{-ai}$.

Vậy số thực a âm có hai căn bậc hai là $-\sqrt{ai}$ và $-\sqrt{-ai}$.

Ví dụ: $-1 = i^2 \Rightarrow -1$ có hai căn bậc hai là i và $-i$.

$-a^2 = a^2 \cdot i^2 \Rightarrow -a^2$ có hai căn bậc hai là ai và $-ai$.

b) Trường hợp $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$)

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

z là căn bậc hai của $w \Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này, ta luôn tính được hai nghiệm $(x; y)$.

Mỗi nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

Kĩ thuật MTCT tìm căn bậc hai của số phức

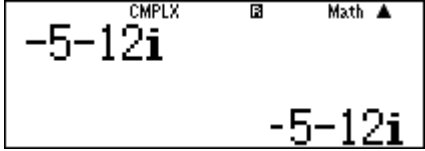
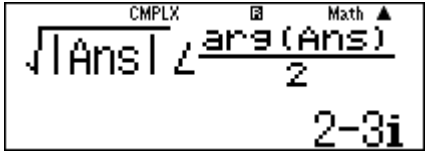
Giả sử ta cần tìm căn bậc hai số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

- Bước 1: Nhập vào màn hình $a + bi$ và ấn phím $\boxed{=}$ {lưu lại số phức $a + bi$ }
- Bước 2: Nhập vào màn hình $\sqrt{Ans} \angle \frac{\arg(Ans)}{2}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$

- Bước 3: Ấn phím $\boxed{S \leftrightarrow D}$ nếu màn hình không hiển thị đầy đủ. Lúc này máy sẽ hiển thị số phức dạng $\alpha + \beta i$
- Bước 4: Kết luận căn bậc hai cần tìm là $\pm(\alpha + \beta i)$

Ví dụ: Tìm căn bậc hai của số phức $z = -5 - 12i$

Hướng dẫn thực hành

• Bước 1: Nhập vào màn hình $-5-12i$ và ấn phím $\boxed{=}$	
• Bước 2: Nhập vào màn hình $\sqrt{ \text{Ans} } \angle \frac{\arg(\text{Ans})}{2}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả là $2-3i$	
• Bước 3: Bỏ qua vì màn hình đã hiển thị $2-3i$	
• Bước 4: Kết luận căn bậc hai cần tìm là $\pm(2-3i)$	

2. Phương trình bậc hai

Xét phương trình: $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số phức $A \neq 0$) (1)

Ta có $\Delta = B^2 - 4AC$.

- Nếu $\Delta \neq 0$, Δ có 2 căn bậc hai là δ và $-\delta$, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là: $z_1 = \frac{-B+\delta}{2A}$ và $z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}$.
- Nếu $\Delta = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$.

Chú ý:

- Ta chứng minh được với mọi phương trình bậc hai hệ số thực, nếu $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $y \neq 0$ là một nghiệm thì $\bar{z} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình đó.
- Do tính chất của phép nhân số phức, định lí Vi-et vẫn đúng cho phương trình bậc hai với ẩn $z \in \mathbb{C}$. Do đó các cách tính nhằm nghiệm của phương trình bậc hai vẫn áp dụng được.

Chẳng hạn:

$$A + B + C = 0 \Rightarrow z = 1, z = \frac{C}{A}; \quad A - B + C = 0 \Rightarrow z = -1, z = -\frac{C}{A}.$$

KỸ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HỆ SỐ PHỨC

- Bước 1: Ghi vào màn hình $D = B^2 - 4AC$; $E = \sqrt{|D|} \angle \frac{\arg(D)}{2}$; $X = \frac{-B+E}{2A}$; $Y = \frac{-B-E}{2A}$
- Bước 2: Ấn CALC và khai báo các hệ số

Ví dụ: Giải phương trình $z^2 + 2(1-2i)z - (7+4i) = 0$;

Dùng MTCT

Vậy hai nghiệm của phương trình là: $z = 1 + 2i, z = -3 + 2i$

I. MỘT SỐ VÍ SỰ RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của số phức

- a) -9 ; b) $3+4i$; c) $1-\sqrt{3}i$; d) $\frac{-1}{4i}$.

Giải

a) Gọi z là căn bậc hai của -9 , ta có:

$$z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 = 9i^2 \Leftrightarrow z = 3i \text{ hoặc } z = -3i.$$

Vậy -9 có hai căn bậc hai là $3i$ và $-3i$.

b) Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $3+4i$, ta có:

$$z^2 = 3+4i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 3+4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \frac{2}{x}$ thay vào (1) ta được:

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (loại)} \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Vậy $3+4i$ có hai căn bậc hai là $2+i$ và $-(2+i)$.

Dùng MTCT

Vậy $3+4i$ có hai căn bậc hai là $2+i$ và $-(2+i)$.

c) Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $1 - \sqrt{3}i$

Lúc đó:

$$(x + yi)^2 = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\frac{\sqrt{3}}{2x}$ thay vào phương trình (1) ta được

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{1}{2} & (\text{loại}) \\ x^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Với } x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Với } x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy có hai căn bậc hai của $1 - \sqrt{3}i$ là $z = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ và $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Dùng MTCT

Vậy có hai căn bậc hai của $1 - \sqrt{3}i$ là $z = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ và $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $-\frac{1}{4i}$

Ta có:

$$\begin{aligned} z^2 = -\frac{1}{4i} &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = \frac{i^2}{4i} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{i}{4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^2 - \frac{1}{64x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ 64x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^4 = \frac{1}{64} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{8x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $-\frac{1}{4i}$ có hai căn bậc hai là $z = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ và $z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right)$.

Dùng MTCT

Vậy $-\frac{1}{4i}$ có hai căn bậc hai là $z = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ và $z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right)$.

Nhận xét: Mọi số phức đều có hai căn bậc hai đối nhau.

Ví dụ 2. a) Tìm số phức z thỏa mãn: $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$

b) Tìm số phức w thỏa mãn: $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$

Giải

a) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có:

$$z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -164 + 48\sqrt{5}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -164 & (1) \\ xy = 24\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \frac{24\sqrt{5}}{x}$ thay vào (1) ta được

$$(1) \Rightarrow x^2 - \left(\frac{24\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -164 \Leftrightarrow x^4 + 164x^2 - 2880 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -180 \\ x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 4 \text{ Với}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 6\sqrt{5}.$$

$$\text{Với } x = -4 \Rightarrow y = -6\sqrt{5}.$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$ là

$$z = 4 + 6\sqrt{5}i, z = -4 - 6\sqrt{5}i.$$

b) Ta có $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$ và $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$

$$\text{Suy ra: } w^4 = z^2 \Leftrightarrow (w^2 - z)(w^2 + z) = 0 \Leftrightarrow w^2 = \pm z.$$

Theo kết quả trên ta có $z = \pm(4 + 6\sqrt{5}i) \Rightarrow w^2 = 4 + 6\sqrt{5}i$ hoặc $w^2 = -4 - 6\sqrt{5}i$.

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

- Trường hợp 1: Với $w^2 = 4 + 6\sqrt{5}i$ ta có $(x + yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \\ 2xy = 6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \frac{3\sqrt{5}}{x}$ thay vào (1) ta được

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -5 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{5}i}{x} = \sqrt{5}$

Với $x = -3 \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{5}i}{x} = -\sqrt{5}$.

Vậy $w = \pm(3 + \sqrt{5}i)$.

▪ Trường hợp 2: Với $w^2 = -4 - 6\sqrt{5}i$, ta có $(x + yi)^2 = -4 - 6\sqrt{5}i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -4 - 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -4 & (1) \\ 2xy = -6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\frac{3\sqrt{5}}{x}$ thay vào (1) ta được

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -4 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -9 \\ x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Với $x = \sqrt{5} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{5}}{x} = -3$

Với $x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{5}}{x} = 3$.

Vậy $w = \pm(\sqrt{5} - 3i)$.

Kết luận: Có 4 số phức w thỏa mãn $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$ là:

$$w = \pm(3 + \sqrt{5}i), \quad w = \pm(\sqrt{5} - 3i).$$

Ví dụ 3. a) Tìm số phức z thỏa mãn $z^4 = -1$;

b) Tìm số phức z thỏa mãn $\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1$.

Giải

a) Ta có: $z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = i^2 \Leftrightarrow (z^2 - i)(z^2 + i) = 0 \Leftrightarrow z^2 = \pm i$.

- Với $z^2 = i$, ta đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ ta có:

$$(x + yi)^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \frac{1}{2x}$ thay vào (1) ta được

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\circ \text{ Với } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\circ \text{ Với } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right).$$

$$\text{Kết luận: } z^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right). \end{cases}$$

b) Theo kết quả câu a ta có:

$$\left(\frac{z-1}{z+i} \right)^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-1}{z+i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ \frac{z-1}{z+i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right). \end{cases}$$

Xét 4 trường hợp:

- Trường hợp 1:

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (1+i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z + i + iz - 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1 - i)z = \sqrt{2} - 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} - 1 - i}{\sqrt{2} - 1 - i} = \frac{(\sqrt{2} - 1 + i)(\sqrt{2} - 1 + i)}{(\sqrt{2} - 1 - i)(\sqrt{2} - 1 + i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 - 1 + 2(\sqrt{2} - 1)i}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} - 1)i}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)i}{2 - \sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1 - \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)i}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- Trường hợp 2:

$$\frac{z-1}{z+i} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (-1-i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z - iz - i - i^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z - iz - i + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1 + i)z = \sqrt{2} + 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} + 1 - i}{\sqrt{2} + 1 + i} = \frac{(\sqrt{2} + 1 - i)^2}{(\sqrt{2} + 1 + i)(\sqrt{2} + 1 - i)} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2 + i^2 - 2(\sqrt{2} + 1)i}{(\sqrt{2} + 1)^2 + 1}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + 1)i}{4 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} + 1)i}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} + 1)i}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

• Trường hợp 3:

$$\frac{z-1}{z+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (1-i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z - iz + i - i^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z - iz + i + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1 + i)z = \sqrt{2} + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} + 1 + i}{\sqrt{2} - 1 + i} = \frac{(\sqrt{2} + 1 + i)(\sqrt{2} - 1 - i)}{(\sqrt{2} - 1 + i)(\sqrt{2} - 1 - i)} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + 1 + i(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 - 2i}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1 - i}{2 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{i}{2 - \sqrt{2}}.$$

• Trường hợp 4:

$$\frac{z-1}{z+i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (-1+i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z + iz - i + i^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z + iz - i - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1 - i)z = \sqrt{2} - 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} - 1 - i}{\sqrt{2} + 1 - i} = \frac{(\sqrt{2} - 1 - i)(\sqrt{2} + 1 + i)}{(\sqrt{2} + 1 - i)(\sqrt{2} + 1 + i)} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + 1 + i(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 - 2i}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 - i}{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} - \frac{i}{2 + \sqrt{2}}.$$

Kết luận:

$$\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } z = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{i}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\text{hoặc } z = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} - \frac{i}{2 + \sqrt{2}}.$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình bậc hai sau đây:

a) $z^2 + 4z - 5 = 0;$

b) $z^2 - 8z + 16 - 2i = 0;$

c) $(2z-1)^2 + 9 = 0;$

d) $z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0.$

Giải

a) Phương trình: $z^2 + 4z - 5 = 0$ có các hệ số $A+B+C=1+4-5=0$ nên phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 1, z_2 = -5$.

b) Phương trình $z^2 - 8z + 16 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z-4)^2 = 2i$

$\Leftrightarrow (z-4)^2 = (1+i)^2$ (chú ý là $(1+i)^2 = 1+i^2+2i=1-1+2i=2i$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} z-4=1+i \\ z-4=-1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=5+i \\ z=3-i \end{cases}$

c) Phương trình $(2z-1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (2z-1)^2 = -9 \Leftrightarrow (2z-1)^2 = (3i)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z-i=3i \\ 2z-i=-3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \end{cases}$

d) Phương trình $z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0$ có:

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot \frac{25}{4} = 0 = -16 = (4i)^2$. Phương trình có hai nghiệm là $z = \frac{-3 \pm 4i}{2}$.

MTCT

$x_1 = -\frac{3}{2} + 2i$	$x_2 = -\frac{3}{2} - 2i$
---------------------------	---------------------------

Ví dụ 5. Giải các phương trình bậc hai hệ số phức sau đây:

a) $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0;$

b) $z^2 + 2(1-2i)z - (7+4i) = 0;$

c) $z^2 - 2(2-i)z + 6 - 8i = 0;$

d) $z^2 - (2+i)z + i + 1 = 0.$

Giải

a) Phương trình $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$ có: $\Delta = 49 - 44 - 12i = 5 - 12i$

Đặt $\Delta = (x+yi)^2, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(x+yi)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\frac{6}{x}$ thay vào (1) ta được

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = -2$; Với $x = -3 \Rightarrow y = 2$. Vậy $\Delta = (3 - 2i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm là $z_1 = \frac{7+3-2i}{2} = 5-i$, $z_2 = \frac{7-2+2i}{2} = 2+i$.

Lời bình: Việc tìm căn bậc hai của số phức $5-12i$ ta dùng MTCT cho nhanh

b) Phương trình $z^2 + 2(1-2i)z - (7+4i) = 0$ có:

$$\Delta' = (1-2i)^2 + 7+4i = 1-4-4i+7+4i = 4.$$

Phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = -1+2i+2 = 1+2i$, $z_2 = -1+2i-2 = -3+2i$.

c) Phương trình $z^2 - 2(2-i)z + 6-8i = 0$ có:

$$\Delta' = (2-i)^2 - 6+8i = 4-1-4i-6+8i = -3+4i.$$

$$\text{Đặt } -3+4i = (x+yi)^2, (x, y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3, (1) \\ 2xy = 4, (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \frac{2}{x}$ thay vào (1) ta được:

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$; Với $x = -1 \Rightarrow y = -2$. Vậy $\Delta' = -3+4i = (1+2i)^2$.

Phương trình có nghiệm là: $z_1 = 2-i+1+2i = 3+i$, $z_2 = 2-i-1-2i = 1-3i$.

d) Phương trình $z^2 - (2+i)z + i+1 = 0$ có các hệ số thỏa mãn $a+b+c = 1-2-i+i+1 = 0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 1, z_2 = 1+i$.

Ví dụ 6. Giải phương trình sau trên tập số phức :

$$\text{a) } \frac{4z-3-7i}{z-i} = z-2i. \quad \text{b) } z^2 - (1+i)z + 6+3i = 0$$

Giải

a) Điều kiện $z \neq i$

Phương trình cho tương đương với: $4z-3-7i = (z-i)(z-2i)$ hay

$$z^2 - (4+3i)z + 1+7i = 0 (*)$$

Cách 1: Phương trình này có biệt số $\Delta = 3 - 4i \Leftrightarrow \Delta = i^2 - 4i + 4 = (i - 2)^2$

$$(*) \Leftrightarrow z = 1 + 2i \text{ hoặc } z = 3 + i$$

Cách 2: Gọi $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của Δ , khi đó $(x + yi)^2 = 3 - 4i$ hay

$$x^2 + y^2 + 2xyi = 3 - 4i \text{ suy ra } \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2; 1), (-2; 1)$$

$$(*) \Leftrightarrow z = 1 + 2i \text{ hoặc } z = 3 + i$$

b) Ta có:

$$\Delta = (1 + i)^2 - 4(6 + 3i) = -24 - 10i = (1 - 5i)^2$$

Phương trình có hai nghiệm là: $z = 1 - 2i$ và $z = 3i$.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } (z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0; \quad \text{b) } (z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0.$$

Giải

a) Đặt $t = z^2 + z$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + z + 6 = 0 \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } z^2 + z + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{Với } z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i$, $z = 1$, $z = -2$.

b) **Cách 1.** Ta có:

$$\begin{aligned}
& (z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) + z^2 - 4z^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow [(z^2 + 3z + 6) + z]^2 - (2z)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4z + 6)^2 - (2z)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (z^2 + 4z + 6 - 2z)(z^2 + 4z + 6 + 2z) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 2z + 6 = 0 \\ z^2 + 6z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \pm \sqrt{5}i \\ z = -3 \pm \sqrt{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = -1 \pm \sqrt{5}i$, $z = -3 \pm \sqrt{3}$.

Cách 2. Đặt $t = z^2 + 3z + 6$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2zt - 3z^2 = 0 (*)$.

Ta có: $\Delta' = (2z)^2 + 3z^2 = 4z^2 = (2z)^2$

Phương trình (*) có hai nghiệm: $t = -z + 2z$, $t = -z - 2z$.

$$\text{Với } t = -z + 2z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 = -z + 2z \Leftrightarrow z^2 + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + \sqrt{5}i \\ z = -1 - \sqrt{5}i \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -z - 2z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 = -z - 2z \Leftrightarrow z^2 + 6z + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3 + \sqrt{3} \\ z = -3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ví dụ 8. a) Hãy giải phương trình sau trên tập hợp số phức $(z - i)^2 (z + i)^2 - 5z^2 - 5 = 0$.

b) Giải phương trình: $(z^2 - z)(z + 3)(z + 2) = 10$, $z \in \mathbb{C}$

Giải

a) Viết lại phương trình về dạng: $(z^2 + 1)^2 - 5z^2 - 5 = 0$

Khai triển, rút gọn, nhân tử hóa $(z^2 + 1)(z^2 - 4) = 0$

Giải các phương trình, thu được $z = \pm i$ và $z = \pm 2$ rồi kết luận.

b) PT $\Leftrightarrow z(z + 2)(z - 1)(z + 3) = 10 \Leftrightarrow (z^2 + 2z)(z^2 + 2z - 3) = 10$

Đặt $t = z^2 + 2z$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \pm i \\ z = -1 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $z = -1 \pm \sqrt{6}$; $z = -1 \pm i$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z = 1 + 2i$ hoặc $z = 3 + i$

Ví dụ 9. a) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của của phương trình bậc hai hệ số phức

$$Az^2 + Bz + C = 0, (A \neq 0). \text{ Chứng minh rằng: } z_1 + z_2 = \frac{-B}{A} \text{ và } z_1 \cdot z_2 = \frac{C}{A}.$$

Áp dụng 1: Biết phương trình bậc hai $(1-i)z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2, z_2 = 1 + 2i$. Tính B và C.

b) Cho hai số phức có tổng $z_1 + z_2 = S$ và tích $z_1 \cdot z_2 = P$. Chứng minh rằng z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - Sz + P = 0$.

Áp dụng 2: Tìm hai số phức có tổng bằng 4 và tích bằng $4 + 2i$.

Giải

a) Phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ có $\Delta = B^2 - 4AC$. Gọi δ là một căn bậc hai của Δ .

$$\text{Phương trình có hai nghiệm là: } z_1 = \frac{-B + \delta}{2A}, z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}.$$

Ta có :

$$z_1 + z_2 = \frac{-B + \delta}{2A} + \frac{-B - \delta}{2A} = -\frac{B}{A}$$

$$\text{và } z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{-B + \delta}{2A} \right) \cdot \left(\frac{-B - \delta}{2A} \right) = \frac{(-B)^2 - \delta^2}{4A^2} = \frac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} = \frac{C}{A}.$$

Áp dụng 1: $(1-i)z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2, z_2 = 1 + 2i$.

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{B}{A} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{C}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (1 + 2i) = \frac{-B}{1-i} \\ 2 \cdot (1 + 2i) = \frac{C}{1-i} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow B = (-1+i)(3+2i) = -3 + 2i^2 - 2i + 3i = -5 + i$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow C = (1-i)(2+4i) = 2 - 4i^2 - 2i + 4i = 6 + 2i.$$

Vậy $B = -5 + i$ và $C = 6 + 2i$.

b) Hiển nhiên z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - Sz + P = 0.$$

Áp dụng 2: Gọi hai số phức phải tìm là z_1 và z_2 . Theo giả thiết ta có

$$S = z_1 + z_2 = 4 \text{ và } P = z_1 \cdot z_2 = 4 + 2i.$$

Do đó z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - Bz + P = 0$ hay

$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$. Phương trình trên tương đương với: $(z-2)^2 = -2i$

$\Leftrightarrow (z-2)^2 = (1-i)^2 \Leftrightarrow z-2 = \pm(1-i) \Leftrightarrow z = 2+1-i = 3-i, z = 2-1+i = 1+i$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 3-i, z_2 = 1+i$.

Ví dụ 10. Cho phương trình bậc hai hệ số thực $Az^2 + Bz + C = 0$ (1), với $A \neq 0$.

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có một nghiệm thực z_1 thì nghiệm còn lại z_2 cũng là số thực.

b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có một nghiệm thực z_0 không là số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm.

Áp dụng: Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết phương trình có 1 nghiệm là $2+i$.

Giải

a) Ta biết rằng phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) có hai nghiệm là z_1 và z_2 . Theo

công thức Vi-et ta có $z_1 + z_2 = \frac{-B}{A}$

Vì $A, B \in \mathbb{R}$ nên $\frac{-B}{A} \in \mathbb{R}$ và ta cũng có $z_1 \in \mathbb{R}$. Vậy $z_2 \in \mathbb{R}$.

b) Ta có z_0 là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ nên:

$$Az_0^2 + Bz_0 + C = 0 \Rightarrow \overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = 0 \quad (\text{Vì liên hiệp của số thực là chính số thực đó suy ra})$$
$$A(\overline{z_0})^2 + B\overline{z_0} + C = 0$$

Vậy $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$.

Áp dụng: Theo chứng minh trên, phương trình bậc hai hệ số thực có 1 nghiệm là $z_1 = 2+i$ thì nghiệm kia là $z_2 = 2-i$.

Ta có $S = z_1 + z_2 = (2+i) + (2-i) = 4$ và $P = z_1 \cdot z_2 = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5$.

Vậy z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Ví dụ 11. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}iz + 3i + 1 = 0$.

Hãy tính:

a) $z_1^2 + z_2^2$; b) $z_1^3 + z_2^3$; c) $z_1^4 + z_2^4$; d) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

Giải

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{1+3i}{2} \end{cases}$$

Do đó:

a) $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = -1 + \frac{-6-\sqrt{3}}{2}i$

b) $z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 2z_1z_2(z_1 + z_2) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{8}i$

c) $z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2)^2 + (z_2^2)^2 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2z_2^2 = \left[(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 \right]^2 - 2z_1^2z_2^2$
 $= -\frac{31}{16} + \frac{15}{2}i$

d) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2}{z_1z_2} = -\frac{43}{20} + \frac{9}{20}i$

Ví dụ 12. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$; M, N lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2 trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Giải

Phương trình đã cho có $\Delta' = 4 - 9 = -5 = 5i^2$ nên có hai nghiệm $z_{1;2} = 2 \pm i\sqrt{5}$.

Từ đó $M(2; \sqrt{5}), N(2; -\sqrt{5}) \Rightarrow MN = 2\sqrt{5}$.

Đáp số: $MN = 2\sqrt{5}$.

Ví dụ 13. a) Giải phương trình: $(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0$

b) Tìm số phức B để phương trình bậc $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.

Giải

a) Ta có

$$(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + i = 0 & (1) \\ z^2 - 2iz - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): Ta có $z^2 = -i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$

Giải (2): $z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = i$

Vậy nghiệm của phương trình là $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = i$.

Ví dụ 14. a) Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để phương trình $z^2 + az + b = 0$ nhận số phức $z = 1 + i$ làm nghiệm.

b) Tìm tất cả các số thực a, b sao cho số phức $z = 2 + 3i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$.

Giải

a) Theo đề, ta có: $(1+i)^2 + a(1+i) + b = 0 \Leftrightarrow 1 + 2i + i^2 + a + ai + b = 0$

$$\Leftrightarrow (a+2)i + (a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$$

b) Tính $z^2 = 1 + 6i$, $az = 2a + (3a)i$.

Suy ra $z^2 + az + b = (2a + b + 1) + (3a + 6)i$

Từ đó, có hệ $\begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ 3a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

Ví dụ 15. Tính mô-đun của số phức $w = b + ci$ ($b, c \in \mathbb{R}$), biết số phức $\frac{(1+i)^8(-1-2i)}{(1-i)^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$.

Giải

$$\text{Ta có: } z_0 = \frac{(2i)^4(-1-2i)}{(-2i)^3(1-i)} = \frac{2(-1-2i)(1+i)}{2i} = -3 - i$$

Vì z_0 là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên:

$$(-3-i)^2 + b(-3-i) + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-3b+c=0 \\ 6-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6 \\ c=10 \end{cases} \Rightarrow w = 6 + 10i$$

$$\text{Ta có } |w| = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

Ví dụ 16. Cho phương trình $8z^2 - 4(a+1)z + 4a + 1 = 0$ (1), với a là tham số. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để

(1) có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số ảo, trong đó z_2 là số phức có phần ảo dương.

Giải

Từ giả thiết suy ra z_1, z_2 không phải là số thực. Do đó $\Delta' < 0$, hay

$$4(a+1)^2 - 8(4a+1) < 0 \Leftrightarrow 4(a^2 - 6a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a - 1 < 0 \quad (*)$$

$$\text{Suy ra } z_1 = \frac{a+1-\sqrt{-(a^2-6a-1)}i}{4}, z_2 = \frac{a+1+\sqrt{-(a^2-6a-1)}i}{4} = \bar{z}_1$$

Ta có $\frac{z_1}{z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow z_1^2$ là số ảo

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 - \left(-\left(a^2-6a-1\right)\right) = 0 \Leftrightarrow a^2-2a=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta có giá trị của a là $a=0, a=2$.

Ví dụ 17. a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$.

b) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức phân biệt của phương trình $z^2 - (m-4i)z - 1 + 7i = 0$ Tìm số phức m sao cho $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+i}{2}$.

c) Trên tập số phức, tìm m để phương trình bậc hai: $z^2 + mz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$.

Giải

a) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ là nghiệm của phương trình: $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ nên nếu gọi $z_1 = a + bi \Rightarrow z_2 = a - bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$

Giả thiết cho: $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(a^2 + b^2) = 10 \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{10}{4}$$

Mặt khác theo Viet ta có :

$$z_1.z_2 = \frac{m^2-3m}{4} \text{ hay } \frac{m^2-3m}{4} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow m^2-3m \Leftrightarrow m = -2 \text{ hoặc } m = 5$$

b) Xét phương trình $z^2 - (m-4i)z - 1 + 7i = 0$ (1). Ta có $\Delta = (m+4i)^2 - 4(7i-1)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow (m+4i)^2 - 4(7i-1) \neq 0$

Theo định lý Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = m + 4i; z_1.z_2 = -1 + 7i$

$$\text{Mặt khác } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+i}{2} \Leftrightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1.z_2} = \frac{3+i}{2}$$

c) Giả sử z_1, z_2 là nghiệm của phương trình đã cho và $m = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Theo bài toán ta có: $z_1^2 + z_2^2 = -4i$ Suy ra $m^2 = -2i$ dẫn tới hệ:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases} \Rightarrow m = 1 - i \text{ hoặc } m = -1 + i$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

A. $z_1 = -1 + 2i; \quad z_2 = -1 - 2i$.

B. $z_1 = -1 - 2i; \quad z_2 = -1 - 2i$.

C. $z_1 = 1 + 2i; \quad z_2 = -1 + 2i$.

D. $z_1 = -1 - 2i; \quad z_2 = -1 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = -4 = 4i^2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm là: $z_1 = -1 + 2i; \quad z_2 = -1 - 2i$.

Vậy chọn đáp án **A**.

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$.

A. $z_1 = 2i; \quad z_2 = -1 - i$.

B. $z_1 = 2i; \quad z_2 = -1 + i$.

C. $z_1 = 1 - 2i; \quad z_2 = -1 + 2i$.

D. $z_1 = -1 - 2i; \quad z_2 = i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = 2i = (1 + i)^2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm là:

$$z_1 = \frac{-1 + 3i + 1 + i}{2} = 2i; \quad z_2 = \frac{-1 + 3i - 1 - i}{2} = -1 + i.$$

Vậy chọn đáp án **B**.

Câu 3. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 - 2(2 + i)z + (7 + 4i) = 0$.

A. $z_1 = 1 + 2i; \quad z_2 = -1 - i$.

B. $z_1 = -1 - 2i; \quad z_2 = -1 + i$.

C. $z_1 = 1 - 2i; \quad z_2 = -1 + 3i$.

D. $z_1 = 2 - i; \quad z_2 = 2 + 3i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = (2 + i)^2 - (7 + 4i) = -4 = 4i^2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $z_1 = 2 - i; \quad z_2 = 2 + 3i$.

Câu 4. Tìm nghiệm của phương trình $2iz^2 - 3z + 4 + i = 0$.

A.

B.

$$z_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1313} - 17}{2}} - \frac{1}{4} \left(3 + \sqrt{\frac{\sqrt{1313} + 17}{2}} \right) i;$$

$$z_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1313} - 17}{2}} + \frac{1}{4} \left(3 + \sqrt{\frac{\sqrt{1313} + 17}{2}} \right) i;$$

$$z_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1313} - 17}{2}} - \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{\frac{\sqrt{1313} + 17}{2}} \right) i$$

$$z_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1313} - 17}{2}} + \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{\frac{\sqrt{1313} + 17}{2}} \right) i$$

C.

D.

$$z_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i; \quad z_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i;$$

$$z_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i \quad z_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} + \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = 9 - 8i(4+i) = 17 - 32i$. Ta tìm căn bậc hai $x + yi$ của Δ

$$\text{Ta có: } (x + yi)^2 = 17 - 32i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 17 \\ 2xy = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{256}{x^2} = 17 \\ y = \frac{-16}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{17 + \sqrt{1313}}{2} \\ y = -\frac{16}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{17 + \sqrt{1313}}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{17 + \sqrt{1313}}{2}} \\ y = -\frac{16}{x} \end{cases}$$

Từ đó, phương trình có hai nghiệm phức là:

$$z_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i;$$

$$z_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $9z^2 - 12iz + 11 - 9i = 0$.

A. $z_1 = \frac{1}{3} + 2i; \quad z_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i.$

B. $z_1 = -\frac{1}{3} + 2i; \quad z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i.$

C. $z_1 = \frac{1}{3} + 2i; \quad z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i.$

D. $z_1 = \frac{1}{3} + 2i; \quad z_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \Delta' = (6i)^2 - 9(11 - 8i) = -135 + 72i = (3 + 12i)^2$$

$$\text{Suy ra } z_1 = \frac{6i + 3 + 12i}{9} = \frac{1}{3} + 2i; z_2 = \frac{6i - (3 + 12i)}{9} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + (2i + 1)z + 1 - 5i = 0$.

A. $z_1 = 1 + 2i; \quad z_2 = -1 + i.$

B. $z_1 = i + 1; \quad z_2 = -2 - 3i$

C. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = -1 - 3i.$

D. $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = -2 + 3i.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta' = (2i + 1)^2 - 4(1 - 5i) = -7 + 24i = (3 + 4i)^2 \Rightarrow \delta = 3 + 4i$ là một căn bậc hai của Δ

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = i + 1; \quad z_2 = -2 - 3i$

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $iz^2 - 2(1 - i)z - 4 = 0.$

A. $z_1 = -1 + 2i; \quad z_2 = -1 + i.$

B. $z_1 = -2; \quad z_2 = -2i.$

C. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = -1 + i.$

D. $z_1 = 2 - 4i, \quad z_2 = -2 + 4i.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = (1 - i)^2 + 4i = (1 + i)^2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $z_1 = -2; \quad z_2 = -2i.$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 8. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0.$

A. $z_1 = -1 + 3i; \quad z_2 = -1 + 4i.$

B. $z_1 = -2 + 2i; \quad z_2 = 2 - 2i.$

C. $z_1 = -1 + 5i; \quad z_2 = -2 + 5i.$

D. $z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 3 - 2i.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = (5 - i)^2 - 4(8 - i) = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 3 - 2i.$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 9. Tìm nghiệm của phương trình $2z^2 - 2(5 - 2i)z + 28 - 4i = 0.$

A. $z_1 = -1 + 7i; \quad z_2 = -1 + 5i.$

B. $z_1 = -2 + 2i; \quad z_2 = 2 - i.$

C. $z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 2 + 2i.$

D. $z_1 = -2 + 2i; \quad z_2 = 3 - 2i.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = (5 - 2i)^2 - 2(28 - 4i) = -35 - 12i = (1 - 6i)^2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 2 + 2i.$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình: $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0.$

A. $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 2 + 3i.$

B. $z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = 2 - 2i.$

C. $z_1 = 1 + 5i; \quad z_2 = 1 - 2i.$

D. $z_1 = -2 + 2i; \quad z_2 = 3 + 3i.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = (3+4i)^2 - 4(-1+5i) = -3+4i = (1+2i)^2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $z_1 = 1+i$; $z_2 = 2+3i$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình: $2z^2 - 3z + 1 + iz(4-3z) - i = 0$.

A. $z_1 = 1-i$; $z = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$.

B. $z_1 = -3$; $z_2 = 5-2i$.

C. $z_1 = 1$; $z_2 = 1+2i$.

D. $z = 1$, $z = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với: $(2-3i)z^2 + (4i-3)z + 1-i = 0$

Ta có $\Delta = (4i-3)^2 - 4(2-3i)(1-i) = -3-4i = (1-2i)^2$

Suy ra $z_1 = \frac{3-4i+(1-2i)}{2(2-3i)} = 1$

và $z_2 = \frac{3-4i-(1-2i)}{2(2-3i)} = \frac{1-i}{2-3i} = \frac{(1-i)(2+3i)}{2^2+3^2} = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$

vậy phương trình có hai nghiệm là $z = 1$ và $z = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 12. Tìm các số thực b,c để phương trình (với ẩn z): $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1+i$ làm một nghiệm.

A. $b = -2, c = -2$.

B. $b = -2, c = 3$.

C. $b = -1, c = 2$.

D. $b = -2, c = 2$.

Hướng dẫn giải

Theo đề, $z = 1+i$ làm một nghiệm của phương trình: $z^2 + bz + c = 0$

Nên $(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow b+c+(2+b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy, $b = -2, c = 2$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 13. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình : $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị của

biểu thức $A = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$.

A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{17}{2}$

C. 5

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình: $2z^2 - 4z + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$

Lúc đó: $A = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2} = \frac{\left|1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right|^2 + \left|1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right|^2}{\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)^2} = \frac{17}{2}.$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 14. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

A. 15

B. 17

C. 20

D. 10

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = 2^2 - 4.10 = -36 = 36i^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = -1 + 3i$ và $z_2 = -1 - 3i$.

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ và $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$

Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20.$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 15. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 15

B. 37

C. 21

D. 11

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta' = -18 = 18i^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm là $z_1 = \frac{2+3\sqrt{2}i}{2}, z_2 = \frac{2-3\sqrt{2}i}{2}.$

$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = \left(\frac{4+18}{4}\right) + \left(\frac{4+18}{4}\right) = 11.$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 16. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 17 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |i + z_1| + |i + z_2|.$

A. $A = 2\sqrt{23}$

B. $A = 2\sqrt{10}, A = 2\sqrt{11}$

C. $A = 2\sqrt{26}, A = 2\sqrt{5}$

D. $A = 2\sqrt{10}, A = 2\sqrt{26}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 17 = -16 = (4i)^2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm là $1+4i$ và $1-4i$.

Nếu $z_1 = 1+4i$ thì $A = 2|i+1-4i| = 2|1-3i| = 2\sqrt{10}$

Nếu $z_1 = 1-4i$ thì $A = 2|i+1+4i| = 2|1+5i| = 2\sqrt{26}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 17. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Tính

$(z_1 + \sqrt{3} - 2)^{10} + (z_2 + \sqrt{3} - 2)^{10}$

A. 5

B. 0

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải

Giải phương trình ta được $z_1 = 2 - \sqrt{3}i; z_2 = 2 + \sqrt{3}i$

$$(z_1 + \sqrt{3} - 2)^{10} + (z_2 + \sqrt{3} - 2)^{10} = (\sqrt{3}(1-i))^{10} + (\sqrt{3}(1+i))^{10}$$

$$= 3^5 \left[(1-i)^{10} + (1+i)^{10} \right] = 3^5 \left[(-2i)^5 + (2i)^5 \right]$$

$$= 6^5 (i^5 - i^5) = 0$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 18. Tìm nghiệm của phương trình : $(x+i-2)[x^2 - (2+i)x + 7i-1] = 0$

A. $z = -3-i, x = -1+2i$.

B. $z = 3-i, x = -1-2i$.

C. $z = 3-i, x = -1+2i$.

D. $z = 3+i, x = -1+2i$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(x+i-2)[x^2 - (2+i)x + 7i-1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+i-2=0 & (1) \\ x^2 - (2+i)x + 7i-1=0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $x = 2-i$

Giải (2): $x^2 - (2+i)x + 7i-1 = 0$ có $\Delta = (2+i)^2 - 4(7i-1) = 7-24i = (4-3i)^2$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{2+i+4-3i}{2} = 3-i; \quad x_2 = \frac{2+i-4+3i}{2} = -1+2i.$$

Câu 19. Biết z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + (2-i)z + 3+5i = 0$.

19.1. Tính $z_1^2 + z_2^2$

A. $3-14i$

B. $-3+14i$

C. $-3-14i$

D. $3+14i$

19.2. Tính $z_1^4 + z_2^4$

A. $193-74i$

B. $-193+74i$

C. $193+74i$

D. $-193-74i$

19.3. Tính $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$

A. $-\frac{93}{289} + \frac{157}{578}i$

B. $\frac{93}{289} + \frac{157}{578}i$

C. $-\frac{93}{289} - \frac{157}{578}i$

D. $\frac{93}{289} - \frac{157}{578}i$

19.4. Tính $z_2 z_1^4 + z_1 z_2^4$.

A. $-67-25li$

B. $67+25li$

C. $-67+25li$

D. $67-25li$

Hướng dẫn giải

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2+i \\ z_1 \cdot z_2 = 3+5i \end{cases}$$

Do đó:

$$\oplus z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = -3-14i$$

$$\begin{aligned} \oplus z_1^4 + z_2^4 &= (z_1^2)^2 + (z_2^2)^2 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2 z_2^2 = \left[(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 \right]^2 - 2z_1^2 z_2^2 \\ &= -193+74i \end{aligned}$$

$$\oplus \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{(z_1 z_2)^2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{(z_1 z_2)^2} = -\frac{93}{289} + \frac{157}{578}i.$$

$$\oplus z_2 z_1^4 + z_1 z_2^4 = z_1 z_2 (z_1^3 + z_2^3) = z_1 z_2 \left[(z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \right] = -67+25li.$$

Câu 20. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho các số phức là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $2\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình: $z^2 + 2z + 3 = 0$ có $\Delta' = 1-3 = -2 = (i\sqrt{2})^2$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1 = -1+i\sqrt{2}; z_2 = -1-i\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow A(-1; \sqrt{2}); B(-1; -\sqrt{2}).$$

$$\text{Vậy } AB = 2\sqrt{2}.$$

Câu 21. Cho số phức z có phần thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{z-11}{z-2} = z-1$. Tính $\left| \frac{z-4i}{z+2i} \right|$.

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{z-11}{z-2} = z-1 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 13 = 0, \Delta' = -9 = 9i^2 \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + 3i \\ z = 2 - 3i \end{cases}$$

$$z = 2 + 3i \Rightarrow \left| \frac{z-4i}{z+2i} \right| = \left| \frac{2-i}{2-i} \right| = 1$$

Vậy chọn đáp án A

Câu 22. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0$ và thỏa mãn $|z_1| > |z_2|$. Tìm giá trị của biểu thức $A = \left| \left(\overline{z_1} \right)^{-1} \right|^2 + \left| (1-z_2)^{-1} \right|^2$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$z^2 - [2i + (1+i)]z + [2i \cdot (1+i)] = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z-i-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = i+1 \end{cases}$$

Do $|z_1| > |z_2|$ nên ta có $z_1 = 2i$ và $z_2 = i+1$

$$\text{Ta có } A = \left| \left(\overline{z_1} \right)^{-1} \right|^2 + \left| [1 - (i+1)]^{-1} \right|^2 = \left| \frac{1}{-2i} \right|^2 + \left| \frac{1}{i} \right|^2 = \left| \frac{i}{2} \right|^2 + |-i|^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Câu 23. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = (z_1 + \sqrt{3} - 2)^{10} + (z_2 + \sqrt{3} - 2)^{10}$

A. 1

B. 3

C. 0

D. 5

Hướng dẫn giải

Định hướng: Ta sẽ tiến hành giải phương trình đầu tiên để tìm ra z_1, z_2 sau đó tiến hành lắp vào biểu thức cần tính ta có: $3^5 \left[(1-i)^{10} + (1+i)^{10} \right]$. Đến đây vì mũ 10 lon nên ta sẽ tiến hành làm từng lớp một, tức là:

$$3^5 \left[(1-i)^{10} + (1+i)^{10} \right] = 3^5 \left[\left((1-i)^2 \right)^5 + \left((1+i)^2 \right)^5 \right]$$

$$= 3^5 \left[(-2i)^5 + (2i)^5 \right] = 6^5 \left[(i)^5 - (i)^5 \right] = 0$$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$z^2 - 4z + 7 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 = -3 \Leftrightarrow (z-2)^2 = (i\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow z = 2 \pm i\sqrt{3}$$

Do Q là biểu thức đối xứng với z_1, z_2 nên không mất tính tổng quát, giả sử $\begin{cases} z_1 = 2 + i\sqrt{3} \\ z_2 = 2 - i\sqrt{3} \end{cases}$

Lúc đó:

$$Q = (z_1 + \sqrt{3} - 2)^2 + (z_2 + \sqrt{3} - 2)^2 = (i\sqrt{3} + \sqrt{3})^{10} + (-i\sqrt{3} + \sqrt{3})^{10} = (\sqrt{3})^{10} (i+1)^{10} + (\sqrt{3})^{10} (i-1)^{10}$$

$$= 3^5 \left[(2i)^5 + (-2i)^5 \right] = 6^5 \left[i^5 - i^5 \right] = 0$$

Vậy chọn đáp án C.

Lưu ý: Cũng có thể dùng dạng lượng giác của số phức để giải quyết bài toán này.

Câu 24. Cho số phức z có phần thực dương thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $\left| z + \frac{6}{z+i} \right|$.

A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{17}$

C. 7

D. $7\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = -4 \Leftrightarrow (z-3)^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = 3 + 2i$ hoặc $z = 3 - 2i$

Với $z = 3 + 2i$ ta có $\left| z + \frac{6}{z+i} \right| = \left| 3 + 2i + \frac{6}{3+3i} \right| \Leftrightarrow |4+i| = \sqrt{17}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 25. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 - 2\cos\alpha \cdot z + 1 = 0$.

A. $z_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha, z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$

B. $z_1 = -\cos\alpha + i\sin\alpha, z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$

C. $z_1 = -\cos\alpha - i\sin\alpha, z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$

D. $z_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha, z_2 = -\cos\alpha - i\sin\alpha$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha = (2\sin\alpha)^2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm

$$z_1 = \frac{2\cos\alpha - 2i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha - i\sin\alpha;$$

$$z_2 = \frac{2\cos\alpha + 2i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 26. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)z + i\sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0$.

A. $z_1 = i\sin\alpha, z_2 = -i\sin\alpha$

B. $z_1 = \cos\alpha, z_2 = i\sin\alpha$

C. $z_1 = -\cos\alpha, z_2 = i\sin\alpha$

D. $z_1 = \cos\alpha, z_2 = -\cos\alpha$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\Delta = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - 4i\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2i\sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^2$$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm

$$z_1 = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi}{2} = \cos\varphi$$

$$z_2 = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi}{2} = i\sin\varphi$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 31. Biết phương trình $(1-i)x^2 + (\lambda+i)x + 1+i\lambda = 0$ không có nghiệm thực. Tìm những giá trị có thể có của λ .

A. $\lambda \neq -3$

B. $\lambda \neq 1$

C. $\lambda \neq 2$

D. $\lambda = 3$

Hướng dẫn giải

Nếu phương trình có một nghiệm thực r thì:

$$(1-i)r^2 + (\lambda+i)r + 1+i\lambda = 0 \Leftrightarrow r^2 + \lambda r + 1 + i(-r^2 + r + \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + \lambda r + 1 = 0 \\ -r^2 + r + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + \lambda r + 1 = 0 \\ \lambda r + r + \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + \lambda r + 1 = 0, (1) \\ (\lambda + 1)(r + 1) = 0, (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có:

- Nếu $\lambda = -1$ thì từ (1) suy ra $r^2 - r + 1 = 0$, phương trình này không có nghiệm thực.
- Nếu $r = -1$ thì từ (1) suy ra $1 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm thực khi và chỉ khi $\lambda \neq 2$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 32. Cho z_1 và z_2 là các số phức thỏa mãn $z_1^2 - 4z_2 = 16 + 20i$. Giả sử α, β là các nghiệm của phương trình $x^2 + z_1x + z_2 + m = 0$ thỏa mãn điều kiện $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$, với m là số phức.

32.1. Tìm giá trị lớn nhất của $|m|$.

- A. $|m|_{\max} = 7 + \sqrt{41}$. B. $|m|_{\max} = 9 - \sqrt{47}$. C. $|m|_{\max} = 7 - \sqrt{34}$. D. $|m|_{\max} = 5 + \sqrt{35}$.

32.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|m|$.

- A. $|m|_{\max} = 3 + \sqrt{47}$. B. $|m|_{\max} = 7 - \sqrt{41}$. C. $|m|_{\max} = 7 + \sqrt{34}$. D. $|m|_{\max} = -5 + \sqrt{35}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng định lý Viet ta có $\alpha + \beta = -z_1, \alpha\beta = z_2 + m$.

Do đó: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = z_1^2 - 4z_2 - 4m = 16 + 20i - 4m$

Từ $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$ suy ra $|4 + 5i - m| = 7$. Do đó điểm M biểu diễn

số phức m trên mặt phẳng phức thuộc đường tròn tâm I(4;5) và bán kính R=7. Ta cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của OM. Đường thẳng OI cắt đường tròn tại hai điểm A, B với

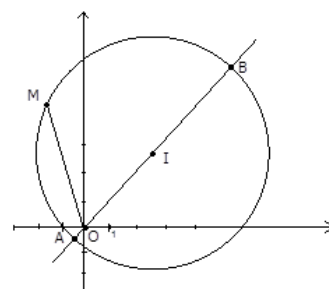
Onằm giữa A và I. Vì $OI = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ nên:

32.1. Giá trị lớn nhất của $|m|$ khi $M \equiv B$, khi đó:

$|m|_{\max} = OB = OI + IB = 7 + \sqrt{41}$. **Vậy chọn đáp án A.**

32.2. Giá trị nhỏ nhất của $|m|$ khi $M \equiv A$, khi đó:

$|m|_{\min} = OA = IA - OI = 7 - \sqrt{41}$. **Vậy chọn đáp án B.**



Câu 33. Tìm mô-đun của số phức $w = b + ci$ biết số phức $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{12} (2 - i)}{(1 - \sqrt{3}i)^6 (1 + i)^6}$ là nghiệm của

phương trình $z^2 + 8bz + 64c = 0$.

- A. $2\sqrt{5}$ B. 7 C. $\sqrt{29}$ D. $\sqrt{19}$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1 + \sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i + 3.3i^2 + 3\sqrt{3}i^3 = -8$

$(1 - \sqrt{3}i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}i + 3.3i^2 - 3\sqrt{3}i^3 = -8$

$(1 + i)^2 = 2i$

Do đó $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{12} (2 - i)}{(1 - \sqrt{3}i)^6 (1 + i)^6} = \frac{(-8)^4 (2 - i)}{(-8)^2 (2i)^3} = -\frac{8(2 - i)}{i} = 8(1 + 2i) = 8 + 16i$

Theo giả thiết ta có $(8+16i)^2 + 8b(8+16i) + 64c = 0$

$$\Leftrightarrow (1+2i)^2 + b(1+2i) + c = 0 \Leftrightarrow (2b+4)i + b + c - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b+4=0 \\ b+c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow |w| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 34. Cho a, b, c là 3 số phức phân biệt khác 0 và $|a| = |b| = |c|$. Nếu một nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có môđun bằng 1 thì khẳng định nào sau đây đúng

A. $c^2 = ab$

B. $a^2 = bc$

C. $b = ac$

D. $b^2 = ac$

Hướng dẫn giải

Giả sử z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ với $|z| = 1$. Theo định lý Viet ta có

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow z_2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{z_1} \text{ Suy ra } |z_2| = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left| \frac{c}{a} \right| \cdot \frac{1}{|z_1|} = 1$$

$$\text{Bởi vì } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, |a| = |b| \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 1, \text{ suy ra } (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = 1 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow b^2 = ac$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 35. Tìm nghiệm của phương trình: $\left(\frac{iz+3}{z-3i} \right)^2 - 3 \frac{iz+3}{z-3i} - 4 = 0$.

A. $z = -\frac{1}{17} + \frac{55}{17}i, z = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}i$

B. $z = 3i, z = 3i + 4$

C. $z = -\frac{1}{17} + \frac{55}{17}i, z = 3i$

D. $z = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}i, z = 3i + 4$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{iz+3}{z-3i}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 4 \Leftrightarrow \frac{iz+3}{z-3i} = 4 \Leftrightarrow iz+3 = 4(z-3i) \Leftrightarrow iz+3 = 4z-13i$$

$$\Leftrightarrow (-4+i)z = -13i-3 \Leftrightarrow z = \frac{-13i-3}{-4+i} = -\frac{1}{17} + \frac{55}{17}i$$

$$\text{Với } t = -1 \Leftrightarrow \frac{iz+3}{z-3i} = -1 \Leftrightarrow iz+3 = -z+3i \Leftrightarrow (1+i)z = -3+3i \Leftrightarrow z = 3i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 36. Tìm nghiệm của phương trình: $(z+3-i)^2 - 6(z+3-i) + 13 = 0$.

A. $z = 3i, z = 1 - 2i$

B. $z = -i, z = 3i + 4$

C. $z = 3i + 4, z = 3i$

D. $z = 3i, z = -i$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = z + 3 - i$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 6t + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 + 2i \\ t = 3 - 2i \end{cases}$$

Với $t = 3 + 2i \Leftrightarrow z + 3 - i = 3 + 2i \Leftrightarrow z = 3i$.

Với $t = 3 - 2i \Leftrightarrow z + 3 - i = 3 - 2i \Leftrightarrow z = -i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 37. Tính giá trị của $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$ biết z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm phức của phương trình $(5z^2 - 6iz - 2)(-3z^2 + 2iz) = 0$.

A. $\frac{12}{25}$

B. $\frac{13}{45}$

C. $\frac{11}{23}$

D. $\frac{26}{7}$

Hướng dẫn giải

Phương trình cho $\Leftrightarrow -3z^2 + 2iz = 0$ (1), $5z^2 - 6iz - 2 = 0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow z_1 = 0, z_2 = \frac{2i}{3}$

Giải (2): ta có $\Delta' = (3i)^2 + 10 = 1$

Suy ra $z_3 = \frac{3i+1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i; z_4 = \frac{3i-1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

Do đó: $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$

$$= (0+1) \left(\frac{4}{9}i^2 + 1 \right) \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right)^2 + 1 \right] \left[\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right)^2 + 1 \right]$$

$$= \left(-\frac{4}{9} + 1 \right) \left(\frac{17}{25} + \frac{6}{25}i \right) \left(\frac{17}{25} - \frac{6}{25}i \right) = \frac{5}{9} \left(\frac{289}{625} + \frac{36}{625} \right) = \frac{13}{45}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 38. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $(z-1)(z+2)(z^2 - 2z + 2) = 0$ trên

tập số phức, tính tổng: $S = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} + \frac{1}{z_4^2}$.

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{6}{7}$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát ta gọi 4 nghiệm của phương trình là:

$$z_1 = 1, z_2 = -2, z_3 = 1 + i, z_4 = 1 - i$$

Thay vào biểu thức $S = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} + \frac{1}{z_4^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{(1-i)^2} + \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{5}{4}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 39. Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình: $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$. Tính

$$S = z_1^{2014} + z_2^{2014} + z_3^{2014} + z_4^{2014}$$

A. 5

B. 4

C. -2

D. 3

Hướng dẫn giải

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -1 = i^2 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i \\ z = 1 \pm i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= i^{2014} + (-i)^{2014} + (1-i)^{2014} + (1+i)^{2014} \\ &= (i^2)^{1007} + [(-i)^2]^{1007} + (-2i)^{1007} + (2i)^{1007} = -2 + (-2)^{1007} i^{1007} + 2^{1007} i^{1007} = -2 \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án C.

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Phương Pháp

Theo định lý cơ bản của đại số, phương trình bậc ba có đúng 3 nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

- 1) Để giải phương trình bậc ba tổng quát $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ ($A \neq 0$) (1), ta cần biết một nghiệm z_0 của phương trình. Khi đó phương trình (1) được biến đổi thành phương trình tích

$$(1) \Leftrightarrow (z - z_0)(Az^2 + bz + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - z_0 = 0 \\ Az^2 + bz + c = 0 \end{cases}$$

Muốn xác định $Az^2 + bz + c$, ta có thể dùng một trong hai cách:

Cách 1: Ta thực hiện phép chia đa thức $Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ cho $z - z_0$, thương sẽ là $Az^2 + bz + c$.

Cách 2: Dùng sơ đồ Horner sau đây để xác định hệ số A, b, c của đa thức thương là $Az^2 + bz + c$.

- 2) Đôi khi ta có thể xác định z_0 bằng cách nhẩm nghiệm như sau:

Nếu $A + B + C + D = 0$ thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = 1$.

Nếu $A - B + C - D = 0$ thì phương trình có 1 nghiệm là $z = -1$.

- 3) Việc biến đổi thành phương trình tích có thể thực hiện dễ dàng nếu ta có thể đặt nhân tử chung.

- 4) Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức hệ số thực có 1 nghiệm phức

$z_0 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$) thì $\overline{z_0} = x - yi$ cũng là 1 nghiệm. Như vậy:

- Mọi phương trình bậc ba hệ số thực có ít nhất một nghiệm thực, nghĩa là
 - Hoặc có 3 nghiệm thực
 - Hoặc có 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (không thực) liên hợp nhau.
- Muốn giải phương trình bậc 3 hệ số thực, ta thường phải tìm nghiệm thực của phương trình rồi biến thành phương trình tích. Nghiệm thực này có thể tính chính xác nhờ máy tính bỏ túi (nếu là nghiệm hữu tỉ).
- Nếu biết phương trình bậc 3 hệ số thực $P(z) = 0$ có 1 nghiệm không là số thực z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm, nên phương trình phải có dạng

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = 0.$$

Chia $P(z)$ cho $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0 \cdot \overline{z_0}$ sẽ tìm được thừa số $z - z_1$.

Như vậy phương trình có 3 nghiệm là $z_0, \overline{z_0}, z_1$.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $z^3 - (2+i)z^2 + (2+2i)z - 2i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = i$.

b) $z^3 + 4z^2 + (4+i)z + 3 + 3i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = -i$.

c) $z^3 - z^2 + (2-2i)z + 2 + 4i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = 1-i$.

Giải

a) Chia đa thức $z^3 - (2+i)z^2 + (2+2i)z - 2i$ cho $z-i$ ta được thương là $z^2 - 2z + 2$. Do đó, phương trình đã cho viết thành:

$$z^3 - (2+i)z^2 + (2+2i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-i=0 \\ z^2-2z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=i \\ z^2-2z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=i \\ z=1 \pm i \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $z_1 = i$; $z_2 = 1+i$; $z_3 = 1-i$.

b) Chia đa thức $P(z) = z^3 + 4z^2 + (4+i)z + 3 + 3i$ cho $z+i$ ta được thương là

$z^2 + (4-i)z + 3 - 3i$. Do đó, phương trình đã cho viết thành:

$$z^3 + 4z^2 + (4+i)z + 3 + 3i = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 + (4-i)z + 3 - 3i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+i=0 & (1) \\ z^2 + (4-i)z + 3 - 3i = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = -i$

Giải (2): Ta có: $\Delta = (4-i)^2 - 12 + 12i = 16 - 1 - 8i - 12 + 12i = 3 + 4i$.

Ta đi tìm căn bậc hai của Δ

Đặt $3 + 4i = (x + yi)^2, (x, y \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (i) \\ 2xy = 4 & (ii) \end{cases}$$

Từ (ii) suy ra: $x \neq 0, y = \frac{2}{x}$

Từ (i) suy ra: $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ (loại) hoặc } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -1$.

Như vậy: $\Delta = (2+i)^2$.

Phương trình $z^3 + 4z^2 + (4+i)z + 3 + 3i = 0$ có 2 nghiệm là:

$$z = \frac{-4+i+2+i}{2} = -1+i, \quad z = \frac{-4+i-2-i}{2} = -3.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = i, z = -1+i, z = -3$.

c) Chia đa thức $P(z) = z^3 - z^2 + (2-2i)z + 2 + 4i$ cho $z - (1-i)$ ta được thương là:

$z^2 - iz + 1 - 3i$. Do đó, phương trình đã cho viết thành:

$$z^3 - z^2 + (2-2i)z + 2 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1+i)(z^2 - iz + 1 - 3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-1+i=0 & (1) \\ z^2 - iz + 1 - 3i=0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = 1-i$

Giải (2): Ta có $\Delta = i^2 - 4 + 12i = -5 + 12i$.

Đặt $-5 + 12i = (x+yi)^2, (x, y \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (i) \\ 2xy = 12 & (ii) \end{cases}$$

Từ (ii) suy ra: $x \neq 0, y = \frac{6}{x}$

Từ (i) suy ra: $x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ hoặc } x^2 = -9 \text{ (loại)} \quad x = \pm 2.$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 3$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -3$.

Như vậy: $\Delta = (2+3i)^2$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = \frac{i+2+3i}{2} = 1+2i; \quad z = \frac{i-2-3i}{2} = -1-i$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: $z_1 = 1-i; \quad z_2 = 1+2i; \quad z_3 = -1-i$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

a) $z^3 - (1+i)z^2 + az + b - 4i = 0, a, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1+i$.

b) $z^3 + aiz^2 + (i-b)z - 2 - 2i = 0, a, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1-i$.

c) Tìm các số a, b, c để phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ và $z = 2$ làm nghiệm.

Giải

a) Theo đề: $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình $z^3 - (1 + i)z^2 + az + b - 4i = 0$ nên

$$(1 + i)^3 - (1 + i)(1 + i)^2 + a(1 + i) + b - 4i = 0 \Leftrightarrow a + b + (a - 4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4, b = -4.$$

Với $a = 4, b = -4$ phương trình đã cho trở thành: $z^3 - (1 + i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0$.

Vì phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 + i$, ta chia đa thức

$P(z) = z^3 - (1 + i)z^2 + 4z - 4 - 4i$ cho $z - 1 - i$ ta được thương là $z^2 + 4$. Do đó, phương trình $z^3 - (1 + i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0$ tương đương với

$$(z - 1 - i)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z^2 = -4 = 4i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z = \pm 2i. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $z = 1 + i, z = 2i, z = -2i$.

b) Ta có: $z = 1 - i$ là nghiệm của phương trình $z^3 + aiz^2 + (i - b)z - 2 - 2i = 0, a, b \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (1 - i)^3 + ai(1 - i)^2 + (i - b)(1 - i) - 2 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - 3i + 3i^2 - i^3) + ai(1 - 2i + i^2) + (i - i^2 - b + bi) - 2 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 3i - 3 + i + 2a + i + 1 - b + bi - 2 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow -3 + 2a - b + (b - 3)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2a - b = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $a = 3, b = 3$ phương trình đã cho trở thành:

$$z^3 + 3iz^2 + (i - 3)z - 2 - 2i = 0.$$

Biết $z = 1 - i$ là 1 nghiệm, chia đa thức $P(z) = z^3 + 3iz^2 + (i - 3)z - 2 - 2i$ cho $z - 1 + i$ ta được thương là: $z^2 + (1 + 2i)z + 2i$. Do đó, phương trình: $z^3 + 3iz^2 + (i - 3)z - 2 - 2i = 0$ tương đương với:

$$(z - 1 + i)[z^2 + (1 + 2i)z + 2i] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 + i = 0 & (1) \\ z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = 1 - i$

$$\text{Giải (2): } (2) \Leftrightarrow z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0, (A - B + C = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = -2i. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z = 1 - i, z = -1, z = -2i$.

c) Vì $z = 1 + i$ và $z = 2$ là nghiệm của phương trình nên

$$\begin{cases} 2^3 + a(2)^3 + 2b + c = 0 \\ (1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c + (2a + b + 2)i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \\ 4a + 2b + c + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases}.$$

Ví dụ 3. a) Cho phương trình: $z^3 - 5z^2 + 16z - 30 = 0(1)$, gọi z_1, z_2, z_3 lần lượt là 3 nghiệm của phương trình (1) trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức: $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

b) Giải phương trình sau trong tập hợp số phức: $z^3 - 6z - 9 = 0$.

c) Giải phương trình sau trên tập số phức $z^3 - 3iz^2 - 3z + 2i = 0$.

Giải

a) Ta có:

$$z^3 - 5z^2 + 16z - 30 = 0 \text{ có 3 nghiệm là: } z_1 = 3; z_2 = 1 + 3i; z_3 = 1 - 3i$$

Lúc đó:

$$A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3^2 + (1 + 3i)^2 + (1 - 3i)^2 = -7$$

b) Ta có:

$$pt \Leftrightarrow z^3 - 9z + 3z - 9 = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + 3z + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z^2 + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = 3, z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Ta có:

$$z^3 - 3iz^2 - 3z + 2i = 0 \Leftrightarrow (z - i)^3 + i = 0 \Leftrightarrow (z - i)^3 - i^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i) \left[(z - i)^2 + i(z - i) - 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i) \left[\left(z - \frac{i}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z - \frac{i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{i - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = 2i; z = \frac{i - \sqrt{3}}{2}; z = \frac{i + \sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thuần ảo $2z^3 + (5i - 3)z^2 + (-8i - 4)z - 4i + 4 = 0$.

Giải

Giả sử phương trình có nghiệm thuần ảo.

Đặt $z = ai$ (a là số thực khác 0), thay vào phương trình ta được:

$$2(ai)^3 + (5i - 3)(ai)^2 + (-8i - 4)ai - 4i + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 8a + 4 + i(-2a^3 - 5a^2 - 4a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 8a + 4 = 0 \\ -2a^3 - 5a^2 - 4a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm thuần ảo là $z = -2i$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $z^3 - (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$, trên tập số phức, biết phương trình có nghiệm thuần ảo.

Giải

Giả sử $z = xi$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó, ta có:

$$-x^3i - (2 - 2i)x^2 + (5 - 4i)x - 10i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x^2 + 4x) + (-x^3 + 2x^2 + 5x - 10)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4x = 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x = 2i \text{ là một nghiệm của phương trình nên ta biến}$$

đổi phương trình đã cho về dạng:

$$(z - 2i)(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z^2 + 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -1 \pm 2i \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $z = 2i; z = -1 \pm 2i$

II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$.

A. $z_1 = 1, z_2 = (1 + \sqrt{3})i, z_3 = -(1 - \sqrt{3})i$. B. $z_1 = 1, z_2 = -(1 + \sqrt{3})i, z_3 = (1 - \sqrt{3})i$.

C. $z_1 = -1, z_2 = (1 + \sqrt{3})i, z_3 = (1 - \sqrt{3})i$. D. $z_1 = 1, z_2 = (1 + \sqrt{3})i, z_3 = (1 - \sqrt{3})i$.

Hướng dẫn giải

Các hệ số của phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ thỏa mãn:

$$A + B + C + D = 1 - 1 - 2i + 2(1 + i) - 2 = 0.$$

Vậy phương trình nhận $z = 1$ là nghiệm.

Phương trình $z^3 - (1+2i)z^2 + 2(1+i)z - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2iz + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 & (1) \\ z^2 - 2iz + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = 1$

Giải (2): Ta có $\Delta' = (-i)^2 - 2 = -1 - 2 = -3 = 3i^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = (1 \pm \sqrt{3})i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = 1, z_2 = (1 + \sqrt{3})i, z_3 = (1 - \sqrt{3})i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2-i)z + 3+i = 0$.

A. $z = -1, z = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2}(2 + \sqrt{15})i, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{15})i$.

B. $z = -1, z = \frac{1}{2} + \frac{2}{2}(2 + \sqrt{15})i, z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{15})i$.

C. $z = 1, z = \frac{1}{2} + \frac{2}{2}(2 + \sqrt{15})i, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{15})i$.

D. $z = -1, z = \frac{1}{2} + \frac{2}{2}(2 + \sqrt{15})i, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{15})i$.

Hướng dẫn giải

Các hệ số của phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2-i)z + 3+i = 0$ thỏa mãn:

$A - B + C - D = 1 + 2i + 2 - i - 3 - i = 0$ nên phương trình nhận $z = -1$ là 1 nghiệm.

Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2-i)z + 3+i = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^2 - (1+2i)z + 3+i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+1=0 & (1) \\ z^2 - (1+2i)z + 3+i = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = -1$

Giải (2): $\Delta = (1+2i)^2 - 12 - 4i = 1 - 4 + 4i - 12 - 4i = -15$.

Phương trình (2) có hai nghiệm là:

$$z_1 = \frac{1+2i+\sqrt{15}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 + \sqrt{15})i, z_2 = \frac{1+2i-\sqrt{15}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{15})i$$

Kết luận: phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2-i)z + 3+i = 0$ có 3 nghiệm là:

$$z = -1, z = \frac{1}{2} + \frac{2}{2}(2 + \sqrt{15})i, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{15})i$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 3. Biết z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 - (2+i)z^2 + z - 2 - i = 0$.

Tính $A = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

A. $2 - \sqrt{3}$

B. $2 + \sqrt{5}$

C. $2 + \sqrt{7}$

D. $2 - \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Phương trình $z^3 - (2+i)z^2 + z - 2 - i = 0$ tương đương với:

$$z^2(z - 2 - i) + z - 2 - i = 0 \Leftrightarrow (z - 2 - i)(z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - 2 - i = 0 \\ z^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = \pm i \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z = 2 + i, z = i, z = -i$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 4. Biết z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i = 0$. Tính $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|}$

A. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2 + \sqrt{7}}{5}$

D. $\frac{2 - \sqrt{5}}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$z^3 - 3iz^2 - 3z + 9i = 0 \Leftrightarrow (z - i)^3 + (2i)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - i) \left[(z + i)^2 - 2i(z + i) - 4 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = i, z = \pm\sqrt{3}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$

A. $z = -\frac{1}{2}, z = -3 + i, z = 3 + i$

B. $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = 3 - i$

C. $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = 3 + i$

D. $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = -2 - i$

Hướng dẫn giải

Ta thấy phương trình $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$ nhận $z = -\frac{1}{2}$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = 2z^3 + 9z^2 + 14z + 5$ cho $z + \frac{1}{2}$ ta được thương là $2z^2 + 8z + 10$. Do đó, phương trình $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$ tương đương với:

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)(2z^2 + 8z + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{2} = 0 & (1) \\ 2z^2 + 8z + 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$.

Giải (2): $(2) \Leftrightarrow z^2 + 4z + 5 = 0$. Ta có: $\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là: $z = -2 \pm i$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = -2 - i$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$.

A. $z = -\frac{1}{2}, z = -3 + i, z = 3 + i$

B. $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = 3 - i$

C. $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = 3 + i$

D. $z = -\frac{1}{2}, z = -2 + i, z = -2 - i$

Hướng dẫn giải

Ta thấy phương trình: $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$ có 1 nghiệm là $z = 3$.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$ cho $z - 3$ ta được thương là $z^2 - 4z + 5$. Do đó, phương trình $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$ tương đương với:

$$(z - 3)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 3 = 0 & (1) \\ z^2 - 4z + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = 3$

Giải (2): Ta có: $\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$

Do đó phương trình (2) có hai nghiệm: $z = 2 \pm i$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = 3, z_2 = 2 + i, z_3 = 2 - i$.

Câu 7. Cho phương trình $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ biết phương trình có 1 nghiệm là $z_1 = 3 - 2i$. Tìm tổng mô đun hai số phức còn lại

A. $\sqrt{13} + \sqrt{7}$

B. $\sqrt{13} + \sqrt{5}$

C. $\sqrt{13} - \sqrt{3}$

D. $\sqrt{13} + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Phương trình: $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ hệ số thực có 1 nghiệm là $z_1 = 3 - 2i$.

Suy ra $z_1 = 3 + 2i$ cũng là nghiệm.

Do đó phương trình phải có dạng: $(z - z_1)(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = 0$.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2}$ cho

$(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = z^2 - 6z + 13$, ta được thương là $z - \sqrt{2}$.

Phương trình $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ tương đương với

$(z - \sqrt{2})(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = 0$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = \sqrt{2}, z_2 = 3 - 2i, z_3 = 3 + 2i$.

A calculator screen showing the calculation of the sum of the absolute values of the complex numbers $\sqrt{2}$ and $3+2i$. The display shows $|\sqrt{2}| + |3+2i|$ and the result $\sqrt{13} + \sqrt{2}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 8. Cho phương trình $z^3 - 2z^2 + 25z + b = 0, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có nghiệm thuần ảo. Tìm b

A. 3

B. 25

C. -50

D. 5

Hướng dẫn giải

Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là ai ($a \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow ai$ thỏa mãn phương trình:

$$(ai)^3 - 2(ai)^2 + 25ai + b = 0 \Leftrightarrow -a^3i + 2a^2 + 25ai + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + b + (-a^3 + 25a)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a^2 & (1) \\ a(25 - a^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 5 \end{cases}$

Với $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (loại)

Với $a = \pm 5 \Rightarrow b = -50$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 9. Cho phương trình $z^3 + bz^2 + (9 - i)z - 6 + 2i = 0, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có nghiệm thực. Tìm các nghiệm của phương trình

A. $z_1 = 2, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - i$.

B. $z_1 = 2, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 + i$.

C. $z_1 = -2, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - i$.

D. $z_1 = 2, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 - i$.

Hướng dẫn giải

Gọi x là nghiệm thực của phương trình: $z^3 + bz^2 + (9 - i)z - 6 + 2i = 0, b \in \mathbb{R}$ ta có:

$$x^3 + bx^2 + (9-i)x - 6 + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + bx^2 + 9x - 6 + (2-x)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ x^3 + bx^2 + 9x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ b=-5 \end{cases}$$

Suy ra phương trình có dạng:

$$z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0, \text{ với } z=2 \text{ là nghiệm thực của phương trình.}$$

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i$ cho $z-2$ ta được thương là $z^2 - 3z + 3 - i$. Do

đó, phương trình $z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$ tương đương với:

$$(z-2)(z^2 - 3z + 3 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2=0 & (1) \\ z^2 - 3z + 3 - i = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow z = 2$

Giải (2): Ta có: $\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i = (1+2i)^2$. Phương trình (2) có hai nghiệm

là: $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - i$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = 2, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - i$.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình: $\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 - \frac{z^2 - 1 + 2iz}{2i} + 2 = 0$

A. $z_1 = 2, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - i$.

B. $z_1 = 2, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 - i$.

C. $z = -1 - 2i, z = i, z = 2 - i$.

D. $z_1 = -2, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - i$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình thành: $\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 - \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^2 + 2 = 0$.

Đặt $w = \frac{z+i}{1+i}$ thì phương trình trở thành:

$$w^3 - w^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (w+1)(w^2 - 2w + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w = -1 \\ w^2 - 2w + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -1 \\ (w-1)^2 - i^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -1 \\ w = 1+i \\ w = 1-i \end{cases}$$

▪ Với $w = -1$: $\frac{z+i}{1+i} = -1 \Leftrightarrow z = -1 - 2i$

▪ Với $w = 1+i$: $\frac{z+i}{1+i} = 1+i \Leftrightarrow z = i$

▪ Với $w = 1-i$: $\frac{z+i}{1+i} = 1-i \Leftrightarrow z = 2 - i$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $z = -1 - 2i$, $z = i$, $z = 2 - i$.

Vậy chọn đáp án C.

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN SỐ PHỨC

Phương Pháp

- Với dạng phương trình trùng phương, ta đặt $w = z^2$, sẽ đưa về phương trình bậc hai theo w . Giải phương trình này, ta tính w rồi lại giải phương trình $w = z^2$ để tính z .
- Nếu $A+B+C+D+E=0$ thì phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ có 1 nghiệm là $z = 1$. Chia $P(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$ cho $z-1$, phương trình $P(z) = 0$ tương đương với phương trình $(z-1)(Az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$.
- Nếu $A-B+C-D+E=0$ thì phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ có 1 nghiệm là $z = -1$. Chia $P(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$ cho $z+1$, phương trình $P(z)=0$ tương đương với phương trình $(z+1)(Az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$.

Như vậy ta nên viết các hệ số của phương trình để xem phương trình có rơi vào hai trường hợp đặc biệt này không.

- Trường hợp phương trình hệ số thực, nếu biết 1 nghiệm z_0 (không là số thực) thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm. Do đó phương trình có dạng:

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0})(Az^2 + bz + c) = 0.$$

Khi khai triển phương trình này và đồng nhất với phương trình đã cho sẽ tìm được hệ số b và c .

Giải phương trình: $(Az^2 + bz + c) = 0$ ta được nghiệm z_1, z_2 .

Như vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $z_0, \overline{z_0}, z_1, z_2$.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

- $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$
- $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$
- $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0.$

Giải

a) Phương trình: $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$ ta coi là phương trình bậc hai theo z^2 , phương trình có 2 nghiệm là $z^2 = 1$ hoặc $z^2 = -5 = 5i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z = \pm \sqrt{5}i. \end{cases}$

b) Đặt $w = z^2$, phương trình $z^4 - (8+8i)z^2 + 63+16i = 0$ (1) trở thành

$$w^2 - (8+8i)w + 63+16i = 0 \Leftrightarrow w^2 - 2(4+4i)w + 63+16i \quad (2)$$

$$\Delta' = (4+4i)^2 - 63-16i = 32i - 63 - 16i = -63+16i = (1+8i)^2$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 4+4i+1+8i = 5+12i \\ w = 4+4i-1-8i = 3-4i \end{cases}$$

$$\text{Với } w = 5+12i \Leftrightarrow z^2 = 5+12i = (3+2i)^2 \Leftrightarrow z = \pm(3+2i).$$

$$\text{Với } w = 3-4i \Leftrightarrow z^2 = 3-4i = (2-i)^2 \Leftrightarrow z = \pm(2-i).$$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là: $z = \pm(3+2i), z = \pm(2-i)$.

$$\text{c) } iz^4 + 2(1+2i)z^2 + 8 = 0 \quad (1)$$

Đặt $w = z^2$, phương trình $iz^4 + 2(1+2i)z^2 + 8 = 0$ trở thành

$$iw^2 + 2(1+2i)w + 8 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = (1+2i)^2 - 8i = 1+4i^2+4i-8i = 1+4i^2-4i = (1-2i)^2.$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là:

$$w_1 = \frac{-1-2i+1-2i}{i} = -4, \quad w_2 = \frac{-1-2i-1+2i}{i} = -\frac{2}{i} = -\frac{2i}{i^2} = 2i.$$

$$\text{Với } w = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow z = \pm 2i$$

$$\text{Với } w = 2i \Leftrightarrow z^2 = (1+i)^2 \Leftrightarrow z = \pm(1+i).$$

Vậy phương trình $iz^4 + 2(1+2i)z^2 + 8 = 0$ có 4 nghiệm là: $z = \pm 2i, z = \pm(1+i)$.

Ví dụ 2. Cho phương trình bậc bốn hệ số thực

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0, m \in \mathbb{R}$. Biết phương trình có 1 nghiệm $z_1 = -2i$. Tính m và nghiệm còn lại.

Giải

Ta có $z_1 = -2i$ là nghiệm của phương trình: $z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow (-2i)^4 - 4(-2i)^3 + 9(-2i)^2 + m(-2i) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 32i - 36 - 2mi + 20 = 0 \Leftrightarrow (-32 - 2m)i = 0 \Leftrightarrow m = -16.$$

$$\text{Phương trình trở thành } P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0 \quad (1)$$

Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức hệ số thực nhận z_1 là 1 nghiệm phức, không thực, $z_1 = x+yi, (x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0)$ thì $\overline{z_1} = x-yi$ cũng là nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình nhận 2 nghiệm là $z_1 = -2i, z_2 = 2i$. Do đó phương trình (1) phải có dạng:

$$P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z^2 + az + b) = 0, (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(z) = z^4 + az^3 + (b+4)z^2 + 4az + 4b = 0, (2)$$

Đồng nhất hệ số của hai phương trình (1) và (2) ta được $a = -4, b = 5$.

Vậy phương trình $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 4 = 0 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\oplus z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$$

$$\oplus z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 2 \pm i.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $z = \pm 2i, z = 2 \pm i$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình: $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$ có hai nghiệm là số thuần ảo.

Giải

$$\text{Đặt } z = bi \Rightarrow z^2 = -b^2, z^3 = -ib^3, z^4 = b^4$$

$z = bi$ là nghiệm của phương trình nên

$$b^4 - 4(-ib)^3 + 14(-b^2) + 36ib + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^4 - 14b^2 + 45) + i(4b^3 - 36b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 14b^2 + 45 = 0 \\ 4b^3 - 36b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \pm 3$$

Vậy $z = \pm 3i$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 4. Phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 4 nghiệm không thực với các giá trị thực a, b, c, d . Biết tích hai trong bốn nghiệm đó là $13 + i$ và tổng của hai nghiệm còn lại là $3 - 4i$. Tìm giá trị của b

Giải

Gọi 4 nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ là $\alpha, \beta, \gamma, \eta$. Khi đó

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \eta), \forall x \text{ nên ta suy ra}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\eta + \beta\gamma + \beta\eta + \gamma\eta = b \quad (*).$$

Theo bài ra ta có $\alpha\beta = 13 + i, \gamma + \eta = 3 + 4i$.

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nên $\alpha\beta, \gamma\eta$ cũng như $\alpha + \beta, \gamma + \eta$ phải là các số phức liên hợp, do đó $\alpha + \beta = 3 - 4i, \gamma\eta = 13 - i$.

Theo (*) thì $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\eta + \beta\gamma + \beta\eta + \gamma\eta = (\alpha + \beta)(\gamma + \eta) + \alpha\beta + \gamma\eta$

$$\Rightarrow b = (3 - 4i)(3 + 4i) + 13 + i + 13 - i = 51.$$

Vậy giá trị cần tìm của b là 51.

Ví dụ 5. Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: $z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = 0$

Giải

Biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$(z^2 - 2z)^2 + 7(z^2 - 2z) + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 2z = -2 \\ z^2 - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 2z + 2 = 0 \\ z^2 - 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z = 1 - i \\ z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z = 1 + i$; $z = 1 - i$; $z = 1 + 2i$; $z = 1 - 2i$.

Ví dụ 6. Giải phương trình sau trên tập số phức: $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$

Giải

Nhận xét $z = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) vậy $z \neq 0$

Chia hai vế PT (1) cho z^2 ta được: $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} = 0$ (2)

Đặt $t = z - \frac{1}{z}$. Khi đó $t^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 + 2$

Phương trình (2) có dạng: $t^2 - t + \frac{5}{2} = 0$ (3)

$$\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{5}{2} = -9 = 9i^2$$

PT (3) có 2 nghiệm $t = \frac{1+3i}{2}$, $t = \frac{1-3i}{2}$

Với $t = \frac{1+3i}{2}$ ta có $z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$ (4)

Có $\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i = 9 + 6i + i^2 = (3+i)^2$

PT(4) có 2 nghiệm: $z = \frac{(1+3i) + (3+i)}{4} = 1+i$, $z = \frac{(1+3i) - (3+i)}{4} = \frac{i-1}{2}$

Với $t = \frac{1-3i}{2}$ ta có: $z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0$ (5)

Có $\Delta = (1-3i)^2 + 16 = 8 - 6i = 9 - 6i + i^2 = (3-i)^2$

PT(5) có 2 nghiệm: $z = \frac{(1-3i) + (3-i)}{4} = 1-i$, $z = \frac{(1-3i) - (3-i)}{4} = \frac{-1-i}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $z = 1+i$, $z = 1-i$, $z = \frac{i-1}{2}$, $z = \frac{-i-1}{2}$

Vậy phương trình có các nghiệm $z = 3; z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm tổng mô đun các nghiệm của phương trình

$z^4 + z^3 - (3+i)z^2 - 4z + 4i - 4 = 0$, biết phương trình có nghiệm thực

A. $5 + \sqrt{2}$

B. $-3 + \sqrt{2}$

C. $3 - \sqrt{2}$

D. $7 + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x$ là nghiệm thực của phương trình, ta có:

$$x^4 + x^3 - (3+i)x^2 - 4x + 4i - 4 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 + i(-x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Như vậy phương trình được biến đổi thành phương trình tích có dạng:

$$(z-2)(z+2)(z^2 + az + b) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^4 + az^3 + (b-4)z^2 - 4az - 4b = 0, (2)$$

Đồng nhất phương trình (1) và (2) ta được:
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4 = -3 - i \\ -4a = -4 \\ -4b = 4i - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - i \end{cases}$$

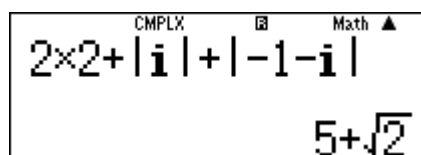
Vậy phương trình (1) tương đương với: $(z^2 - 4)(z^2 + z + 1 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 4 & (i) \\ z^2 + z + 1 - i & (ii) \end{cases}$

Giải (i): $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$

Giải (ii): Ta có: $\Delta = 1 - 4 + 4i = (1 + 2i)^2$. Phương trình (ii) có hai nghiệm

$$z_1 = \frac{-1 + 1 + 2i}{2}, z_2 = \frac{-1 - 1 - 2i}{2} = -1 - i$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $z_1 = 2, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -1 - i$.



CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $2 \times 2 + |i| + |-1 - i|$
 $5 + \sqrt{2}$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Biết phương trình có $z^4 + 2iz^3 - z^2 + 2iz - 2 = 0$ có nghiệm thuần ảo. Tìm tổng mô đun của các nghiệm phức có phần ảo dương.

A. 2

B. 3

C. 1

D. 5

Hướng dẫn giải

Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là $xi, (x \in \mathbb{R})$, ta có:

$$x^4 i^4 + 2ix^3 i^3 - x^2 i^2 + 2i.xi - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) - 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 1)^2 - 2(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)[x^2(x + 1) - 2] = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^3 + x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^3 + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy 2 nghiệm thuần ảo của phương trình là $z = \pm i$ và phương trình có dạng phương trình tích:

$$(z - i)(z + i)(z^2 + az + b) = 0, (a, b \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^4 + az^3 + (b + 1)z^2 + az + b = 0.$$

Đồng nhất phương trình này với phương trình đã cho ta được:

$$\begin{cases} a = 2i \\ b + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2i \\ b = -2 \end{cases}$$

Phương trình trở thành:

$$(z - i)(z + i)(z^2 + 2iz - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i \\ z^2 + 2iz - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i \\ z = -i \pm 1 \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $z = i, z = -i, z = 1 - i, z = -1 - i$.

Suy ra: $|i| = 1$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 3. Cho phương trình: $z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$ (1). Phương trình có bao nhiêu nghiệm thực

A. 2

B. 0

C. 1

D. 4

Hướng dẫn giải

Các hệ số của phương trình là: $A = 1; B = -3; C = 2 - i; D = 3; E = -3 + i$.

Ta có $A + B + C + D + E = 0$. Suy ra phương trình có 1 nghiệm: $z = 1$.

Chia đa thức $P(z) = z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i$ cho $z - 1$, ta biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow (z - 1)(z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0, (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) lại có các hệ số thỏa mãn: $A' - B' + C' - D' = 1 + 2 - i - 3 + i = 0$.

Do đó phương trình (2) có 1 nghiệm $z = -1$.

$$(2) \Leftrightarrow (z+1)(z^2 - 3z + 3 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 3z + 3 - i = 0, (3) \end{cases}$$

$$\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$$

Suy ra (3) có 2 nghiệm là $z = 1 - i, z = 2 + i$.

Kết luận: Phương trình (1) có 4 nghiệm là: $z = 1, z = -1, z = 1 - i, z = 2 + i$.

Câu 4. Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm phức của phương trình $\left(\frac{z-i}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của

biểu thức: $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.

A. $\frac{13}{45}$

B. $\frac{1}{15}$

C. $\frac{9}{14}$

D. $\frac{1}{13}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{z-i}{2z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow (z-i)^4 = (2z-i)^4$

$$\Leftrightarrow (z-i)^4 - (2z-i)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[(z-i)^2 + (2z-i)^2\right] \left[(z-i)^2 - (2z-i)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (5z^2 - 6iz - 2)(-3z^2 + 2iz) = 0 \Leftrightarrow -3z^2 + 2iz = 0 \quad (1), 5z^2 - 6iz - 2 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow z_1 = 0, z_2 = \frac{2i}{3}$$

Giải (2) ta có $\Delta' = (3i)^2 + 10 = 1$

$$\text{Suy ra } z_3 = \frac{3i+1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i, z_4 = \frac{3i-1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &= (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1) \\ &= (0+1)\left(\frac{4}{9}i^2 + 1\right) \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)^2 + 1\right] \left[\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)^2 + 1\right] \\ &= \left(-\frac{4}{9} + 1\right) \left(\frac{17}{25} + \frac{6}{25}i\right) \left(\frac{17}{25} - \frac{6}{25}i\right) = \frac{5}{9} \left(\frac{289}{625} + \frac{36}{625}\right) = \frac{13}{45} \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 5. Biết z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$.

Tìm $\frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_3|^2} + \frac{1}{|z_4|^2} = 0$.

A. 5

B. 3

C. 7

D. 9

Hướng dẫn giải

Để thấy $z=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên

$$pt \Leftrightarrow z^2 - z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{5}{2} = 0$$

$$\begin{cases} z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2} \\ z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0 (*) \\ 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0(**) \end{cases} \dots$$

Giải (*) {Kĩ thuật MTCT}

Ghi vào màn hình: $D = B^2 - 4AC : E = \sqrt{|D|} \angle \frac{\arg(D)}{2} : X = \frac{-B+E}{2A} : Y = \frac{-B-E}{2A}$

Ta được nghiệm của phương trình:

$X = \frac{-B+E}{2A}$ $1+i$	$Y = \frac{-B-E}{2A}$ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
-----------------------------	---

Chỉ cần thay đổi các hệ số của phương trình ta tìm được nghiệm của phương trình (2)

$X = \frac{-B+E}{2A}$ $1-i$	$Y = \frac{-B-E}{2A}$ $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
-----------------------------	---

Suy ra:

$$|1+i|^2 + \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right|^2 = 5$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 6. Giải phương trình: $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$

A. $z=1, z=3, z=3i, z=-2i$

B. $z=1, z=3, z=2i, z=5i$

C. $z=1, z=3, z=6i, z=-2i$

D. $z=1, z=3, z=2i, z=-2i$

Hướng dẫn giải

Để thấy $z=1$ là nghiệm của phương trình nên

$$(pt) \Leftrightarrow (z-1)(z^3 - 3z^2 + 4z - 12) = 0 \Leftrightarrow (z-1)[z^2(z-3) + 4(z-3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=3 \\ z^2+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=3 \\ z=2i \\ z=-2i \end{cases}$$

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 5:

PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

HUẾ, 1/04/2017

CHỦ ĐỀ 7. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp

- Ta nhắc lại cách giải hệ phương trình bằng định thức như sau:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b ; D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b ; D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$.

Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm.

- Ngoài phương pháp định thức trên ta có thể sử dụng phương pháp cộng đại số, phương pháp rút thế...
- Ngoài ra ta còn có thể dựa vào tính chất tập hợp điểm số phức để giải và biện luận hệ phương trình.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau trên tập số phức:

$$\text{a) } \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8 \end{cases}$$

Giải

a) Ta có các định thức

$$D = \begin{vmatrix} 3-i & 4+2i \\ 4+2i & -(2+3i) \end{vmatrix} = -(3-i)(2+3i) - (4+2i)(4+2i) = -21-23i$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2+6i & 4+2i \\ 5+4i & -(2+3i) \end{vmatrix} = -(2+6i)(2+3i) - (5+4i)(4+2i) = -2-44i$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3-i & 2+6i \\ 4+2i & 5-4i \end{vmatrix} = (3-i)(5-4i) - (4+2i)(2+6i) = 23-21i$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x, y) với

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{2-44i}{-21-23i} = \frac{(2-44i)(-21-23i)}{21^2+23^2} = 1+i \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{23-21i}{-21-23i} = \frac{(23-21i)(-21-23i)}{21^2+23^2} = i \end{cases}$$

b) Ta có các định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2+i & 2-i \\ 3+2i & 3-2i \end{vmatrix} = (2+i)(3-2i) - (3+2i)(2-i) = -2i$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2-i \\ 8 & 3-2i \end{vmatrix} = 6(3-2i) - 8(2-i) = 2-4i$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2+i & 6 \\ 3+2i & 8 \end{vmatrix} = 8(2+i) - 6(3+2i) = -2-4i$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x, y) với

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{2-4i}{-2i} = 2+i \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2-4i}{-2i} = 2-i \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau với hai ẩn z và w :

$$\text{a) } \begin{cases} 2z + w = 4 \\ 2i\bar{z} + \bar{w} = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} z + w = 4 + 3i \\ z - iw = 3 - 2i \end{cases}$$

Giải

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} 2z + w = 4 \\ 2i\bar{z} + \bar{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + w = 4 \\ -2iz + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + w = 4 \\ (2+2i)z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{1+i} \\ w = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ w = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2(1-i)}{1+1} \\ w = 4 - 2(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-i \\ w = 2+2i \end{cases}$$

b) Hệ phương trình

$$\begin{cases} z + w = 4 + 3i \\ z - iw = 3 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + w = 4 + 3i & (1) \\ (1+i)w = 1 + 5i & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow w = \frac{1+5i}{1+i} = \frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+5-i+5i}{1+1} = 3+2i$$

$$(1) \Rightarrow z = 4 + 3i - w = 4 + 3i - 3 - 2i = 1 + i.$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm } \begin{cases} z = 1+i \\ w = 3+2i \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình sau với hai ẩn z và w :

$$\text{a) } \begin{cases} z + w = \bar{w} + i \\ z - w = \bar{z} + i \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} z + w = 1 - \bar{w} \\ 2z + \bar{w} = 2 + i + w \end{cases}$$

Giải

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} z + w = \bar{w} + i \\ z - w = \bar{z} + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + (w - \bar{w}) = i \\ (z - \bar{z}) - w = i \end{cases}$$

Đặt $z = x + yi$, $w = u + vi$, $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x + yi + 2vi = i \\ 2yi - u - vi = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (y + 2v)i = i \\ -u + (2y - v)i = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2v = 1 \\ u = 0 \\ 2y - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \\ y + 2v = 1 \\ 2y - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \\ y = \frac{3}{5} \\ v = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm là : $\begin{cases} z = \frac{3}{5}i \\ w = \frac{1}{5}i \end{cases}$;

b) Ta có: $\begin{cases} z + w = 1 - \bar{w} \\ 2z + \bar{w} = 2 + i + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + (w + \bar{w}) = 1 \\ 2z + (\bar{w} - w) = 2 + i \end{cases}$

Đặt $z = x + yi$, và $w = u + vi$ ($x, y, z, v \in \mathbb{R}$) thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x + yi + 2u = 1 \\ 2x + 2yi - 2vi = 2 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2u + yi = 1 \\ 2x + (2y - 2v)i = 2 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2u = 1 \\ y = 0 \\ 2x = 2 \\ 2y - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ u = 0 \\ v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là : $\begin{cases} z = 1 \\ w = -\frac{1}{2}i \end{cases}$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình trên tập số phức: $\begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30 \end{cases}$.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ x + 3y + (i - 1)z = 30i \end{cases}$$

Khử x ta có hệ: $\begin{cases} (i + 1)y - 2(1 + i)z = -10 \\ 4y - (1 + i)z = -20 - 30i \end{cases}$

Lúc đó: $x = 3 - 11i$. Vậy hệ có nghiệm là: $\begin{cases} x = 3 - 11i \\ y = -3 - 9i \\ z = 1 - 7i \end{cases}$

Ví dụ 5. Tìm số phức z_1, z_2 thỏa mãn
$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = -5 - 5i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2i \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = -5 - 5i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2i \end{cases}$$

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2$

$$\Leftrightarrow -5 + 2i = (z_1 + z_2)^2 + 2(5 + 5i) \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = -15 - 8i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 - 4i \\ z_1 + z_2 = -1 + 4i \end{cases}$$

$$* \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 - 4i \\ z_1 \cdot z_2 = -5 - 5i \end{cases}$$

Nên z_1, z_2 là nghiệm phương trình: $z^2 + (4i - 1)z - 5 - 5i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - i \\ z = -1 - 3i \end{cases}$$

Ta được nghiệm: $(2 - i; -1 - 3i); (-1 - 3i; 2 - i)$

$$* \begin{cases} z_1 + z_2 = -1 + 4i \\ z_1 \cdot z_2 = -5 - 5i \end{cases}$$

Nên z_1, z_2 là nghiệm phương trình: $z^2 + (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 + i \\ z = 1 + 3i \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} z_1 = 2 - i \\ z_2 = -1 - 3i \end{cases}; \begin{cases} z_1 = -1 - 3i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}; \begin{cases} z_1 = -2 + i \\ z_2 = 1 + 3i \end{cases}; \begin{cases} z_1 = 1 + 3i \\ z_2 = -2 + i \end{cases}$

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình hai ẩn:
$$\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 & (1) \\ z^2 (\overline{w})^4 = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ (2) suy ra: $z^6 (\overline{w})^{12} = 1$. Từ (1) suy ra: $z^6 = w^{10}$

Do đó: $w^{10} (\overline{w})^{12} = 1$ nên $|w|^{22} = 1$ tức là $|w| = 1$

Suy ra: $|z^6| = |w|^{10} = 1$ tức là $|z| = 1$. Từ $w = \frac{1}{z}$ và $w^{10} (\overline{w})^{12} = 1$ suy ra $(\overline{w})^2 = 1$ nên w bằng 1 hoặc bằng -1.

Từ $(\overline{w})^2 = 1$ và (2) suy ra $z^2 = 1$ tức $z = 1$ hoặc $z = -1$.

Mà (1): $z^3 + w^5 = 0$ nên $z = 1 \Rightarrow w = -1$ và $z = -1 \Rightarrow w = 1$

Vậy hệ có hai nghiệm $(z, w) = (1; -1); (z, w) = (-1; 1)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2z - w - zw = 7 \\ z^2 + w^2 - 2w = -2 \end{cases} \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương: $2(z - w) = w + 7 \Leftrightarrow z = \frac{w+7}{2-w}$, (dễ thấy $w = 2$ không thỏa mãn).

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{w+7}{2-w}\right)^2 + w^2 - 2w = -2 \Leftrightarrow w^4 - 6w^3 + 15w^2 - 2w + 57 = 0$$

$$\Leftrightarrow (w^2 - 7w + 19)(w^2 + w + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w^2 - 7w + 19 = 0 \\ w^2 + w + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(w - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-27}{4} \\ \left(w + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w - \frac{7}{2} = \pm \frac{3i\sqrt{3}}{2} \\ w + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{7+3i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{-5+3i\sqrt{3}}{2} \\ w = \frac{7-3i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{-5-3i\sqrt{3}}{2} \\ w = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2} \Rightarrow z = \frac{3+i\sqrt{11}}{2} \\ w = \frac{-1-i\sqrt{11}}{2} \Rightarrow z = \frac{3-i\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(z; w) = \left(\frac{-5+3i\sqrt{3}}{2}; \frac{7+3i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-5-3i\sqrt{3}}{2}; \frac{7-3i\sqrt{3}}{2}\right), \\ \left(\frac{3+i\sqrt{11}}{2}; \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}\right), \left(\frac{3-i\sqrt{11}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}\right)$$

Nhận xét: Việc biến đổi phương trình bậc 4 có nghiệm thực thì không quá khó khăn, có thể dùng máy tính để nhẩm nghiệm và đoán nhân tử chung. Thế nhưng với phương trình bậc 4 nghiệm phức (và không có nghiệm thực) thì việc dùng máy tính để nhẩm nghiệm rồi đoán nhân tử chung là không thể. Vậy nên ta phải dùng kĩ thuật giải phương trình bậc 4 để phân tích nhân tử chung một cách nhanh chóng:

$$w^4 - 6w^3 + 15w^2 - 2w + 57 = 0 \Leftrightarrow (w^2 - 3w)^2 = -6w^2 + 2w - 57.$$

Bây giờ ta thêm vào 2 vế một lượng là $\left[2m \cdot (w^2 - 3w) + m^2 \right]$ (để vế trái được một bình phương đúng):

$$(w^2 - 3w + m)^2 = (2m - 6)w^2 + 2(1 - 3m)w + (m^2 - 57) (*)$$

Muốn vế phải là một bình phương đúng (hoặc có thể là lượng âm của bình phương đúng: $-A^2$) thì:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (1 - 3m)^2 - (2m - 6)(m^2 - 57) = 0 \Leftrightarrow m = 11 \vee m = \frac{-77 \pm 3\sqrt{33}}{4}$$

Vì lí do “thẩm mỹ” nên chúng ta chọn $m = 11$. Thay $m = 11$ vào (*):

$$(w^2 - 3w + 11)^2 = 16w^2 - 64w + 64 = (4w - 8)^2 \Leftrightarrow (w^2 - 7w + 19)(w^2 + w + 3) = 0$$

Ví dụ 8. Giải hệ bất phương trình sau với ẩn là số phức z :

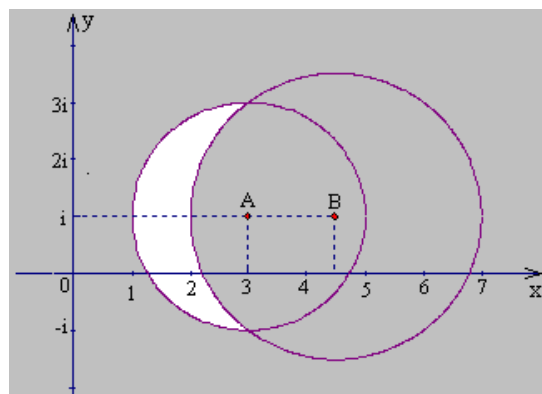
$$\begin{cases} |z - 3 - i| \leq 2 & (1) \\ |2z - 9 - 2i| \geq 5 & (2) \end{cases}$$

Giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là tọa vị của điểm M bất kỳ trong mặt phẳng phức. Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (1) là hình tròn tâm $A(3 + i)$, bán kính $R = 2$ (kể cả biên).

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow \left| z - \frac{9}{2} - i \right| \geq \frac{5}{2}$$

Tập hợp các điểm M có tọa độ z thỏa mãn (2) là phần của mặt phẳng nằm bên ngoài hình tròn tâm $B\left(\frac{9}{2} + i\right)$, bán kính $R = \frac{5}{2}$ (kể cả biên).



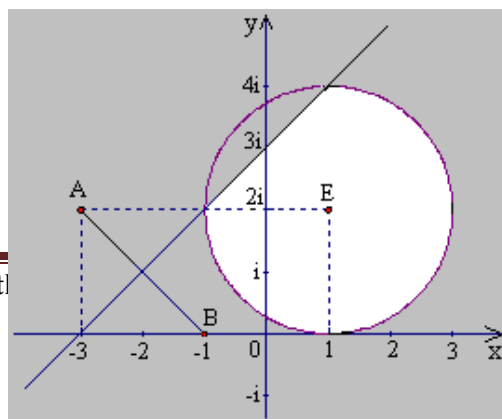
Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là giao của hai tập hợp trên. Đó là “hình trăng lưỡi liềm” không bị bôi đen trong hình vẽ.

Ví dụ 9. Giải hệ bất phương trình sau với ẩn là số phức z :

$$\begin{cases} \left| \frac{z + 3 - 2i}{z + 1} \right| \geq 1 & (1) \\ |z - 1 - 2i| \leq 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là tọa vị của điểm M bất kỳ trong mặt phẳng phức. Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (1) là nửa mặt phẳng không chứa điểm A có bờ là đường trung trực của đoạn thẳng



AB (kể cả đường trung trực), với $A(-3+2i)$ và $B(-1)$. Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (2) là hình tròn tâm $E(1+2i)$, bán kính $R=2$ (kể cả biên).

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là giao của hai tập hợp trên. Đó là phần hình tròn kể cả biên không bị bôi đen trong hình vẽ

Ví dụ 11. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức $T = |az_1 + bz_2 + cz_3|$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

Giải

Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_2}{z_3} \right| = \left| \frac{z_3}{z_1} \right| = 1$, do đó có thể đặt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos x + i \sin x, \frac{z_2}{z_3} = \cos y + i \sin y$$

$$\text{Suy ra } \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \cos(-x-y) + i \sin(-x-y).$$

$$\text{Mà } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \text{ nên } \begin{cases} \cos x + \cos y + \cos(-x-y) = 1 \\ \sin x + \sin y + \sin(-x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 0 = \sin x + \sin y + \sin(-x-y)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra hoặc $x = k2\pi$ hoặc $y = k2\pi$ hoặc $x+y = k2\pi$, do đó hai trong ba số z_1, z_2, z_3 bằng nhau.

$$\text{Giả sử } z_1 = z_2 \text{ thì } \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_3} = -\frac{z_3}{z_1} \text{ hay ta có } \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^2 = -1 \Rightarrow z_3 = \pm iz_1.$$

$$\text{Do đó } |az_1 + bz_2 + cz_3| = |az_1 + bz_1 \pm icz_1| = |z_1| |a+b \pm ic| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \text{ hoặc } \sqrt{(b+c)^2 + a^2} \text{ hoặc } \sqrt{(a+c)^2 + b^2}.$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + (1+i)y = -2 + 14i \\ ix - (2i-1)y = -4 + 9i \end{cases}$$

A. $(x, y) = (1+5i; -3-2i).$

B. $(x, y) = (1+5i; 3+2i).$

C. $(x, y) = (1 - 5i; -3 + 2i)$.

D. $(x, y) = (1 + 5i; -3 + 2i)$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1+i \\ i & 1-2i \end{vmatrix} = 3(1-2i) - i(1+i) = 4 - 7i$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2+14i & 1+i \\ -4+9i & 1-2i \end{vmatrix} = (-2+14i)(1-2i) - (-4+9i)(1+i) = 39 + 13i$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -2+14i \\ i & -4+9i \end{vmatrix} = 3(-4+9i) - i(-2+14i) = 2 + 29i$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y) = (1 + 5i; -3 + 2i)$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 2. Tìm nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 2 + 3i \\ 2x - y = 5 + 2i \end{cases}$

A. $(x, y) = \left(\frac{17+9i}{7}; -\frac{-1+4i}{7} \right)$

B. $(x, y) = \left(-\frac{17+9i}{7}; \frac{-1+4i}{7} \right)$

C. $(x, y) = \left(\frac{17+9i}{7}; \frac{-1+4i}{7} \right)$

D. $(x, y) = \left(-\frac{17+9i}{7}; \frac{1-4i}{7} \right)$

Hướng dẫn giải

Từ phương trình thứ (2) ta có: $y = 2x - 5 - 2i$ thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$x + 3(2x - 5 - 2i) = 2 + 3i \Leftrightarrow 7x = 17 + 9i \Leftrightarrow x = \frac{17+9i}{7}$$

Lúc đó: $y = \frac{-1+4i}{7}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y) = \left(\frac{17+9i}{7}; \frac{-1+4i}{7} \right)$.

Câu 3. Tìm số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - (2-i)y = 2 \\ x^2 - 3iy^2 = 5 + 15i \end{cases}$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. 4

Hướng dẫn giải

Từ phương trình thứ nhất ta được: $x = 2 + (2-i)y$ thế vào phương trình thứ (2) ta được:

$$(3-7i)y^2 + 4(2-i)y - 1 - 15i = 0 (*)$$

Ta có $\Delta' = 120 + 22i = (11+i)^2$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = i \rightarrow x = 3 + 2i \\ y = \frac{-26-51i}{29} \rightarrow x = \frac{-45-76i}{29} \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 4. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z - w - zw = 8 \\ z^2 + w^2 = -1 \end{cases}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} z - w - zw = 8 \\ (z - w)^2 + 2(z - w) - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zw = -5 \\ z - w = 3 \end{cases} \text{ (i)} \vee \begin{cases} zw = -13 \\ z - w = -5 \end{cases} \text{ (ii)}$$

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2} \\ z = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} w = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2} \\ z = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2} \end{cases};$$

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{5 + i\sqrt{27}}{2} \\ z = \frac{-5 + i\sqrt{27}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} w = \frac{5 - i\sqrt{27}}{2} \\ z = \frac{-5 - i\sqrt{27}}{2} \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 5. Tìm nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 + 4uv = 0 \\ u + v = 2i \end{cases}$

A. $(u, v) = ((1 + \sqrt{3})i, (1 + \sqrt{3})i); (u, v) = ((1 - \sqrt{3})i, (1 + \sqrt{3})i).$

B. $(u, v) = ((1 + \sqrt{3})i, (1 - \sqrt{3})i); (u, v) = ((1 + \sqrt{3})i, (1 + \sqrt{3})i).$

C. $(u, v) = (-(1 + \sqrt{3})i, (1 - \sqrt{3})i); (u, v) = (-(1 - \sqrt{3})i, (1 + \sqrt{3})i).$

D. $(u, v) = ((1 + \sqrt{3})i, (1 - \sqrt{3})i); (u, v) = ((1 - \sqrt{3})i, (1 + \sqrt{3})i).$

Hướng dẫn giải

Ta có hệ tương đương: $\begin{cases} (u + v)^2 + 2uv = 0 \\ u + v = 2i \end{cases} \Rightarrow -4 + 2uv = 0 \Rightarrow uv = 2$

Do đó ta có hệ mới: $\begin{cases} u + v = 2i \\ uv = 2 \end{cases}$ nên u, v là nghiệm của phương trình

$$z^2 - 2iz + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = (1 + \sqrt{3})i \\ z = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$(u, v) = ((1 + \sqrt{3})i, (1 - \sqrt{3})i); (u, v) = ((1 - \sqrt{3})i, (1 + \sqrt{3})i).$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i \end{cases}$. Tính $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

A. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{10}i$

B. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{10}i$

C. $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}i$

D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{10}i$

Hướng dẫn giải

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1 z_2 = 5 + 5i \end{cases}$$

Theo định lý Vi-et thì z_1, z_2 là nghiệm của phương trình

$$t^2 - (4 + i)t + 5 + 5i = 0, \Delta = -5 - 12i = (2 - 3i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{(4 + i) + (2 - 3i)}{2} = 3 - i \\ t = \frac{(4 + i) - (2 - 3i)}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm $(z_1; z_2)$ là $(3 - i; 1 + 2i); (1 + 2i; 3 - i)$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 7. Giải hệ phương trình hai ẩn: $\begin{cases} z + w = 3(1 + i) \\ z^3 + w^3 = 9(-1 + i) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } z^3 + w^3 = (z + w)^3 - 3zw(z + w) = 9(-1 + i)$$

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} z + w = 3(1 + i) \\ zw = 5i \end{cases}$$

Theo định lý Vi-et z_1, z_2 là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 3(1 + i)t + 5i = 0, \Delta = -2i = (1 - i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 + i \\ t = 1 + 2i \end{cases}$$

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm $(z; w)$ là $(2 + i; 1 + 2i); (1 + 2i; 2 + i)$

Câu 8. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức $S = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$ với n là số nguyên dương.

A. $S = 2$

B. $S = 1$

C. $S = \frac{1}{2}$

D. $S = 4$

Hướng dẫn giải

Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1, \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2, \frac{1}{z_3} = \bar{z}_3$. Do đó

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1 z_2 z_3 = a$$

Vậy z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm của phương trình:

Chúng tỏ trong ba số phức z_1, z_2, z_3 phải có một số bằng 1 và hai số còn lại đối nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử $z_1 = 1; z_2 = -z_3$ khi đó :

$$S = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1} = 1 + z_2^{2n+1} - z_2^{2n+1} = 1$$

Vậy ta có tổng $S=1$

Chú ý: Có thể giải bài toán bằng cách sử dụng biểu diễn hình học số phức hoặc dùng dạng lượng giác (ví dụ dưới đây)

Câu 9. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 4 + 2i & (1) \\ 2z_1 + z_2 - z_3 = 2 + 5i & (2) \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 9 + 2i & (3) \end{cases}$$

A. $(z_1, z_2, z_3) = (i, 3 + 2i, 1 + i).$

B. $(z_1, z_2, z_3) = (i, 3 - 2i, 1 - i).$

A.

B.

C. $(z_1, z_2, z_3) = (i, 3 + 2i, 1 - i).$

D. $(z_1, z_2, z_3) = (-i, 3 + 2i, 1 - i).$

C.

D.

Hướng dẫn giải

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: $3z_1 + 2z_2 = 6 + 7i$ (4)

Nhân (2) với 3 rồi cộng với (3) ta được $7z_1 + 5z_2 = 15 + 17i$ (5)

Lúc đó hệ phương trình trở thành:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 4 + 2i \\ 3z_1 + 2z_2 = 6 + 7i \\ 7z_1 + 5z_2 = 15 + 17i \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $(z_1, z_2, z_3) = (i, 3 + 2i, 1 - i).$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 10. Tìm số nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$$

A. $S = 2$

B. $S = 1$

C. $S = 3$

D. $S = 6$

Hướng dẫn giải

Ta có lưu ý sau: Chứng minh rằng nếu 3 số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn: $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$ thì

một trong 3 số đó phải bằng 1.

Thật vậy

Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Leftrightarrow 1 - z_1 = z_2 + z_3$

- Nếu $z = 1$ thì $z_2 + z_3 = 0$
- Nếu $z \neq 1$ thì $1 - z_1 \neq 0$, gọi điểm P biểu diễn số phức $1 - z_1 = z_2 + z_3 \neq 0$ thì P sẽ không trùng với O và $1 = |z_1| = |z_2| = |z_3|$ nên đường trung trực của OP cắt đường tròn đơn vị tại hai điểm $1, -z_1$ và cũng là hai điểm biểu diễn z_2, z_3 . Do đó hoặc $z_2 = 1, z_3 = -z_1$ hoặc $z_2 = -z_1, z_3 = 1$.

Vậy $z_1 = 1$ hoặc $z_2 = 1$ hoặc $z_3 = 1$.

Áp dụng: giải hệ phương trình trên thì có một ẩn bằng 1 và tổng hai ẩn còn lại bằng 0.

Xét $z_1 = 1$ thì có $z_2 + z_3 = 0$ nên $z_2 = -z_3$.

Từ giả thiết $z_1 z_2 z_3 = 1$ nên $-z_3^2 = 1$ hay $z_3^2 = -1 = i^2$ thì có $z_2 = i, z_3 = -i$ hoặc $z_2 = -i, z_3 = i$.

Vậy hệ có 6 nghiệm là hoán vị các phần tử của bộ ba $(1, i, -i)$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} z^3 - \bar{w}^2 = 0 \\ z^5 \bar{w}^3 = 1 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng

- A. Hệ có nghiệm duy nhất
- B. Hệ đã cho vô nghiệm
- C. Nghiệm của hệ là những số thực
- D. Thành phần nghiệm của hệ có một số thực và một số phức

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} z^3 - \bar{w}^2 = 0 & (1) \\ z^5 \bar{w}^3 = 1 & (2) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} z^3 - \bar{w}^2 = 0 \\ z^5 \bar{w}^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^{15} = \bar{w}^{10} \\ z^{15} w^9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{w}^{10} w^9 = 1 \quad (*)$

Từ (*) ta có $|\bar{w}|^{10} |w|^9 = 1 \Rightarrow |w| = 1$, vì thế $1 = \bar{w}^{10} w^9 = \bar{w} \cdot (\bar{w} \cdot w)^9 = \bar{w}$. Do đó $\bar{w} = 1$ nên hệ có

dạng $\begin{cases} z^3 = 1 \\ z^5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^5 \cdot z = 1 \\ z^5 = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1$

Thử lại thấy thỏa mãn, vậy hệ đã cho có nghiệm $(z; w) = (1; 1)$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 12. Tìm số phức z thỏa mãn :
$$\begin{cases} 2|z-i| = |z-\bar{z}+2i| \\ |z^2-(\bar{z})^2| = 4 \end{cases}$$

A. $z = -\sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$ B. $z = -\sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$ C. $z = \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$ D. $z = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$

Hướng dẫn giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x+(y-1)i| = |(2y+2)i| \\ |4xyi| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = \frac{1}{x} \vee y = -\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

Vậy số phức cần tìm là : $z = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 13. Tìm tham số m để hệ phương trình phức có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} |z-3i-1| = 1 \\ |z+i-1| = |m-z| \end{cases} \quad (\text{ẩn } z \text{ là số phức})$$

A. $m = 1 \pm \sqrt{3}$, $m = 1 \pm \sqrt{15}$ B. $m = 1 \pm \sqrt{3}$, $m = 1 \pm \sqrt{5}$
C. $m = 1 \pm \sqrt{5}$, $m = 1 \pm \sqrt{15}$ D. $m = 1 \pm \sqrt{5}$, $m = 1 \pm \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

Theo giả thiết, ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1+(y-3)i| = 1 \\ |x-1+(y+1)i| = |m-x-yi| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = (m-x)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ 2(m-1)x + 2y + 2 - m^2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

(*) là hệ phương trình tọa độ giao điểm của đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$

Và đường thẳng (Δ): $2(m-1)x + 2y + 2 - m^2 = 0$

Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R = 1$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (\Delta)$ tiếp xúc với (C).

$$\Leftrightarrow d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|m^2 - 2m - 6|}{\sqrt{4(m-1)^2 + 4}} = 1 \Leftrightarrow |(m-1)^2 - 7| = \sqrt{4(m-1)^2 + 4}$$

Đặt $t = (m-1)^2$ ($t \geq 0$), ta có

$$|t-7| = \sqrt{4t+4} \Leftrightarrow (t-7)^2 = 4t+4 \Leftrightarrow t^2 - 18t + 45 = 0 \Leftrightarrow t = 3, t = 15$$

- $t = 3 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 3 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}$
- $t = 15 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 15 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{15}$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1 \pm \sqrt{3}$ hay $m = 1 \pm \sqrt{15}$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 14. Tìm nghiệm của hệ phương trình sau với ẩn là số phức z và λ là tham số thực khác 0.

$$\begin{cases} \frac{z-4-2i}{z+2} = \lambda i & (1) \\ \left| \frac{z-2}{z+2i} \right| = 1 & (2) \end{cases}$$

A. $z = 2 - 2i, z = -2 + 2i$.

B. $z = 2 + 2i, z = -2 + 2i$.

C. $z = 2 - 2i, z = -2 - 2i$.

D. $z = -2 - 2i, z = 2 - 2i$.

Hướng dẫn giải

Gọi A, B theo thứ tự là các điểm trong mặt

phẳng phức biểu diễn số phức là $4 + 2i, -2$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn đường kính AB , trừ hai điểm A và B . Đường tròn này có tâm

E biểu diễn số phức $1 + i$ và bán kính $R = \frac{1}{2}|6 + 2i| = |3 + i| = \sqrt{10}$ nên có phương trình là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad (*)$$

Gọi C, D theo thứ tự là các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $2, -2i$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (2) là đường trung trực của đoạn thẳng CD . Đường trung trực này đi qua trung điểm

$H(1-i)$ của đoạn thẳng CD và nhận $\overrightarrow{CD}(-2-2i)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$-2(x-1) - 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \quad (**)$$

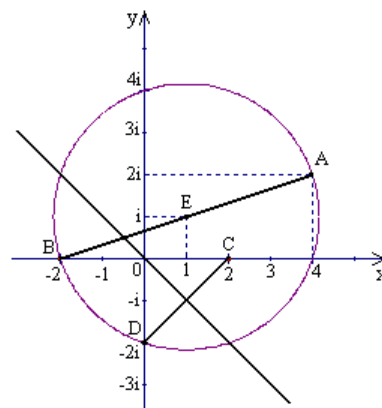
Suy ra giao điểm của đường tròn và đường trung trực là nghiệm của hệ đã

cho. Đó là các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $(*)$ và $(**)$, tức là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x-1)^2 + (-x-1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $z = 2 - 2i, z = -2 + 2i$.



Vậy chọn đáp án A.

Câu 15. Số nghiệm của hệ phương trình sau với z là ẩn số :

$$\begin{cases} |z-1-4i|=3 & (1) \\ \left| \frac{z+3+2i}{z+\frac{3}{2}-i} \right| = 2 & (2) \end{cases}$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

Hướng dẫn giải

Gọi E là điểm trong mặt phẳng phức có tọa vị là $1+4i$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn tâm E, bán kính $R=3$.

Phương trình đường tròn này là: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ (*). Gọi

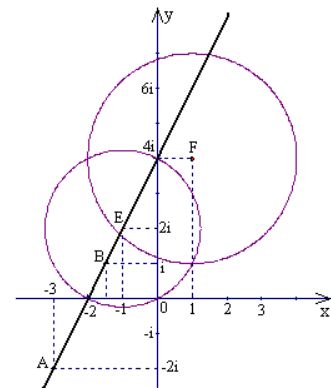
A, B theo thứ tự là các điểm biểu diễn số phức $-3-2i$, $-\frac{3}{2}+i$.

Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (2) là đường tròn Appollonius chia đoạn thẳng AB theo tỷ số $k=2$.

Đường tròn Appollonius có tâm F là điểm có tọa độ

$$f = \frac{a-k^2b}{1-k^2} = \frac{-3-2i-4\left(-\frac{3}{2}+i\right)}{1-4} = -1+2i \quad \text{và có bán kính}$$

$$R = \frac{k|a-b|}{|1-k^2|} = \frac{2\left|-3-2i+\frac{3}{2}-i\right|}{|1-4|} = |-1-2i| = \sqrt{5}$$



Phương trình đường tròn Appollonius là : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ (**)

Suy ra nghiệm của hệ đã cho là giao điểm của hai đường tròn (*) và (**), tức là các điểm $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-1)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2-x)^2 + 2x - 4(2-x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $z=1+i$ và $z=-2+4i$.

Vậy chọn đáp án C.

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 7:

DẠNG LƯỢNG GIÁC SỐ PHỨC

HUẾ, 1/04/2017

CHỦ ĐỀ 8. DẠNG LƯỢNG GIÁC SỐ PHỨC

Bài toán 1: Viết số phức dưới dạng lượng giác

Phương pháp

1. Để viết số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ dưới dạng lượng giác $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Trước hết ta biến đổi: $z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$

Như vậy: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Đặt $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Từ đó suy ra φ là 1 argumen của z .

2. Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

$$\begin{aligned} * 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi &= 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$* 1 + i \tan \varphi = 1 + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

- a) 5; b) -3 c) 7i; d) -2i.

Giải

a) $5 = 5(1 + 0i) = 5(\cos 0 + i \sin 0)$.

b) $-3 = 3(-1 + 0i) = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

c) $7i = 7(0 + i) = 7\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$.

d) $-2i = 2(0 - i) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

- a) $1 - i\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$; c) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$; d) $\frac{7\sqrt{3}}{3} - 7i$.

Giải

a) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

b) $\sqrt{3} - i\sqrt{3} = \sqrt{3}(1 - i) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

c) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right]$.

$$d) \frac{7\sqrt{3}}{3} - 7i = \frac{7\sqrt{3}}{3}(1 - i\sqrt{3}) = \frac{14\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{14\sqrt{3}}{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Ví dụ 3. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $(1+3i)(1+2i)$; b) $(1+i)\left[1+(\sqrt{3}-2)i\right]$;

c) $(\sqrt{2}-2i) \cdot \left[\sqrt{2}+(3\sqrt{2}-4)i\right]$;

Giải

a) $(1+3i)(1+2i) = 1 + 6i^2 + 3i + 2i = -5 + 5i = 5(-1+i)$

$$= 5\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 5\sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right).$$

b) $(1+i)\left[1+(\sqrt{3}-2)i\right] = 1 - (\sqrt{3}-2) + (\sqrt{3}-2+1)i$

$$= 3 - \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)i = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}-1)i$$

$$= (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+i) = 2(\sqrt{3}-1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$= 2(\sqrt{3}-1) \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right).$$

c) $(\sqrt{2}-2i) \cdot \left[\sqrt{2}+(3\sqrt{2}-4)i\right] = (2+6\sqrt{2}-8) + (6-4\sqrt{2}-2\sqrt{2})i$

$$= (6\sqrt{2}-6) + (6-6\sqrt{2})i = (6\sqrt{2}-6)(1-i)$$

$$= \sqrt{2}(6\sqrt{2}-6) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$= (12-6\sqrt{2}) \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Ví dụ 4. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $\frac{1}{2+2i}$; b) $\frac{3-i}{1-2i}$; c) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

Giải

a) Ta có:

$$\frac{1}{2+2i} = \frac{1}{2(1+i)} = \frac{\sqrt{2}}{4 \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

b) $\frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+2+6i-i}{1-(2i)^2} = \frac{5+5i}{1+4} = 1+i$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right).$$

c) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right]$

Ví dụ 5. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$

b) $1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i$.

Giải

a) Ta có:

$$1 + \frac{i}{\sqrt{3}} = 1 + i \tan \frac{\pi}{6} = 1 + i \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\text{b) } 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = 1 + \tan \frac{\pi}{3} + \left(1 - \tan \frac{\pi}{3} \right)i = 1 + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} + \left(1 - \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \right)i$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)i$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \right)i$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)i$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right].$$

Cách khác:

$$1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = (1 + \sqrt{3}) \left(1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} i \right)$$

$$= (1 + \sqrt{3}) \left(1 + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{3}} i \right)$$

$$= (1 + \sqrt{3}) \left[1 + i \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right] = (1 + \sqrt{3}) \left[1 + i \tan \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right].$$

$$= (1 + \sqrt{3}) \left[1 + i \frac{\sin \left(-\frac{\pi}{12} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right)} \right] = \frac{1 + \sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{12}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right].$$

$$\text{Mà } \cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{12}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] \\&= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1+i) = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left(2\cos^2\frac{3\pi}{8}+2i\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}\right) \\
 &= 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\cdot\cos\frac{3\pi}{8}\cdot\left[\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 1+(2-\sqrt{3})i &= (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})i \\
 &= (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}+i) = 2(2-\sqrt{3})\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) \\
 &= 2(2-\sqrt{3})\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2(2-\sqrt{3})\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right) \\
 &= 4(2-\sqrt{3})\cos\frac{\pi}{12}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).
 \end{aligned}$$

Bài tập 3. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

$$\text{a) } z = -\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right); \quad \text{b) } z = 5\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 z &= -\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right) = -\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right) \\
 &= \cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}.
 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$z = 5\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Bài tập 4. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$\text{a) } -(\cos\varphi+i\sin\varphi); \quad \text{b) } \cos\varphi-i\sin\varphi; \quad \text{c) } -\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$-(\cos\varphi+i\sin\varphi) = -\cos\varphi-i\sin\varphi = \cos(\varphi+\pi)+i\sin(\varphi+\pi)$$

$$\text{b) Ta có: } \cos\varphi-i\sin\varphi = \cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$$

$$\text{c) Ta có: } -\cos\varphi+i\sin\varphi = \cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi).$$

Bài tập 5. Viết dưới dạng lượng giác các số phức sau:

a) $\frac{1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi};$

b) $[1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)](1 + \cos \varphi + i \sin \varphi).$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$\frac{1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}} = -i \tan \frac{\varphi}{2}$$

- Khi $\tan \frac{\varphi}{2} > 0$ thì dạng lượng giác là $\tan \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$

- Khi $\tan \frac{\varphi}{2} < 0$ thì dạng lượng giác là $-\tan \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$

- Khi $\tan \frac{\varphi}{2} = 0$ thì không có dạng lượng giác.

b) Ta có

$$\begin{aligned} & [1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)](1 + \cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2} \right) \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

- Khi $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$ thì dạng lượng giác là $2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right]$

- Khi $\sin \frac{\varphi}{2} < 0$ thì dạng lượng giác là $-2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]$

- Khi $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$ thì không có dạng lượng giác.

Bài toán 2: Áp dụng công thức Moivre để thực hiện các phép tính

Phương pháp

$$* (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi$$

$$* (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')$$

$$* \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi' + i \sin \varphi'} = \cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')$$

$$\begin{aligned} * 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi &= 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$* 1 + i \tan \varphi = 1 + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Tính các giá trị của số phức sau và viết kết quả của chúng dưới dạng $a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$a) A = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14} \right).$$

$$b) B = \frac{\sqrt{7} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)};$$

$$c) C = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)^3}{\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)^4}$$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{7} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{105}}{10} + \frac{\sqrt{35}}{10} i. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$C = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^3}{\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}\right)^4} = \frac{\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}\right)}{\left(\cos \frac{4\pi}{15} + i \sin \frac{4\pi}{15}\right)}$$

$$= \left[\cos \left(\frac{3\pi}{5} - \frac{4\pi}{15} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{5} - \frac{4\pi}{15} \right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ví dụ 2. Tìm số nguyên dương n bé nhất để $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^n$ là số thực.

(Trích đề thi thử số 1 năm 2012, TT 46/1 Chu Văn An, Huế)

Giải

Ta có: $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$; $1-i = \sqrt{2}\left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$$

Do đó $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos \frac{5n\pi}{12} + i \sin \frac{5n\pi}{12}\right)$

Số đó là số thực khi và chỉ khi $\sin \frac{5n\pi}{12} = 0 \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n}{12} = k \ (k \in \mathbb{Z})$

Số nguyên dương bé nhất cần tìm là $n = 12$.

Ví dụ 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^9 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^9$; b) $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^7 - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^7$

c) $C = (1+i\sqrt{3})^6 (1-i)^5 + (1-i)^5 (1-i\sqrt{3})^6$; d) $D = \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} + \frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4}$

Giải

a) Ta có

$$A = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^9 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^9 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^9 + \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^9$$

$$= \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} + \cos \left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{9\pi}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} + \cos \left(\frac{9\pi}{4}\right) - i \sin \left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^7 - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^7 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^7 - \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^7 \\
 &= \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} - \cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) \\
 &= \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} = 2i \sin \frac{\pi}{3} = i\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 C &= (1+i\sqrt{3})^6 (1-i)^5 + (1-i)^5 (1-i\sqrt{3})^6 \\
 &= \left[2 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right]^6 \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^5 + \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^5 \left[2 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right]^6 \\
 &= 2^6 (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^5 \\
 &\quad + 2^6 (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^6 \\
 &= 2^8 \sqrt{2} \left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3} \right) \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right) \\
 &\quad + 2^8 \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \left(\cos \left(-\frac{6\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{6\pi}{3} \right) \right) \\
 &= 2^8 \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2^9 \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} = -512
 \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} + \frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4} = \frac{2^5 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^5}{\sqrt{2^4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^4} + \frac{2^5 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^5}{\sqrt{2^4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^4} \\
 &= \frac{2^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^5}{2^2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^5} + \frac{2^5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^5}{2^2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4} \\
 &= 8 \frac{\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}}{\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right)} + 8 \frac{\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right)}{\cos \pi + i \sin \pi} \\
 &= \frac{8 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)}{-1} + \frac{8 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)}{-1} = -8
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính giá trị các biểu thức sau

$$a) A = \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^4 + \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^4;$$

$$b) B = \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4};$$

$$c) C = \frac{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3}\right)^2}{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} - i \sin \frac{8\pi}{3}\right)^2}.$$

Giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^4 + \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^4 \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{6} + 2i \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}\right)^4 + \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{6} - 2i \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}\right)^4 \\ &= \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4 + \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4 \\ &= \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4 + \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right]^4 \\ &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^4 \left(\cos \frac{20\pi}{6} + i \sin \frac{20\pi}{6}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^4 \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{6}\right)\right) \\ &= 9 \left(2 \cos \frac{20\pi}{6}\right) = 18 \cos \frac{20\pi}{6} = -9. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4} = \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^4} \\ &= \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6}}{1 + \cos \left(-\frac{4\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{6}\right)} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}{1 + \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}{1 + \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{2 \cos \frac{\pi}{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} - i \sin \frac{8\pi}{3} \right)^2}{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)^2} = \frac{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2}{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2} \\
 &= \frac{1 - \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)^2}{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2} = \frac{1 - \left[\cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]}{1 - \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)} \\
 &= \frac{2 \sin^2 \left(\frac{-2\pi}{3} \right) - 2i \sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right)}{2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} - 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}}{2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} - 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{2\pi}{3} \left(\sin \frac{2\pi}{3} + i \cos \frac{2\pi}{3} \right)}{2 \sin \frac{2\pi}{3} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - i \cos \frac{2\pi}{3} \right)} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} + i \cos \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3} - i \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)} \\
 &= \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 5. a) Chứng minh số phức $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-3i} \right)^{24}$ là số thực.

(Trích Trường THPT Kon Tum, lần 3 – 2012)

b) Tìm tất cả số nguyên dương n thỏa mãn $A = \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3i} \right)^n$ là số thực.

(Trích Trường THPT Quế Võ số 1, lần 4 – 2013)

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 z &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-3i} \right)^{24} = \frac{(\sqrt{2})^{24} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^{24}}{2^{24} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{24}} \\
 &= \frac{\left[\cos(-6\pi) + i \sin(-6\pi) \right]}{2^{12} (\cos 4\pi + i \sin 4\pi)} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}
 \end{aligned}$$

b) Ta có

$$A = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^n = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}$$

$$A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$$

Ví dụ 6. Giả sử z là số phức thỏa mãn $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tìm số phức $w = \left(\frac{1 + \sqrt{3} - z}{2 + z} \right)^7$

(Trích Trường THPT Chuyên ĐH Vinh – 2012)

Giải

Từ giả thiết $z^2 - 2z + 4 = 0$ ta có $(z - 1)^2 = -3 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}i$

Với $z = 1 + \sqrt{3}i$ ta có:

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{3 + \sqrt{3}i} \right)^7 = \frac{(1 - i)^7}{(\sqrt{3} + i)^7} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)^7}{\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^7} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \frac{-7\pi}{4} + i \sin \frac{-7\pi}{4}}{\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{32} - \frac{\sqrt{3} - 1}{32}i \end{aligned}$$

Với $z = 1 - \sqrt{3}i$ ta có:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1 + i)^7}{(\sqrt{3} - i)^7} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^7}{\left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)^7} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}}{\cos \frac{-7\pi}{6} + i \sin \frac{-7\pi}{6}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - i}{-\sqrt{3} + i} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{32} + \frac{\sqrt{3} - 1}{32}i \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{(z-1)(2-i)}{z+2i} = \frac{3+i}{2}$. Tìm phần thực và phần ảo của z^9 .

(Trích Trường THPT Phan Bội Châu, Nghệ An lần 2 – 2013)

Giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned} \frac{(z-1)(2-i)}{z+2i} &= \frac{3+i}{2} \Leftrightarrow (4-2i)z - (3+i)\bar{z} = 2+4i \Leftrightarrow (x+y) + (7y-3x)i = 2+4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 7y-3x=4 \end{cases} &\Leftrightarrow x=y=1 \Rightarrow z=1+i \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } z^9 = \left(\sqrt{2} \right)^9 \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = 16 + 16i$$

Phần thực của z là 16, phần ảo của z là 16.

Ví dụ 8. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - \left(2\cos\frac{5\pi}{21}\right)z + 1 = 0$. Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho $z_1^n + z_2^n = 1$.

(Trích Trường THPT Nguyễn Văn Cừ, Bắc Ninh lần 3 – 2013)

Giải

Phương trình $z^2 - \left(2\cos\frac{5\pi}{21}\right)z + 1 = 0$ (1). (1) có $\Delta' = \cos^2\frac{5\pi}{21} - 1 = -\sin^2\frac{5\pi}{21}$

Do đó các căn bậc hai của Δ' là $\pm i\sin\frac{5\pi}{21}$.

Vậy (1) có các nghiệm là $z_1 = \cos\frac{5\pi}{21} - i\sin\frac{5\pi}{21}$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{21} + i\sin\frac{5\pi}{21}$

Ví dụ 9. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức: $w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}$, biết z_1 có phần ảo dương.

(Trích Trường THPT Can Lộc, Hà Tĩnh lần 2 – 2014)

Giải

Vì $\Delta = -3$ nên phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ (do z_1 có phần ảo dương)

Ta có: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$

Do đó: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{4026} = \cos 1342\pi + i\sin 1342\pi = 1$

Vậy phần thực bằng 1, phần ảo bằng 0.

$$z_1^n + z_2^n = 1 \Leftrightarrow \left(\cos\frac{5\pi}{21} - i\sin\frac{5\pi}{21}\right)^n + \left(\cos\frac{5\pi}{21} + i\sin\frac{5\pi}{21}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{21}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{21}\right)\right]^n + \left(\cos\frac{5\pi}{21} + i\sin\frac{5\pi}{21}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-\frac{n5\pi}{21}\right) + i\sin\left(-\frac{n5\pi}{21}\right) + \cos\frac{n5\pi}{21} + i\sin\frac{n5\pi}{21} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-\frac{n5\pi}{21}\right) + \cos\frac{n5\pi}{21} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{n5\pi}{21} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{n5\pi}{21} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow n = \pm\frac{7}{5} + \frac{42k}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}) (*)$$

Vì n là số nguyên dương nhỏ nhất nên từ (*) suy ra $n = 7$.

Ví dụ 10. Cho số phức z biết $z = 1 + \sqrt{3}i$. Viết dạng lượng giác của z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1 + i)z^5$

Giải

Cách 1: Ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Do đó: } z^5 = 32\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra: } w = (1+i)(16 - 16i\sqrt{3}) = 16(1 + \sqrt{3}) + 16(1 - \sqrt{3})i$$

Vậy số phức $w = (1+i)z^5$ có phần thực là $16 + 16\sqrt{3}$ và phần ảo là $16 - 16\sqrt{3}$

Cách 2: Dạng lượng giác của số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Áp dụng công thức Moivre, ta có } z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 16(1 - i\sqrt{3})$$

$w = (1+i)z^5 = (1+i).16(1 - i\sqrt{3}) = 16[(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i] = 16(1 + \sqrt{3}) + 16(1 - \sqrt{3})i$ Vậy phần thực của số phức w là $16 + 16\sqrt{3}$ và phần ảo của số phức w là $16 - 16\sqrt{3}$

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Tính các giá trị của số phức sau và viết kết quả của chúng dưới dạng $a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\text{a) } A = 5\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{36} + i\sin\frac{5\pi}{36}\right); \quad \text{b) } B = \frac{i\sqrt{3}}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5};$$

$$\text{c) } C = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} \left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^5}.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= 5\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{36} + i\sin\frac{5\pi}{36}\right) \\ &= 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{5\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{5\pi}{36}\right)\right] = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$B = \frac{i\sqrt{3}}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5} = \frac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5} = \frac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

c) Ta có

$$C = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} \left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^5}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{32\left(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{20\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{20\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{35\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Bài tập 2. Cho số phức $z = \left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m$. Tìm m nguyên để z là số thực, z là số ảo

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = \left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m = 2^{\frac{m}{2}} \left(\cos\frac{m\pi}{4} + i\sin\frac{m\pi}{4}\right)$ (*)

z là số thực $\Leftrightarrow m = 4k, k \in \mathbb{Z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow m = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3. Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Tính z^7 .

(Trích Trường THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – 2013)

Giải

Ta có $z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Suy ra $z^7 = 128\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right) = 128\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 64 + 64\sqrt{3}i$

Bài tập 4. Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2013} .

(Trích Trường THPT Chuyên Trần Phú, lần 2 – 2013)

Giải

Gọi số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào (1) ta có:

$$a + bi - \frac{a - bi}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5} \Leftrightarrow a + bi = \frac{(a - bi)(1 - 3i)}{10} = \frac{6 + 7i}{5}$$

$$\Leftrightarrow 10a + 10bi - a + 3b + i(b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow 9a + 3b + i(11b + 3a) = 12 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 11b + 3a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a = b = 1 \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow z^{2013} = (1 + i)^{2013} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2013} \\ = 2^{1006} \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{2013\pi}{4} + i \sin \frac{2013\pi}{4} \right)$$

$$\text{Vậy phần thực của } z^{2013} \text{ là } 2^{1006} \sqrt{2} \cdot \cos \frac{2013\pi}{4} = -2^{1006}$$

Bài tập 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = z_1^{2014} + z_2^{2014}$.

(Trích Trường THPT Chuyên Quảng Bình, lần 2 – 2014)

Giải

$$z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{Ta có } z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}$$

Áp dụng công thức Moa-vơ:

$$z_1 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2014} = \cos \frac{2014\pi}{3} + i \sin \frac{2014\pi}{3} = \cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3}$$

$$z_2 = \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right)^{2014} = \cos \frac{-2014\pi}{3} + i \sin \frac{-2014\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow w = \cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -1. \text{ Phần thực của } w \text{ là } -1, \text{ phần ảo là } 0.$$

Bài tập 6. Cho các số phức z thỏa mãn: $(2 - z)^5 = z^5$. Chứng minh rằng z có phần thực bằng 1.

(Trích Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị - 2014)

Giải

$$\text{Ta có } z = 0; z = 2 \text{ không thỏa mãn phương trình nên } (2 - z)^5 = z^5 \Leftrightarrow \left(\frac{2 - z}{z} \right)^5 = 1.$$

$$\frac{2 - z}{z} \neq 0 \text{ nên đặt } \frac{2 - z}{z} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2 - z}{z} \right)^5 = r^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = 1 = 1(\cos k2\pi + i \sin k2\pi)$$

$$\text{Nên } \frac{2-z}{z} = 1 \left(\cos \frac{k2\pi}{5} + i \sin \frac{k2\pi}{5} \right) \Leftrightarrow \frac{2}{z} = 1 + \cos \frac{k2\pi}{5} + i \sin \frac{k2\pi}{5} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= \frac{2}{1 + \cos \frac{k2\pi}{5} + i \sin \frac{k2\pi}{5}} = \frac{2}{2 \cos \frac{k\pi}{5} \left(\cos \frac{k\pi}{5} + i \sin \frac{k\pi}{5} \right)} \\ &= \frac{\cos \frac{k\pi}{5} - i \sin \frac{k\pi}{5}}{\cos \frac{k\pi}{5} \left(\cos^2 \frac{k\pi}{5} - i^2 \sin^2 \frac{k\pi}{5} \right)} = \frac{\cos \frac{k\pi}{5} - i \sin \frac{k\pi}{5}}{\cos \frac{k\pi}{5}} = 1 - i \tan \frac{k\pi}{5} \end{aligned}$$

Vậy z luôn có phần thực là 1.

Bài tập 7. Biết rằng số phức z thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Hãy tính $z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ } z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \end{cases} \Rightarrow z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}} = 2$$

Bài tập 8. Cho $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Tính

a) $A = z^{12} + z^6 + 1$;

b) $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1$;

c) $C = z^8 + 2z^4 + z^2$;

d) $D = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^8$;

e) $E = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^9 + z^{10}$;

f) $F = z^{2009} - z^{2010} + z^{2011}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

a) Ta có

$$z^{12} = \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^{12} = \cos \left(-\frac{12\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{12\pi}{3} \right) = 1$$

$$z^6 = \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^6 = \cos \left(-\frac{6\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{6\pi}{3} \right) = 1$$

$$\text{Do đó: } A = z^{12} + z^6 + 1 = 3$$

b) Ta có

$$z^9 = \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^9 = \cos \left(-\frac{9\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{9\pi}{3} \right) = -1$$

$$z^6 = \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^6 = \cos \left(-\frac{6\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{6\pi}{3} \right) = 1$$

$$z^3 = \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = \cos \left(-\frac{3\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{3} \right) = -1$$

Vậy $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1 = 0$

Cách 2. Ta có thể xem B là tổng của cấp số nhân 4 số hạng liên tiếp, số hạng đầu là 1, công bội là

$$z^3. \text{ Suy ra ta có: } B = z^9 + z^6 + z^3 + 1 = u_1 \frac{1-q^4}{1-q} = \frac{1-(z^3)^4}{1-z^3} = \frac{1-z^{12}}{1-z^3}$$

Với $z^{12} = 1, z^3 = -1$. Vậy $B = 0$.

c) Ta có

$$z^2 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]^2 = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z^4 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]^4 = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z^8 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]^8 = \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $C = z^8 + 2z^4 + z^2 = -2$

d) Ta có $D = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^8$ là tổng của cấp số nhân có 9 số hạng, số hạng đầu bằng 1, công bội là z

Do đó:

$$D = u_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = \frac{1-q^9}{1-q} \text{ với } z^9 = -1$$

$$\text{Do đó: } D = \frac{-1-1}{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = 1-i\sqrt{3}.$$

e) Ta có $E = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^9 + z^{10}$ là tổng của cấp số nhân có 11 số hạng, số hạng đầu bằng 1, công bội là $-z$

Do đó:

$$E = \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{1-(-z)^{11}}{1-(-z)} = \frac{1+z^{11}}{1+z}$$

$$\text{Với } z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z+1 = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Và } z^{11} = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]^{11} = \cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow z^{11} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } E = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

f) Ta có

$$F = z^{2009} - z^{2010} + z^{2011} = z^{2009}(1 - z + z^2)$$

$$\text{Với } z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1 - z + z^2 = 0$$

Vậy $F = 0$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ và } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{b) Cho số phức } z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i.$$

$$\text{Tính } A = z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}; \quad B = z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

b) Theo câu a) ta có

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \\ \Rightarrow |z| &= 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \text{ hay } z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z} \text{ và } \frac{1}{z^2} = \bar{z}^2 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \oplus A &= z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = (z^2 + z + 2) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \\ &= (z^2 + \bar{z}^2 + 2 \cdot z \cdot \bar{z}) + (z + \bar{z}) = (z + \bar{z})^2 + (z + \bar{z}) \text{ vì } z + \bar{z} = 2 \cos \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} A &= \left(2 \cos \frac{\pi}{12} \right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{12} = 2 \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{12} \right) + 2 \cos \frac{\pi}{12} = 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} \right) + 2 \cos \frac{\pi}{12} \\ &= 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \oplus B &= z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = z^2 - \frac{1}{z^2} + 2i - \left(z - \frac{1}{z} \right) \\
 &= z^2 - \bar{z}^2 + 2i - (z - \bar{z}) = (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + 2i - (z - \bar{z}) \\
 &= 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{12} + 2i - 2i \sin \frac{\pi}{12} = 2i \sin \frac{\pi}{6} + 2i - 2i \sin \frac{\pi}{12} \\
 &= 2i \left(\sin \frac{\pi}{6} + 1 - \sin \frac{\pi}{12} \right) = 2i \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = i \cdot \frac{6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Bài tập 10. Tìm phần thực của số phức $z = (1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Trong đó n thỏa mãn: $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$.

Giải

Phương trình: $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$ có nghiệm duy nhất là $n = 19$ (vì VT của phương trình là một hàm số đồng biến nên đồ thị của nó cắt đường thẳng $y = 4$ tại một điểm duy nhất)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 z &= (1+i)^{19} = (\sqrt{2})^{19} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{19} = (\sqrt{2})^{19} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{19} \\
 &= (\sqrt{2})^{19} \left(\cos \frac{19\pi}{4} + i \sin \frac{19\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^{19} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2^9 - i \cdot 2^9
 \end{aligned}$$

Suy ra $\operatorname{Re} z = 2^9 = 512$.

Bài tập 11. Cho số phức $z = \frac{7-i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$. Viết z dưới dạng lượng giác. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1-i\sqrt{3})z^5$.

Giải

$$\text{Ta có: } z = \frac{7-i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \frac{(7-i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{1^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 1+i\sqrt{3}$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 w &= (1-i\sqrt{3}) \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^5 \\
 &= (1-i\sqrt{3}) \cdot 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 32 \cdot (1-i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = -32 - 32i\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Vậy phần thực của w là -32 , phần ảo là $-32\sqrt{3}$.

Bài tập 12. Tìm điều kiện đối với các số phức a, b, c sao cho với mọi số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ thì $az^2 + bz + c$ là số thực.

Lời giải

Vì $az^2 + bz + c$ là số thực nên ta có các giá trị đặc biệt:

- Chọn $z = 1$ thì $a + b + c \in \mathbb{R}$. (1)
- Chọn $z = -1$ thì $a - b + c \in \mathbb{R}$. (2)
- Chọn $z = i$ thì $-a + ib + c \in \mathbb{R}$. (3)
- Chọn $z = -i$ thì $-a - ib + c \in \mathbb{R}$. (4)

Từ (1) và (2) ta có $b \in \mathbb{R}$. Nhưng từ (3) và (4) ta có $ib \in \mathbb{R}$ do đó $b = 0$.

Khi đó, từ (1) và (3) thì $a, c \in \mathbb{R}$.

Vì $|z| = 1$ nên đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) ta có:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + b(\cos \varphi + i \sin \varphi) + c \\ &= (a \cos 2\varphi + c) + ia \sin 2\varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

khi và chỉ khi $a \sin 2\varphi = 0, \forall \varphi$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$.

Vậy giá trị cần tìm là $a = b = 0$ và c là một số thực tùy ý.

Bài toán 3. Tìm môđun và argumen của số phức

Phương pháp: Nhìn chung các bài tập này có cách giải như sau:

Giả sử ta cần tìm một argumen của số phức z . Ta cần biến đổi sao cho z có dạng

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

- Với $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ ta có môđun của z là $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Và 1 argumen của } z \text{ là } \varphi \text{ thỏa } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Với $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì z có môđun là r và 1 argumen của z là φ
- Với $z = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$
- Với $z = r(\sin \varphi + i \cos \varphi) = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Cho số phức $z = 1 - \sin \varphi + i \cos \varphi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Tìm một argumen của số phức z .

Giải

$$\begin{aligned} z &= 1 - \sin \varphi + i \cos \varphi = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Do $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ nên $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) > 0$. Vậy, một argumen của z là $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

Ví dụ 2. Cho số phức z có môđun bằng 1 và φ là một argumen của z

a) Tìm một argumen của $\frac{\bar{z}}{z}$

b) Tìm một argumen của $\bar{z} + z$ nếu $\cos \varphi \neq 0$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$

a) Ta có

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos(-2\varphi) + i \sin(-2\varphi)$$

Vậy một argumen của z là -2φ

b) Ta có: $\bar{z} + z = 2 \cos \varphi$

- Nếu $\cos \varphi > 0$ thì $\bar{z} + z = 2 \cos \varphi = 2 \cos \varphi (\cos 0 + i \sin 0)$. Lúc đó 0 là một argumen của $\bar{z} + z$

- Nếu $\cos \varphi < 0$ thì $\bar{z} + z = -2 \cos \varphi \cdot (-1) = -2 \cos \varphi (\cos \pi + i \sin \pi)$. Lúc đó π là một argumen

Ví dụ 3. Tìm môđun và một argumen của các số phức sau:

- a) $z = 1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$; b) $z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$
 c) $z = 1 - \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$; d) $z = -1 - \sin \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6}$
 e) $z = -1 + \sin \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$.

Giải

$$a) z = 1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{8} \\ \varphi = \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

$$b) z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 2i \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ \varphi = -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$$c) z = 1 - \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} + 2i \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} \\ = 2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} \right).$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \sin \frac{\pi}{5} \\ \varphi = \frac{3\pi}{10} \end{cases}$$

$$d) z = -1 - \sin \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6} = -1 - \cos \frac{\pi}{6} + 2i \sin \frac{\pi}{6} \\ = -2 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \\ = 2 \cos \frac{\pi}{12} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{12} \\ \varphi = \frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } z &= -1 + \sin \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = -1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= -2 \sin^2 \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \left(-\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{6} + i \cos \frac{7\pi}{6} \right) \\
 &= \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = -\frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Tìm môđun và một argumen của các số phức sau:

$$\text{a) } z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i; \quad \text{b) } z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2};$$

$$\text{c) } z = 2\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}; \quad \text{d) } z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i.$$

Giải

Ta kí hiệu r và φ lần lượt là môđun và argumen của số phức z , ta có

$$\begin{aligned}
 \text{a) } z &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right) \\
 &= 2 \cos \frac{\pi}{8} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{8} \\ \varphi = -\frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } z &= 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 2 \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{8} \left(\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8} \right) \\
 &= 4 \sin \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} - i \sin \frac{3\pi}{8} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{8} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 4 \sin \frac{\pi}{8} \\ \varphi = -\frac{3\pi}{8}. \end{cases}$$

$$\text{c) } z = 2\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{3} \left(2\cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = 4\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 4\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{d) } z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i = \frac{2}{3} \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(-2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \left(\sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \\ \phi = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

Ví dụ 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2iz - 4 = 0$, z_1 có phần thực âm. Tính môđun và argumen của các số phức sau:

a) $w = z_1^2 \cdot z_2$;

b) $w = \frac{z_1}{z_2 - 2}$;

c) $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$;

d) $w = \overline{z_1} \cdot (2 - \overline{z_2})$.

Giải

Ta gọi r và φ lần lượt là môđun và argumen của số phức w .

Giải phương trình: $z^2 - 2iz - 4 = 0$ ta được 2 nghiệm là:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right), z_1 \text{ có phần thực âm và}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

a) Ta có: $z_1^2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$; $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

Suy ra:

$$w = z_1^2 \cdot z_2 = 4 \cdot 2 \cdot \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 8 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

Vậy w có môđun và một argumen là: $\begin{cases} r = 8 \\ \varphi = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

b) Ta có

$$z_2 - 2 = \sqrt{3} + i - 2 = 2 \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(-1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(-2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= 4 \sin \frac{\pi}{12} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
 w = \frac{z_1}{z_2 - 2} &= \frac{2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}{4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Vậy $w = \frac{z_1}{z_2 - 2}$ có môđun và argumen là $\begin{cases} r = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \\ \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

c) Ta có $z_2 - 2 = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ theo câu b) và

$$\begin{aligned}
 z_1 - 2 &= -\sqrt{3} + i - 2 = 2 \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(-1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2 \left(-2 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) &= 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \\
 &= 16 \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) \right] \\
 &= 8 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \left(\cos \frac{18\pi}{12} + i \sin \frac{18\pi}{12} \right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\
 &= 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Vậy $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$ có môđun và một argumen là: $\begin{cases} r = 4 \\ \varphi = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

Cách khác: Trong trường hợp này, ta có thể áp dụng công thức Vi-et:

$$z_1 + z_2 = 2i, \quad z_1 z_2 = -4.$$

Ta có:

$$w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) = z_1 z_2 - 2(z_1 + z_2) + 4 = -4 - 2.2i + 4 = -4i$$

$$= 4(0-i) = 4\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$d) w = \overline{z_1} \cdot (2 - \overline{z_2}) \Rightarrow \overline{w} = \overline{\overline{z_1} \cdot (2 - \overline{z_2})} = z_1 \cdot (2 - z_2) = -z_1 \cdot (z_2 - 2).$$

$$\begin{aligned} \text{Với } -z_1 &= -2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\text{và } z_2 - 2 = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overline{w} &= -z_1 \cdot (z_2 - 2) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right) \\ &= 8 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}\right)\right] = 8 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right) \\ \Rightarrow w &= 8 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12}\right) = 8 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } w = \overline{z_1} \cdot (2 - \overline{z_2}) \text{ có môđun và argumen là: } \begin{cases} r = 8 \sin \frac{\pi}{12} \\ \varphi = -\frac{5\pi}{12}. \end{cases}$$

Ví dụ 6. Tìm môđun và một argumen của số phức z thỏa mãn phương trình:

$$\frac{1+z^2}{1-z^2} = i.$$

Giải

$$\text{Ta có } \frac{1+z^2}{1-z^2} = i \Leftrightarrow 1+z^2 = i - iz^2 \Leftrightarrow (1+i)z^2 = -1+i \Leftrightarrow z^2 = \frac{-1+i}{1+i}$$

$$z^2 = \frac{-(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-(1+i^2-2i)}{1+1} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow |z| = 1. \text{ Đặt } z = \cos \varphi + i \sin \varphi \Rightarrow z^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

Ta có:

$$z^2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\text{Chọn } k=0,1 \text{ ta được } \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy có 2 số phức } z \text{ thỏa mãn } \frac{1+z^2}{1-z^2} = i \text{ là:}$$

z_1 có môđun $r=1$, một argumen là $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ và z_2 có môđun $r=1$, một argumen là $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Ví dụ 7. Trong các argumen của số phức $(1-\sqrt{3}i)^8$, tìm argumen có số đo dương nhỏ nhất.

(Trích Ebooktoan.com số 13 – 2013)

Giải

$$\text{Ta có } 1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

Theo công thức Moavơơ ta có: $z = 2^8\left(\cos\frac{-8\pi}{3} + i\sin\frac{-8\pi}{3}\right)$. Từ đó suy ra z có các họ argumen là:

$$-\frac{8\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ta thấy với } k=2 \text{ thì argumen dương nhỏ nhất của } z \text{ là } \frac{4\pi}{3}.$$

Ví dụ 8. Tìm argume âm lớn nhất của số phức $z = (1+i\sqrt{3})^{10}$.

Giải

$$z = (1+i\sqrt{3})^{10} = 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{10}$$

Áp dụng công thức Moavơơ, ta có:

$$z = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

Các argumen của z đều có dạng $\frac{4\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ta có $\frac{4\pi}{3} + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{2}{3}$ hay

$$k \in \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

Argumen âm lớn nhất của z tương ứng với $k = -1$

Vậy argumen cần tìm của z là $-\frac{2\pi}{3}$

Ví dụ 9. Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: $(z+i)^4 + 1 = i\sqrt{3}$.

(Trích Trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ – 2013)

Giải

$$\text{Ta có: } (z+i)^4 = -1+i\sqrt{3} \Leftrightarrow (z+i)^4 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$\text{Giả sử } z+i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (z+i)^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} r^4 = 2 \\ \cos 4\varphi = \cos\frac{2\pi}{3} \\ \sin 4\varphi = \sin\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Cho $k=0, \pm 1, -2$ ta nhận được các giá trị argumen tương ứng của số phức $z+i$ là

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_3 = -\frac{\pi}{3}, \varphi_4 = -\frac{5\pi}{6}$$

Từ đó phương trình đã cho có 4 nghiệm lần lượt là:

$$z+i = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ hay } z = \frac{\sqrt[4]{18}}{2} + \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - 1 \right) i$$

$$z+i = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ hay } z = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - 1 \right) i$$

$$z+i = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \text{ hay } z = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} + 1 \right) i$$

$$z+i = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) \text{ hay } z = -\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + 1 \right) i$$

Nhận xét: Dạng lượng giác luôn phát huy được ưu thế của mình khi xử lý các biểu thức lũy thừa bậc cao của số phức.

Ví dụ 10. Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - \left(2 \cos \frac{5\pi}{21} \right) z + 1 = 0$. Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho $z_1^n + z_2^n = 1$

Giải

Đặt $z^2 - \left(2 \cos \frac{5\pi}{21} \right) z + 1 = 0$ (1). Biệt thức của (1) là

$$\Delta' = \cos^2 \frac{5\pi}{21} - 1 = -\sin^2 \frac{5\pi}{21} = \left(i \sin^2 \frac{5\pi}{21} \right)^2.$$

Vậy (1) có các nghiệm là $z_1 = \cos \frac{5\pi}{21} - i \sin \frac{5\pi}{21}$ và $z_2 = \cos \frac{5\pi}{21} + i \sin \frac{5\pi}{21}$

$$\begin{aligned} z_1^n + z_2^n = 1 &\Leftrightarrow \left(\cos \frac{5\pi}{21} - i \sin \frac{5\pi}{21} \right)^n + \left(\cos \frac{5\pi}{21} + i \sin \frac{5\pi}{21} \right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{21} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{21} \right) \right]^n + \left(\cos \frac{5\pi}{21} + i \sin \frac{5\pi}{21} \right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \left(-\frac{n5\pi}{21} \right) - i \sin \left(-\frac{n5\pi}{21} \right) + \cos \frac{n5\pi}{21} + i \sin \frac{n5\pi}{21} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \left(-\frac{n5\pi}{21} \right) + \cos \frac{n5\pi}{21} = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{n5\pi}{21} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{n5\pi}{21} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{n5\pi}{21} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow n = \pm \frac{7}{5} + \frac{42k}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}) (*) \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nhỏ nhất nên từ (*) suy ra: $n=7$

Ví dụ 11. Tìm số phức z thỏa mãn: biết $z + \sqrt{2}i$ có một argument bằng một argument của $z + \sqrt{2}$ cộng với $\frac{\pi}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+1| + |z+i|$.

Giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó $z + \sqrt{2}i$ có một argument bằng argument của $z + \sqrt{2}$ cộng với $\frac{\pi}{4}$

nên $\frac{z + \sqrt{2}i}{z + \sqrt{2}} = r \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ với $r > 0$.

$$\frac{z + \sqrt{2}i}{z + \sqrt{2}} = \frac{a + (b + \sqrt{2})i}{a + \sqrt{2} + bi} = \frac{a(a + \sqrt{2}) + b(b + \sqrt{2})}{(a + \sqrt{2})^2 + b^2} + \frac{(a + \sqrt{2})(b + \sqrt{2}) - ab}{(a + \sqrt{2})^2 + b^2}i$$

$$\text{Suy ra } \frac{a(a + \sqrt{2}) + b(b + \sqrt{2})}{(a + \sqrt{2})^2 + b^2} = \frac{(a + \sqrt{2})(b + \sqrt{2}) - ab}{(a + \sqrt{2})^2 + b^2} - i > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a + \sqrt{2})^2 + b^2 \neq 0 \\ a + b + \sqrt{2} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= |z + 1| + |z + i| = |a + 1 + bi| + |a + (b + 1)i| \\ &= \sqrt{(a + 1)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{3 + 2a} + \sqrt{3 + 2b} \text{ do } (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta được:

$$T^2 \leq 2(6 + 2a + 2b) \leq 2(6 + 2\sqrt{a^2 + b^2}) = 20$$

Suy ra $T \leq 2\sqrt{5}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$

Vậy, giá trị lớn nhất của T là $2\sqrt{5}$, đạt khi $z = 1 + i$

II. Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Tính môđun và một argumen của số phức sau

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= \frac{5 - i}{2 - 3i}; & \text{b) } z &= \frac{18 + 8i}{4 - 9i}; \\ \text{c) } z &= \left(\frac{1 - 3i}{2 - i} \right)^5; & \text{c) } z &= \left(\frac{3\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 2i} \right)^3. \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} z &= \frac{5 - i}{2 - 3i} = \frac{(5 - i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{13 + 13i}{13} = 1 + i \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

b) Ta có

$$z = \frac{18 + 8i}{4 - 9i} = \frac{(18 + 8i)(4 + 9i)}{(4 - 9i)(4 + 9i)} = 2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 8 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1-3i}{2-i} \right)^5 = \left(\frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \right)^5 = \left(\frac{5-5i}{5} \right)^5 = (1-i)^5 \\ &= \left[\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right]^5 = \sqrt{2^5} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right]^5 \\ &= \sqrt{2^5} \left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right) \right] = 4\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 4\sqrt{2} \\ \varphi = -\frac{5\pi}{4} \end{cases}.$$

$$\text{d) } z = \left(\frac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i} \right)^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i} &= \frac{(3\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)} = \frac{9-2+(6\sqrt{3}+\sqrt{3})i}{3+4} \\ &= \frac{7+7\sqrt{3}i}{7} = 1+i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } z = \left(\frac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i} \right)^3 = \left[2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = 2^3 (\cos\pi + i \sin\pi)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 8 \\ \varphi = \pi \end{cases}.$$

Bài tập 2. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i\sqrt{3})z + |z| = 3$. Tìm mô-đun của số phức $w = 1 + z^5 + z^{10}$.

(Trích đề thi thử Người Thầy – 2013)

Giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})z + |z| &= 3 \Leftrightarrow (1+i\sqrt{3})(a+bi) + \sqrt{a^2+b^2} = 3 \\ \Leftrightarrow a - b\sqrt{3} + \sqrt{a^2+b^2} + (b+a\sqrt{3})i - 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b\sqrt{3} + \sqrt{a^2+b^2} = 3 \\ b + a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + \sqrt{4a^2} = 3 & (1) \\ b = -a\sqrt{3} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4a \leq 0 \\ 4a^2 = (3-4a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{3}{4} \\ a = \frac{1}{2} \vee a = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \text{ thay vào (2) ta có } b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó

$$\begin{aligned} w &= 1 + z^5 + z^{10} = 1 + \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |w| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$$

Bài tập 3. Tìm số phức z biết rằng $|z| = |2\bar{z} - \sqrt{3} + i|$ và $\frac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}$ có một argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$. (THPT Chuyên Đại học Vinh, lần 2 – 2013)

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i} &= \frac{1+i}{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} \cdot (1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i) = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$. Khi đó:

$$\frac{(1+i)z}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i} = \frac{r}{2} \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

Theo bài ra ta có: $\varphi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$. Suy ra $z = \frac{\sqrt{3}r}{2} + \frac{r}{2}i$

Từ giả thiết của bài toán ta có: $\left| \frac{\sqrt{3}r}{2} + \frac{r}{2}i \right| = |\sqrt{3}r - ri - \sqrt{3} + i|$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}r}{2} \right)^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 = 3(r-1)^2 + (r-1)^2 \Leftrightarrow r^2 = 4(r-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Từ đó ta có $z = \sqrt{3} + i$, $z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$.

Bài tập 4. Viết dạng lượng giác của số phức z biết $z^2 \cdot \bar{z}^2 = 16$ và $i \cdot \bar{z}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{6}$.

(THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội lần 3 – 2013)

Giải

Ta có $z^2 \cdot \bar{z}^2 = 16 \Leftrightarrow (z \cdot \bar{z})^2 = 16 \Leftrightarrow (|z|^2)^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 2$

Gọi φ là một argumen của z . Ta có $z = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Từ đó suy ra:

$$i \cdot \bar{z} = 2i(\cos \varphi - i \sin \varphi) = 2(\sin \varphi + i \cos \varphi) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)$$

Chọn φ sao cho $\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

Vậy z có dạng lượng giác là $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Bài tập 5. Tìm số phức z biết $z^2 + 2\bar{z}$ là số thực và $\bar{z} + \frac{1}{z}$ có một argumen là $-\frac{\pi}{3}$. (THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An lần 1 – 2013)

Giải

Vì $\bar{z} \cdot z + 1 > 0$ và $\bar{z} + \frac{1}{z} = \frac{\bar{z} \cdot z + 1}{z}$ có một argumen là $-\frac{\pi}{3}$ nên $\frac{1}{z}$ có một argumen là $-\frac{\pi}{3}$, suy ra z có một argumen là $\frac{\pi}{3}$.

$$\text{Gọi } z = r\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = a + bi \Rightarrow a = \frac{r}{2}, b = \frac{r\sqrt{3}}{2}, (r > 0)$$

Ta có $z^2 + 2\bar{z} = a^2 - b^2 + 2a + 2b(a-1)i$ là số thực khi và chỉ khi:

$$2b(a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ r=0 \end{cases}. \text{ Vậy } z = 1 + \sqrt{3}i.$$

Bài tập 6. Tìm số phức z sao cho $\frac{z-i}{z+i}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{2}$ và $|z+1| = |\bar{z}-i|$ (THPT Chuyên Vĩnh Phúc khối B, D, lần 5 – 2013)

Giải

$$\text{Đặt } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} + \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}i$$

$$\frac{z-i}{z+i} \text{ có một argumen bằng } \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} = 0 \\ \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } |z+1| = |\bar{z}-i| \Leftrightarrow |(x+1) + y| = |x - (y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x = y \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Bài tập 7. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 4 + 3i| = 1$, số phức nào có $|z|$ nhỏ nhất. Khi đó argumen của nó bằng bao nhiêu?

(Trích GSTT Group lần 4 – 2014)

Giải

$$\text{Đặt } z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow |z - 4 + 3i| = |(a - 4) + (b + 3)i| = \sqrt{(a - 4)^2 + (b + 3)^2}$$

$$|z - 4 + 3i| = 1 \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b + 3)^2 = 1 \Rightarrow 1 = a^2 + b^2 + 2(3b - 4a) + 25$$

Áp dụng Bunhia copski:

$$-(3b - 4a) \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(b^2 + a^2)} = 5\sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 1 \geq a^2 + b^2 - 10\sqrt{a^2 + b^2} + 25$$

$$\Rightarrow 1 \geq \sqrt{a^2 + b^2} - 5 \geq -1 \Rightarrow 6 \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq 4 \Rightarrow 6 \geq |z| \geq 4$$

$|z|$ nhỏ nhất khi $|z| = 4$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} -(3b - 4a) > 0 \\ \frac{b}{3} = \frac{a}{-4} \\ a^2 + b^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{5} \\ b = -\frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{16}{5} - \frac{12}{5}i = 4\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right)$$

$$z = 4(\cos \alpha + i \sin \alpha). \text{ Argumen của } z \text{ là: } -\arccos \frac{4}{5} + k2\pi.$$

Bài tập 8. Tìm số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2i| = 2\sqrt{3}$ và $(\sqrt{3} + i)\bar{z}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$. (Trích Trường THPT Chuyên ĐH Vinh, lần 3 – 2014)

Giải

$$\text{Đặt } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), r > 0.$$

$$\text{Suy ra } \bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)). \text{ Khi đó:}$$

$$(\sqrt{3} + i)\bar{z} = 2r\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\right)$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{\pi}{6} - \varphi = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}. \text{ Khi đó } z = \frac{\sqrt{3}r}{2} - \frac{r}{2}i.$$

$$\text{Suy ra } |\bar{z} + 2i| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}r}{2} + \left(2 + \frac{r}{2}\right)i\right| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3r^2}{4} + \left(2 + \frac{r}{2}\right)^2 = 12 \Leftrightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \text{ (vì } r > 0)$$

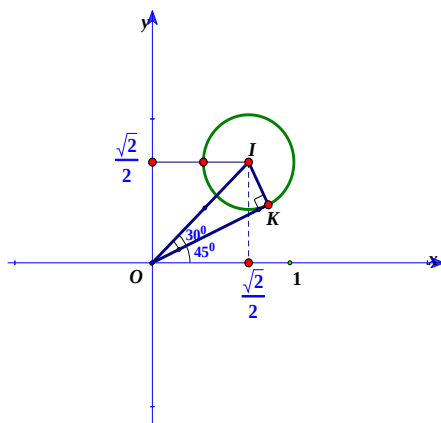
$$\text{Vậy } z = \sqrt{3} - i.$$

Bài tập 9. Xét số phức z thỏa điều kiện $|2z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 1$ (*)

a) Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa (*)

b) Trong các số phức z thỏa (*) tìm số số phức có argumen dương và nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



$$a) M(z) \in (C): \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$b) \text{ Kẻ tiếp tuyến OK với đường tròn. Dễ thấy } OI = 1 \text{ nên}$$

$$\sin \angle IOK = \frac{IK}{OI} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle IOK = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \angle KOx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow z = OK \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{Vậy } z = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

Bài tập 10. Tìm số phức z sao cho $\left| \frac{z-i}{z+3i} \right| = 1$ và $z+1$ có một argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ } \left| \frac{z-i}{z+3i} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -1 \end{cases} \text{ với } z = x + yi$$

Lúc đó: $z+1 = x+1-i$ (1). Vì $z+1$ có 1 argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$ nên $z+1$ có dạng

$$z+1 = r \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right], r > 0$$

$$\Leftrightarrow x+1-i = \frac{r}{2} (\sqrt{3}-i) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} x+1 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \\ -1 = \frac{-r}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}-1 \\ r = 2 \end{cases}$$

Vậy $z = 2\sqrt{3}-1-i$ là số phức cần tìm

Bài tập 11. Xác định tập hợp các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z sao cho số phức $\frac{z-2}{z+2}$ có một argument bằng $\frac{\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thì $\frac{z-2}{z+2} = \frac{x^2 + y^2 - 4}{(x+2)^2 + y^2} + \frac{4y}{(x+2)^2 + y^2} i$

Do $\frac{z-2}{z+2}$ có một acgument bằng $\frac{\pi}{3}$ nên ta có

$$\frac{x^2 + y^2 - 4}{(x+2)^2 + y^2} + \frac{4y}{(x+2)^2 + y^2} i = r \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), r > 0$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 4}{(x+2)^2 + y^2} = \frac{r}{2} & (1) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \frac{4y}{(x+2)^2 + y^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $y > 0$ và $\frac{4y}{(x+2)^2 + y^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

Tập hợp điểm $M(z)$ cần tìm là phần đường tròn tâm $I\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, bán kính $\frac{4}{\sqrt{3}}$ nằm phía trên trục thực ($y > 0$)

Bài toán 4. Áp dụng công thức Moavơ để tính căn bậc n của số phức

Phương pháp

1. Tính căn bậc hai của số phức w: Căn bậc hai của số phức z là số phức w thỏa $w^2 = z$

*Căn bậc hai của 0 bằng 0

* Với $z \neq 0, z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r > 0$

Đặt $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ thì

$$w^2 = z \Leftrightarrow R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = r \\ 2\theta = \varphi + k2\pi, \pi \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{r} \\ \theta = \frac{\varphi}{2} + k\pi, \pi \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

*Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có 2 căn bậc hai đó là $-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ và

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

TT có căn bậc n:

$$w^n = z \Leftrightarrow R^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \end{cases}$$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Giải

$$\text{Ta có } w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là một căn bậc hai của w , ta có:

$$z^2 = w \Leftrightarrow r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 2\varphi = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy w có hai căn bậc hai là: $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ và $z_2 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$.

Ví dụ 2. Tính căn bậc ba của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác: $w = -1 + i\sqrt{3}$.

Giải

Ta có: $w = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow w$ có môđun $R=2$ và một acgumen $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có: Môđun $r = \sqrt[3]{2}$ và một acgumen

$$\phi = \frac{\theta}{3} + \frac{k2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lấy $k=0,1,2$ thì ϕ có ba giá trị:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{9}, \phi_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}, \phi_3 = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}.$$

Vậy $w = -1 + i\sqrt{3}$ có 3 căn bậc ba là:

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right), z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Ví dụ 3. Tính căn bậc bốn của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác: $w = i$.

Giải

Ta có: $w = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ có môđun $R=1$ và một acgumen $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra căn bậc bốn của w là số phức z có: môđun $r=1$ và một acgumen

$$\phi = \frac{\theta}{4} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lấy $k=0,1,2,3$ ta có 4 giá trị của ϕ :

$$\phi_1 = \frac{\pi}{8}, \phi_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}, \phi_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}, \phi_4 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}.$$

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Tìm căn bậc hai của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác $w = (1+i)(\sqrt{3}+i)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $w = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Vậy w có 2 căn bậc hai là:

$$z_1 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{24} + \pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{29\pi}{24} + i\sin\frac{29\pi}{24}\right).$$

Bài tập 2. Tìm căn bậc ba của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

w có môđun $R=1$ và argumen $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có: môđun $r = \sqrt[3]{1} = 1$ và một argumen

$$\varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{k2\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Với $k = 0, 1, 2$ ta có ba giá trị của φ .

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{12}, \varphi_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}, \varphi_3 = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}.$$

Vậy $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ có 3 căn bậc 3 là:

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right), z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + i \sin\frac{7\pi}{12}, z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}.$$

Bài tập 3. Tính căn bậc bốn của $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}$ có:

$$\begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Lấy $k = 0, 1, 2, 3$ ta có 4 giá trị của φ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{7\pi}{24}; \quad \varphi_3 = \frac{7\pi}{24} + \pi = \frac{31\pi}{24}; \\ \varphi_2 &= \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{24}; \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{24} + \frac{3\pi}{2} = \frac{43\pi}{24}. \end{aligned}$$

Vậy $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ có 4 căn bậc 4 là:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{7\pi}{24} + i \sin\frac{7\pi}{24}, \quad z_2 = \cos\frac{19\pi}{24} + i \sin\frac{19\pi}{24} \\ z_3 &= \cos\frac{31\pi}{24} + i \sin\frac{31\pi}{24}, \quad z_4 = \cos\frac{43\pi}{24} + i \sin\frac{43\pi}{24}. \end{aligned}$$

Bài tập 4. Tính căn bậc năm của $w = i$.

Hướng dẫn giải

Căn bậc năm của số phức $w = i$ là số phức z thỏa mãn $z^5 = i$.

Vì $|z^5| = |i| = 1 \Leftrightarrow |z|^5 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Đặt $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, ta có

$$z^5 = i \Leftrightarrow (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Lấy $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ta được 5 giá trị của φ :

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{10}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{10}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}, \quad \varphi_5 = \frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}.$$

Vậy có 5 căn bậc năm của i là:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}, \quad z_2 = \cos \frac{5\pi}{10} + i \sin \frac{5\pi}{10}, \quad z_3 = \cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10},$$

$$z_4 = \cos \frac{13\pi}{10} + i \sin \frac{13\pi}{10}, \quad z_5 = \cos \frac{17\pi}{10} + i \sin \frac{17\pi}{10}.$$

Bài tập 5. a) Viết $z_0 = \sqrt{3} + i$ dưới dạng lượng giác.

b) Tính z_0^4 và suy ra các căn bậc bốn của $w = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) $z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

b) $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Các căn bậc 4 của $-8 + 8i\sqrt{3}$ là : $z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right), z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 9:

ỨNG DỤNG SỐ PHỨC

HUẾ, 04/04/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 9. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC.....	3
Bài toán 1. Sử dụng số phức vào giải hệ phương trình.....	3
Bài toán 2: Ứng dụng số phức vào chứng minh các công thức, đẳng thức lượng giác	10
Bài toán 3: Ứng dụng vào chứng minh bất đẳng thức	20
Bài toán 4. Ứng dụng giải toán khai triển hay tính tổng nhị thức Newton	23
Bài toán 5. Ứng dụng giải toán đa thức và phép chia đa thức.....	27

CHỦ ĐỀ 9. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC

Bài toán 1. Sử dụng số phức vào giải hệ phương trình

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(x; y) = g(x; y) & (1) \\ h(x; y) = k(x; y) & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) nhân i sau đó cộng (trừ) (1) vế theo vế ta được: $f(x; y) \pm h(x; y) \cdot i = g(x; y) \pm k(x; y) \cdot i$ (*)

Đặt $z = x + yi$, biểu diễn (*) thông qua các đại lượng $z, \bar{z}, |z|, \dots$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Giải

Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ hai nhân i ta được

$$2x^3 - 6xy^2 + i(6x^2y - 2y^3) = 5 + 5\sqrt{3}i \Leftrightarrow (x + yi)^3 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow z = x + yi \text{ là một căn bậc ba của số phức } 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Ta có:

$$5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \text{ có ba căn bậc ba là}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right), z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9}\right), z_2 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9}\right)$$

Vậy với $z = z_0, z = z_1, z = z_2$ ta được nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5} \sin \frac{\pi}{9} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{7\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5} \sin \frac{7\pi}{9} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{13\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5} \sin \frac{13\pi}{9} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 3x = 0 \\ y^3 - 3x^2y - 6xy - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x+1)^3 - 3y^2(x+1) = 1 \\ 3(x+1)^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ 2 nhân i ta được

$$(x+1)^3 - 3y^2(x+1) + i[3(x+1)^2y - y^3] = 1 + i$$

$$\Leftrightarrow (x+1+iy)^3 = 1+i \Rightarrow z = x+1+iy \text{ là một căn bậc 3 của } 1+i.$$

Ta có:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \text{ nên } 1+i \text{ có ba căn bậc ba là}$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{4} + i \sin \frac{17\pi}{4} \right)$$

Vậy với $z = z_0, z = z_1, z = z_2$ ta được nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt[6]{2} \cos \frac{\pi}{12} \\ y = \sqrt[6]{2} \sin \frac{\pi}{12} \end{cases}, \begin{cases} x = -1 + \sqrt[6]{2} \cos \frac{3\pi}{4} \\ y = \sqrt[6]{2} \sin \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \begin{cases} x = -1 + \sqrt[6]{2} \cos \frac{17\pi}{12} \\ y = \sqrt[6]{2} \sin \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 & (1) \\ y = \frac{x+3y}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Cách 1. Lấy (2) nhân i sau đó cộng với (1) ta được

$$x + yi + \frac{(3x-y) - (x+3y)i}{x^2+y^2} = 3 \Leftrightarrow x + yi + \frac{3(x-yi) - (x-yi)i}{x^2+y^2} = 3(*)$$

$$(*) \Leftrightarrow z + \frac{(3-i)\bar{z}}{|z|^2} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{(3-i)}{z} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2+i \\ z = 1-i \end{cases}$$

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Lúc đó:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + yi = 2+i \\ x + yi = 1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y) = (2; 1), (x, y) = (1; -1)$.

Cách 2. Ta thấy $x=0, y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình

▪ Nhân (1) với x , nhân (2) với y ta được
$$\begin{cases} x^2 + \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2} = 3x \\ y^2 - \frac{xy + 3y^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

trừ vế theo vế ta được $x^2 - y^2 + 3 = 3x$ (*)

▪ Nhân (1) với y , nhân (2) với x ta được
$$\begin{cases} xy + \frac{3xy - y^2}{x^2 + y^2} = 3y \\ xy - \frac{x^2 + 3xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

cộng vế theo vế ta được $2xy - 1 = 3y$ (*)

Ta được hệ
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3 = 3x \\ 2xy - 1 = 3y \end{cases}$$

Đáp số: $(x, y) = (2; 1), (x, y) = (1; -1)$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = x^2 - 2xy - y^2 & (1) \\ y^3 - 3x^2y + y - 1 = y^2 - 2xy - x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy (2) nhân i sau đó cộng với (1) ta được

$$\begin{aligned} (x^3 - 3xy^2 - x + 1) - (y^3 - 3x^2y + y - 1)i &= (x^2 - 2xy - y^2) - (y^2 - 2xy - x^2)i \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x(yi)^2 + 3x^2(yi) + (yi)^3 - (x + yi) + 1 + i &= (x^2 + 2xyi - y^2) - 2xy + x^2i - y^2i \\ \Leftrightarrow (x + yi)^3 - (x + yi) + i + 1 &= (x + yi)^2 + (x + yi)^2 i \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$. Lúc đó phương trình (*) trở thành

$$\begin{aligned} z^3 - (1 + i)z^2 - z + 1 + i &= 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1)(z - 1 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = 1 + i \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; 0)$; $(x; y) = (-1; 0)$; $(x; y) = (1; 1)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(1 - \frac{12}{3x + y} \right) = 2 \\ \sqrt{y} \left(1 + \frac{12}{3x + y} \right) = 6 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \neq -3x \end{cases}$. Đặt $u = \sqrt{3x}$, $v = \sqrt{y}$ ($u, v \geq 0$).

Hệ đã cho có dạng:
$$\begin{cases} u \left(1 - \frac{12}{u^2 + v^2} \right) = 2\sqrt{3} \\ v \left(1 + \frac{12}{u^2 + v^2} \right) = 6 \end{cases}$$
. Đặt $z = u + iv$. Ta có $\frac{1}{z} = \frac{u - vi}{u^2 + v^2}$.

Từ hệ đã cho ta có

$$\begin{aligned} u \left(1 - \frac{12}{u^2 + v^2} \right) + iv \left(1 + \frac{12}{u^2 + v^2} \right) &= 2\sqrt{3} + 6i \\ \Leftrightarrow u + iv - 12 \frac{u - iv}{u^2 + v^2} &= 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \frac{12}{z} = 2\sqrt{3} + 6i \\ \Leftrightarrow z^2 - 2(2 + \sqrt{3}i)z - 12 &= 0, (*) \end{aligned}$$

Giải phương trình (*), ta có $\Delta' = 6 + 6\sqrt{3}i = 3(\sqrt{3} + i)^2$ suy ra các nghiệm:

$$z = \sqrt{3} + 3 + (\sqrt{3} + 3)i, z = \sqrt{3} - 3 + (3 - \sqrt{3})i$$

Vì $u, v \geq 0$ nên ta có: $u = \sqrt{3} + 3, v = \sqrt{3} + 3$, suy ra nghiệm của hệ là:

$$(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3}).$$

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình trên tập số phức:

$$\begin{cases} x(x-y)(x-z) = 3 \\ y(y-x)(y-z) = 3 \\ z(z-x)(z-y) = 3 \end{cases}$$

(Đề thi học sinh giỏi Romania năm 2002)

Giải

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x-y)(x-z) = 3, (1) \\ y(y-x)(y-z) = 3, (2) \\ z(z-x)(z-y) = 3, (3) \end{cases}$$

Rõ ràng $x, y, z \neq 0$ và x, y, z đôi một khác nhau.

Từ (1) và (2) ta có $x(x-y)(x-z) = y(y-x)(y-z) \Rightarrow x(x-z) = -y(y-z)$

Hay $x^2 + y^2 = xz + yz$.

Tương tự hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xz + yz \\ y^2 + z^2 = yx + zx \\ z^2 + x^2 = zy + xy \end{cases} \quad (4)$$

Cộng vế với vế ta được $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$.

Kết hợp với (4) ta có: $x^2 = yz, y^2 = zx, z^2 = xy$. Suy ra $x^2 = y^2 = z^2 = xyz$.

Đặt $a = xyz$ thì từ $x^2 = y^2 = z^2 = xyz = a$ và x, y, z đôi một khác nhau nên

$$x = \sqrt[3]{a}, y = \varepsilon \sqrt[3]{a}, z = \varepsilon^2 \sqrt[3]{a} \text{ với } \varepsilon^3 = 1, 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Mà $x(x-y)(x-z) = 3$ nên $a(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = 3$.

Ta có $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 3$ nên $a = 1$

Vậy các số phức (x, y, z) cần tìm là các hoán vị của $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$.

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đây là hệ đẳng cấp bậc ba. tuy nhiên, nếu giải bằng phương pháp thông thường ta sẽ đi đến giải phương trình bậc ba: $\sqrt{3}t^3 + 3t^2 - 3\sqrt{3}t - 1 = 0$

Phương trình này không có nghiệm đặc biệt!

Xét số phức $z = x + iy$. Vì $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, nên từ hệ đã cho ta có

$$z^3 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \text{ tương tự cách làm ở chương 1, ta tìm được 3 giá trị của } z \text{ là:}$$

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$

Từ đó suy hệ đã cho có 3 nghiệm là:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos \frac{2\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin \frac{2\pi}{9} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos \frac{8\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin \frac{8\pi}{9} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos \frac{14\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin \frac{14\pi}{9} \end{cases}$$

Bài tập 2. Giải hệ phương trình trong tập số thực:
$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ x^3y - y^3x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Xét số phức $z = x + iy$.

Vì $z^4 = -6x^2y^2 + y^4 + 4i(x^3y - y^3x)$, nên từ hệ đã cho suy ra:

$$z^4 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (*)$$

Các số phức thỏa mãn (*):

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right) \\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}\right)$$

Vậy các nghiệm cần tìm của hệ là:

$$\begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{\pi}{24} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{13\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{13\pi}{24} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{25\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{25\pi}{24} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{37\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{37\pi}{24} \end{cases}$$

Bài tập 3. Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = -1 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $z = x + iy$. Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$.

Vì hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau, nên hệ đã cho tương đương với:

$$x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2}\right) = 7 - i$$

$$\Leftrightarrow x + iy + 16\frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 11i\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = 7 - i$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{16 - 11i}{z} = 7 - i \Leftrightarrow z^2 - (7 - i)z + 16 - 11i = 0$$

Phương trình $z^2 - (7-i)z + 16 - 11i = 0$ có hai nghiệm $z = 2 - 3i, z = 5 + 2i$ nên hệ đã cho có các nghiệm $(x; y) = (2; -3)$ hoặc $(x; y) = (5; 2)$.

Chú ý: Muốn giải được các hệ phương trình bằng phương pháp sử dụng số phức, cần nhớ một công thức cơ bản của số phức, đặc biệt là với mỗi số phức $z = x + iy$ thì ta có $x^2 + y^2$ là bình phương modul

$$\text{và } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Bài tập 4. Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sqrt{10x} \left(1 + \frac{3}{5x+y} \right) = 3 \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{3}{5x+y} \right) = -1 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$.

Bài hệ này không có ngay dạng giống ví dụ trên, tuy nhiên với mục đích chuyển mẫu số về dạng bình phương modul của số phức, chỉ cần đặt $u = \sqrt{5x}, v = \sqrt{y}$ với $u, v > 0$.

Hệ đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{3}{u^2 + v^2} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ v \left(1 - \frac{3}{u^2 + v^2} \right) = -1 \end{cases}$$

Đặt $z = u + iv$. Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$.

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} u \left(1 + \frac{3}{u^2 + v^2} \right) + iv \left(1 - \frac{3}{u^2 + v^2} \right) &= \frac{3}{\sqrt{2}} - i \\ \Leftrightarrow u + iv + 3 \frac{u - iv}{u^2 + v^2} &= \frac{3}{\sqrt{2}} - i \Leftrightarrow z + \frac{3}{z} = \frac{3\sqrt{2} - 2i}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 - (3\sqrt{2} - 2i)z + 6 &= 0, (*) \end{aligned}$$

Giải phương trình (*), ta có $\Delta' = -34 - 12\sqrt{2}i = (\sqrt{2} - 6i)^2$ suy ra các nghiệm là $z = \sqrt{2} - 2i, z = \frac{\sqrt{2} + 2i}{2}$.

Vì $u, v > 0$ nên $z = \frac{\sqrt{2} + 2i}{2}$ do đó $u = \frac{\sqrt{2}}{2}, v = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}, y = 1$.

Vậy nghiệm cần tìm là $(x; y) = \left(\frac{1}{10}; 1 \right)$.

Bài tập 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 - 4x^3 - 3xy^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2x^2y - 3x^2y + 2xy^3 - 3y^3 + (2x - 1)^2 = 1 + 2y - 4y^2 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 3x(x^2 + y^2) + 2(x - 2y) = 0 \\ 2xy(x^2 + y^2) - 3y(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) - 2(2x + y) = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình

$$\text{Nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ thì hệ đã cho viết thành } \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 \cdot \frac{x-2y}{x^2+y^2} = 0 \\ 2xy - 3y + 4 - 2 \cdot \frac{2x+y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Suy ra:

$$x^2 - y^2 - 3x + 2 \cdot \frac{x-2y}{x^2+y^2} + i \left[2xy - 3y + 4 - 2 \cdot \frac{2x+y}{x^2+y^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2 - 3(x+yi) + 2 \cdot \frac{x-iy}{x^2+y^2} - 4 \cdot \frac{y+ix}{x^2+y^2} + 4i = 0$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}, \quad \frac{y+ix}{x^2+y^2} = \frac{i}{z} \text{ ta có phương trình}$$

$$z^2 - 3z + \frac{2}{z} - \frac{4i}{z} + 4i = 0 \Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 4iz + 2 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2z + 4i - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 3 - i \\ z = -1 + i \end{cases}$$

$$\text{Với } z = 1 \text{ ta được nghiệm của hệ là } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } z = 3 - i \text{ ta được nghiệm của hệ là } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } z = -1 + i \text{ ta được nghiệm của hệ là } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Bài tập 6. Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

(Đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 1996)

Hướng dẫn giải

Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$.

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}, (u, v > 0).$$

$$\text{Hệ đã cho có dạng: } \begin{cases} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } z = u + iv.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{z} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}.$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \right) z + 1 = 0, (*)$$

Giải (*): Vì $\Delta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \right)^2 - 4 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}} + 2\sqrt{2}i \right)^2$ nên các nghiệm:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i + \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \right)i$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i - \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2} \right)i$$

Ta có nghiệm u, v và do đó nghiệm của hệ là:

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \right) \& y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \right) \text{ hoặc } x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}} \right) \& y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2} \right)$$

Bài toán 2: Ứng dụng số phức vào chứng minh các công thức, đẳng thức lượng giác

Phương pháp

Cho dạng lượng giác số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Ta có các công thức sau:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cos(\varphi_1 + \varphi_2)]; \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Công thức Moa-vơ: $z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$

Nếu $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$; với $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Lúc đó $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$$

Giải

Đặt $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Ta có:

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot i\sin\alpha + 3\cos\alpha \cdot (i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3i(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) - i\sin^3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + i(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } z^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$$

Nhận xét: Ta có bài toán tổng quát sau: Biểu diễn $\cos nx$; $\sin nx$ theo các lũy thừa của $\cos x$; $\sin x$ với n là số nguyên dương bất kỳ.

Áp dụng công thức Moivre ta có $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

Mặt khác, theo công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(\cos x + i \sin x)^n = C_n^0 \cos^n x + i C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x + i^2 C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + i^3 C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots + i^{n-1} C_n^{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + i^n C_n^n \sin^n x$$

Từ đó suy ra:

$$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots + M$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots + N$$

Trong đó:

$$M = \begin{cases} (-1)^m \sin^{2m} x, (n=2m) \\ (-1)^m C_{2m+1}^{2m} \cos x \sin^{2m} x, (n=2m+1) \end{cases}, m \in \mathbb{Z}^+$$

$$N = \begin{cases} (-1)^{m-1} C_{2m}^{2m-1} \cos x \sin^{2m-1} x, (n=2m) \\ (-1)^m \sin^{2m+1} x, (n=2m+1) \end{cases}, m \in \mathbb{Z}^+$$

Cụ thể: Với $n=4$ ta có:

$$\cos 4x = C_4^0 \cos^4 x - C_4^2 \cos^2 x \sin^2 x + C_4^4 \sin^4 x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$\sin 4x = C_4^1 \cos^3 x \sin x - C_4^3 \cos x \sin^3 x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng:

$$a) \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}; \quad b) \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{14}.$$

Giải

Xét $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$. Ta có

$$z + z^3 + z^5 = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + i \left(\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} \right)$$

Mặt khác:

$$z + z^3 + z^5 = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{z^2 - 1} = \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{\left(1 - \cos \frac{\pi}{7}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{14}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{14}.$$

Ví dụ 3. Cho $\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\sin(a+b)$.

Giải

Đặt $z_1 = \cos a + i \sin a$, $z_2 = \cos b + i \sin b$. Khi đó:

$$z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Mà $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1, z_2 \overline{z_2} = |z_2|^2 = 1$ nên $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$,

suy ra:

$$z_1 z_2 = \frac{z_1 + z_2}{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = \frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

Ta lại có $z_1 \cdot z_2 = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$ nên $\sin(a+b) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Ta cũng có kết quả $\cos(a+b) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Tính tổng với $n \in \mathbb{Z}^+$ và $a \neq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$:

$$A = \cos x + \cos(x+a) + \cos(x+2a) + \dots + \cos(x+na)$$

$$B = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \dots + \sin(x+na)$$

Giải

Đặt $z = \cos x + i \sin x, w = \cos a + i \sin a$. Theo công thức nhân và cộng thức Moivre ta có:

$$zw^k = (\cos x + i \sin x)(\cos a + i \sin a)^k$$

$$zw^k = (\cos x + i \sin x)(\cos ka + i \sin ka) = \cos(x+ka) + i \sin(x+ka).$$

$$\text{Xét } A + iB = (\cos x + i \sin x) + [\cos(x+a) + i \sin(x+a)] + [\cos(x+2a) + i \sin(x+2a)] + \dots + [\cos(x+na) + i \sin(x+na)]$$

$$= z + zw + zw^2 + \dots + zw^n = z \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} \quad (\text{Vì } a \neq 2k\pi \text{ nên } w \neq 1).$$

$$\text{Vậy } A + iB = z \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} = (\cos x + i \sin x) \frac{1 - \cos(n+1)a - i \sin(n+1)a}{1 - \cos a - i \sin a}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\cos x + i \sin x) \frac{\sin \frac{n+1}{2} a \left(\sin \frac{n+1}{2} a - i \cos \frac{n+1}{2} a \right)}{\sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} - i \cos \frac{a}{2} \right)} \\
 &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left(\sin \frac{n+1}{2} a - i \cos \frac{n+1}{2} a \right) \left(\sin \frac{a}{2} + i \cos \frac{a}{2} \right) (\cos x + i \sin x) \\
 &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right) (\cos x + i \sin x) \\
 &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left[\cos \left(\frac{na}{2} + x \right) + i \sin \left(\frac{na}{2} + x \right) \right]
 \end{aligned}$$

Xét phần thực và phần ảo của hai vế ta được:

$$A = \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \cos \left(\frac{na}{2} + x \right); B = \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \sin \left(\frac{na}{2} + x \right)$$

Nhận xét: Từ hai loại công thức trên, xét các trường hợp riêng:

a) Nếu $x = 0$ thì suy ra:

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad 1 + \cos a + \cos 2a + \dots + \cos na &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \cos \frac{na}{2} \\
 \blacksquare \quad \sin a + \sin 2a + \dots + \sin 3a + \dots + \sin na &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \sin \frac{na}{2}
 \end{aligned}$$

b) Nếu $x = 2a$ thì ta có:

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad \cos a + \cos 3a + \cos 5a + \dots + \cos (2n+1)a &= \frac{\sin 2(n+1)a}{2 \sin a} \\
 \blacksquare \quad \sin a + \sin 3a + \sin 5a + \dots + \sin (2n+1)a &= \frac{\sin^2 (n+1)a}{\sin a}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Chứng minh các công thức:

$$a) \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \quad b) \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \cos 54^\circ &= \sin 36^\circ \Leftrightarrow \cos (3 \cdot 18^\circ) = \sin (2 \cdot 18^\circ) \\
 \Leftrightarrow 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ &= 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \\
 \Leftrightarrow 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin^2 18^\circ - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

Do đó $\sin 18^\circ$ là nghiệm dương của phương trình $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Vậy $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ suy ra $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Nhận xét: Áp dụng công thức $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ta tính được biểu thức

$$\sin 2^\circ \sin 18^\circ \sin 22^\circ \sin 38^\circ \sin 42^\circ \sin 58^\circ \sin 62^\circ \sin 78^\circ \sin 82^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

Để làm được bài toán này trước hết ta chứng minh công thức sau:

$$\sin a \sin(60^\circ - a) \sin(60^\circ + a) = \frac{1}{4} \sin 3a.$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} & \sin a \sin(60^\circ - a) \sin(60^\circ + a) \\ &= \sin a \left(\sin 60^\circ \cos a - \sin a \cos 60^\circ \right) \left(\sin 60^\circ \cos a + \sin a \cos 60^\circ \right) \\ &= \sin a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos a - \frac{1}{2} \sin a \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos a + \frac{1}{2} \sin a \right) \\ &= \sin a \left(\frac{3}{4} \cos^2 a - \frac{1}{4} \sin^2 a \right) = \frac{3}{4} \sin a \left[3(1 - \sin^2 a) - \sin^2 a \right] = \frac{1}{4} \sin 3a. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức $\sin a \sin(60^\circ - a) \sin(60^\circ + a) = \frac{1}{4} \sin 3a$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 2^\circ \sin 18^\circ \sin 22^\circ \sin 38^\circ \sin 42^\circ \sin 58^\circ \sin 62^\circ \sin 78^\circ \sin 82^\circ = \\ &= \left(\sin 2^\circ \sin 58^\circ \sin 62^\circ \right) \left(\sin 18^\circ \sin 42^\circ \sin 78^\circ \right) \left(\sin 22^\circ \sin 38^\circ \sin 82^\circ \right) \\ &= \frac{1}{64} \left(\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ \right) = \frac{1}{256} \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2}$.

Giải

Đặt $z = \cos x + i \sin x$ thì $\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $\cos 2x = \frac{z^4 + 1}{2z^2}$, $\cos 3x = \frac{z^6 + 1}{2z^3}$

Phương trình đã cho trở thành $\frac{z^2 + 1}{2z} - \frac{z^4 + 1}{2z^2} + \frac{z^6 + 1}{2z^3} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \quad (*)$$

Vì $z = -1$ không là nghiệm nên với $z \neq -1$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow (z^7 + 1) = 0$$

Hay $z^7 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$ nên $z = \cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{7} \right)$ với $k = \overline{0;6}$. Vì $z \neq -1$ nên không nhận giá trị $k=3$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là
$$x = \frac{\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{3\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{5\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{9\pi}{7} + m2\pi,$$
$$x = \frac{11\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{13\pi}{7} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm cần tìm của hệ đã cho $(x; y) = (2; 1)$ hoặc $(x; y) = (1; -1)$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng $\sin^3 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Đặt $z = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}, \sin \frac{\pi}{10} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Khi đó:

$$\sin^3 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{10} = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^3 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 = -\frac{3}{8} \left[z^2 + \bar{z}^2 + i(z - \bar{z}) - 1 \right] + \frac{1}{8} (1).$$

Mặt khác $z^5 = \cos \frac{5\pi}{10} + i \sin \frac{5\pi}{10} = i \Rightarrow z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$ (do $z \neq 1$),

nhưng $z^4 = i\bar{z}; iz^3 = -\bar{z}$ nên suy ra $z^2 + \bar{z}^2 + i(z - \bar{z}) - 1 = 0, (2).$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{\cos a + \cos b + \cos c}{\cos(a + b + c)} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sin(a + b + c)} = m$$

Chứng minh rằng $\cos(a + b) + \cos(b + c) + \cos(c + a) = m$.

(Đề nghị IMO năm 1989)

Giải

Đặt $x = \cos a + i \sin a, y = \cos b + i \sin b, z = \cos c + i \sin c$.

Ta có $x + y + z = \cos a + \cos b + \cos c + i(\sin a + \sin b + \sin c)$

$$= m \cos(a + b + c) + i m \sin(a + b + c) = mxyz. \text{ Do đó } x + y + z = mxyz \text{ nên } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = m.$$

Vì $|x| = |y| = |z| = 1$ nên $x^{-1} = \bar{x}, y^{-1} = \bar{y}, z^{-1} = \bar{z}$.

$$\text{Vậy } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = m \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot \bar{x} = m \Leftrightarrow \cos(a + b) + \cos(b + c) + \cos(c + a)$$

$$-i[\sin(a + b) + \sin(b + c) + \sin(c + a)] = m$$

Từ đó ta có $\cos(a + b) + \cos(b + c) + \cos(c + a) = m$.

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Chứng minh rằng:

$$a) \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}; \quad b) \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{3\pi}{14}.$$

Hướng dẫn giải

Xét $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$, ta có $z^7 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, nên z là nghiệm khác -1 của phương trình $z^7 + 1 = 0$

$z^7 + 1 = 0$. Ta có:

$$z^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \Rightarrow (z - z^2 + z^3)(1 - z^3) = 1$$

$$+) 1 - z^3 = 1 - \cos \frac{3\pi}{7} - i \sin \frac{3\pi}{7} = 2 \sin \frac{3\pi}{14} \left(\sin \frac{3\pi}{14} - i \sin \frac{3\pi}{14} \right)$$

$$\text{nên } \frac{1}{1 - z^3} = \frac{1}{2 \sin \frac{3\pi}{14}} \left(\sin \frac{3\pi}{14} + i \cos \frac{3\pi}{14} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \cot \frac{3\pi}{14}$$

$$+) z - z^2 + z^3 = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + i \left(\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} \right)$$

Do đó xét phần thực của đẳng thức $z - z^2 + z^3 = \frac{1}{1 - z^3}$ ta suy ra được:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{3\pi}{14}.$$

Bài tập 2. Hãy biểu diễn $\tan 5x$ qua $\tan x$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5$

Sử dụng khai triển nhị thức Niu-ton cho vế phải và tách phần thực và phần ảo ta có

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$

$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$$

Từ đó suy ra:

$$\tan 5x = \frac{5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10 \tan^2 x + 5 \tan^4 x}.$$

Bài tập 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $\sin a + \sin b + \sin c = 0$ và

$\cos a + \cos b + \cos c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0 \quad \text{và} \quad \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0.$$

Giải

Đặt $z_1 = \cos a + i \sin a; z_2 = \cos b + i \sin b; z_3 = \cos c + i \sin c$, ta có:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ nên } \frac{1}{z_k} = \overline{z_k} \quad (k=1;2;3).$$

$$\begin{aligned} \text{Vì thế: } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \\ &= 0^2 - 2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1 z_2 z_3 (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) \\ &= -2z_1 z_2 z_3 \overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + i(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) = 0$$

Từ đó ta suy ra đều phải chứng minh.

Bài tập 4. Giải phương trình $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\cos x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình.

Đặt $z = \cos x + i \sin x$ với $x \in [0; 2\pi)$.

Ta có

$$z \neq \pm 1, z^{-1} = \cos x - i \sin x,$$

$$2 \cos x = z + z^{-1}, \quad 2 \cos nx = z^n + z^{-n}$$

Vậy phương trình đã cho trở thành:

$$z + \frac{1}{z} + z^3 + \frac{1}{z^3} + z^5 + \frac{1}{z^5} + z^7 + \frac{1}{z^7} + z^9 + \frac{1}{z^9} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{18} = z^9 \Leftrightarrow z^{20} - 1 = z^{11} - z^9$$

$$\Leftrightarrow (z^{11} + 1)(z^9 - 1) = 0 \Rightarrow z^{11} - 1, z^9 = 1$$

▪ Nếu $z^9 = 1$ thì $z^9 = \cos 0 + i \sin 0$ nên $z = \cos \frac{k2\pi}{9} + i \sin \frac{k2\pi}{9}, k = \overline{0; 8}$.

Vì $x \in [0; 2\pi)$ và $z \neq \pm 1$ nên $x = \frac{k2\pi}{9}, k = \overline{1; 8}$.

Do đó nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{k2\pi}{9} + 2m\pi (k = \overline{1; 8}), m \in \mathbb{Z}$.

▪ Nếu $z^{11} = -1$ thì $z^{11} = \cos \pi + i \sin \pi$ nên:

$$z = \cos \frac{\pi + k2\pi}{11} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{11}, k = \overline{0; 10}.$$

Vì $x \in [0; 2\pi)$ và $z \neq \pm 1$ nên $x = \frac{\pi + k2\pi}{11}, k = \overline{0; 9}$.

Suy ra nghiệm cần tìm là $x = \frac{\pi + k2\pi}{11} + 2m\pi (k = \overline{0; 9}), m \in \mathbb{Z}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = \frac{k2\pi}{9} + 2m\pi (k = \overline{1; 8}), m \in \mathbb{Z}$ và

$$x = \frac{\pi + k2\pi}{11} + 2m\pi (k = \overline{0; 9}), m \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

Chứng minh rằng:

$$a) \cos 3a + \cos 3b + \cos 3c = 3 \cos(a + b + c); \quad \sin 3a + \sin 3b + \sin 3c = 3 \sin(a + b + c)$$

$$b) \cos 5a + \cos 5b + \cos 5c = \sin 5a + \sin 5b + \sin 5c = 0$$

Giải

Đặt $x = \cos a + i \sin a, y = \cos b + i \sin b, z = \cos c + i \sin c$.

Suy ra $x + y + z = \cos a + \cos b + \cos c + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0$

a) Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ nên lượng giác:

$$(\cos a + i \sin a)^3 + (\cos b + i \sin b)^3 + (\cos c + i \sin c)^3$$

$$= 3(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3a + \cos 3b + \cos 3c + i(\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c)$$

$$= 3[\cos(a + b + c) + i \sin(a + b + c)]$$

Từ đó ta được: $\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c = 3\cos(a+b+c)$ và $\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c = 3\sin(a+b+c)$

b) Với $x+y+z=0$ thì $2(x^5+y^5+z^5)=5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Mặt khác, từ $|x|=|y|=|z|=1$ suy ra $x^{-1}=\bar{x}, y^{-1}=\bar{y}, z^{-1}=\bar{z}$.

Vì thế:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)^2 - 2xyz(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}) = (x+y+z)^2 - 2xyz\overline{(x+y+z)} = 0 \end{aligned}$$

Do đó $x^5+y^5+z^5=0$

$$\Leftrightarrow (\cos a + i\sin a)^5 + (\cos b + i\sin b)^5 + (\cos c + i\sin c)^5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5a + \cos 5b + \cos 5c + i(\sin 5a + \sin 5b + \sin 5c) = 0$$

Vậy nên $\cos 5a + \cos 5b + \cos 5c = \sin 5a + \sin 5b + \sin 5c = 0$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\cos 6^\circ} + \frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} = \frac{1}{\sin 12^\circ}$.

Giải

Xét số phức $z = \cos 6^\circ + i\sin 6^\circ$, có $z^{15} = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i$.

$$\text{Ta có } \cos 6^\circ = \frac{z^2+1}{2z}, \sin 12^\circ = \frac{z^4-1}{2iz^2}, \sin 24^\circ = \frac{z^8-1}{2iz^4}, \sin 48^\circ = \frac{z^{16}-1}{2iz^8}$$

Đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2iz^2}{z^4-1} - \frac{2iz^4}{z^8-1} - \frac{2iz^8}{z^{16}-1} = 0$$

Rút gọn và chú ý $z \neq 0$ ta có $z^{16}-1-iz(z^{14}+1)=0$.

$$\text{Hay: } z^{15}z-1-iz^{15}-iz=0 \Leftrightarrow iz-1-i^2-iz=0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 7. Giả sử α và β là nghiệm của phương trình $x^2-2x+2=0$ và $\cot \theta = y+1$. Chứng minh

$$\frac{(y+\alpha)^n - (y+\beta)^n}{\alpha-\beta} = \frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta}$$

Giải

Ta có $x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \pm i$. Không mất tính tổng quát, lấy $\alpha=1+i, \beta=1-i$. Theo giả thiết $\cot \theta = y+1 \Rightarrow y = \cot \theta - 1$.

$$\text{Lúc đó: } (y+\alpha)^n = (\cot \theta - 1 + 1 + i)^n = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + i \right)^n = \frac{1}{\sin^n \theta} (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Tương tự:

$$(y+\beta)^n = (\cot \theta - 1 + 1 - i)^n = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - i \right)^n = \frac{1}{\sin^n \theta} (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$\text{Do đó } (y+\alpha)^n - (y+\beta)^n = \frac{1}{\sin^n \theta} \cdot 2i \sin n\theta. \text{ Mặt khác: } \alpha - \beta = 2i$$

Từ đó ta có được : $\frac{(y + \alpha)^n - (y + \beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta}$

Bài toán 3: Ứng dụng vào chứng minh bất đẳng thức

Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Lúc đó môđun của số phức $z = \sqrt{a^2 + b^2}$

Cho các số phức $z_1; z_2; z_3$. Ta có các bất đẳng thức thường dùng sau :

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|; |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta luôn có :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Xét $z_1 = (a+c) + bi; z_2 = (a-c) + bi$.

Ta có $|z_1| = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}; |z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$

Mặt khác : $z_1 + z_2 = 2a + 2bi \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{4(a^2 + b^2)} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Áp dụng : $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ ta được

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi α, β ta có :

$$\sqrt{\cos^4 \alpha + \cos^4 \beta} + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \geq \sqrt{2}$$

Giải

Xét $z_1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta i; z_2 = \sin^2 \alpha; z_3 = \sin^2 \beta i$

Ta có : $|z_1| = \sqrt{\cos^4 \alpha + \cos^4 \beta}; |z_2| = \sin^2 \alpha; |z_3| = \sin^2 \beta$

$z_1 + z_2 + z_3 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta i + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta i = 1 + i \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{2}$

Áp dụng : $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$ ta được

$$\sqrt{\cos^4 \alpha + \cos^4 \beta} + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \geq \sqrt{2}$$

Ví dụ 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ac = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} \geq \sqrt{3} (*)$$

Giải

$$\text{bñt } (*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{c}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2} \geq \sqrt{3}$$

$$\text{Xét } z_1 = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b}i; \quad z_2 = \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c}i; \quad z_3 = \frac{1}{c} + \frac{\sqrt{2}}{a}i.$$

$$\text{Ta có: } |z_1| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^2}; \quad |z_2| = \sqrt{\frac{1}{b^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{c}\right)^2}; \quad |z_3| = \sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2}$$

$$\text{Mặt khác: } z_1 + z_2 + z_3 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)i$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}$$

$$\text{Theo giả thiết: } ab + bc + ac = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \text{ Do đó: } |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{3}$$

Áp dụng: $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$ ta được

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} \geq \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4. Cho a, b, c, d là bốn số thực thỏa mãn điều kiện:

$$a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b); \quad c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d).$$

Chứng minh rằng: $(a - c)^2 + (b - d)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6$.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1; \quad (c - 6)^2 + (d - 6)^2 = 36.$$

$$\text{Xét } z_1 = 1 - a + (1 - b)i; \quad z_2 = c - 6 + (d - 6)i; \quad z_3 = 5 + 5i$$

$$\text{Ta có: } z_1 + z_2 + z_3 = (c - a) + (d - b)i$$

$$\text{Vì } |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3| \text{ nên}$$

$$1 + 6 + 5\sqrt{2} \geq \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6$$

II. Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq 2\sqrt{5}$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x + 1)^2 + 2^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + 2^2} \geq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Xét số phức: } z_1 = x + 1 + 2i; \quad z_2 = 1 - x + 2i$$

$$\text{Lúc đó: } z_1 + z_2 = 2 + 4i$$

$$\text{Vì } |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + 2^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + 2^2} \geq \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \text{ (NPCM)}$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng với $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(-x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Xét $z_1 = x + \frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = -x - \frac{z}{2} + \frac{z\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_1 + z_2 = \frac{1}{2}(y - z) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)i$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(-x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Vì
$$\geq \sqrt{\left[\frac{1}{2}(y - z)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)\right]^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có :

$$\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2} + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{5}x + \frac{32}{5}} + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 4x + 10} + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}} \geq 4 + 2\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{32}{5}x + \frac{64}{5}} + \sqrt{x^2 - 8x + 20} + \sqrt{x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}} \geq 4\sqrt{2} + 4$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(4-x)^2 + 2^2} \right] + \left[\sqrt{\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} \right]$$

$$\geq 4\sqrt{2} + 4$$

Xét

$$z_1 = x + 2i; z_2 = 4 - x + 2i; z_3 = x - \frac{16}{5} + 8i; z_4 = \frac{4}{5} - x + \frac{8}{5}i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 4 + 4i; z_3 + z_4 = 4 + 4i$$

Ta luôn có :

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \geq |z_1 + z_2| + |z_3 + z_4|$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(4-x)^2 + 2^2} \right] + \left[\sqrt{\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} \right]$$

$$\geq \sqrt{4^2 + 4^2} + \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 4\sqrt{2} + 4 \text{ (NPCM)}$$

Bài tập 4. Chứng minh rằng với $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$$

Xét $z_1 = x + \frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = y + \frac{z}{2} + \frac{z\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = z + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2}i$

Ta có :

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{3}{2}(x+y+z) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z)i$$

Vì $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$ nên

$$\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\frac{9}{4}(x+y+z)^2 + \frac{3}{4}(x+y+z)^2} = \sqrt{3}(x+y+z).$$

Bài toán 4. Ứng dụng giải toán khai triển hay tính tổng nhị thức Niuton

Phương pháp

Ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Niuton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ta lưu ý rằng : $\forall m \in \mathbb{N}^*$ thì $i^{4m} = 1$; $i^{4m+1} = i$; $i^{4m+2} = -1$; $i^{4m+3} = -i$

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Tính tổng

a) $S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

b) $S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + \dots + C_n^n i^n \\ &= (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots) \quad (1) \end{aligned}$$

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} + i \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4} \quad (2)$$

Töø (1) vaø (2) suy ra: $S_1 = \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4}$; $S_2 = \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4}$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100} = -2^{50}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}(1+i)^{100} &= C_{100}^0 + C_{100}^1 i + C_{100}^2 i^2 + \dots + C_{100}^{100} i^{100} \\ &= \left(C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100} \right) + \left(C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - \dots - C_{100}^{99} \right) i\end{aligned}$$

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{100} = (2i)^{50} = -2^{50}$$

$$\text{Vậy: } C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100} = -2^{50}$$

Ví dụ 3. Tính các tổng sau

$$A = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14};$$

$$B = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15}.$$

Giải

Xét khai triển

$$(1+x)^{15} = C_{15}^0 + C_{15}^1 x + C_{15}^2 x^2 + C_{15}^3 x^3 + \dots + C_{15}^{12} x^{12} + C_{15}^{13} x^{13} + C_{15}^{14} x^{14} + C_{15}^{15} x^{15}$$

$$\Rightarrow x(1+x)^{15} = C_{15}^0 x + C_{15}^1 x^2 + C_{15}^2 x^3 + C_{15}^3 x^4 + \dots + C_{15}^{12} x^{13} + C_{15}^{13} x^{14} + C_{15}^{14} x^{15} + C_{15}^{15} x^{16} \text{ Lấy đạo hàm hai vế}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{15} + 15x(1+x)^{14} &= C_{15}^0 + 2C_{15}^1 x + 3C_{15}^2 x^2 + 4C_{15}^3 x^3 + \dots + 13C_{15}^{12} x^{12} + 14C_{15}^{13} x^{13} \\ &\quad + 15C_{15}^{14} x^{14} + 16C_{15}^{15} x^{15}\end{aligned}$$

Thay x bởi i ta được

$$\begin{aligned}(1+i)^{15} + 15i(1+i)^{14} &= C_{15}^0 + 2C_{15}^1 i + 3C_{15}^2 i^2 + 4C_{15}^3 i^3 + \dots + 13C_{15}^{12} i^{12} + 14C_{15}^{13} i^{13} \\ &\quad + 15C_{15}^{14} i^{14} + 16C_{15}^{15} i^{15} \\ &= \left(C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14} \right) + \\ &\quad \left(2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15} \right) i\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(1+i)^{15} + 15i(1+i)^{14} &= \sqrt{2}^{15} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{15} + 15i \sqrt{2}^{14} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{14} \\ &= \sqrt{2}^{15} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) + 15i \cdot 2^7 (-i) = 2^7 - 2^7 i + 15 \cdot 2^7 = 16 \cdot 2^7 - 2^7 i = 2^{11} - 2^7 i\end{aligned}$$

Vậy

$$A = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14} = 2^{11}$$

$$B = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15} = -2^7$$

II. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Chứng minh rằng:

$$S_1 = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots = \left(\sqrt{2} \right)^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 - \dots = \left(\sqrt{2} \right)^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

Giải

Xét khai triển nhị thức Newton:

$$(1+i)^n = C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + i^4 C_n^4 + \dots + i^{n-1} C_n^{n-1} + i^n C_n^n$$

$$V_i i^k = \begin{cases} 1, (k=4m) \\ i, (k=4m+1) \\ -1, (k=4m+2) \\ -i, (k=4m+3) \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}^+ \text{ nên ta có:}$$

$$(1+i)^n = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots) \quad (1)$$

Mặt khác, theo công thức Moivre thì:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 2. Tính tổng $S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 - \frac{1}{8}C_{2n}^7 + \dots$

Hướng dẫn giải

Chú ý rằng $\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k}$ nên:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 - \frac{1}{8}C_{2n}^7 + \dots \\ &= \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^2 - \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^4 + \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^6 - \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^8 + \dots \\ &= \frac{1}{2n+1}(C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^4 + C_{2n+1}^6 - C_{2n+1}^8 + \dots) \end{aligned}$$

$$V_i (1+i)^{2n+1} = (C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 - \dots) + i(C_{2n+1}^1 - C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 - \dots)$$

$$\text{và } (1+i)^{2n+1} = (\sqrt{2})^{2n+1} \left(\cos \frac{2n+1}{4}\pi + i \sin \frac{2n+1}{4}\pi \right) \text{ nên:}$$

$$C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 - C_{2n+1}^6 + \dots = (\sqrt{2})^{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4}\pi$$

$$\text{Vậy ta có } S = \frac{1}{2n+1} \left[1 - (\sqrt{2})^{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4}\pi \right].$$

Bài tập 3. Tính tổng $n \in \mathbb{Z}^+$

$$A = C_n^0 \cos a + C_n^1 \cos 2a + C_n^2 \cos 3a + \dots + C_n^{n-1} \cos na + C_n^n \cos(n+1)a$$

$$B = C_n^0 \sin a + C_n^1 \sin 2a + C_n^2 \sin 3a + \dots + C_n^{n-1} \sin na + C_n^n \sin(n+1)a$$

Giải

Đặt $z = \cos a + i \sin a$ thì $z^n = \cos na + i \sin na$.

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} A + iB &= C_n^0(\cos a + i \sin a) + C_n^1(\cos 2a + i \sin 2a) + C_n^2(\cos 3a + i \sin 3a) \\ &+ \dots + C_n^{n-1}(\cos na + i \sin na) + C_n^n(\cos(n+1)a + i \sin(n+1)a) \\ &= z(C_n^0 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + C_n^3 z^3 + \dots + C_n^n z^n) = z(1+z)^n \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 1+z = 1 + \cos a + i \sin a = 2 \cos \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right) \text{ nên:}$$

$$\begin{aligned}A + iB &= (\cos a + i \sin a) \left[2 \cos \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right) \right]^n \\&= 2^n \cos^n \frac{a}{2} (\cos a + i \sin a) \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right) \\&= 2^n \cos^n \frac{a}{2} \left(\cos \frac{n+2}{2} a + i \sin \frac{n+2}{2} a \right)\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = 2^n \cos^n \frac{a}{2} \cos \frac{n+2}{2} a, \quad B = 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \frac{n+2}{2} a$$

Nhận xét: Cho n là giá trị cụ thể, suy ra được nhiều biểu thức lượng giác đẹp.

$$\cos a + 5 \cos 2a + 10 \cos 3a + 10 \cos 4a + 5 \cos 5a + \cos 6a = 2^5 \cos^5 \frac{a}{2} \cos \frac{7a}{2}$$

Bài toán 5. Ứng dụng giải toán đa thức và phép chia đa thức

Phương pháp

I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Chứng minh rằng đa thức $(x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + 1$ với mọi số tự nhiên n .

Vì $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-i)(x+i) = 0$ nên $x^2 + 1$ có nghiệm là $\pm i$.

Đặt $f(x) = (x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2}$. Ta có:

$$f(i) = f(i+1)^{4n+2} + (i-1)^{4n+2} = (2i)^{2n+1} + (-2i)^{2n+1} = 0$$

$$f(-i) = f(-i+1)^{4n+2} + (-i-1)^{4n+2} = (-2i)^{2n+1} + (2i)^{2n+1} = 0$$

Giải

Trong các bài toán về phép chia đa thức, muốn chứng minh $f(x)$ chia hết cho $g(x)$, ta chứng minh mọi nghiệm của đa thức $g(x)$ đều là nghiệm của đa thức $f(x)$. Cách làm này gặp phải khó khăn nếu $g(x)$ không có nghiệm thực, tuy nhiên số phức giúp ta giải quyết vấn đề này.

Vậy $\pm i$ cũng là nghiệm của $f(x)$, do đó $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 và số thực α thỏa mãn $\sin \alpha \neq 0$, đa thức $x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Giải

Xét phương trình $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0$, $\Delta' = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$ nên có nghiệm

$x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $x_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha$ là hai số phức liên hợp.

Đặt $P(x) = x^2 \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ ta có:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \sin \alpha - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha \\ &= \cos n\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $P(\overline{x_1}) = 0$ hay $P(x_2) = 0$. Vậy $P(x)$ chia hết $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Ví dụ 3. Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Lời giải

Các nghiệm của đa thức $x^2 + x + 1$ là: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

Đặt $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$. Vì x_1, x_2 là hai số phức liên hợp, nên chỉ cần tìm n sao cho $f(x_1) = 0$ (khi đó $f(x_2)$ sẽ bằng không).

Ta có: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ nên

$$f(x_1) = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{2n} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n + 1$$

$$f(x_1) = \cos \frac{4n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 + i \left(\sin \frac{4n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right)$$

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{4n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \sin \frac{4n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{2n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 \right) = 0 \\ \sin \frac{2n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \Rightarrow n = 3k \pm 1, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi n là số nguyên dương không chia hết cho 3.

Ví dụ 4. Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức $(x-1)^n - x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 1$.

Lời giải

Các nghiệm của đa thức $x^2 - x + 1$ là: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$.

Đặt $f(x) = (x-1)^n - x^n + 1$.

Vì $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 - 1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ do đó

$$f(x_1) = \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} + 1.$$

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \sin \frac{2n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - 1 \right) = 0 \\ \sin \frac{n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - 1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{n\pi}{3} - 1 = 0 \Rightarrow n = 6k \pm 1.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là những số nguyên dương chia cho 6 dư 1 hoặc chia 6 dư 5.

Ví dụ 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên:

a) $x^4 + 4$; b) $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } x^4 + 4 &= x^4 - (2i)^2 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i) \\ &= [x^2 - (1+i)^2] \cdot [x^2 - (1-i)^2] = (x-1-i)(x+1+i)(x-1+i)(x+1-i) \end{aligned}$$

Mà:

$$(x-1-i)(x-1+i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2$$

$$(x+1-i)(x+1+i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2$$

$$\text{Nên } x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 &= (x+1)^4 - i^2(x^2 + x + 1)^2 \\ &= \left[(x+1)^2 - i(x^2 + x + 1) \right] \cdot \left[(x+1)^2 + i(x^2 + x + 1) \right]\end{aligned}$$

Bằng cách giải các phương trình bậc hai, ta phân tích được thành tích:

- $(x+1)^2 - i(x^2 + x + 1) = [(1-i)x - i](x+1+i)$
- $(x+1)^2 + i(x^2 + x + 1) = [(1+i)x + i](x+1-i)$

Mặt khác:

$$(x+1+i)(x+1-i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2 \quad [(1-i)x - i] \cdot [(1+i)x + i] = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Vậy } (x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + 2x + 2)(2x^2 + 2x + 1).$$

II. Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho đa thức

$$(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - 2x^{2n} \text{ chia hết cho đa thức } x^4 - 1.$$

Hướng dẫn giải

Các nghiệm của đa thức $x^4 - 1$ là: $\pm 1, \pm i$.

Đặt $f(x) = (x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - 2x^{2n}$, ta có $f(1) = f(-1) = 0$, nhưng

$$f(i) = (i+1)^{2n} + (i-1)^{2n} - 2i^{2n} = (2i)^n + (-2i)^n - 2(-1)^n$$

- Nếu $n = 2m, (m \in \mathbb{Z}^+)$ thì $f(i) = 2^{2m+1}(-1)^m - 2 \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+.$

Nếu $n = 2m + 1, (m \in \mathbb{Z}^+)$ thì $f(i) = 2 \neq 0$.

Vậy không tồn tại số nguyên dương n để đa thức $(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - 2x^{2n}$ chia hết cho đa thức $x^4 - 1$.

Bài tập 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên:

$$\text{a) } (x^2 + 1)^2 + (x + 3)^2; \quad \text{b) } (3x^2 + 5x - 4)^2 + (5x + 3)^2$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$(x^2 + 1)^2 + (x + 3)^2 = (x^2 + 1)^2 - i^2(x + 3)^2 = (x^2 - ix + 1 - 3i)(x^2 + 3x + 1 + 3i)$$

Vì

- $x^2 - ix + 1 - 3i = (x + 1 + i)(x - 1 - 2i)$
- $x^2 + ix + 1 + 3i = (x + 1 - i)(x - 1 + 2i)$
- $(x + 1 + i)(x + 1 - i) = (x + 1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2$
- $(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = (x - 1)^2 - 4i^2 = x^2 - 2x + 5$

$$\text{Vậy } (x^2 + 1)^2 + (x + 3)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 5).$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3x^2 + 5x - 4)^2 + (5x + 3)^2 &= (3x^2 + 5x - 2)^2 - i^2 (5x + 3)^2 \\ &= [3x^2 + 5(1-i)x - 4 - 3i] \cdot [3x^2 + 5(1+i)x - 4 + 3i] \end{aligned}$$

Ta có:

- $3x^2 + 5(1-i)x - 4 - 3i = (x + 2 - i)(3x - 1 - 2i)$
- $3x^2 + 5(1+i)x - 4 + 3i = (x + 2 + i)(3x - 1 + 2i)$
- $(x + 2 + i)(x + 2 - i) = (x + 2)^2 - i^2 = x^2 + 4x + 5$
- $(3x - 1 - 2i)(3x - 1 + 2i) = (3x - 1)^2 - 4i^2 = 9x^2 - 6x + 5$

$$\text{Vì vậy } (3x^2 + 5x - 4)^2 + (5x + 3)^2 = (x^2 + 4x + 5)(9x^2 - 6x + 5).$$

Ths. Trần Đình Cư

GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 10:

**TUYỂN CHỌN 100 CÂU SỐ PHỨC
VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO**

HUẾ, 04/04/2017

TUYỂN TẬP 100 CÂU SỐ PHỨC

VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho số phức z thỏa $(1+i)z + \bar{z} = i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 1+i+z$.

- A. $|w| = \sqrt{13}$ B. $|w| = 2\sqrt{13}$ C. $|w| = \sqrt{23}$ D. $|w| = \sqrt{33}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$(1+i)z + \bar{z} = i \Leftrightarrow (1+i)(x+yi) + x-yi = i \Leftrightarrow (2x-y) + xi = i \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

• $z = 1 + 2i$

• $w = 1 + i + z = 1 + i + 1 + 2i = 2 + 3i$

$|w| = \sqrt{13}$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Tìm mô-đun của số phức z biết $z^2(1-i) + 2(\bar{z})^2(1+i) = 21-i$

- A. $|w| = 5$ B. $|w| = \sqrt{5}$ C. $|w| = 2\sqrt{3}$ D. $|w| = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Đặt $w = z^2(1-i) = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $(\bar{z})^2(1+i) = \bar{w} = a - bi$

Do đó ta có $w + \bar{w} = 21 - i \Leftrightarrow 3a - bi = 21 - i \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=1 \end{cases}$

Dẫn đến $z^2 = \frac{7+i}{1-i} = 3+4i = (2+i)^2$

Suy ra $|z| = \sqrt{5}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \frac{19-4i}{z+2}$. Tìm mô-đun của số phức $w = z^2 + z + 1$ biết z có phần thực dương.

- A. $|w| = \sqrt{217}$ B. $|w| = \sqrt{113}$ C. $|w| = \sqrt{277}$ D. $|w| = \sqrt{133}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + b^2 + 2(a - bi) = 19 - 4i \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a) - 2bi = 19 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a = 19 \\ -2b = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2^2 + 2a - 19 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 15 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + 2i \\ z = -5 + 2i \end{cases}$$

Trường hợp 1: $z = 3 + 2i$, ta có:

$$w = (3 + 2i)^2 + (3 + 2i) + 2 = 9 + 14i \Rightarrow |w| = \sqrt{9^2 + 14^2} = \sqrt{277}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z-11}{z+2} = z-3$. Tính mô-đun của số phức $w = \frac{z+i}{z-i}$

A. $|w| = \sqrt{17}$ B. $|w| = \sqrt{11}$ C. $|w| = \sqrt{7}$ D. $|w| = 1$

Hướng dẫn giải

$$\frac{z-11}{z+2} = z-3 \Leftrightarrow z-11 = (z-3)(z+2) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2i \\ z = 1 + 2i \end{cases}$$

$$\text{Với } z = 1 - 2i \Rightarrow w = \frac{1-i}{1+i} = -i \Rightarrow |w| = 1$$

$$\text{Với } z = 1 + 2i \Rightarrow w = \frac{1+3i}{1-3i} = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i \Rightarrow |w| = 1$$

Vậy $|w| = 1$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 5. Tính mô-đun của số phức z biết $\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2}$

A. $|w| = 2\sqrt{2}$ B. $|w| = \sqrt{3}$ C. $|w| = \sqrt{2}$ D. $|w| = 4$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2} \Leftrightarrow (4-2i)z - (3+i)\bar{z} = 2+4i$$

$$\Leftrightarrow (x+y) + (7y-3x)i = 2+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ -3x+7y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1 \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 6. Tính mô-đun của số phức z biết $\frac{5\bar{z}}{1-2i} + (1+2z)i = 1+3i$.

A. $|w| = \sqrt{2}$ B. $|w| = \sqrt{5}$ C. $|w| = \sqrt{3}$ D. $|w| = 4$

Hướng dẫn giải

Chuyên Đề Số Phức

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$$PT \Leftrightarrow (1+2i)\bar{z} + (1+2z)i = 1+3i \Leftrightarrow (1+2i)(a-bi) + (1+2(a+bi))i = 1+3i$$

$$\Leftrightarrow a-bi+2ai+2b+(1+2a)i-2b=1+3i \Leftrightarrow a+(1+4a-b)i=1+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1+4a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z=1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 7. Tìm số phức z thỏa mãn $1+\bar{z} = |\bar{z}-i|^2 + (iz-1)^2$ và z có phần thực dương.

A. $z=1-i$

B. $z=1-i, z=1+i$

C. $z=2-i$

D. $z=1+i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$). Từ giả thiết ta có:

$$1+a-bi = |a-(b+1)i|^2 + (-b-1+ai)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+a-bi = 2(b+1)^2 - 2a(b+1)i \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a = 2(b+1)^2 \\ b = 2a(b+1) \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Từ (I) suy ra: } 1 + \frac{b}{2(b+1)} = 2(b+1)^2 \quad (b \neq -1) \Leftrightarrow (b+2)(2b+1)^2 = 0 \Rightarrow b = -2 \text{ hoặc } b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Với } b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ (loại). Với } b = -2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow z = 1 - 2i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 8. Tìm phần thực của số phức z thỏa mãn điều kiện $z + \bar{z} = 6$ và $z^2 + 2\bar{z} - 8i$ là một số thực.

A. 3

B. 2

C. 1

D. -1

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } z = x + yi. \text{ Ta có } z + \bar{z} = 6 \Leftrightarrow (x+yi) + (x-yi) = 6 \Leftrightarrow x = 3 \quad (1)$$

$$z^2 + 2\bar{z} - 8i = (x+yi)^2 + 2(x-yi) - 8i = (x^2 - y^2 + 2x) + (2xy - 2y - 8)i \quad \text{là số thực nên}$$
$$2xy - 2y - 8 = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta giải được $x = 3$ và $y = 2$. Vậy $z = 3 + 2i$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Tìm số số phức z thỏa mãn $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực và $|z| = 2\sqrt{2}$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Hướng dẫn giải

Chuyên Đề Số Phức

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned} \text{GT} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1+yi)(x+(2-i)) \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x-1)(2-y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-2x \\ 5x^2 - 8x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } z \in \left\{ 2-2i; -\frac{2}{5} + \frac{14}{5}i \right\}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 10. Tìm số phức z biết $(iz+2)(z-2)$ là số thuần ảo và $|z|=2$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có: $(iz+2)(z-2) = (2-b+ai)(a-2+bi)$ là số thuần ảo nên:
 $(2-b)(a-2) - ab = 0 \Leftrightarrow a + b - ab - 2 = 0 \quad (1)$

Mặt khác $|z|=2$ nên $a^2 + b^2 = 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta tìm được $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ hoặc $a = -\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ hoặc $a = 0, b = 2$ hoặc $a = 2, b = 0$.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn là: $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, z = 2, z = 2i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 11. Tìm phần thực nguyên của số phức z thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$.

A. 1

B. 2

C. -1

D. 5

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$, khi đó $(1-3i)z = (1-3i)(a+bi) = a+3b+(b-3a)i$

$(1-3i)z$ là số thực $\Leftrightarrow b-3a=0 \Leftrightarrow b=3a$

$$|\bar{z} - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |a-2+(5-3a)i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (5-3a)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 10a^2 - 34a + 29 = 1 \Leftrightarrow 5a^2 - 17a + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow b=6 \\ a=\frac{7}{5} \Rightarrow b=\frac{21}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = 2 + 6i, z = \frac{7}{5} + \frac{21}{5}i.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 12. Tìm số phức z , biết rằng $z\bar{z}=2$ và $|\bar{z}-1|^2 - z$ là một số thuần ảo.

A. $z=1+i; z=1-2i$

B. $z=2+i; z=1-i$

C. $z=3+i; z=2-i$

D. $z=1+i; z=1-i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $z \cdot \bar{z} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ (1)

$$|\bar{z} - 1|^2 - z = (x-1)^2 + y^2 - (x+yi) = (x-1)^2 + y^2 - x - yi$$

$$|\bar{z} - 1|^2 - z \text{ là một số thuần ảo } \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 - x = 0 \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 - x^2 \\ -3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức thỏa yêu cầu bài toán là $z = 1 + i$; $z = 1 - i$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 13. Tìm mô đun số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{z-2-2i} \right| = 1$ đồng thời $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo.

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} z \neq 2 \\ z \neq 2 + 2i \end{cases}$

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó:

Từ giả thiết ta có: $|z| = |z - 2 - 2i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$ hay $y = 2 - x$ (1)

Ta có:
$$\frac{z-2i}{z-2} = \frac{x+(y-2)i}{(x-2)+yi} = \frac{[x+(y-2)i][(x-2)-yi]}{(x-2)^2 + y^2}$$

Do đó $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo thì $x(x-2) + y(y-2) = 0$ hay $x^2 + y^2 = 2(x+y)$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có $x^2 + (2-x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0$

Nếu $x=2$ thì $y=0$ nên $z=2$ (loại)

Nếu $x=0$ thì $y=2$, khi đó $z=2i$ (thỏa mãn)

Vậy chọn đáp án A.

Câu 14. Tìm số số phức z thỏa mãn $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực và $|z-1| = \sqrt{5}$

A. 1

B. 2

C. -1

D. 5

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

Ta có
$$\begin{aligned} (z-1)(\bar{z}+2i) &= (a+bi-1)(a-bi+2i) = [(a-1)+bi][a+(2-b)i] \\ &= a^2 + b^2 - a - 2b + (2a+b-2)i \end{aligned}$$

Chuyên Đề Số Phức

Theo bài $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực nên $2a+b-2=0 \Leftrightarrow b=2-2a$

Mặt khác $|z-1|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-1)+bi|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2=5$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(2-2a)^2=5 \Leftrightarrow 5(a-1)^2=5 \Leftrightarrow |a-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

Với $a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow z=2i$

Với $a=2 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow z=2-2i$

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z=2i, z=2-2i$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn:

$$|z-2i-1|=2|z-i-1|$$

A. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{2}{3}\right), R=\frac{2}{3}$

B. Đường tròn tâm $I\left(-1;-\frac{2}{3}\right), R=\frac{2}{3}$

C. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{2}{3}\right), R=\frac{4}{9}$

D. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{2}{3}\right), R=\frac{4}{9}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z=x+yi, (x,y \in \mathbb{R})$ thì:

$$\begin{aligned} |z-2i-1|=2|z-i-1| &\Leftrightarrow |x-1+(y-2)i|=2|x-1+(y-1)i| \\ \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 &=4[(x-1)^2+(y-1)^2] \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-6x-4y+3=0 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y+1 &=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp số phức z thỏa mãn là đường tròn tâm $I\left(1;\frac{2}{3}\right)$ và bán kính $R=\frac{2}{3}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 16. Tìm tập hợp điểm M mà tọa độ phức của nó thỏa mãn điều kiện: $|\bar{z}-2+i|=1$.

A. Đường tròn tâm $I(-2;-1), R=1$

B. Đường tròn tâm $I(2;1), R=1$

C. Đường tròn tâm $I(-2;1), R=1$

D. Đường tròn tâm $I(-1;2), R=1$

Hướng dẫn giải

Hai số phức liên hợp có mô-đun bằng nhau, ta suy ra:

$$|\bar{z}-2+i|=|z-2-i| \text{ (vì } \overline{\bar{z}-2+i}=\overline{\bar{z}}+\overline{(-2+i)}=z-2-i)$$

Từ đó ta có: $|z-2+i|=1$

Đặt $z=x+iy (x,y \in \mathbb{R})$. Suy ra

$$|z - 2 - i| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + (y-1)i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 1 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I(2;1), bán kính R=1.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - (3 - 4i)| = 2$.

A. Đường tròn tâm I(-2;-1), R=2

B. Đường tròn tâm I(3;-4), R=1

C. Đường tròn tâm I(-2;1), R=2

D. Đường tròn tâm I(3;-4), R=2

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad z - 3 + 4i = (x-3) + (y+4)i$$

$$\text{Ta có } \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(3;-4) bán kính R=2.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 18. Tìm tập hợp các số phức z trên hệ tọa độ, biết $\left| \frac{z-2+3i}{z+3i-4} \right| = \sqrt{2}$.

A. Đường tròn: $x^2 + y^2 + 12x - 18y + 37 = 0$.

B. Đường tròn: $x^2 + y^2 - 12x - 18y + 37 = 0$.

C. Đường tròn: $x^2 + y^2 - 12x + 18y + 37 = 0$.

D. Đường tròn: $x^2 + y^2 + 12x + 18y + 37 = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi.$$

$$\left| \frac{z-2+3i}{\bar{z}+3i-4} \right| = \left| \frac{(x-2) + (y+3)i}{(x-4) - (y-3)i} \right| = \left| \frac{[(x-2) + (y+3)i][(x-4) - (y-3)i]}{(x-4)^2 + (y-3)^2} \right|$$

$$\text{Hay } \frac{|(x-2)(x-4) + y^2 - 9 + ((x-4)(y+3) - (x-2)(y-3))i|}{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow [(x-2)(x-4) + y^2 - 9]^2 + [(x-4)(y+3) - (x-2)(y-3)]^2 \\ = 2[(x-4)^2 + (y-3)^2]^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-2)^2 + (y+3)^2 \right] \left[(x-4)^2 + (y-3)^2 \right] = 2 \left[(x-4)^2 + (y-3)^2 \right]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2 \left[(x-4)^2 + (y-3)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 2(x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 18y + 37 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là phương trình đường tròn:
 $x^2 + y^2 - 12x - 18y + 37 = 0$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 19. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $z' = z + 3 - i$ biết $|z + 2 - 3i| \leq 2$.

A. Hình tròn tâm $(-2; 3)$, bán kính 2

B. Hình tròn tâm $(-3; 1)$, bán kính 2

C. Đường tròn tâm $(-3; 1)$, bán kính 2

D. Đường tròn tâm $(-3; 1)$, bán kính 2

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $z' = z + 3 - i \Rightarrow z' = (x + 3) + (y - 1)i$

Có $|z + 2 - 3i| \leq 2 \Leftrightarrow |(x + 2) + (y - 3)i| \leq 2$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn z là hình tròn tâm $(-2; 3)$, bán kính 2

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn z' là hình tròn tâm $(-3; 1)$, bán kính 2.

Vậy chọn đáp án B.

Lưu ý:

Việc suy $z \leftrightarrow z'$ là một phép biến hình. Bao gồm phép tịnh tiến theo Ox từ $x = -2$ tới $x = -3$ và tịnh tiến theo Oy từ $y = 3$ đến $y = 1$. Và do là phép tịnh tiến nên bán kính đường tròn không thay đổi.

Câu 20. Cho số phức z thỏa $|(1-i)z + 2| = 1$. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $\frac{z}{1-i}$.

A. Đường tròn có $I(0; -1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

B. Đường tròn có $I(0; 1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

C. Đường tròn có $I(0; -1)$, bán kính $R = \frac{1}{4}$.

D. Đường tròn có $I(0;1)$, bán kính $R = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi số phức $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } \frac{z}{1-i} = \frac{x+yi}{1-i} = \frac{(x+yi)(1+i)}{1-i} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)i \quad (1)$$

Theo giả thiết:

$$|(1-i)z+2|=1 \Leftrightarrow |(1-i)(x+yi)+2|=1 \Leftrightarrow (x+y+2)^2 + (y-x)^2 = 1 \quad (2)$$

Nhìn vào số phức dạng (1) để biến đổi phương trình (2):

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} + 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Từ đó suy ra, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $\frac{z}{1-i}$ là đường tròn có phương trình

$$x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4} \text{ có tâm } I(0;-1), \text{ có bán kính } R = \frac{1}{2}.$$

Vậy chọn đáp án A.

Ta còn có cách giải tự nhiên hơn như sau:

Cách 2: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $\frac{z}{1-i}$. Ta có $\frac{z}{1-i} = x + yi$

Điều kiện bài toán:

$$x|(1-i)z+2|=1 = \left| \frac{z}{1-i}(1-i)^2 + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |(x+yi)(-2i)+2|=1$$

$$\Leftrightarrow (2+2y)^2 + (-2x)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$$

Vậy tập hợp M là đường tròn có phương trình $x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$.

Câu 21. Tìm số phức z thỏa mãn đẳng thức $|z+3-2i|=3$. Hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức w , biết $w-z=1+3i$.

A. Đường tròn (C): $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 9$

B. Đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$

C. Đường tròn (C): $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$

D. Đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $N(a;b)$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Chuyên Đề Số Phức

Ta có $|a + bi + 3 - 2i| = 3 \Leftrightarrow (a + 3)^2 + (b - 2)^2 = 9 \quad (1)$

$$w - z = 1 + 3i \Leftrightarrow x + yi - a - bi = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a = x - 1 \\ b = y - 3 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9 \Leftrightarrow M \text{ thuộc } (C): (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C): $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 22. Cho số phức thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $|z|_{\min} = 2\sqrt{2} - 1; |z|_{\max} = 2\sqrt{2} + 1$

B. $|z|_{\min} = 3\sqrt{2} - 1; |z|_{\max} = 3\sqrt{2} + 1$

C. $|z|_{\min} = 2\sqrt{3} - 1; |z|_{\max} = 2\sqrt{3} + 1$

D. $|z|_{\min} = 3\sqrt{3} - 1; |z|_{\max} = 3\sqrt{3} + 1$

Hướng dẫn giải

Đặt $x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Vì $|z + 2 - 2i| = 1$ nên:

$$|x + 2 + (y - 2)i| = 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Vì thế có thể đổi biến $x + 2 = \cos t, y - 2 = \sin t$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.

Khi đó:

$$x^2 + y^2 = (\cos t - 1)^2 + (\sin t + 2)^2 = 9 + 4(\sin t - \cos t) = 9 + 4\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Mà $-1 \leq \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ nên $9 - 4\sqrt{2} \leq x^2 + y^2 \leq 9 + 4\sqrt{2}$, do đó:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq 2\sqrt{2} + 1$$

▪ $|z| = 2\sqrt{2} - 1$ khi $t = \frac{7\pi}{4}$ hay $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $2\sqrt{2} - 1$ khi $z = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

▪ $|z| = 2\sqrt{2} + 1$ khi $t = \frac{3\pi}{4}$ hay $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của của $|z|$ là $2\sqrt{2} + 1$ khi $z = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 23. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 + 2i| = 1$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)i.$

B. $z = -1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)i.$

C. $z = -1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)i.$

D. $z = -1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)i.$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $|z + 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

Đường tròn (C): $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ có tâm $I(-1; -2)$

Đường thẳng OI có phương trình là $y = 2x$.

Số phức z thỏa mãn điều kiện đề bài khi điểm biểu diễn M của nó thuộc đường tròn (C) và gần gốc tọa độ nhất $\Rightarrow M$ là một trong hai giao điểm của đường tròn (C) với đường thẳng OI.

Tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = -2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Do môđun của z lớn nhất nên chọn $z = -1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)i.$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 24. Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$, tìm số phức z có mô-đun lớn nhất.

A. $z = 1 + i$ và $z = -1 - i$

B. $z = 1 + 2i$ và $z = -1 - 2i$

C. $z = 1 + 3i$ và $z = -1 - 3i$

D. $z = 1 + i$ và $z = -1 - 2i$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Mặt khác $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow z^2 - i = (a^2 - b^2) + (2ab - 1)i$

Theo bài ra ta có:

$$|z^2 - i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab - 1)^2} = 1 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (2ab - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 1 - 4ab = 1 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 = 4ab$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq 2ab \Leftrightarrow |z|^2 \geq 2ab$

$$\text{Khi đó } |z|^4 = (a^2 + b^2)^2 = 4ab \leq 2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^4 \leq 2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\max} = \sqrt{2} \text{ đạt được khi } \begin{cases} a = b \\ |ab| = ab \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}$$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = 1 + i$ và $z = -1 - i$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2i\bar{z}| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của modun số phức z .

A. $\min|z| = 1$ và $\max|z| = 2$

B. $\min|z| = 1$ và $\max|z| = 3$

C. $\min|z| = 2$ và $\max|z| = 3$

D. $\min|z| = 2$ và $\max|z| = 3$

Hướng dẫn giải

Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$z + 2i\bar{z} = (a + bi) + 2i(a - bi) = (a + 2b) + (2a + b)i.$$

$$+) \text{ Theo bài ra: } |z + 2i\bar{z}| = \sqrt{(a + 2b)^2 + (2a + b)^2} = 3 \Leftrightarrow 5a^2 + 8ab + 5b^2 = 9$$

$$\text{Ta có: } 2|ab| = 2|a| \cdot |b| \leq (a^2 + b^2) \Rightarrow -(a^2 + b^2) \leq 2ab \leq (a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow -4(a^2 + b^2) \leq 8ab \leq 4(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 5a^2 + 8ab + 5b^2 \leq 9(a^2 + b^2) \text{ mà } 5a^2 + 8ab + 5b^2 = 9 \text{ nên}$$

$$(a^2 + b^2) \leq 9 \leq 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 9 \geq (a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq 1.$$

Ta lại có modun của số phức z là $\sqrt{a^2 + b^2}$ nên từ đây ta có thể kết luận:

$$\bullet \min|z| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 5a^2 + 8ab + 5b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$\bullet \max|z| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 5a^2 + 8ab + 5b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 26. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất sao cho $|z| = |\bar{z} - 4 + 3i|$.

A. $z = 2 + \frac{3}{2}i$

B. $z = 2 - \frac{3}{2}i$

C. $z = -2 + \frac{3}{2}i$

D. $z = -2 - \frac{3}{2}i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$

$$|z| = |\bar{z} - 4 + 3i| \Rightarrow a^2 + b^2 = (a - 4)^2 + (3 - b)^2 \Leftrightarrow 8a + 6b = 25 \quad (1)$$

Chuyên Đề Số Phức

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Từ (1) ta có M thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y - 25 = 0$

Do $|z| = OM$ nên mô đun của z nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

M thuộc Δ nên OM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của O trên Δ

Đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ là $3x - 4y = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 8x + 6y - 25 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(2; \frac{3}{2}\right). \text{ Vậy } z = 2 + \frac{3}{2}i$$

Vậy chọn đáp án A.

Nhận xét:

- ✓ Một cách giải khác: thế $a = 25 - \frac{6b}{8}$ và khảo sát hàm số $f(b) = b^2 + \left(25 - \frac{6b}{8}\right)^2$.
- ✓ Đây là bài toán điển hình cho phương pháp ứng dụng hình tọa độ để giải bài toán số phức. Ý tưởng của phương pháp này là rất đơn giản, xuất phát từ việc mỗi số phức đều có thể biểu diễn một cách duy nhất bởi 1 điểm $M(x;y)$ trên mặt phẳng phức, các điều kiện của z quy về các điều kiện của điểm M ví dụ: $|z| = OM$, $\bar{z}$ là điểm M' đối xứng với M qua $Ox, \dots$ Về nguyên tắc, tất cả các bài toán số phức đều có thể quy về hình học phẳng, tuy nhiên ta chỉ nên dùng trong điều kiện đề bài thuận lợi
- ✓ Mặt khác từ bài toán hình học phẳng cũng có thể xây dựng nên các bài toán về số phức hay và khó.

Câu 27. Cho số phức $z = \frac{m - i\sqrt{3}}{1 - m^2 + 2mi}$, ($m \in \mathbb{R}$). Tìm m để $z \cdot \bar{z} = 1$.

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = \pm 1$

D. $m = \pm 2$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} = 1 &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{m - i\sqrt{3}}{1 - m^2 + 2mi} \right|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|m - i\sqrt{3}|^2}{|1 - m^2 + 2mi|^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 3}{(1 - m^2)^2 + 4m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 + 3 = (1 - m^2)^2 + 4m^2 \\ &\Leftrightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 28. Cho số phức $z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)}, m \in \mathbb{R}$

28.1. Tìm m để $z\bar{z} = \frac{1}{2}$

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = \pm 1$

D. $m = \pm 2$

28.2. Tìm m để $|z-i| \leq \frac{1}{4}$

A. $|m| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$

B. $|m| \leq \frac{1}{\sqrt{15}}$

C. $|m| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$

D. $|m| > \frac{1}{\sqrt{15}}$

28.3. Tìm m để z có môđul lớn nhất.

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 3$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

Đã thấy $z = \frac{(-m+i)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2+2mi)(1-m^2-2mi)} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{1}{m^2+1}i$

a) Ta có: $z\bar{z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{m^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

b) Ta có: $z-i = \frac{m}{m^2+1} - \frac{m^2}{m^2+1}i \Rightarrow |z-i| \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{1}{15} \Leftrightarrow |m| \leq \frac{1}{\sqrt{15}}$

c) Ta có: $|z| = \sqrt{\frac{1}{m^2+1}} \Rightarrow |z|_{\max} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 29. Tìm nghiệm của phương trình $x^4 - 2ix^2 + 3 = 0$ trên tập số phức:

A. $x = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right), x = \pm \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$.

B. $x = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2} \right), x = \pm \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$.

C. $x = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right), x = \pm \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$.

D. $x = \pm \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right), x = \pm \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2it + 3 = 0$. Nghiệm của phương trình là $t = 3i, t = -i$.

▪ Nếu $t = 3i$ thì $x^2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \left[\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^2$ nên:

$x = \pm \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$.

▪ Nếu $t = -i$ thì $x^2 = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^2$ nên:

$$x = \pm \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right), x = \pm \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right].$

Câu 30. Tìm số nghiệm của phương trình $(z+i+1)^2 + 3(z+i+1)(\bar{z}-2) + 2(\bar{z}-2)^2 = 0$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Do $\bar{z}=2$ không là nghiệm nên phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{z+i+1}{\bar{z}-2} \right)^2 + 3 \frac{z+i+1}{\bar{z}-2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+i+1}{\bar{z}-2} = -2 & (a) \\ \frac{z+i+1}{\bar{z}-2} = -1 & (b) \end{cases}$$

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$(a) \Leftrightarrow z+i+1 = -2(\bar{z}-2) \Leftrightarrow (x+1) + (y+1)i = (-2x+4) + 2yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -2x+4 \\ y+1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$(b) \Leftrightarrow z+i+1 = -(\bar{z}-2) \Leftrightarrow (x+1) + (y+1)i = (-x+2) + yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -x+2 \\ y+1 = y \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $z = 1 + i$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 31. Cho $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Tìm số phức z thỏa $|z - |z+1|| = |z + |z-1||$.

A. $z = b, b \in \mathbb{R}$ hoặc $z = a, a \in [-1; 1]$.

B. $z = bi, b \in \mathbb{R}$ hoặc $z = a, a \in \mathbb{R}$

C. $z = b, b \in \mathbb{R}$ hoặc $z = a, a \in \mathbb{R}$

D. $z = bi, b \in \mathbb{R}$ hoặc $z = a, a \in [-1; 1]$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z - |z+1|| = |z + |z-1||$ khi và chỉ khi $|z - |z+1||^2 = |z + |z-1||^2$.

$$\text{Hay } (z - |z+1|)(\bar{z} - |z+1|) = (z + |z-1|)(\bar{z} + |z-1|)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z + \bar{z})|z+1| + |z+1|^2 = z\bar{z} + (z + \bar{z})|z-1| + |z-1|^2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } |z+1|^2 - |z-1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) - (z-1)(\bar{z}-1) = 2(z + \bar{z})$$

$$\text{Nên (1) trở thành } (z + \bar{z})(|z+1| + |z-1|) - 2(z + \bar{z}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 0 \\ |z+1| + |z-1| = 2 \end{cases}$$

Chuyên Đề Số Phức

* Nếu $z + \bar{z} = 0$ thì phần thực của z bằng 0 nên $z = bi, b \in \mathbb{R}$.

* Nếu $|z+1| + |z-1| = 2$ (2) thì theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$|z+1| + |z-1| \geq |(z+1) - (z-1)| = 2$$

Nên (2) xảy ra khi z là số thực thuộc đoạn $[-1; 1]$.

Vậy những số phức cần tìm là $z = bi, b \in \mathbb{R}$ hoặc $z = a, a \in [-1; 1]$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 32. Tìm số nghiệm của phương trình: $z^2 \left(2^{|z|^2} - 1 \right) + z \left(2^{|z-1|} - 1 \right) + 1 = 0, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Vì $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nên $b \neq 0$.

Do $|z|^2 = a^2 + b^2, |z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a}$ nên nếu đặt

$$2^{|z|^2} - 1 = \alpha, 2^{|z-1|} = \beta \text{ thì } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$(a^2 - b^2 + 2iab)\alpha + (a + ib)\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)\alpha + \alpha\beta + 1 + i(2ba\alpha + b\beta) = 0$$

Suy ra $(a^2 - b^2)\alpha + \alpha\beta + 1 = 0$ (1) và $2aba\alpha + b\beta = 0$ (2).

Vì $b \neq 0$ nên từ (2) có $\beta = -2a\alpha$, nên (1) có dạng $(a^2 + b^2)\alpha = 1$.

$$\text{Do đó } (a^2 + b^2)(2^{a^2+b^2} - 1) = 1 \quad (3)$$

Xét $f(x) = x(2^x - 1)$ với $x \geq 0, f'(x) = 2^x - 1 + x \cdot 2^x \geq 0, \forall x \geq 0$.

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$, mà $f(1) = 1$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất. Như thế theo (3) ta có $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |z-1| = \sqrt{2-2a}$.

Mà $\beta = -2a\alpha$ nên $2^{\sqrt{2-2a}} - 1 = -2a$, hay $2^{\sqrt{1+y}} = y$ (4) với $y = 1 - 2a$.

Vì $|a| \leq 1$ nên $y \leq 3$. Từ (4) có $y > 0 \Rightarrow 2^{\sqrt{1+y}} > 2 \Rightarrow y > 2$.

Vì thế $y = 2^{\sqrt{1+y}} > 2^{\sqrt{3}} > 2^{\frac{5}{3}} > 3$, mâu thuẫn với $y \leq 3$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 33. Cho z với $z = 1 + (1+i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3})^2 + (1+i\sqrt{3})^3 + \dots + (1+i\sqrt{3})^{20}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. z là số thuần ảo

B. z là số phức có phần thực dương

Chuyên Đề Số Phức

C. z là số phức có phần thực âm

D. z là số thực.

Định hướng:

Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ nguyên dương})$$

Đồng thời, số mũ với bậc cao và dạng $1 + \sqrt{3}$ làm ta nhớ đến dạng lượng giác của số phức.

Hướng dẫn giải

$$z = 1 + (1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3})^2 + (1 + i\sqrt{3})^3 + \dots + (1 + i\sqrt{3})^{20} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{21} - 1}{\sqrt{3}i}$$

$$\text{Ta có } 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow (1 + i\sqrt{3})^{21} = 2^{21} (\cos 7\pi + i \sin 7\pi) = -2^{21}$$

$$\text{Vậy } z = \frac{-2^{21} - 1}{i\sqrt{3}} = \frac{2^{21} + 1}{\sqrt{3}}i \text{ hay } z \text{ là số ảo.}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 34. Tìm môđun số phức z , biết $|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$.

A. $2\sqrt{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$\begin{cases} |z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8 \\ z + \bar{z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy các số phức cần tìm là $1 + i$ và $1 - i$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 35. Tìm phần thực số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}$ và $\left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$.

A. 6

B. 1

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

Điều kiện $z \neq 8$ và $z \neq 8i$

$$\text{Đặt } z = a + bi, \text{ ta có hệ: } \begin{cases} \frac{a^2 + b^2 + 144 - 24a}{a^2 + b^2 + 144 - 16b} = \frac{25}{9} \\ \frac{a^2 + b^2 + 16 - 8a}{a^2 + b^2 + 64 - 16b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ b = 17 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện, kết luận có hai số phức thỏa mãn đề bài là $z = 6 + 8i$, và $z = 6 + 17i$

Vậy chọn đáp án A.

Nhận xét: Bài toán có vẻ rất dài dòng, nhưng bạn biết đến công thức $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (môđun chứ không phải giá trị tuyệt đối đâu nhé!) và khả năng nhẩm nhanh thì bài này rất dễ. Nếu cứ đặt dạng bình thường và cứ biến đổi thì bài này thực chất là một bài giải hệ cơ bản vì các biểu thức chứa bình phương nó sẽ triệt tiêu nhau hết. Còn không thì bạn tốn một chút thời gian để định hình. Lưu ý các điều kiện.

Yêu cầu: Nhớ lại công thức về môđun: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ và cách biến đổi.

Câu 36. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = \sqrt{3}, |z_2| = 2, |z_1 - z_2| = \sqrt{5}$. Tính $|z_1 + z_2|$.

A. 6

B. $\sqrt{2}$

C. 3

D. $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_2, b_2 \in \mathbb{R}$)

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có: } \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 3 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 2$$

Vậy

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)} = 3$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 37. Cho các số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn các điều kiện $z_1 + 3z_1z_2 = (-1+i)z_2$ và

$2z_1 - z_2 = -3 + 2i$. Tìm môđun của số phức $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 + z_2$.

A. 6

B. $\sqrt{2}$

C. 3

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} z_1 + 3z_1z_2 = (-1+i)z_2 \\ 2z_1 - z_2 = -3 + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z_1 + 3z_1z_2}{z_2} = (-1+i) \\ 2z_1 - z_2 = -3 + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} + 3z_1 = -1+i \\ 2z_1 - z_2 = -3 + 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2} + 3z_1\right) - (2z_1 - z_2) = (-1+i) - (-3+2i) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} + z_1 + z_2 = 2-i \Rightarrow |w| = \sqrt{5} \text{ c) Ta có:}$$

$$\begin{cases} z_1 + 3z_1z_2 = (-1+i)z_2 \\ 2z_1 - z_2 = -3 + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z_1 + 3z_1z_2}{z_2} = -1+i \\ 2z_1 - z_2 = -3 + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} + 3z_1 = -1+i \\ 2z_1 - z_2 = -3 + 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2} + 3z_1\right) - (2z_1 - z_2) = (-1+i) - (-3+2i) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} + z_1 + z_2 = 2-i$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2} + z_1 + z_2\right| = \sqrt{5}$$

Chuyên Đề Số Phức

Vậy chọn đáp án D.

Câu 38. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

A. $\min P = \frac{1}{2}; \max P = \frac{3}{2}$

B. $\min P = \frac{1}{2}; \max P = 2$

C. $\min P = 2; \max P = \frac{5}{2}$

D. $\min P = \frac{1}{3}; \max P = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \left| 1 + \frac{i}{z} \right|$ và $1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right|$ nên:

$$1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq P \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 1 + \frac{1}{|z|}$$

Mặt khác, theo bài ra $|z| \geq 2$ nên $\frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2}$ vì thế:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$$

Vì $P = \frac{1}{2}$ chẳng hạn với $z = -2i$ và $P = \frac{3}{2}$ chẳng hạn với $z = 2i$ nên:

Vậy, giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 39: Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $z + 2\bar{z} = (1+5i)^2$. Tính mô-đun của z .

A. $2\sqrt{45}$

B. $\sqrt{41}$

C. $2\sqrt{40}$

D. $2\sqrt{41}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $\bar{z} = a - bi$

Ta có: $z + 2\bar{z} = (1+5i)^2 \Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = -24 + 10i \Leftrightarrow 3a - bi = -24 + 10i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -24 \\ -b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -10 \end{cases} \Rightarrow z = -8 - 10i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-8)^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{41}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 40: Tính mô-đun của số phức z , biết rằng $|z - \bar{z}| = 1$ và $z + \bar{z} = 0$

A. $|z| = \frac{1}{2}$

B. $|z| = \frac{1}{3}$

C. $|z| = \frac{1}{4}$

D. $|z| = \frac{1}{5}$

Hướng dẫn giải

Giả sử: $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$

Ta có: $z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow z = bi$

$$|z - \bar{z}| = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |z| = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } |z| = \frac{1}{2}$$

Chọn A

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn: $z + |z| = 2 - 8i$. Tìm số phức liên hợp của z ?

A. $-15 + 8i$

B. $-15 + 6i$

C. $-15 + 2i$

D. $-15 + 7i$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Khi đó: } z + |z| = 2 - 8i \Leftrightarrow a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 - 8i$$

$$\Leftrightarrow a + \sqrt{a^2 + b^2} + bi = 2 - 8i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = -15 - 8i \Rightarrow \bar{z} = -15 + 8i$$

Chọn A

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn: $z\bar{z} = 1$ và $|\bar{z} - 1| = 2$. Xác định phần thực của z

A. 0

B. -1

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } z = a + ib, \text{ với } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } \bar{z} = a - ib$$

$$\text{Ta có: } z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \text{ và } \bar{z} - 1 = (a - 1) + i(-b)$$

$$\Rightarrow |\bar{z} - 1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (-b)^2} = 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = 4$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - 1)^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 - a^2 \\ (a - 1)^2 + 1 - a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Kết luận: Số phức z có phần thực bằng -1, phần ảo bằng 0.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 43: Tìm số phức z sao cho $(1 + 2i)z$ là số thuần ảo và $|2z - \bar{z}| = \sqrt{13}$

A. $z = 2 + i$ và $z = -2 - i$

B. $z = -2 - i$

C. $z = -i$

D. $z = -2 - 2i$

Hướng dẫn giải

$$\text{Giả sử } z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}), \text{ khi đó } (1 + 2i)z = (1 + 2i)(a + bi) = (a - 2b) + (2a + b)i$$

$$(1 + 2i)z \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

$$|2z - \bar{z}| = |a + 3bi| = |2b + 3bi| = \sqrt{13b^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Có hai số phức thỏa mãn đề bài: $z = 2 + i$; $z = -2 - i$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 44. Cho số phức thỏa mãn $|z|=1$. Tìm mọi giá trị lớn nhất của $A=|1+z|+3|1-z|$

- A.** $\text{Max}A=2\sqrt{10}$ **B.** $\text{Max}A=\sqrt{10}$ **C.** $\text{Max}A=2\sqrt{21}$ **D.** $\text{Max}A=2\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+iy$ với $x,y \in \mathbb{R}$. Vì $|z|=1$ nên $y^2=1-x^2$ và $x \in [-1;1]$.

Ta có:

$$|1+z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)} \text{ và } |1-z|=\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1-x)}$$

$$\text{Do đó } |1+z|+3|1-z|=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}=f(x)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)} \text{ với } x \in [-1;1].$$

Hàm số liên tục trên $x \in [-1;1]$ và với $x \in (-1;1)$ thì:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\frac{3}{\sqrt{2(1-x)}}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$$

$$\text{Mà } f(1)=2, f(-1)=6, f\left(-\frac{4}{5}\right)=2\sqrt{10} \text{ nên: } \text{Max}A=2\sqrt{10} \text{ khi } z=-\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 45. Cho số phức thỏa mãn $|z|=1$. Tìm mọi giá trị nhỏ nhất của $B=|1+z|+|1-z+z^2|$

- A.** $\text{Min}B=\sqrt{2}$ **B.** $\text{Min}B=\sqrt{3}$ **C.** $\text{Min}B=\sqrt{5}$ **D.** $\text{Min}B=\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Vì $1-z+z^2=1-x+x^2-y^2+i(2x-1)y=2x^2-x+i(2x-1)y$ nên

$$|1-z+z^2|=\sqrt{(2x^2-x)^2+y^2(2x-1)^2}=\sqrt{(2x-1)^2(x^2+y^2)}=|2x-1|$$

$$\text{Vậy nên } B=|1+z|+|1-z+z^2|=\sqrt{2(1+x)}+|2x-1|.$$

$$\text{Đặt } g(x)=\sqrt{2(1+x)}+|2x-1| \text{ với } x \in [-1;1].$$

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Xét $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ thì $g(x)=\sqrt{2(1+x)}+2x-1$

$$\text{Ta có: } g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2(1+x)}}+2>0, \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right] \text{ nên:}$$

$$\text{Max}_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(x)=g(1)=3, \text{Min}_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}.$$

▪ Trường hợp 2: Xét $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$ thì $g(x) = \sqrt{2(1+x)} - 2x + 1$

Vì $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - 2 > 0, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}$ và:

$$g(-1) = 3, g\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}, g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Nên $\text{Max}_{g(x)} = g\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

So sánh hai trường hợp, ta có: $\text{Min}_{|z|=1} B = \sqrt{3}$ khi $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 46. Cho số phức thỏa mãn $|z|=1$. Tìm $\text{Max}|z^3 - z + 2|$.

A. $\text{Max}_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = \sqrt{13}$

B. $\text{Max}_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = 2\sqrt{13}$

C. $\text{Max}_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = 3\sqrt{13}$

D. $\text{Max}_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = 5\sqrt{13}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Vì $|z|=1$ nên $y^2 = 1 - x^2$ và $x \in [-1; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z^3 - z + 2 &= x^3 - 3xy^2 - x + 2 + i(3x^2 - y^2 - 1)y \\ &= 4x^3 - 4x + 2 + i(2x^2 - 2)y \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |z^3 - z + 2|^2 = (4x^3 - 4x + 2)^2 + (4x^2 - 2)^2 y^2 = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$$

Xét $f(x) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$ với $x \in [-1; 1]$.

$$f'(x) = 48x^2 - 8x - 16, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1) = 4, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 13, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}, f(1) = 4$$

$$\text{Vậy } \text{Max}_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = \sqrt{13} \text{ khi } z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Vậy chọn đáp án A.

$$\text{Chú ý: } \text{Min}_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = \frac{2\sqrt{6}}{9} \text{ khi } z = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i.$$

Ví dụ 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $\log_2 |z - (3 - 4i)| = 1$

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ

B. Đường tròn bán kính 1

- C. Đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính 2 D. Đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính 3

Lời giải

Điều kiện $z \neq 3 - 4i$

Gọi $M(x; y)$ với $(x; y) \neq (3; -4)$ là điểm biểu diễn số phức: $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Khi đó: $\log_2 |z - (3 - 4i)| = 1 \Leftrightarrow |z - (3 - 4i)| = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

Vậy tập hợp các điểm số phức z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính

$$R = 2$$

Chọn C

Ví dụ 48: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện $|z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0$

- A. Đường thẳng qua gốc tọa độ B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5; 0)$ bán kính 5 D. Đường tròn tâm $I(5; 0)$ bán kính 3

Lời giải

Đặt $z = x + yi$, ta có $\bar{z} = x - yi$

$$\text{Do đó: } |z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 5yi - 5x + 5yi = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25$$

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 5 và tâm là $I(5; 0)$

Chọn C

Ví dụ 49: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi - (2 + i)| = 2$

- A. Đường thẳng qua gốc tọa độ B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5; 0)$ bán kính 5 D. Đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính 2

Lời giải

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có:

$$|zi - (2 + i)| = 2 \Leftrightarrow |-y - 2 + (x-1)i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 2$

Chọn D

Câu 50. Cho số phức z là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$, Tính giá trị của biểu thức: $P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}}$.

- A. $P = \frac{16^{504} + 1}{4^{504}}$ B. $P = \frac{4^{504} + 1}{2^{504}}$ C. $P = \frac{16^{504} + 1}{2^{504}}$ D. $P = \frac{8^{504} + 1}{4^{504}}$

Hướng dẫn giải

Ta có $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z^2 = \pm 2i$

Suy ra $z^4 = (z^2)^2 = (\pm 2i)^2 = -4$

Vậy $P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}} = (z^4)^{504} + \frac{1}{(z^4)^{504}} = (-4)^{504} + \frac{1}{(-4)^{504}} = \frac{16^{504} + 1}{4^{504}}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 51. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $|z| = 10$

B. $|z| = 1$

C. $|z| = 11$

D. $|z| = 9$

Hướng dẫn giải

$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0 \Leftrightarrow z^9(11z + 10i) = 11 - 10iz$ hay : $z^9 = \frac{(11z + 10i)}{11 - 10iz}$ (1)

$$z^9 = \frac{(11z + 10i)}{11 - 10iz} = \frac{\sqrt{10^2(x^2 + y^2) + 11^2 + 220iy}}{\sqrt{11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220iy}}$$

Suy ra:

$$|z|^{18} - 1 = \frac{(11z + 10i)}{11 - 10iz} = \frac{21(1 - x^2 - y^2)}{11^2(x^2 + y^2) + 100 + 220iy} = \frac{21(1 - |z|^2)}{11^2(x^2 + y^2) + 100 + 220iy}$$

$$\Rightarrow (|z|^{18} - 1)(1 - |z|^2) = \frac{21(1 - |z|^2)^2}{11^2(x^2 + y^2) + 100 + 220iy} \geq 0$$

$$\Rightarrow (|z|^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 52. Tìm phần thực của số phức $z = (1+i)^n$, trong đó n là số tự nhiên và thỏa mãn $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$

A. 152.

B. 512.

C. -512.

D. -251.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta giải phương trình: $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$

Hàm số $f(x) = \log_4(x-3) + \log_5(x+6)$ là hàm đồng biến trên $(3; +\infty)$ và

$f(19) = 4$. Do đó, phương trình $\log_4(n-3) + \log_5(n+6) = 4$ có nghiệm duy nhất $n = 19$.

Ta có: $w = 1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

$$\text{Với } n = 19 : z = w^{19} = (\sqrt{2})^{19} \left(\cos \frac{19\pi}{4} + i \sin \frac{19\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^{19} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\text{Suy ra phần thực của } z \text{ là : } (\sqrt{2})^{19} \cos \frac{3\pi}{4} = -(\sqrt{2})^{19} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -512.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 53. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A. $\text{Min}|z_1 - z_2| = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\text{Min}|z_1 - z_2| = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\text{Min}|z_1 - z_2| = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\text{Min}|z_1 - z_2| = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Định hướng: Đây là bài toán khá phức tạp và khó trong việc khai thác dữ kiện. Điều đầu tiên ta cũng sẽ gọi dạng của $z_1 = x_1 + y_1i$, sau đó tiến hành làm bình thường. Nhận thấy khi khai triển thì bài toán sẽ rất rối và đây là dấu hiệu để ta dùng đến kiến thức trong tọa độ phẳng. Sau đây là một vài vấn đề khi làm dạng toán này:

Cho hai số phức $z_1; z_2$ được biểu diễn các điểm tương ứng $M_1; M_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = M_1M_2$.

Chứng minh: Giả sử: $z_1 = x_1 + y_1i; z_2 = x_2 + y_2i \rightarrow M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \\ \overrightarrow{M_1M_2} = (-x_1 + x_2; -y_1 + y_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{cases} \Rightarrow |z_1 - z_2| = M_1M_2$$

Hướng dẫn giải

Đặt $z_1 = x_1 + y_1i$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{R}$).

Khi đó điểm $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức z_1 thỏa mãn:

$$|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |ix_1 - y_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn z_1 là đường tròn (C_1) tâm $O_1(0; \sqrt{2})$ và có bán kính

$$R_1 = \frac{1}{2}.$$

+) $z_2 = iz_1 = -y_1 + x_1i \Rightarrow N(-y_1; x_1)$ biểu diễn z_2 .

Ta cần tìm $M \in (C_1)$ để $|z_1 - z_2| = MN$ nhỏ nhất

+) Để ý rằng $\overrightarrow{OM}(x_1; y_1) \perp \overrightarrow{ON}(-y_1; x_1)$ và $OM = ON$ nên $MN = ON\sqrt{2}$.

Chuyên Đề Số Phức

MN đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất. Đường thẳng OO_1 cắt đường tròn (C_1) tại

$$M_1\left(0; \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ và } M_2\left(0; \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dễ thấy MN nhỏ nhất bằng $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $M \equiv M_1$, tức là khi đó $z_1 = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 54. Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 3i| + |\bar{z} + 3| = 10$, tìm số phức z có modun nhỏ nhất.

A. $z = 4; z = -i$

B. $z = -4; z = 3i$

C. $z = 4; z = -4i$

D. $z = 4; z = -4$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức: $z \cdot \bar{z} = |z|^2, \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

Ta có:

$$\begin{aligned} 100 &= \left(|z + 3i| + |\bar{z} + 3|\right)^2 \\ &= 2\left(|z + 3i|^2 + |\bar{z} + 3|^2\right) - \left(|z - 3i| - |\bar{z} + 3|\right)^2 \leq 2\left(|z - 3i|^2 + |\bar{z} + 3|^2\right) \\ &= 2\left((z - 3i)\overline{z - 3i} + (\bar{z} + 3)\overline{\bar{z} + 3}\right) = 2\left((z - 3i)(\bar{z} + 3i) + (\bar{z} + 3i)(-iz + 3)\right) \\ &= 4(z\bar{z} + 9) = 4|z|^2 + 36 \end{aligned}$$

Giải bất phương trình ta có: $|z| \geq 4$

Vậy min $|z| = 4$ đạt được khi $\begin{cases} |z - 3i| = |\bar{z} + 3| \\ |z| = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 4; z = -4$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 55. Tìm số phức z thỏa mãn $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực và $|z|$ là nhỏ nhất.

A. $z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

B. $z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

C. $z = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

D. $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi; (a, b \in \mathbb{R})$

Theo giả thiết, ta có: $(z - 1)(\bar{z} + 2i) = [(a - 1) + bi][a - (b - 2)i]$

$$= a(a - 1) + b(b - 2) + [ab - (a - 1)(b - 2)]i$$

$$(z - 1)(\bar{z} + 2i) \text{ là số thực } \Leftrightarrow ab - (a - 1)(b - 2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - 2a$$

Khi đó $z = a + (2 - 2a)i$.

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{a^2 + (2 - 2a)^2} = \sqrt{5a^2 - 8a + 4} = \sqrt{5\left(a - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Chuyên Đề Số Phức

$$\Rightarrow \min|z| = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ khi } a = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{2}{5}$$

Vậy $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 56. Tìm Số số phức z có mô đun bằng 1, đồng thời số phức $w = z^2 + 2\bar{z} - 1$ có mô đun lớn nhất.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Theo giả thiết, ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2, x \in [-1; 1]$.

Hơn nữa $w = z^2 + 2\bar{z} - 1 = x^2 - y^2 + 2xyz + 2(x - yi) - 1$

$$= (x^2 - y^2 + 2x - 1) + 2y(x - 1)i \Rightarrow |w| = \sqrt{(x^2 - y^2 + 2x - 1)^2 + 4y^2(x - 1)^2}$$

$$= 2\sqrt{(x^2 + x - 1)^2 + (1 - x^2)(x - 1)^2} = 2\sqrt{4x^3 - x^2 - 4x + 2}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2, x \in [-1; 1]$

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Lại có } f(-1) = 1, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}, f(1) = 1.$$

$$\text{Do đó } \max|w| = 2\sqrt{\max_{x \in [-1; 1]} f(x)} = \sqrt{13} \text{ đạt được khi } x = -\frac{1}{2}; y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy, có hai số phức cần tìm là } z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 57. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn phương trình $z^2 + \bar{z} = 0$. Khi đó tính tổng lũy thừa bậc 4 của tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{7}$

Hướng dẫn giải

$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi, \bar{z} = a - bi$

$$\text{Vậy } z^2 + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + a) + (2ab - b)i = 0$$

$$\text{Từ đó thu được } \begin{cases} a^2 - b^2 + a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \text{ Giải hệ phương trình thu được } (a, b) = (0, 0), (-1, 0), \left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Vậy có bốn số phức $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Chuyên Đề Số Phức

Để ý rằng z_k là nghiệm của phương trình đã cho nên $z_k^4 = z_k^{-2}$, do đó

$$z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 58. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - \left(2\cos\frac{5\pi}{21}\right)z + 1 = 0$. Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho $z_1^n + z_2^n = 1$.

A. 5

B. 7

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Phương trình $z^2 - \left(2\cos\frac{5\pi}{21}\right)z + 1 = 0$ (1). Biệt thức của (1) là

$$\Delta' = \cos^2\frac{5\pi}{21} - 1 = -\sin^2\frac{5\pi}{21} = \left(i\sin^2\frac{5\pi}{21}\right)^2.$$

+) Vậy (1) có các nghiệm là $z_1 = \cos\frac{5\pi}{21} - i\sin\frac{5\pi}{21}$ và $z_2 = \cos\frac{5\pi}{21} + i\sin\frac{5\pi}{21}$

$$\begin{aligned} z_1^n + z_2^n = 1 &\Leftrightarrow \left(\cos\frac{5\pi}{21} - i\sin\frac{5\pi}{21}\right)^n + \left(\cos\frac{5\pi}{21} + i\sin\frac{5\pi}{21}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{21}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{21}\right)\right]^n + \left(\cos\frac{5\pi}{21} + i\sin\frac{5\pi}{21}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(-\frac{n5\pi}{21}\right) - i\sin\left(-\frac{n5\pi}{21}\right) + \cos\frac{n5\pi}{21} + i\sin\frac{n5\pi}{21} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(-\frac{n5\pi}{21}\right) + \cos\frac{n5\pi}{21} = 1 \Leftrightarrow 2\cos\frac{n5\pi}{21} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\frac{n5\pi}{21} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{n5\pi}{21} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow n = \pm\frac{7}{5} + \frac{42k}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (*) \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nhỏ nhất nên từ (*) suy ra: $n = 7$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 59. Cho các số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn các điều kiện: $z_1 + 2z_2$ là số thực $2z_1 - z_2$ là số ảo và $3z_1 + z_2 = 5 - 5i$. Tìm modul của số phức $w = z_1^2 + 3z_1.z_2^2$.

A. $|w| = 5\sqrt{10}$

B. $|w| = 10\sqrt{10}$

C. $|w| = 7\sqrt{10}$

D. $|w| = 2\sqrt{10}$

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $\begin{cases} z_1 = x + yi \\ z_2 = a + bi \end{cases}$. Từ đó có: $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = (x + 2a) + (y + 2b)i \\ 2z_1 - z_2 = (2x - a) + (2y - b)i \end{cases}$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} y + 2b = 0 \\ 2x - a = 0 \end{cases} \quad (1).$

Từ $3z_1 + z_2 = (3x + a) + (3y + b)i = 5 - 5i$, ta được:
$$\begin{cases} 3x + a = 5 \\ 3y + b = -5 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $a = 2; b = 1; x = 1; y = -2$, suy ra
$$\begin{cases} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 2 + i \end{cases}$$

Từ đó ta có: $z_1^2 + 3z_1 \cdot z_2^2 = 30 - 10i$. Vậy modul $w = 10\sqrt{10}$

Câu 60: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1| = |z-i|$

- A. Đường thẳng qua gốc tọa độ B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5 D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có: $|z+1| = |z-i| \Leftrightarrow |(x+1) + yi|^2 = |x + (y-1)i|^2$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $y = -x$ đi qua gốc tọa độ.

Chọn A

Câu 61: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z| < |2-z|$

- A. Đường thẳng qua gốc tọa độ
B. Đường tròn bán kính 1
C. Nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.
D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có:

$$|2+z| < |2-z| \Leftrightarrow |2+z|^2 < |2-z|^2 \Leftrightarrow |(2+x) + iy|^2 < |(2-x) - iy|^2$$

$$\Leftrightarrow (2+x)^2 + y^2 < (2-x)^2 + (-y)^2 \Leftrightarrow x < 0$$

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.

Chọn C

Câu 62: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tìm mô-đun của số phức: $w = (z_1 - 1)^{2015} + (z_2 - 1)^{2016}$

- A. $|w| = \sqrt{5}$ B. $|w| = \sqrt{2}$ C. $|w| = 1$ D. $|w| = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chuyên Đề Số Phức

Phương trình: $z^2 - 2z + 2 = 0$ có $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$

Thay $z_1 = 1 - i$ vào w ta được $w = (-i)^{2015} + i^{2016} = -(i^2)^{1007} \cdot i + (i^2)^{1013} = -1 + i$

Thay $z_2 = 1 + i$ vào $w = i^{2015} + (-i)^{2016} = (i^2)^{1002} \cdot i + (i^2)^{1003} = -1 + i$

Vậy $|w| = \sqrt{2}$

Chọn B

Câu 63. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn: z_1 không phải là số ảo và $(z_1 - \overline{z_1} \cdot |z_2|^2)$ là số ảo; z_2 không phải là số thực và $(z_2 + \overline{z_2} \cdot |z_1|^2)$ là số thực. Tính $|z_1|^{2016} + |z_2|^{2017}$

A. 1

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $(z_1 - \overline{z_1} \cdot |z_2|^2)$ là số ảo:

$$\Leftrightarrow (z_1 - \overline{z_1} \cdot |z_2|^2) = -\overline{(z_1 - \overline{z_1} \cdot |z_2|^2)} \Leftrightarrow (z_1 - \overline{z_1} \cdot |z_2|^2) = -\overline{z_1} + z_1 (|z_2|)^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + \overline{z_1}) (1 - (|z_2|)^2) \Leftrightarrow (|z_2|)^2 = 1 \Leftrightarrow |z_2| = 1 \quad (\text{Do } z_1 \text{ không là số ảo nên } z_1 \neq -\overline{z_1})$$

$(z_2 + \overline{z_2} \cdot |z_1|^2)$ là số thực:

$$\Leftrightarrow (z_2 + \overline{z_2} \cdot |z_1|^2) = \overline{(z_2 + \overline{z_2} \cdot |z_1|^2)} \Leftrightarrow z_2 + \overline{z_2} \cdot |z_1|^2 = \overline{z_2} + z_2 \cdot |z_1|^2$$

$$\Leftrightarrow (z_2 - \overline{z_2}) (1 - |z_1|^2) \Leftrightarrow |z_1| = 1 \quad (\text{Do } z_2 \text{ không phải là số thực, khi đó } z_2 \neq \overline{z_2})$$

Vậy $P = |z_1|^{2016} + |z_2|^{2017} = 2$.

Câu 64. Cho $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$. Tính $A = z^5 + z^6 + z^7 + z^8 = 0$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^5 = \left(\frac{2i}{2}\right)^5 = i^5 = i$$

$$\text{Do đó: } z^5 + z^6 + z^7 + z^8 = z^5 (1 + z + z^2 + z^3) = (i)^5 (1 + i + i^2 + i^3) = 0$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 65. Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện: $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$; $z_2 = a_2 + b_2i$

$$\text{Ta có } |z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3$$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 \\ &= 2(a_1^2 + a_2^2) + 2(b_1^2 + b_2^2) - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 \\ &= 2(a_1^2 + a_2^2) + 2(b_1^2 + b_2^2) - [(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2] \\ &= 2.1 + 2.1 - 3 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = 1$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 66. Tìm số phức z thỏa $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và có $\left| z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \right|$ lớn nhất.

A. $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

B. $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

C. $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

D. $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + y^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện 1 là đường tròn (S) tâm là gốc tọa độ O, bán kính $R=3$.

$$\text{Ta có } \left| z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \right| = \sqrt{\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 9 \text{ nên điểm } K \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \text{ thuộc đường tròn (S).}$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \text{ là điểm thuộc (S), khi đó } \left| z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \right| = \sqrt{\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2} = MK$$

$$\text{Suy ra } \left| z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \right| \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow MK \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow MK \text{ là đường kính của (S)}$$

$$\Leftrightarrow M \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

Vậy $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = |z-1| + |z-i|.$$

A. $\max T = 3\sqrt{5}$

B. $\max T = 2 + \sqrt{5}$

C. $\max T = \sqrt{5}$

D. $\max T = 2\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z-2} &= \frac{x+(y-2)i}{(x-2)+yi} = \frac{[x+(y-2)i] \cdot [(x-2)-yi]}{(x-2)^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x-2) + (y-2)y}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{(x-2)(y-2) - xy}{(x-2)^2 + y^2}i \end{aligned}$$

$$\text{là số ảo khi và chỉ khi } \frac{x(x-2) + (y-2)y}{(x-2)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x+y) \\ (x-2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } T = |z-1| + |z-i| = |(x-1)+yi| + |x+(y-1)i| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $2(x+y) = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$. Suy ra $x+y \leq 4$.

$$\text{Suy ra } T^2 \leq 2(2+2(x+y)) \leq 20.$$

Suy ra $T \leq 2\sqrt{5}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là $2\sqrt{5}$, đạt khi $z=2+2i$.

Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 68: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z-11}{z-2} = z-1$. Hãy tính $\left| \frac{z-4i}{\bar{z}+2i} \right|$?

A. $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}}$

B. $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{28}}$

C. $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{29}}$

D. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{29}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{z-11}{z-2} = z-1 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 13 = 0, \Delta' = -9 = 9i^2 \Rightarrow \begin{cases} z = 2+3i \\ z = 2-3i \end{cases}$$

Do đó

$$* \quad z = 2+3i \Rightarrow \left| \frac{z-4i}{\bar{z}+2i} \right| = \left| \frac{2-i}{2-i} \right| = 1$$

$$z = 2-3i \Rightarrow \left| \frac{z-4i}{\bar{z}+2i} \right| = \left| \frac{2-7i}{2+5i} \right| = \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}}$$

Chọn A

Chuyên Đề Số Phức

Câu 69: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0$.

Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$?

A. 9

B. 10

C. 1

D. 12

Hướng dẫn giải

Phương trình: $\Delta' = 4(2-i) + 2(1+i)(5+3i) = -16$

Do đó phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Vậy $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 9$

Chọn A.

Câu 70: Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2z)(3+4i) + 5 + 6i = 0$. Tìm số phức $w = 1+z$?

A. $w = -\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$

B. $w = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$

C. $w = -\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$

D. $w = -\frac{7}{25} + \frac{1}{5}i$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có $(1+2z)(3+4i) + 5 + 6i = 0$

$\Leftrightarrow (2a+1+2bi)(3+4i) + 5 + 6i = 0 \Leftrightarrow (6a-8b+8) + (8a+6b+10)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-8b+8=0 \\ 8a+6b+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{32}{25} \\ b = \frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{32}{25} + \frac{1}{25}i \Rightarrow w = 1+z = -\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$

Chọn đáp án A

Câu 71: Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $z = \frac{3-5i}{1+4i} + (5-2i)(-3-i)$?

A. 0; -18

B. -18; 0

C. 18; 0

D. 0; 18

Hướng dẫn giải

Thực hiện đúng: $\frac{3-5i}{1+4i} = -1-i$

Tính $(5-2i)(-3-i) = -17+i$. Vậy $z = -18 \Rightarrow$ phần thực: -18, phần ảo: 0

Chọn đáp án B

Câu 72: Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2-6i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = 2z+1$

A. 6; 5

B. 5; -6

C. -5; -6

D. 5; 6

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$, khi đó:

$(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2-6i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + (3-i)(a-bi) = 2-6i \Leftrightarrow 4a - 2b - 2bi = 2-6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ -2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy: $z = 2 + 3i$

Do đó $w = 2z + 1 = 2(2 + 3i) + 1 = 5 + 6i$

Vậy số phức w có phần thực là 5, phần ảo là 6

Chọn đáp án D

Câu 73: Tính mô-đun số phức $z = (1 - 2i)(2 + i)^2$

A. $\sqrt{5}$

B. $\pm 5\sqrt{5}$

C. $5\sqrt{5}$

D. $-5\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

$$z = (1 - 2i)(2 + i)^2 = (1 - 2i)(4 + 4i + i^2) = (1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 11 - 2i$$

$$\text{Vậy } z = 11 - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{11^2 + 2^2} = 5\sqrt{5}$$

Chọn đáp án C.

Câu 74: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$

A.

B.

C.

D.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2(a_1b_2 + a_2b_1) = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$$

Vậy: $|z_1 - z_2| = 1$

Chọn đáp án A.

Câu 75: Giải phương trình trên tập số phức: $\frac{12z + i - 11}{2 - iz} = 1 + 7i$

A. $z = 3 - 2i$

B. $z = 3 + 2i$

C. $z = 2 + 3i$

D. $z = 2 - 3i$

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương: $z(5 + i) = 13 + 13i$

$$z = \frac{(13 + 13i)(5 - i)}{(5 + i)(5 - i)} = 3 + 2i$$

Chọn đáp án B

Câu 76: Tìm mô-đun của số phức $\bar{z}$ biết $(2 + i^3)z + 1 + 3i = z + i^4$?

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chuyên Đề Số Phức

Ta có: $(2+i^3)z+1+3i=z+i^4 \Leftrightarrow (2-i)z-z=-1-3i+1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\text{Do đó } |\bar{z}|=|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án C.

Câu 77: Cho số phức $z=a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện: $(3+i)z+(1+i)(2+i)=5-i$.

Tìm phần thực và phần ảo của z ?

A. $\begin{cases} a = \frac{14}{5} \\ b = -\frac{8}{5} \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{8}{5} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{8}{5} \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{-7}{5} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (3+i)z+(1+i)(2+i)=5-i \Leftrightarrow (3+i)z=4-4i \Leftrightarrow z = \frac{4-4i}{3+i} = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$$

Số phức z có phần thực $\frac{4}{5}$, phần ảo bằng $-\frac{8}{5}$

Chọn đáp án B

Câu 77: Cho số phức z thỏa mãn: $(1-i)z+2i\bar{z}=5+3i$. Tìm môđun của $w=2(z+1)-\bar{z}$

A. $|w|=5$

B. $|w|=7$

C. $|w|=9$

D. $|w|=11$

Hướng dẫn giải

$$\text{Giả sử: } z=a+bi; (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow (1-i)z+2i\bar{z}=5+3i \Leftrightarrow (1-i)(a+bi)+2i(a-bi)=5+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=5 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z=2+i$$

$$\text{Khi đó ta có: } w=2(3+i)-(2-i)=4+3i \Rightarrow |w|=\sqrt{16+9}=5$$

Chọn đáp án A

Câu 78: Tìm môđun của số phức $\bar{z}$ biết $(2+i^3)z+1+3i=z+i^4$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (2+i^3)z+1+3i=z+i^4 \Leftrightarrow (2-i)z-z=-1-3i+1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\text{Do đó: } |\bar{z}|=|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Chuyên Đề Số Phức

Vậy chọn đáp án A.

Câu 79: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính độ dài đoạn AB, biết A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

A. $AB = \frac{4}{3}$

B. $AB = 3$

C. $AB = 4$

D. $AB = \frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình: $z^2 - 2z + 5 = 0$. $\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm $z_1 = 1 - 2i; z_2 = 1 + 2i$

Ta có: $A(1; -2); B(1; 2) \Rightarrow \overline{AB} = (0; 4) \Rightarrow AB = 4$

Chọn đáp án C

Câu 80: Giải phương trình: $(z^2 + 2z)^2 + 5(z^2 + 2z) + 6 = 0$ trên tập hợp các số phức

A. $\begin{cases} z = -1 \pm i \\ z = -1 \pm i\sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = -1 \pm i \\ z = 1 \pm i\sqrt{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = 1 \pm i \\ z = -1 \pm i\sqrt{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = -2 \pm i \\ z = -1 \pm i\sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$(z^2 + 2z)^2 + 5(z^2 + 2z) + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 2z = -2 \\ z^2 + 2z = -3 \end{cases}$$

$$z^2 + 2z = -2 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm i$$

$$z^2 + 2z = -3 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Chọn đáp án A

Câu 81: Cho số phức z thỏa mãn: $(2-i)z - \frac{2+6i}{1+i} = 3+2i$. Tính $(zi + \bar{z})^{20}$

A. -1023

B. -1024

C. -1025

D. -1026

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (2-i)z - \frac{2+6i}{1+i} = 3+2i \Leftrightarrow (2-i)z = 7+4i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{7+4i}{2-i} = \frac{(7+4i)(2+i)}{5} = 2+3i$$

$$(zi + \bar{z})^{20} = (2i - 3 + 2 - 3i)^{20} = [(-1-i)^2]^{10} = (2i)^{10} = -2^{10} = -1024$$

Chọn đáp án B

Câu 82. Giải hệ phương trình hai ẩn:
$$\begin{cases} \left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3} \\ \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1 \end{cases}$$

A. $z=6+17i$ và $z=-6+8i$

B. $z=-6+17i$ và $z=6+8i$

C. $z=6+17i$ và $z=6-8i$

D. $z=6+17i$ và $z=6+8i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$. Phương trình đầu ta được $x=6$; phương trình 2 ta được $\begin{cases} y = 17 \\ y = 8 \end{cases}$
Vậy số phức cần tìm là $z=6+17i$ và $z=6+8i$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 83. Giải hệ phương trình hai ẩn: $\begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases}$

A. $z = 1 + 4i$

B. $z = -1 + i$

C. $z = 1 + 2i$

D. $z = 1 + i$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có tập hợp các điểm M của mặt phẳng phức biểu diễn các số z thỏa mãn

$\left| \frac{z-z_0}{z-z_1} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_0| = |z-z_1|$ là đường trung trực của đoạn thẳng A_0A_1 với A_0, A_1 theo thứ tự biểu diễn số phức z_0, z_1 .

Do đó: $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$ nên điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ phải nằm trên đường

phân giác $y = x$. Còn điều kiện $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$ chứng tỏ phần ảo của z bằng 1. Vậy $z = 1 + i$. Vậy

chọn đáp án D.

Cách 2.

Đặt $z = x + yi$. Phương trình đầu ta được $x=1$; phương trình 2 ta được $y=1$
Vậy số phức cần tìm là $z=1+i$

Câu 84. Cho số phức z bằng $9 + bi$ với b là số thực dương. Biết phần ảo của z^2 và z^3 bằng nhau. Tìm b.

A. $b = 5$

B. $b = 9$

C. $b = 12$

D. $b = 15$

Hướng dẫn giải

Ta có $z^2 = (9 + bi)^2 = 81 - b^2 + 18bi$ nên $\text{Im} z^2 = 18b$.

Lại có $z^3 = (9 + bi)^3 = 729 - 27b^2 + (243b - b^3)i$ nên $\text{Im} z^3 = 243b - b^3$.

Theo bài ra ta có $\text{Im} z^2 = \text{Im} z^3 \Leftrightarrow 18b = 243b - b^3 \Rightarrow b = 0; b = -15; b = 15$

Vì b là số thực dương nên $b=15$.

Câu 85. Cho $M = \left\{ z \mid \left| (1-z)^2 \right| = |z-1|^2, z \in \mathbb{C} \right\}$. Chọn phương án đúng?

A. $M = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

B. $M = \mathbb{R}$

C. $\mathbb{R} \subset M \subset \mathbb{C}$

D. $M = \mathbb{C}$

Hướng dẫn giải

Chuyên Đề Số Phức

Ta có $|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = (z-1)(\bar{z}-1)$ nên:

$$\begin{aligned}(z-1)^2 = |z-1|^2 &\Leftrightarrow (z-1)^2 = (z-1)(\bar{z}-1) \\ &\Leftrightarrow (z-1)(z-\bar{z}) = 0 \Rightarrow z=1, z=\bar{z}\end{aligned}$$

Vậy ta có z là số thực nên $M = \mathbb{R}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 86. Cho hai số phức x, y có tổng các bình phương là 7 và tổng các lập phương là 10. Tìm giá trị thực lớn nhất của tổng $x+y$?

A. 3

B. 6

C. 2

D. 4

Hướng dẫn giải

Đặt $S = x + y, P = x.y$. Theo bài ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 7 \\ S^3 - 3SP = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{S^2 - 7}{2} \\ S(7 - P) = 10 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S\left(7 - \frac{S^2 - 7}{2}\right) = 10 \Leftrightarrow S^3 - 21S + 20 = 0 \Leftrightarrow (S-1)(S-4)(S+5) = 0$$

Hay $S = -5, S = 1, S = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x+y$ là 4. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 87: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2}$. Tìm phần thực và phần ảo của z^9

A. 3

B. 16

C. 2

D. 4

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned}\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2} &\Leftrightarrow (4-2i)z - (3+i)\bar{z} = 2+4i \Leftrightarrow (x+y) + (7y-3x)i = 2+4i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) = 2 \\ (7y-3x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1 \Rightarrow z=1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } z^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9 \left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = 16 + 16i$$

Chuyên Đề Số Phức

Phần thực của z là 16, phần ảo của z là 16.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 88: Cho số phức z thỏa mãn $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$ (1). Tính phần thực của số phức z^{2013}

A. 2^{2013}

B. 2^{1006}

C. -2^{1006}

D. -2^{2013}

Hướng dẫn giải

Gọi số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào (1) ta có: $a + bi - \frac{a - bi}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5}$

$$\Leftrightarrow a + bi - \frac{(a - bi)(1 - 3i)}{10} = \frac{6 + 7i}{5} \Leftrightarrow 10a + 10bi - a + 3b + i(b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 11b + 3a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a = b = 1 &\Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow z^{2013} = (1 + i)^{2013} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2013} \\ &= 2^{1006} \sqrt{2} \left(\cos \frac{2013\pi}{4} + i \sin \frac{2013\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Vậy phần thực của z^{2013} là $2^{1006} \sqrt{2} \cos \frac{2013\pi}{4} = -2^{1006}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 89: Tính môđun của số phức z , biết: $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có: $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$

$$\Leftrightarrow [(2a - 1) + 2bi](1 + i) + [(a + 1) - bi](1 - i) = 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow (2a - 2b - 1) + (2a + 2b - 1)i + (a - b + 1) - (a + b + 1)i = 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow (3a - 3b) + (a + b - 2)i = 2 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

Suy ra môđun: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 90: Tính môđun của số phức z , biết rằng: $z^3 + 12i = \bar{z}$, và z có phần thực dương

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{3}$

C. 3

D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

+) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

+) Theo bài ra:

$$z^3 + 12i = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^3 + 12i = x - yi \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3 + 12)i = x - yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 + 12 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1 \text{ (do } x > 0) \\ 3(3y^2 + 1)y - y^3 + 12 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^3 + 4y + 12 = 0 \\ x^2 = 3y^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y+1)(y^2 - 2y + 3) = 0 \\ x = \sqrt{3y^2 + 1} \text{ (do } x > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

+) Môđun của số phức z là $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$.

Vậy chọn đáp án A.

Nhận xét: Cách đặt $z = x + yi$ là cách thường được sử dụng trong các bài toán về số phức khi đã cho trước một đẳng thức. Trong bài tập này, chúng ta không sử dụng dạng lượng giác của số phức bởi vì số mũ ở đây cũng không quá cao, đồng thời thì trong bài ra các dữ kiện cũng không xuất hiện dạng tích hay thương để áp dụng dạng lượng giác.

Câu 91. Cho các số phức x, y, z thỏa mãn: $|x| = |y| = |z| = 1$. So sánh $|x + y + z|$ và $|xy + yz + xz|$.

A. $|x + y + z| > |xy + yz + xz|$.

B. $|x + y + z| < |xy + yz + xz|$

C. $|x + y + z| = |xy + yz + xz|$

D. $|x + y + z| \neq |xy + yz + xz|$

Hướng dẫn giải

$$|x| = |y| = |z| = 1 \Rightarrow \overline{xy} = \overline{yy} = \overline{zz} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\overline{x}}; y = \frac{1}{\overline{y}}; z = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$|x + y + z| = \left| \frac{1}{\overline{x}} + \frac{1}{\overline{y}} + \frac{1}{\overline{z}} \right| = \left| \frac{xy + xz + yz}{xyz} \right| = \frac{|\overline{xy} + \overline{xz} + \overline{yz}|}{|\overline{xyz}|} = \frac{|\overline{xy + xz + yz}|}{|\overline{xyz}|} = \frac{|xy + xz + yz|}{|x||y||z|} = |xy + xz + yz|$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 92. Tìm phần phần ảo của z^{30} biết $z(1-i)=2(1+i)$

- A. 0 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{2(1+i)}{1-i} = 2i$$
$$z^{30} = (2i)^{30} = -2^{30}$$

Phần thực của z^{30} là -2^{30} ; Phần ảo của z^{30} là 0.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 93. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn phương trình $z^2 + \bar{z} = 0$. Khi đó, tính tổng lũy thừa bậc 4 của tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 3 D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Suy ra $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, $\bar{z} = a - bi$.

$$\text{Vậy } z^2 + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + a) + (2ab - b)i = 0$$

Từ đó, thu được $\begin{cases} a^2 - b^2 + a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases}$. Giải hệ, thu được $(a; b) = (0; 0), (-1; 0), \left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy có bốn số phức $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Để ý rằng do z_k là nghiệm của phương trình đã cho nên $z_k^4 = \overline{z_k}^2$, do đó:

$$z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 94.1: Cho số phức z thỏa mãn $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{3}$ tìm phần thực của z^{2013}

- A. $-2^{1006} \left(\frac{5}{3}\right)^{2013}$ B. $2^{1006} \left(\frac{5}{3}\right)^{2013}$ C. $3^{1006} \left(\frac{5}{3}\right)^{2013}$ D. $4^{1006} \left(\frac{5}{3}\right)^{2013}$

Hướng dẫn giải

+) Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào (1) ta được:

Chuyên Đề Số Phức

$$a + bi - \frac{a - bi}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{3} \Leftrightarrow a + bi - \frac{(a - bi)(1 + 3i)}{10} = \frac{6 + 7i}{3} \Leftrightarrow (27a + 9b) + (33b + 9a)i = 60 + 70i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27a + 9b = 60 \\ 33b + 9a = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{5}{3}(1 + i) = \frac{5}{3}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow z^{2013} = \left[\frac{5}{3}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2013} = \left(\frac{5}{3}\sqrt{2}\right)^{2013}\left(\cos\frac{2013\pi}{4} + i\sin\frac{2013\pi}{4}\right) = \left(\frac{5}{3}\sqrt{2}\right)^{2013}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Vậy phần thực của z^{2013} là $-2^{1006}\left(\frac{5}{3}\right)^{2013}$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 94.2: Cho số phức z thỏa mãn $z - \frac{\bar{z}}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2014}

A. 0

B. 2^{2013}

C. 2^{2014}

D. 1

Hướng dẫn giải

+) Gọi số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Thay vào (1) ta có $a + bi - \frac{a - bi}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5}$.

$$a + bi - \frac{(a - bi)(1 - 3i)}{10} = \frac{6 + 7i}{5} \Leftrightarrow 10a + 10bi - a + 3b + i(b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow 9a + 3b + i(11b + 3a) = 12 + 14i \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 11b + 3a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

+) Với

$$a = b = 1 \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow z^{2014} = (1 + i)^{2014} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2014} \\ = 2^{1007} \cdot \left(\cos\frac{2014\pi}{4} + i\sin\frac{2014\pi}{4}\right)$$

Vậy phần số thực của z^{2014} là $2^{1007} \cdot \cos\frac{2014\pi}{4} = 0$.

Câu 95: Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -3 + 6i$. Tính giá trị của biểu thức $|z| + |z|^2 + |z|^3$.

A. 96

B. 155

C. 123

D. 145

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Từ giả thiết, ta có $\sqrt{x^2 + y^2} - 2(x - yi) = -3 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 2x = -3 \\ 2y = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} = 2x - 3 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9 = (2x - 3)^2, x \geq \frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i$$

Vậy, $|z| + |z|^2 + |z|^3 = 5 + 25 + 125 = 155$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 96: Tìm phần thực số phức z có phần ảo bằng 164 và $n \in \mathbb{R}^*$ thỏa: $\frac{z}{z+n} = 4i$.

A. 96

B. -656

C. -13

D. -45

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + 164i$ ($a \in \mathbb{R}$)

Theo giả thiết, ta có $\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow \frac{a+164i}{a+164i+n} = 4i \Leftrightarrow a+164i = 4i(a+164i+n)$

$$\Leftrightarrow a+164i \Leftrightarrow -656 + (a+n)i \Leftrightarrow \begin{cases} a = -656 \\ 4(a+n) = 164 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -656 \\ n = 697 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 97: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 - (m+4i)z - 1 + 7i = 0$.

Tìm số phức m sao cho $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+i}{2}$

A. $m=2; m=3+8i$

B. $m=-3; m=-3-8i$

C. $m=5; m=3+8i$

D. $m=3; m=-3-8i$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $z^2 - (m+4i)z - 1 + 7i = 0$ (1)

Ta có $\Delta = (m+4i)^2 - 4(7i-1)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow (m+4i)^2 - 4(7i-1) \neq 0$

Theo định lí Viet, ta có $z_1 + z_2 = m+4i, z_1 z_2 = -1+7i$

$$\text{Mặt khác } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+i}{2} \Leftrightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{3+i}{2}$$

Chuyên Đề Số Phức

$$\Leftrightarrow \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2}{z_1z_2} = \frac{3+i}{2} \Leftrightarrow \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1z_2} - 2 = \frac{3+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+4i)^2}{-1+7i} = \frac{7+i}{2} \Leftrightarrow (m+4i)^2 = \frac{1}{2}(7+i)(-1+7i)$$

$$\Leftrightarrow (m+4i)^2 = -7+24i \Leftrightarrow (m+4i)^2 = (3+4i)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+4i=3+4i \\ m+4i=-3-4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-3-8i \end{cases} \text{ (thỏa mãn } \Delta \neq 0)$$

Vậy $m=3; m=-3-8i$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 98: Tìm môđun của số phức $w=b+ci$, biết số phức $z = \frac{(1+\sqrt{3})^{12}(2-i)}{(1-\sqrt{3}i)^6(1+i)^6}$. Là nghiệm của

phương trình $z^2 + 8bz + 64c = 0$

A. 7

B. 5

C. $\sqrt{23}$

D. $\sqrt{29}$

Hướng dẫn giải

$$\text{+) Ta có } \begin{cases} (1+\sqrt{3}i)^3 = 1+3\sqrt{3}i+3.3i^2+3\sqrt{3}i^3 = -8 \\ (1-\sqrt{3}i)^3 = 1-3\sqrt{3}i+3.3i^2-3\sqrt{3}i^3 = -8 \\ (1+i)^2 = 2i \end{cases}$$

$$\text{+) Do đó } \frac{(1+\sqrt{3}i)^{12}(2-i)}{(1-\sqrt{3}i)^{12}(1+i)} = \frac{(-8)^4(2-i)}{(-8)^2(2i)^3} = -\frac{8(2-i)}{1} = 8(1+2i) = 8+16i$$

$$(8+16i)^2 = 8b(8+16i) + 64c = 0 \Leftrightarrow (1+i)^2 + b(1+2i) + c = 0 \Leftrightarrow (2b+4)i + b + c - 3 = 0$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+4=0 \\ b+c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow |w| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Chú ý: Có thể dùng dạng số phức của lượng giác để xử lý bài toán này!

Câu 99: Tìm các số thực a, b sao cho $z = 2+3i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$.

A. $a=-4, b=13$

B. $a=4, b=13$

C. $a=-4, b=-13$

D. $a=4, b=-13$

Hướng dẫn giải

$z = 2+3i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$

$$\Rightarrow (2+3i)^2 + a(2+3i) + b = 0 \Leftrightarrow -5+12i+2a+3ai+b=0$$

$$\Leftrightarrow (2a+b-5) + (3a+12)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+12=0 \\ 2a+b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=13 \end{cases}$$

Vậy, $a = -4, b = 13$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 100. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$.

A. $m = -2, m = 5$

B. $m = -7, m = 9$

C. $m = 2, m = -5$

D. $m = -9, m = -7$

Hướng dẫn giải

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ là nghiệm của phương trình: $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ nên nếu gọi

$$z_1 = a + bi \Rightarrow z_2 = a - bi \text{ với } a, b \in \mathbb{R}$$

Giả thiết cho: $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(a^2 + b^2) = 10 \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{10}{4}$$

Mặt khác theo Viet ta có :

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{m^2 - 3m}{4} \text{ hay } \frac{m^2 - 3m}{4} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow m^2 - 3m \Leftrightarrow m = -2 \text{ hoặc } m = 5.$$

Vậy chọn đáp án A.