

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI
PHƯƠNG TRÌNH- BẤT PHƯƠNG TRÌNH- HỆ MŨ- LÔGARIT
BIÊN SOẠN GV NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088

CHƯƠNG I: PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH- BẤT PHƯƠNG TRÌNH- HỆ MŨ

CHỦ ĐỀ I: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$$

II. VD minh hoạ:

VD1: Giải phương trình: $(2+x-x^2)^{\sin x} = (2+x-x^2)^{2-\sqrt{3}\cos x}$

Giải: Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 2+x-x^2 > 0 \\ (2+x-x^2-1)(\sin x - 2 + \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2(*) \\ \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0(1) \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2(2) \end{cases} \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*)

Giải (2): $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Để nghiệm thỏa mãn điều kiện (*) ta phải có:

$$-1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left(-1 - \frac{\pi}{6}\right) < k < \frac{1}{2\pi} \left(2 - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow k = 0, k \in \mathbb{Z} \text{ khi đó ta nhận được } x_3 = \frac{\pi}{6}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{\pi}{6}$.

VD2: Giải phương trình: $(x-3)^{3x^2-5x+2} = (x^2-6x+9)^{x^2+x-4}$

Giải: Phương trình được biến đổi về dạng: $(x-3)^{3x^2-5x+2} = [(x-3)^2]^{x^2+x-4} = (x-3)^{2(x^2+x-4)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ 0 < x-3 \neq 1 \\ 3x^2-5x+2 = 2x^2+2x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x < 3 \neq 4 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=4, x=5$.

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ VÀ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ lũy thừa người ta có thể logarit theo cùng 1 cơ số cả 2 vế của phương trình, ta có các dạng:

Dạng 1: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình :

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$$

$$\text{hoặc } \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x).$$

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình:

$$2^{x^2-2x} = \frac{3}{2}$$

Giải: Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình ta được:

$$\log_2 2^{x^2-2x} = \log_2 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = \log_2 3 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \log_2 3 = 0$$

Ta có $\Delta' = 1 - 1 + \log_2 3 = \log_2 3 > 0$ suy ra phương trình có nghiệm

$$x = 1 \pm \sqrt{\log_2 3}.$$

VD2: Giải phương trình:

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500.$$

Giải: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3x-1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1$$

Lấy logarit cơ số 2 vế, ta được:

$$\log_2 \left(5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 (5^{x-3}) + \log_2 \left(2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot \log_2 5 + \frac{x-3}{x} \log_2 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\log_2 5 + \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{\log_2 5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = 3; x = -\frac{1}{\log_2 5}$

Chú ý: Đối với 1 phương trình cần thiết rút gọn trước khi logarit hoá.

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 1

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng 1 ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Phương trình $\alpha_k + \alpha_{k-1}a^{(k-1)x} + \dots + \alpha_1 a^x + \alpha_0 =$

Khi đó đặt $t = a^x$ điều kiện $t > 0$, ta được: $\alpha_k t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0 =$

Mở rộng: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hợp $t > 0$. Khi đó: $a^{2f(x)} = t^2, a^{3f(x)} = t^3, \dots, a^{kf(x)} = t^k$

Và $a^{-f(x)} = \frac{1}{t}$

Dạng 2: Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 a^x + \alpha_3 = 0$ với $a.b=1$

Khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$ suy ra $b^x = \frac{1}{t}$ ta được: $\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0$

Mở rộng: Với $a.b=1$ thì khi đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hợp $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

Dạng 3: Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$ khi đó chia 2 vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$

(hoặc $a^{2x}, (ab)^x$), ta được: $\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, ta được: $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$

Mở rộng: Với phương trình mũ có chứa các nhân tử: $a^{2f}, b^{2f}, (ab)^f$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia 2 vế phương trình cho $b^{2f} > 0$ (hoặc $a^{2f}, (ab)^f$)
- Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^f$ điều kiện $t > 0$

Dạng 4: Lượng giác hoá.

Chú ý: Ta sử dụng ngôn từ điều kiện $t > 0$ cho trường hợp đặt $t = a^{f(x)}$ vì:

- Nếu đặt $t = a^x$ thì $t > 0$ là điều kiện đúng.
- Nếu đặt $t = 2^{x^2+1}$ thì $t > 0$ chỉ là điều kiện hẹp, bởi thực chất điều kiện cho t phải là $t \geq 2$.

Điều kiện này đặc biệt quan trọng cho lớp các bài toán có chứa tham số.

II. VD minh hoạ:

VD1: Giải phương trình: $4^{\cot g^2 x} + 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 3 = 0$ (1)

Giải: Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (*)

Vì $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ nên phương trình (1) được biết dưới dạng:

$$4^{\cot g^2 x} + 2.2^{\cot g^2 x} - 3 = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = 2^{\cot g^2 x}$ điều kiện $t \geq 1$ vì $\cot g^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 2^{\cot g^2 x} \geq 2^0 = 1$

Khi đó phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{\cot g^2 x} = 1 \Leftrightarrow \cot g^2 x = 0$$

thỏa mãn (*)

$$\Leftrightarrow \cot gx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

VD2: Giải phương trình: $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$

Giải: Nhận xét rằng: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2; (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Do đó nếu đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$ điều kiện $t > 0$, thì: $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$ và $(7 + 4\sqrt{3})^x = t^2$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 \text{ (vn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên bằng việc đánh giá:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$$

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

Ta đã lựa chọn được ẩn phụ $t = (2 + \sqrt{3})^x$ cho phương trình

Ví dụ tiếp theo ta sẽ miêu tả việc lựa chọn ẩn phụ thông qua đánh giá mở rộng của $a.b=1$, đó là:

$$a.b = c \Leftrightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1 \text{ tức là với các phương trình có dạng: } A.a^x + B.b^x + C = 0$$

Khi đó ta thực hiện phép chia cả 2 vế của phương trình cho $c^x \neq 0$, để nhận được:

$$A\left(\frac{a}{c}\right)^x + B\left(\frac{b}{c}\right)^x + C = 0 \text{ từ đó thiết lập ẩn phụ } t = \left(\frac{a}{c}\right)^x, t > 0 \text{ và suy ra } \left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{1}{t}$$

VD3: Giải phương trình: $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

Giải: Chia cả 2 vế phương trình cho $2^{2x+2} \neq 0$ ta được:

$$2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-2x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4}.2^{x^2-x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x} - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0$$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1, x = 2$.

Chú ý: Trong ví dụ trên, vì bài toán không có tham số nên ta sử dụng điều kiện cho ẩn phụ chỉ là

$t > 0$ và chúng ta đã thấy với $t = \frac{1}{2}$ vô nghiệm. Do vậy nếu bài toán có chứa tham số chúng ta cần xác định điều kiện đúng cho ẩn phụ như sau:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-x} \geq 2^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

VD4: Giải phương trình: $2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$

Giải: Viết lại phương trình có dạng:

$$\left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - \frac{2}{2^x} \Rightarrow 2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 + 3.2^x\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = t^3 + 6t$$

$$\text{Khi đó phương trình (1) có dạng: } t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1$$

Đặt $u = 2^x, u > 0$ khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{u}{2} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1(1) \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Chú ý: Tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm đến việc sử dụng phương pháp lượng giác hoá.

VD5: Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-2^{2x}}} = (1+2\sqrt{1-2^{2x}}) \cdot 2^x$

Giải: Điều kiện $1-2^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Như vậy $0 < 2^x \leq 1$, đặt $2^x = \sin t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}} = \sin t (1+2\sqrt{1-\sin^2 t}) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} = (1+2\cos t) \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = 2 \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{3t}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{t}{2} = 0(1) \\ \sin \frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-1, x=0$.

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 2

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho 1 biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được 1 phương trình bậc 2 theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $3^{2x} - (2^x + 9) \cdot 3^x + 9 \cdot 2^x = 0$

Giải: Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - (2^x + 9)t + 9 \cdot 2^x = 0; \Delta = (2^x + 9)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2^x = (2^x + 9)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 2^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$+ \text{ Với } t = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$$

$$+ \text{ Với } t = 2^x \Leftrightarrow 3^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=2, x=0$.

VD2: Giải phương trình: $9^{x^2} + (x^2 - 3)3^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0$

Giải: Đặt $t = 3^{x^2}$ điều kiện $t \geq 1$ vì $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2} \geq 3^0 = 1$

Khi đó phương trình tương đương với: $t^2 + (x^2 - 3)t - 2x^2 + 2 = 0$

$$\Delta = (x^2 - 3)^2 - 4(-2x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 - x^2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$+ \text{ Với } t = 2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\log_3 2}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 - x^2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 1 - x^2 \text{ ta có nhận xét:}$$

$$\begin{cases} VT \geq 1 \\ VP \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = \pm\sqrt{\log_3 2}; x = 0$

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 3

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ trong phương trình và khéo léo biến đổi phương trình thành phương trình tích.

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

Giải: Viết lại phương trình dưới dạng: $4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{2x^2+6x+5} + 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 4^{x^2-3x+2} \\ v = 4^{2x^2+6x+5} \end{cases}, u, v > 0$$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(1-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-3x+2} = 1 \\ 4^{2x^2+6x+5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

VD2: Cho phương trình: $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m(1)$

a) Giải phương trình với $m=1$

b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{7-5x} + m \Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{(x^2-5x+6)+(1-x^2)} + m$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6} \cdot 2^{1-x^2} + m$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}, u, v > 0. \text{ Khi đó phương trình tương đương với:}$$

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow (u-1)(v-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ 2^{1-x^2} = m(*) \end{cases}$$

Vậy với mọi m phương trình luôn có 2 nghiệm $x=3, x=2$

a) Với $m=1$, phương trình (*) có dạng: $2^{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy với $m=1$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt: $x=3, x=2, x=\pm 1$

b) Để (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}. \text{ Khi đó điều kiện là:}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 4 \\ 1 - \log_2 m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \neq \frac{1}{8} \\ m \neq \frac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$$

Vậy với $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 4

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 4 là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với k ẩn phụ.

Trong hệ mới thì k-1 thì phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng.

Trường hợp đặc biệt là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x, khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu tượng trong phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f[x, \varphi(x)] = 0$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$ ta biến đổi phương trình thành hệ: $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x; y) = 0 \end{cases}$

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2^x+2} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Giải: Viết lại phương trình dưới dạng: $\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{1}{2^{1-x}+1} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Đặt: $\begin{cases} u = 2^{x-1}+1 \\ v = 2^{1-x}+1 \end{cases}, u, v > 1$

Nhận xét rằng: $u \cdot v = (2^{x-1}+1) \cdot (2^{1-x}+1) = 2^{x-1} + 2^{1-x} + 2 = u + v$

Phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \frac{8}{u} + \frac{1}{v} = \frac{18}{u+v} \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+8v=18 \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v=2 \\ u=9; v=\frac{9}{8} \end{cases}$$

+ Với $u=v=2$, ta được: $\begin{cases} 2^{x-1}+1=2 \\ 2^{1-x}+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

+ Với $u=9$ và $v=\frac{9}{8}$, ta được: $\begin{cases} 2^{x-1}+1=9 \\ 2^{1-x}+1=\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=4$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=1$ và $x=4$.

VD2: Giải phương trình: $2^{2x} - \sqrt{2^x+6} = 6$

Giải: Đặt $u = 2^x$, điều kiện $u > 0$. Khi đó phương trình thành: $u^2 - \sqrt{u+6} = 6$

Đặt $v = \sqrt{u+6}$, điều kiện $v \geq \sqrt{6} \Rightarrow v^2 = u+6$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = v + 6 \\ v^2 = u + 6 \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 = -(u - v) \Leftrightarrow (u - v)(u + v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ u + v + 1 = 0 \end{cases}$$

+ Với $u=v$ ta được: $u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = -2(1) \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

+ Với $u+v+1=0$ ta được:

$$u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ u = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} (1) \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=8$ và $x = \log_2 \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$.

BÀI 7: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có 3 hướng áp dụng:

Hướng 1: Thực hiện các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=k$

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu(giả sử đồng biến)

Bước 3: Nhận xét:

+ Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$ do đó $x = x_0$ là nghiệm

+ Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm

+ Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=g(x)$

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số $y=f(x)$ là
Là đồng biến còn hàm số $y=g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến

Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$

Bước 3: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(u)=f(v)$ (3)

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Khi đó: (3) $\Leftrightarrow u = v$ với $\forall u, v \in D_f$

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $x + 2.3^{\log_2 x} = 3$ (1)

Giải: Điều kiện $x > 0$. Biến đổi phương trình về dạng: $2.3^{\log_2 x} = 3 - x$ (2)

Nhận xét rằng:

+ Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.

+ Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.

Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x=1$ là nghiệm của phương trình (2) vì $2.3^{\log_2 1} = 3 - 1$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

VD2: Giải phương trình: $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1}=2 \quad (1)$

Giải: Điều kiện: $x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x^2-3x+2}$, điều kiện $u \geq 0$ suy ra: $x^2-3x+2 = u^2 \Leftrightarrow 3x-x^2-1 = 1-u^2$

Khi đó (1) có dạng: $\log_3(u+2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = 2$

Xét hàm số: $f(x) = \log_3(x+2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x^2} = \log_3(x+2) + \frac{1}{5} \cdot 5x^2$

+ Miền xác định $D = [0; +\infty)$

+ Đạo hàm: $f' = \frac{1}{(x+2)\ln 3} + \frac{1}{5} \cdot 2x \cdot 5x^2 \cdot \ln 3 > 0, \forall x \in D$. Suy ra hàm số tăng trên D

Mặt khác $f(1) = \log_3(1+2) + \frac{1}{5} \cdot 5 = 2$.

Do đó, phương trình (2) được viết dưới dạng:

$$f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

VD2: Cho phương trình: $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+2} = x^2 + 2mx + m$

a) Giải phương trình với $m = -\frac{4}{5}$

b) Giải và biện luận phương trình

Giải: Đặt $t = x^2 + 2mx + 2$ phương trình có dạng: $5^t + t = 5^{2t+m-2} + 2t + m - 2 \quad (1)$

Xác định hàm số $f(t) = 5^t + t$

+ Miền xác định $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $f' = 5^t \cdot \ln 5 + 1 > 0, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số tăng trên D

Vậy (1) $\Leftrightarrow f(t) = f(2t+m-2) \Leftrightarrow t = 2t+m-2 \Leftrightarrow t+m-2=0 \Leftrightarrow x^2+2mx+m=0 \quad (2)$

a) Với $m = -\frac{4}{5}$ ta được: $x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$

Vậy với $m = -\frac{4}{5}$ phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -\frac{2}{5}$

b) Xét phương trình (2) ta có: $\Delta' = m^2 - m$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$. Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$.

với $m=0$ phương trình có nghiệm kép $x=0$

với $m=1$ phương trình có nghiệm kép $x_0=-1$

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - m}$ đó cũng là nghiệm kép của (1)

Kết luận:

Với $m=0$ phương trình có nghiệm kép $x=0$

Với $m=1$ phương trình có nghiệm kép $x_0=-1$

Với $0 < m < 1$ phương trình vô nghiệm

Với $m > 1$ hoặc $m < 0$ phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - m}$

BÀI TOÁN 8: SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Với phương trình có chứa tham số: $f(x, m) = g(m)$. Chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập luận số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y=f(x, m)$ và đường thẳng (d): $y=g(m)$.

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x, m)$

+ Tìm miền xác định D

+ Tính đạo hàm y' rồi giải phương trình $y'=0$

+ Lập bảng biến thiên của hàm số

Bước 3: Kết luận:

+ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min f(x, m) \leq g(m) \leq \max f(x, m) (x \in D)$

+ Phương trình có k nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại k điểm phân biệt

+ Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (C) = \emptyset$

II. VD minh họa:

VD1: Cho phương trình: $3^{x^2-2x+2} + 2^{2(x^2-2x+2)} + x^2 - 2x = m - 2$

a) Giải phương trình với $m=8$

b) Giải phương trình với $m=27$

c) Tìm m để phương trình có nghiệm

Giải: Viết lại phương trình dưới dạng: $3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2 = m$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số:

$$y = 3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2 \text{ với đường thẳng } y=m$$

Xét hàm số $y = 3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2$ xác định trên $D=\mathbb{R}$

Giới hạn: $\lim y = +\infty$

Bảng biến thiên: vì $3 > 1$, $4 > 1$ nên sự biến thiên của hàm số phụ thuộc vào sự biến thiên của hàm số $t = x^2 - 2x + 2$ ta có:

a) Với $m=8$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

b) Với $m=27$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=0$ và $x=2$

c) Phương trình có nghiệm khi $m > 8$

VD2: Với giá trị nào của m thì phương trình: $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt

Giải: Vì $m^4 - m^2 + 1 > 0$ với mọi m do đó phương trình tương đương với:

$$|x^2 - 4x + 3| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1)$$

Đặt $\log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) = a$, khi đó: $|x^2 - 4x + 3| = a$

Phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại 4 điểm phân biệt

$$\text{Xét hàm số: } y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{ khi } x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ -x^2 - 4x + 3 & \text{ khi } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \begin{cases} 2x - 4 & \text{ khi } x < 1 \text{ hoặc } x > 3 \\ -2x + 4 & \text{ khi } 1 < x < 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

Từ đó, đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < |m| < 1$$

Vậy với $0 < |m| < 1$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

VD3: Giải và biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$

Giải: Đặt $t = 2^x, t > 0$ phương trình được viết dưới dạng:

$$t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}} = m \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}}$ với đường thẳng (d): $y = m$

Xét hàm số: $y = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}}$ xác định trên $D(0; +\infty)$

$$+ \text{Đạo hàm: } y' = \frac{1 - 3t}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}; y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

+ Giới hạn: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 1$

+ Bảng biến thiên:

Biện luận:

Với $m \leq 1$ hoặc $m > \sqrt{10}$ phương trình vô nghiệm

Với $1 < m \leq 3$ hoặc $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất

Với $3 < m < \sqrt{10}$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

CHỦ ĐỀ II: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN I: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Ta sử dụng các phép biến đổi tương đương sau:

$$\text{Dạng 1: Với bất phương trình: } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2: Với bất phương trình: } a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] \leq 0 \end{cases}$$

Chú ý: Cần đặc biệt lưu ý tới giá trị của cơ số a đối với bất phương trình mũ.

II. VD minh họa:

VD1: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$

b) $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$

Giải:

a) Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-2x}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x^2-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ x^2-2x \geq (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$

Chú ý: Để tránh sai sót không đáng có khi biến đổi bất phương trình mũ với cơ số nhỏ hơn 1 các em học sinh nên lựa chọn cách biến đổi:

$$\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{x^2-2x}} \leq 2^{x-1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2-2x} \leq x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq 2$$

b) Nhận xét rằng: $(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=1 \Rightarrow \sqrt{10}-3=(\sqrt{10}+3)^{-1}$

Khi đó bất phương trình được viết dưới dạng:

$$\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} \leq \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5}{(x-1)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $(-3; -\sqrt{5}) \cup (1; \sqrt{5})$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HOÁ VÀ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ lũy thừa người ta có thể logarit hoá theo cùng 1 cơ số cả hai vế của bất phương trình mũ. Chúng ta lưu ý 1 số trường hợp cơ bản sau cho các bất phương trình mũ:

Dạng 1: Với bất phương trình: $a^{f(x)} < b$ (với $b > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$

Dạng 2: Với bất phương trình: $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \neq 0 \\ b < 0 \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \end{cases}$

Dạng 3: Với bất phương trình: $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)} > \lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \lg a > g(x) \cdot \lg b$ hoặc có thể sử dụng logarit theo cơ số a hay b.

II. VD minh họa:

VD: Giải bất phương trình: $49 \cdot 2^{x^2} > 16 \cdot 7^x$

Giải: Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $2^{x^2-4} > 7^{x-2}$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình ta được:

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-4} > \log_2 7^{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 > (x-2) \log_2 7 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - x \log_2 7 + 2 \log_2 7 - 4 > 0$$

Ta có: $\Delta = \log_2^2 7 - 8 \log_2 7 + 16 = (\log_2 7 - 4)^2 = (4 - \log_2 7)^2$. Suy ra $f(x)=0$ có nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{\log_2 7 \pm (4 - \log_2 7)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \log_2 7 - 2 < x_1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 2$ hoặc $x < \log_2 7 - 2$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 1

I. Phương pháp:

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

II. VD minh họa:

VD1: Giải bất phương trình : $(2^x - 2)^2 < (2^x + 2)(1 - \sqrt{2^x - 1})^2$

Giải: Điều kiện $2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{2^x - 1}$, điều kiện $t \geq 0$, khi đó: $2^x = t^2 + 1$. Bất phương trình có dạng:

$$\begin{aligned}(t^2 + 1 - 2)^2 &< (t^2 + 1 + 2)(1 - t)^2 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 < (t^2 + 3)(1 - t)^2 \\ \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 - (t^2 + 3)(1 - t)^2 &< 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 [(t + 1)^2 - (t + 3)^2] < 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)^2 (2t - 2) &< 0 \Leftrightarrow (t - 1)^3 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2^x - 1} < 1 &\Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $[0; 1)$

VD2: Giải bất phương trình: $(9 + \sqrt{3} + 11\sqrt{2})^x + 2(5 + 2\sqrt{6})^x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x < 1$

Giải: Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})^x &= \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 \right]^x = \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x \right]^3 \\ (5 + 2\sqrt{6})^x &= \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \right]^x = \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x \right]^2 \\ (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x &= \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right]^x = 1\end{aligned}$$

Do đó nếu đặt $t = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$, điều kiện $t > 0$ thì $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = \frac{1}{t}$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}t^3 + 2t^2 - 2\frac{1}{t} < 1 &\Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - t - 2 < 1 \\ \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2)(t^2 + t + 1) &< 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện của t ta được: $0 < t < 1 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$.

VD3: Giải bất phương trình: $(5 + \sqrt{21})^x + (5 - \sqrt{21})^x \leq 2^{x + \log_2 5}$

Giải: Chia 2 vế bất phương trình cho $2^x > 0$ ta được: $\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x + \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x \leq 5$

Nhận xét rằng: $\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x = 1$

Nên nếu đặt $t = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x$ điều kiện $t > 0$ thì $\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$. Khi đó bất phương trình có dạng:

$$\begin{aligned}t + \frac{1}{t} \leq 5 &\Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \leq t \leq \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \leq \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x &\leq \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $[-1;1]$

VD4: Giải bất phương trình : $5^x + \frac{2 \cdot 5^x}{\sqrt{5^{2x} - 4}} > 3\sqrt{5}$

Giải: Điều kiện $5^{2x} - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > \log_5 4 \Leftrightarrow x > \log_5 2$ (*)

Đặt $u = 5^x$, điều kiện $u > 2$, khi đó bất phương trình có dạng: $u + \frac{2u}{\sqrt{u^2 - 4}} > 3\sqrt{5}$ (1)

Bình phương 2 vế phương trình (1) ta được:

$$u^2 + \frac{4u^2}{u^2 - 4} + \frac{4u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{u^2}{u^2 - 4} + 4 \cdot \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 45 \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}}, t > 0$. Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 5 \Leftrightarrow u^4 - 25u^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 > 20 \\ u^2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > \sqrt{20} \\ u < \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x > \sqrt{20} (*) \\ 5^x > \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_5 \sqrt{20} \\ \log_2 5 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\log_5 2; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\log_5 \sqrt{20}; +\infty \right)$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 2

I. Phương pháp:

Phương pháp này giống như phương trình mũ.

II. VD minh họa:

VD1: Giải bất phương trình: $4^x - 2^{x+1} + 4^{x^2} \leq 0$

Giải: Đặt $t = 2^x$ điều kiện $t > 0$

Khi đó bất phương trình có dạng: $t^2 - 2t + 4^{x^2} \leq 0$. Ta có: $\Delta' = 1 - 4^{x^2} \leq 0$

$$\text{Do đó: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4^{x^2} = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2} = 1 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

VD2: Giải bất phương trình : $9^x - 2(x+5) \cdot 3^x + 9(2x+1) \geq 0$

Giải: Đặt $t = 3^x$ điều kiện $t > 0$. khi đó bất phương trình tương đương với:

$$f(t) = t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) \geq 0. \text{ Ta có } \Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) = (x-4)^2.$$

Do đó $f(t) = 0$ có 2 nghiệm $t = 9$ hoặc $t = 2x+1$

Do đó bất phương trình có dạng: $(t-9)(t-2x-1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-9 \geq 0 \\ t-2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 9 \\ 3^x \geq 2x+1 \text{ Bernoulli} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$ hoặc $0 \leq x \leq 1$

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 3

I. Phương pháp:

Sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ trong bất phương trình và khéo léo biến đổi bất phương trình thành phương trình tích, khi đó lưu ý:

$$A.B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ và } A.B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

II. VD minh họa:

VD1: Giải bất phương trình : $6^x + 2^{x+2} \geq 4.3^x + 2^{2x}$

Giải: Viết lại bất phương trình dưới dạng: $2^x.3^x + 4.2^x - 4.3^x - 2^{2x} \geq 0$

Đặt $\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^x \end{cases}$ điều kiện $u, v > 0$. khi đó bất phương trình có dạng:

$$uv + 4v - 4u - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)(v - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v \geq 0 \\ v - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 2^x \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u - v \leq 0 \\ v - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 2^x \\ 2^x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$ hoặc $x \leq 0$

VD2: Giải bất phương trình : $2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2^{2x+1} + 4x+2}$

Giải: Điều kiện: $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2.2^{2x} + 2(2x+1)}$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = \sqrt{2x+1} \end{cases}$ điều kiện $u > 0$ và $v \geq 0$. Khi đó bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$u + v < \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow (u + v)^2 < (2u^2 + 2v^2) \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow u \neq v \Leftrightarrow 2^x \neq \sqrt{2x+1}$$

$$\text{Ta xét phương trình: } 2^x = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

VD3: Bất phương trình : $\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{5^{2x+\log_5 2} - 2.5^{x+1} + 16}$ có nghiệm là

a) $x \leq 1$

b) $x > 1$

Giải: Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{2 \cdot 5^{2x} - 10 \cdot 5^{x+1} + 16}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{2(5^x - 3)^2 + 2(5^x - 1)}$$

Điều kiện: $5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{5^x - 1} \geq 0 \\ v = 5^x - 3 \end{cases}$. Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$u + v \geq \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u + v)^2 \geq 2u^2 + 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u - v)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \sqrt{5^x - 1} = 5^x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{5^x - 1} = 5^x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \geq 3 \\ 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x=1$.

CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ ĐƯỢC GIẢI BẰNG NHIỀU CÁCH

I. ĐẶT VẤN ĐỀ :

Như vậy thông qua các bài toán trên, chúng ta đã biết được các phương pháp cơ bản để giải bất phương trình mũ và thông qua các ví dụ minh họa chúng ta cũng có thể thấy ngay một điều rằng, một bất phương trình có thể được thực hiện bằng nhiều phương pháp khác nhau. Trong mục này sẽ minh họa những ví dụ được giải bằng nhiều phương pháp khác nhau với mục đích cơ bản là:

- + Giúp các em học sinh đã tiếp nhận đầy đủ kiến thức toán THPT trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.
- + Giúp các em học sinh lớp 10 và 11 lựa chọn được phương pháp phù hợp với kiến thức của mình.

II. VD minh họa:

VD: Tìm m dương để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m + 1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m - 1} \leq 8 + 4\sqrt{3}$$

Giải: Nhận xét rằng: $\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$

Nên nếu đặt $u = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m}$ điều kiện $u > 1$

Thì $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m} = \frac{1}{u}$. Khi đó bất phương trình có dạng:

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)u + \frac{2 + \sqrt{3}}{u} \leq 4\left(2 + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq u \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m} \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 2|x-m| + m^2 + m \leq 1 \quad (1)$$

Ta có thể lựa chọn 1 trong 2 cách giải sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Đặt $t = x - m$, bất phương trình có dạng: $t^2 + 2(|t| + mt) + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \quad (2)$

+ Với $t \geq 0$ thì $(2) \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2(m+1)t + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \quad (3)$

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 0$

$f(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 0$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$ hoặc $t_1 \leq 0 \leq t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ \frac{s}{2} \geq 0 \\ af(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2m^2 - m + 1 \geq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \geq 0 \\ -m - 1 \geq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -1 \\ m \leq -1 \\ -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

+ Với $t \leq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow g(t) = t^2 + 2(m-1)t + 2m^2 + m - 1 \leq 0$ (3)

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(t)=0$ có ít nhất (1) nghiệm $t \leq 0$ $\left(\begin{matrix} t_1 \leq t_2 \leq 0 \\ t_1 \leq 0 \leq t_2 \end{matrix} \right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ ag(0) \geq 0 \\ \frac{s}{2} \leq 0 \\ ag(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 2m^2 - m + 1 \geq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \geq 0 \\ -m - 1 \leq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq 1 \\ -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $t = |x - m|$, điều kiện $t \geq 0$. Bất phương trình có dạng: $h(t) = t^2 + 2t + 2mx + m - 1 \leq 0$ (4)

Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min h(t) \leq 0 (t \geq 0)$ (5)

Nhận xét rằng $h(t)$ là 1 Parabol có đỉnh $t = -1 < 0$, do đó $\min h(t) = h(0) (t \geq 0)$. Do đó:

(5) $\Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$. Vậy bất phương trình có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{1}{2}$

CHỦ ĐỀ 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. Phương pháp:

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để giải các hệ mũ là việc sử dụng các ẩn phụ. Tùy theo dạng của hệ mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa

Bước 2: Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ bậc nhất 2 ẩn, hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II và hệ đẳng cấp bậc 2)

Bước 3: Giải hệ nhận được

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ ban đầu.

II. VD minh họa:

VD1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 2^y = 8 \end{cases} \quad (I)$$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u, v > 0$. Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 9u^2 + 4v^2 = 17 \\ 6u + 3v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2 - 6u + 1 = 0 \\ v = \frac{8-6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{1}{3} \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có cặp nghiệm $(-1; 1)$

VD2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} m3^{\sqrt{x}+1} + 2^y = 2m \\ 3^{\sqrt{x}+1} + m2^y = m+1 \end{cases}$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Tìm m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

Giải: Đặt $\begin{cases} u = 3^{\sqrt{x}+1} \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u \geq 3$ và $v > 0$. Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} mu + v = 2m \\ u + mv = m+1 \end{cases} \quad (II). \quad \text{Ta có:}$$

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; \quad D_u = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1; \quad D_v = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m$$

a) Hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$\begin{cases} D \neq 0 \\ u = \frac{D_u}{D} \geq 3 \\ v = \frac{D_v}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ \frac{2m+1}{m+1} \geq 3 \\ \frac{m}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ -2 \leq m < -1 \\ m < -1 \vee m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1$$

Vậy hệ có nghiệm khi $-2 \leq m < -1$.

a) Với m nguyên ta có $m = -2$ khi đó hệ có nghiệm là:

$$\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}+1} = 3 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = -2$ hệ có nghiệm nguyên $(0; 1)$

VD3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9^{2\cot gx + \sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 81^{\cot gx} = 2m \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 1$

b) Tìm m để hệ có cặp nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Giải: Biến đổi hệ về dạng:
$$\begin{cases} u + v = 2m \\ u \cdot v = -3 \end{cases}$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình $f(t) = t^2 - 2mt - 3 = 0$ (1)

a) Với $m = 1$ ta được:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \xleftrightarrow{u > 0; v < 0} \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\sin y} = 3 \\ -9^{2\cot gx} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{1}{2} \\ \cot gx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l\pi; y = y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi; y = y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}; k, l \in \mathbb{Z}$$

Vậy với $m = 1$ hệ có 2 họ cặp nghiệm.

VD4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3 \cdot 2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}$$

Giải: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:
$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y = 4 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} u = 4^{x^2-1} \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u \geq \frac{1}{4}$ và $v > 0$.

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:
$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1(1) \\ v^2 - 4uv = 4(2) \end{cases} \quad (II)$$

Để giải hệ (II) ta có thể sử dụng 1 trong 2 cách sau:

Cách 1: Khử số hạng tự do từ hệ ta được: $4u^2 - 13uv + 3v^2 = 0$ (3)

Đặt $u=tv$, khi đó: $(3) \Leftrightarrow v^2(4t^2 - 13t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$

+ Với $t=3$ ta được $u=3v$ do đó: $(2) \Leftrightarrow -8v^2 = 4$ vô nghiệm.

+ Với $t = \frac{1}{4}$ ta được $u = \frac{1}{4}v \Leftrightarrow v = 4u$ do đó: $(2) \Leftrightarrow 4u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(1;2)$ và $(-1;2)$

Cách 2: Nhận xét rằng nếu $(u;v)$ là nghiệm của hệ thì $u \neq 0$

Từ (2) ta được $u = \frac{v^2 - 4}{3v}$ (4). Thay (4) vào (1) ta được: $2v^4 - 31v^2 - 16 = 0$ (5)

Đặt $t = v^2, t > 0$ ta được: $(5) \Leftrightarrow 2t^2 - 31t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 16 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow v^2 = 16 \Leftrightarrow v = 4 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(1;2)$ và $(-1;2)$

VD5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{2|x|+1} = 3 \cdot 2^{|x|} = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = 2^{2|x|} - 2 \end{cases}$$

Giải: Đặt $u = 2^{|x|}$ điều kiện $u \geq 1$. Hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2u^2 - 3u = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow 2(u^2 - y^2) - 3(u - y) = -(u^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(u - y)(u + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ y = 1 - u \end{cases}$$

+ Với $u=y$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} u = y \\ 2u^2 - 3u = u^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ u^2 - 3u + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = y = 1 \\ u = y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ 2^{|x|} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

+ Với $y=1-u$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 - u \\ 2u^2 - 3u = (1 - u)^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - u \\ u^2 - 3u + 1 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm là $(0;1)$, $(1;2)$ và $(-1;2)$.

VD6: Giải phương trình:
$$\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \quad (1) \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $xy > 0$

+ Giải (1): Đặt $t = \log_2(xy) \Rightarrow xy = 2^t$. Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$9^t - 3 = 2 \left(2^t \right)^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{2t} - 3 = 2.3^t \Leftrightarrow 3^{2t} - 2.3^t - 3 = 0 \quad (3)$$

Đặt $u = 3^t, u > 0$, khi đó phương trình (3) có dạng:

$$u^2 - 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1(1) \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^t = 3 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow xy = 2$$

+ Giải (2): $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 2xy + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 3 = 0 \quad (4)$$

Đặt $v = x + y$, khi đó phương trình (4) có dạng:

$$v^2 + 2v - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Với $x + y = 1$ ta được: $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - X + 2 = 0$ vô nghiệm

Với $x + y = -3$, ta được: $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1;2) và (2;1)

VD7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \quad (1) \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \quad (2) \end{cases}$

Giải:

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x^2 + 1 + xy = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x + y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \end{cases}$

+ Với $x=0$ thay vào (1) ta được: $2 + 2^{y-2} = 3.2^y \Leftrightarrow 8 + 2^y = 12.2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2 \frac{8}{11}$

+ Với $\begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1 - 3x \end{cases}$ thay $y = 1 - 3x$ vào (1) ta được: $2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3.2 \quad (3)$

Đặt $t = 2^{3x+1}$ vì $t \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{4}$

$$(3) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - \sqrt{8} \quad (1) \\ t = 3 + \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 3 + \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \left[\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1 \right] \Rightarrow y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8})$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2 \frac{8}{11} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \left[\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1 \right] \\ y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8}) \end{cases}$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2: Từ hệ ban đầu chúng ta xác định được 1 phương trình hệ quả theo 1 ẩn hoặc cả 2 ẩn, giải phương trình này bằng phương pháp hàm số đã biết

Bước 3: Giải hệ mới nhận được

II. VD minh họa:

VD1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x(1) \\ x^2 + xy + y^2 = 12(2) \end{cases}$$

Giải: Xét phương trình (1) dưới dạng: $3^x + x = 3^y + y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (3) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (2;2) và (-2;-2)

VD2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 2^y + 2y = 3 + x \end{cases}$$

Giải: Biến đổi tương đương hệ về dạng:
$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 3 + x = 2^y + 2y \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3x + 3 = 2^y + 3y + 3 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3t + 3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó hệ thành:
$$\begin{cases} x = y \\ 2^x + 2x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2^x = 3 - x(2) \end{cases} \quad (II)$$

+ Giải (2): Ta đoán được $x=1$ vì $2^1 = 3-1$. Vế trái là một hàm đồng biến còn vế phải là hàm số nghịch biến do vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình này. Khi đó hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=y=1$.

VD3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) (1) \\ x^2 + y^2 = 2(2) \end{cases}$$

Giải: Thay (2) vào (1) ta được:

$$2^x - 2^y = (y-x)(x^2 + y^2 + xy) \Leftrightarrow 2^x - 2^y = y^3 - x^3$$

$$\Leftrightarrow 2^x - x^3 = 2^y - y^3(3)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (3) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1;1) và (-1;-1)

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

Nhiều bài toán bằng cách đánh giá tính tế dựa trên các:

+ Tam thức bậc hai

+ Tính chất hàm số mũ

+ Bất đẳng thức

+

Ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của hệ hoặc biến đổi hệ về dạng đơn giản hơn.

II. VD minh họa:

VD: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |2^x - 3^{y^2-1}| + 2^x = 2 + 3^{y^2-1} \\ 2^x \cdot 3^{y^2-1} = 1 \end{cases}$$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 3^{y^2-1} \end{cases}$ điều kiện $u > 0$ và $v \geq \frac{1}{3}$. Hệ có dạng:
$$\begin{cases} |u - v| + u + v = 2(1) \\ uv = 1(2) \end{cases} \quad (I)$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\Leftrightarrow 4 = (u - v)^2 + (u + v)^2 + 2|u^2 - v^2| = 2(u^2 + v^2) + 2|u^2 - v^2| \geq 2(u^2 + v^2) \geq 4uv = 4$$

Khi đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2|u^2 - v^2| = 0 \\ u = v \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 3^{y^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (0;1) và (0;-1)

CHỦ ĐỀ 4: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ
BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Dựa vào các phép toán biến đổi tương đương cho các bất đẳng thức trong hệ bất phương trình, ta có thể tìm được nghiệm của hệ. Phép toán thường được sử dụng là: $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \xrightarrow{+} A + C > B + D$

Việc lựa chọn phương pháp biến đổi tương đương để giải hệ bất phương trình mũ thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ có nghĩa

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi tương đương chuyển hệ về 1 bất phương trình đại số đã biết cách giải.

Bước 3: Kiểm tra tính hợp lệ cho nghiệm tìm được, từ đó đưa ra lời kết luận cho hệ.

Với hệ bất phương trình mũ chứa tham số thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ có nghĩa

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi tương đương (phương pháp thế được sử dụng khá nhiều trong phép biến đổi tương đương) để nhận được từ hệ 1 bất phương trình 1 ẩn chưa tham số.

Bước 3: Giải và biện luận theo tham số bất phương trình nhận được.

Bước 4: Kiểm tra tính hợp lệ cho nghiệm tìm được, từ đó đưa ra kết luận cho hệ.

Chú ý: Đối với hệ bất phương trình mũ 1 ẩn thường được giải từng bất phương trình của hệ, rồi kết hợp các tập nghiệm tìm được để đưa ra kết luận về nghiệm cho hệ bất phương trình.

II. VD minh họa:

VD1: Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2^{2x^2+1} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0 & (1) \\ 2x - 5 < \sqrt{-x^2 + 4x - 3} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Giải (1): $2 \cdot 2^{2x^2} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 4 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{x^2-x} - 9 + 4 \cdot 2^{x-x^2} = 0$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ điều kiện $t \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Khi đó phương trình có dạng:

$$2t + \frac{4}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} (1) \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} (3)$$

$$\text{Giải (2): } \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -x^2+4x-3 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ -x^2+4x-3 > (2x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 1 \leq x \leq 3 \\ x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2-24x+28 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < \frac{5}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \\ 2 < x < \frac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{14}{5} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được nghiệm của hệ là $x=2$.

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. Phương pháp:

Việc lựa chọn đặt ẩn phụ thích hợp cho hệ phương trình mũ, ta có thể chuyển hệ về các hệ đại số đã biết cách giải. Cụ thể ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức của hệ có nghĩa.

Bước 2: Lựa chọn ẩn phụ cho hệ và điều kiện cho các ẩn phụ.

Bước 3: Giải hệ nhận được từ đó suy ra nghiệm $x; y$

Bước 4: Kiểm tra tính hợp lệ cho nghiệm tìm được, từ đó đưa ra lời kết luận cho hệ.

II. VD minh họa:

$$\text{VD: Giải hệ bất phương trình: } \begin{cases} \sqrt{2^{2x}-2} = 2^y - 1 \\ \log_3(2^{2x} - 2^{2y})^2 \leq 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases}$; $u, v > 0$. Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{u^2-2} = v-1 \\ \log_3(u^2-v^2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u^2-2} = v-1 \\ \log_3|u^2-v^2| \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u^2-2} = v-1 \quad (1) \\ u \neq v; |u^2-v^2| \leq 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1) ta biến đổi: } \begin{cases} v-1 \geq 0 \\ u^2-2 = (v-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 1 \\ u^2-v^2 = -2v+3 \quad (3) \end{cases}$$

Giải (2) bằng cách thay (3) vào (2) ta được:

$$\begin{cases} -2v+3 \neq 0 \\ |-2v+3| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq \frac{3}{2} \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y \neq \frac{3}{2} \\ 1 \leq 2^y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \log_2 \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ là các cặp số } (x; y) \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} y \neq \log_2 \frac{3}{2}; 1 \leq y \leq 2 \\ x = \pm \sqrt{(y-1)^2 + 2} \end{cases}$$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

I. Phương pháp:

Trong phần này chúng ta sử dụng phương pháp cần và đủ đã biết để giải các hệ bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

II. VD minh họa:

VD: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} + 2^{y+1} \leq m-1 \\ 2^{2y} + 2^{2x} + 2^{x+1} \leq m-1 \end{cases}$$

Giải: Trước hết cần $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Đặt: $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases}$, điều kiện $u, v > 0$. Hệ được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + 2v + 1 \leq m \\ u^2 + v^2 + 2u + 1 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (v+1)^2 \leq m(1) \\ v^2 + (u+1)^2 \leq m(2) \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm $(u_0; v_0)$ suy ra $(v_0; u_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $u_0 = v_0$.

$$\text{Khi đó: } u_0^2 + (u_0 + 1)^2 \leq m \Leftrightarrow 2u_0^2 + 2u_0 - m + 1 \leq 0 \quad (1)$$

Ta cần (1) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = 1/2$

$$\text{Điều kiện đủ: Với } m = \frac{1}{2} \text{ hệ có dạng: } \begin{cases} u^2 + (v+1)^2 \leq \frac{1}{2} \\ v^2 + (u+1)^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (II)$$

$$\Rightarrow u^2 + (v+1)^2 + (u+1)^2 + v^2 \leq 1 \Leftrightarrow 2u^2 + 2u + 2v^2 + 2v + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(v\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow u = v = -\frac{1}{2}$$

Nhận xét rằng $u = v = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ (II) suy ra $x = y = -1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 1/2$.

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

Nhiều bất phương trình đánh giá tình tế dựa trên:

- + Tam thức bậc 2
- + Các bất đẳng thức cơ bản như: Côsi, Bunhiacôpxki.....
- + Tính chất trị tuyệt đối

.....

Ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của nó.

II. VD minh họa:

$$\text{VD1: Giải hệ bất phương trình: } \begin{cases} \sqrt{2^{x+y}} + \sqrt{1-2^y} \leq \sqrt{2^y} \quad (1) \\ 2\sqrt{2^{x+y}-2^y} + \sqrt{2^y} = -1 \quad (2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Giải: Điều kiện: } \begin{cases} 1-2^y \geq 0 \\ 2^{x+y}-2^y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y \leq 1 \\ 2^y(2^x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y \leq 1 \\ 2^x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Giải (1): } \Leftrightarrow \sqrt{2^x} + \sqrt{\frac{1-2^y}{2^y}} \leq 1 \xleftarrow{(*)} \begin{cases} 2^x = 1 \\ 1-2^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) thấy thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

$$\text{VD2: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \quad (1) \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \quad (2) \end{cases}$$

Giải:

Giải (1) ta được: $5^{-(y+4)} = 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} \geq 3^{-\log_3 5} = 5^{-1} \Rightarrow -(y+4) \geq -1 \Leftrightarrow y \leq -3$ (3)

Giải (2) với $y \leq -3$ ta được: $-4y + (y-1) + (y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $y = -3$, khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = -3 \\ x = 3; y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(-1; -3)$ và $(3; -3)$.

CHƯƠNG II: PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH-BẤT PHƯƠNG TRÌNH- HỆ LOGARIT.

CHỦ ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HOÁ VÀ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi lôgarit người ta có thể lôgarit hoá theo cùng 1 cơ số cả 2 vế của phương trình, bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Phương trình: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$

Chú ý: Việc lựa chọn điều kiện $f(x) > 0$ hoặc $g(x) > 0$ tùy thuộc vào độ phức tạp của $f(x)$ và $g(x)$.

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Phương trình được viết dưới dạng:

$$2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x = 2\log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1) \Leftrightarrow [\log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)] \log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1} - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2x+1 - 2\sqrt{2x+1} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2\sqrt{2x+1} = x+2 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \begin{cases} x = 1 \\ 4(2x+1) = (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=4$.

VD2: Giải phương trình: $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

Giải: Điều kiện $x > 0$. Ta biến đổi về cùng cơ số 3:

$$\log_4 x = \log_4 3 \cdot \log_3 x$$

$$\log_5 x = \log_5 3 \cdot \log_3 x \quad \text{khi đó phương trình có dạng:}$$

$$\log_3 x + \log_4 3 \cdot \log_3 x = \log_5 3 \cdot \log_3 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x (1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 1

I. Phương pháp:

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng 1 ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Nếu đặt $t = \log_a x$ với $x > 0$ thì: $\log_a^k x = t^k$; $\log_x a = \frac{1}{t}$ với $0 < x \neq 1$

Dạng 2: Ta biết rằng: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ do đó nếu đặt $t = a^{\log_b x}$ thì $t = x^{\log_b a}$. Tuy nhiên trong nhiều bài toán có chứa $a^{\log_b x}$, ta thường đặt ẩn phụ dần với $t = \log_b x$.

VD minh họa:

VD1: Cho phương trình: $\log_2 (5^x - 1) \cdot \log_4 (2 \cdot 5^x - 2) = m \quad (1)$

a) Giải phương trình với $m=1$

b) Xác định m để phương trình có nghiệm $x \geq 1$

Giải: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2} \log_2 (5^x - 1) \cdot \log_2 [2(5^x - 1)] = m \Leftrightarrow \log_2 (5^x - 1) \cdot [1 + \log_2 (5^x - 1)] = 2m$$

Điều kiện: $5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Đặt $t = \log_2 (5^x - 1)$. Khi đó phương trình có dạng: $t(1+t) = 2m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - 2m = 0 \quad (2)$

$$\text{a) Với } m=1 \text{ ta được: } t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (5^x - 1) = 1 \\ \log_2 (5^x - 1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 1 = 2 \\ 5^x - 1 = 2^{-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 3 \\ 5^x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 3 \\ x = \log_5 \frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy với $m=1$ phương trình có 2 nghiệm $x = \log_5 3$; $x = \log_5 \frac{5}{4}$

b) Với $x \geq 1 \Rightarrow 5^x - 1 \geq 5 - 1 = 4 \Leftrightarrow \log_2 (5^x - 1) \geq \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow t \geq 2$

Vậy để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq t_1 \leq t_2 (*) \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{cases} \quad (\text{loại } (**))$

$$\Leftrightarrow a \cdot f(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Vậy với $m \geq 3$ thỏa mãn mãn điều kiện đầu bài.

VD2: Giải phương trình: $\log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 |x - \sqrt{x^2 - 1}|$

Giải: Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$$

Nhận xét rằng: $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{x^2 - 1}) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$$\log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

sử dụng phép biến đổi cơ số: $\log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2 6 \cdot \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1})$
và $\log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_3 6 \cdot \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1})$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$$\log_2 6 \cdot \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1)$$

Đặt $t = \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1})$. Khi đó (1) có dạng: $t(\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot t - 1 = 0 \end{cases} +$

Với $t=0 \Rightarrow \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

+ Với $\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot t - 1 = 0$

$$\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \Leftrightarrow \log_2 6 \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} = 3^{-\log_6 2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x = \frac{1}{2} (3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 2

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho 1 biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được 1 phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biết số Δ là 1 số chính phương.

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $\lg^2 x - \lg x \cdot \log_2 (4x) + 2 \log_2 x = 0$

Giải: Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\lg^2 x - (2 + \lg^2 x) \lg x + 2 \lg_2 x = 0$

Đặt $t = \lg x$, khi đó phương trình tương đương với: $t^2 - (2 + \log_2 x) \cdot t + 2 \log_2 x = 0$

Ta có: $\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 8 \log_2 x = (2 - \log_2 x)^2$ suy ra phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg x = \frac{\lg x}{\lg 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=100$ và $x=1$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 3

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức lôgarit trong phương trình và biến đổi phương trình thành phương trình tích.

II. VD minh họa:

Giải phương trình: $\log_2 [x(x-1)^2] + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$

Giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x(x-1)^2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \text{ Biến đổi phương trình về dạng:}$$

$$\log_2 \frac{(x^2 - x)^2}{x} + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2 (x^2 - x) + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$$

Đặt $\begin{cases} u = \log_2 (x^2 - x) \\ v = \log_2 x \end{cases}$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$2u + v - uv - 2 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x^2 - x) = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(L) \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=2$ và $x=4$.

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 4

I. Phương pháp:

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 4 là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với k ẩn phụ.

Trong hệ mới thì k-1 phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$

Giải: Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ v = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases}$

Nhận xét rằng: $u + v = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$
 $= \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2 1 = 0$

Khi đó phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ u + 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ 2v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -1 \\ \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5/4$.

VD2: Giải phương trình: $\sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} + 2\sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 6 \quad (1)$

Giải: Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0 \\ 3 + \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \leq 2^5 \Leftrightarrow 2^2 - 4x \\ 5 - \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow 2 - \sqrt{29} \leq x \leq 2 + \sqrt{29} (*)$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} \\ v = \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} \end{cases}$ điều kiện $u, v \geq 0$. Khi đó phương trình được chuyển thành:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} u+2v=6 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ (6-2v)^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ 5v^2-24v+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ v=2 \\ v=\frac{14}{5} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} v=2; u=2 \\ v=\frac{14}{5}; v=\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}=2 \\ \sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}=\frac{14}{5} \\ \sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}=\frac{2}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2-4x+5)=1 \\ \log_2(x^2-4x+5)=\frac{121}{25} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+5=2 \\ x^2-4x+5=2^{\frac{121}{25}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+5-2^{\frac{121}{25}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ x=3 \\ x=2 \pm \sqrt{2^{\frac{121}{25}}-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 5

I. Phương pháp:

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 5 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f[x, \varphi(x)] = 0$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ: $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x; y) = 0 \end{cases}$

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$ (1)

Giải: Đặt $u = \log_2 x$. Khi đó phương trình thành: $u^2 + \sqrt{u+1} = 1$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} u+1 \geq 0 \\ 1-u^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1$

Đặt $v = \sqrt{u+1}$ điều kiện $0 \leq v \leq \sqrt{2} \Rightarrow v^2 = u+1$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = 1-v \\ v^2 = 1+u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u+v) \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ u-v+1=0 \end{cases}$$

Khi đó:

$$+ \text{ Với } v=-u \text{ ta được: } u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} (1) \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+ \text{ Với } u-v+1=0 \text{ ta được: } u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm.

BÀI TOÁN 7: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có 3 hướng áp dụng sau:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=k$ (1)

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Nhận xét:

+ Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$ do đó $x = x_0$ là nghiệm

+ Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm

+ Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy $x=x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=g(x)$ (2)

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số $y=f(x)$ là đồng biến còn hàm số $y=g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến.

Xác định x_0 sao cho $f(x_0)=g(x_0)$

Bước 3: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=x_0$

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(u)=f(v)$ (3)

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Khi đó (3) $\Leftrightarrow u = v$ với $\forall u, v \in D_f$

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình: $\log_2(x^2 - 4) + x = \log_2[8(x + 2)]$

Giải: Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2(x^2 - 4) - \log_2(x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 3 - x \Leftrightarrow \log_2(x - 2) = 3 - x$$

Nhận xét rằng:

+ Hàm số $y = \log_2(x - 2)$ là hàm đồng biến

+ Hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến

+ Vậy phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

+ Nhận xét rằng $x=3$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

VD2: Giải phương trình: $\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2\log_2(x^2 - 2x - 4)$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{5} \\ x > 1 + \sqrt{5} \end{cases}$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 3) = \log_2(x^2 - 2x - 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_4(x^2 - 2x - 4) \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 - 2x - 4$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_5(t + 1) = \log_4 t \quad (2)$

Đặt $y = \log_4 t \Rightarrow t = 4^y$ phương trình (2) được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} t = 4^y \\ t + 1 = 5^y \end{cases} \Rightarrow 4^y + 1 = 5^y \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1 \quad (3)$$

Hàm số $f(y) = \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y$ là hàm nghịch biến

Ta có:

+ Với $y=1$, $f(1)=1$ do đó $y=1$ là nghiệm của phương trình (3)

+ Với $y>1$, $f(y)<f(1)=1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm.

+ Với $y<1$, $f(y)>f(1)=1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm

Vậy $y=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

Suy ra: $y=1 \Leftrightarrow t=4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=4$; $x=-2$

VD3: Giải phương trình: $x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5} \quad (1)$

Giải: Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Khi đó phương trình có dạng: $(2^t)^2 + 3^t = (2^t)^{\log_2 5} \Leftrightarrow 4^t + 3^t = 5^t$

Chia cả 2 vế cho $5^t \neq 0$ ta được: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1 \quad (2)$

Nhận xét rằng:

+ Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến

+ Vế phải của phương trình là một hàm hằng

+ Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

+ Nhận xét rằng $t=2$ là nghiệm của phương trình (2) vì $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

Với $t=2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy $x=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình

VD4: Giải phương trình: $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2 \quad (1)$

Giải: Điều kiện $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}; u \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$

Khi đó (1) có dạng: $\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - u^2} = 2 \quad (2)$

Xét hàm số $f(u) = \log_3(u+2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = \log_3(u+2) + \frac{1}{5} \cdot 5^{u^2}$

Miền xác định $D = [0; +\infty)$

Đạo hàm: $f'(u) = \frac{1}{(u+2)\ln 3} + \frac{1}{5} \cdot 2u \cdot 5^{u^2} \cdot \ln 5 > 0, \forall u \in D$.

Suy ra hàm số đồng biến trên D

Mặt khác $f(1) = \log_3(1+2) + \frac{1}{5} \cdot 5 = 2$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

BÀI TOÁN 8: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

II. VD minh họa:

VD1: Giải phương trình : $\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) = 1 \quad (1)$

Giải:

Cách 1: Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \leq \sqrt{(1+1)(4-x+x+5)} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \leq 1$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1} = \frac{\sqrt{x+5}}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất}$$

Cách 2: Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5})^2 = 4-x+x+5+2\sqrt{(4-x)(x+5)} \leq 9+(4-x)+(x+5) = 18$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \leq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \leq 1$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{4-x} = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình}$$

CHỦ ĐỀ 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi loga người ta có thể mũ hoá theo cùng 1 cơ số cả 2 vế bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Với bất phương trình: $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

II. VD minh họa:

VD1: Giải bất phương trình: $\log_x(3x-1) > \log_x(x^2+1)$

Giải: Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x > 1 \\ 3x-1 > x^2+1 \\ 0 < x < 1 \\ 0 < 3x-1 < x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2-3x+2 < 0 \\ 0 < x < 1 \\ 3x-1 > 0 \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 < x < 2 \\ 0 < x < 1 \\ x > \frac{1}{3} \\ x > 2 \vee x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right) \setminus \{1\}$

VD2: Giải bất phương trình: $\log_x(5x^2-8x+3) > 2$

Giải:

Cách 1: Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x > 1 \\ 5x^2-8x+3 > x^2 \\ 0 < x < 1 \\ 0 < 5x^2-8x+3 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 4x^2-8x+3 > 0 \\ 0 < x < 1 \\ 5x^2-8x+3 > 0 \\ 4x^2-8x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Cách 2: Bất phương trình tương đương với: $\log_x(5x^2-8x+3) > \log_x x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 5x^2-8x+3 > 0 \\ x^2 > 0 \\ (x-1)[5x^2-8x+3-x^2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LÔGARIT

I. Phương pháp:

II. VD minh họa:

VD1: Giải bất phương trình: $2\lg\left[\sqrt{5(x-1)}\right] > \lg(5-x) + 1$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5 \quad (*)$

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\lg\left[5(x-1)^2\right] > \lg[10.(5-x)] \Leftrightarrow 5(x-1)^2 > 10.(5-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow 3 < x < 5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $3 < x < 5$

VD2: Giải bất phương trình: $\frac{\log_3(35-x^3)}{\log(5-x)} > 3$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ \log_a(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Bất phương trình tương đương với: $\log_{5-x}(35-x^3) > 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5-x > 1 \\ 35-x^3 > (5-x)^3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 5-x < 1 \\ 0 < 35-x^3 < (5-x)^3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 4 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 < x < 5 \\ x < \sqrt[3]{35} \\ x^2-5x+6 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $2 < x < 3$.

VD3: Giải bất phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}x < \log_{\frac{1}{3}}\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right) \quad (1)$

Giải: Điều kiện $x > 0$. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x} > \log_{\frac{1}{3}}\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1+\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0 \rightarrow 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x > \left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x > 1+2\sqrt[3]{x-1}+\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow x-1-\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2-2\sqrt[3]{x-1} > 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0} t > -1$. Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^3-t^2-2t > 0 \Leftrightarrow t(t^2-t-2) > 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) > 0 \xrightarrow{t+1>0} t(t-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 2 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 8 \\ x-1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \begin{cases} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 1

I. Phương pháp:

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

II. VD minh họa:

Giải bất phương trình: $\log_2^4(x) - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{\frac{1}{2}}^2(x)$

Giải: Điều kiện $x > 0$. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_2^4(x) - \log_{2^{-1}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [\log_2 x^3 - \log_2 8]^2 + 9[\log_2 32 - \log_2 x^2] < 4\log_2^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [3\log_2 x - 3]^2 + 9[5 - 2\log_2 x] < 4\log_2^2(x)$$

Đặt $t = \log_2 x$ ta được:

$$t^4 - (3t - 3)^2 + 9(5 - 2t) < 4t^2 \Leftrightarrow t^4 - 13t^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow 4 < t^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < t < -2 \\ 2 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < \log_2 x < -2 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4} \\ 4 < x < 8 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$

Chú ý: Trong ví dụ trên các em cần lưu ý khi thực hiện các phép biến đổi cho 2 toán tử:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) = \left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = \left[-\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = \left[\log_2\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = [\log_2 x^3 - \log_2 8]^2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(x) = \left[\log_{\frac{1}{2}}(x)\right]^2 = [-\log_2(x)]^2 = \log_2^2(x)$$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 2

I. Phương pháp:

II. VD minh họa:

Giải bất phương trình: $\log_3^2 x - \log_2(8x) \cdot \log_3 x + \log_2 x^3 < 0$ (1)

Giải: Điều kiện $x > 0$

Biến đổi phương trình tương đương về dạng: $\log_3^2 x - (3 + \log_2 x) \log_3 x + 3\log_2 x < 0$

Đặt $t = \log_3 x$ khi đó bất phương trình có dạng: $f(t) = t^2 - (3 + \log_2 x) \cdot t + 3\log_2 x < 0$ (2)

Ta có: $\Delta = (3 + \log_2 x)^2 - 12\log_2 x = (3 - \log_2 x)^2$. Do đó $f(t) = 0$ có nghiệm: $\begin{cases} t = 3 \\ t = \log_2 x \end{cases}$

Do đó (2) tương đương với: $(t - 3)(t - \log_2 x) < 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 3)(\log_3 x - \log_2 x) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 3 > 0 \\ \log_3 x - \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 3 \\ \log_3 x < \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là tập $(0;1) \cup (27;+\infty)$

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ- DẠNG 3

I. Phương pháp:

Sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ trong bất phương trình và biến đổi bất phương trình thành bất phương trình tích, khi đó lưu ý:

$$A.B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ và } A.B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

II. VD minh họa:

Giải bất phương trình: $\log_3 x \cdot \log_2 x < 2\log_3 x - \log_2 \frac{x}{4}$

Giải: Điều kiện $x > 0$ (*)

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $\log_3 x \cdot \log_2 x - 2\log_3 x - \log_2 x - 2 < 0$

Đặt $\begin{cases} u = \log_3 x \\ v = \log_2 x \end{cases}$. Khi đó bất phương trình có dạng:

$$uv - 2u - v - 2 < 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-1 > 0 \\ v-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_2 x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4 \text{ thỏa mãn (*)}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $3 < x < 4$.

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

II. VD minh họa:

VD1: Giải bất phương trình: $\log_2 (\sqrt{x-2} + 4) \leq \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right)$ (1)

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ (*)

Ta có nhận xét sau:

$$+) \sqrt{x-2} + 4 \geq 4 \Leftrightarrow \log_2 (\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow VT \geq 2$$

$$x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq 9$$

+))

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right) \leq \log_3 9 = 2 \Leftrightarrow VP \leq 2$$

Do đó bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

VD2: Giải bất phương trình: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \\ -1 < x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$

Ta có: $A = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$$

$$B = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

+ Với $-1 < x < 0$; $VT < 0$; $VP > 0$. Bất phương trình (1) sai

+ Với $0 < x < 1/2$; $VT > 0$; $VP < 0$. Bất phương trình (1) đúng

+ Với $1 < x < 3/2$; $VT > 0$; $VP < 0$. Bất phương trình (1) đúng.

+ Với $x > 3/2$; $VT < 0$; $VP < 0$. Bất phương trình (1) tương đương với:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

Kết hợp với trường hợp đang xét ta được $x > 5$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$

CHỦ ĐỀ 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG

I. Phương pháp:

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa

Bước 2: Sử dụng các phép thế để nhận được từ hệ 1 phương trình theo ẩn x hoặc y (đôi khi có thể là theo cả 2 ẩn x, y)

Bước 3: Giải phương trình nhận được bằng các phương pháp đã biết đối với phương trình chứa căn thức

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

II. VD minh họa:

VD1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (\sqrt{x+1}) 3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} & (1) \\ y + \log_3 x = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện:
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 4 \\ x > 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta được: $y = 1 - \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = 3^{1-\log_3 x} = \frac{3}{3^{\log_3 x}} = \frac{3}{x} \quad (3)$

Thế (3) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1}-1) \frac{3}{x} &= \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x}+1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4-x} &= x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=0 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm (3;0).

VD2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x+y) - \log_3(2x-y) = 1 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x+y > 0 \\ 2x-y > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \log_2(4x^2 - y^2) &= \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(2x+y) + \log_2(2x-y) = 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x+y) &= 1 - \log_2(2x-y) \end{aligned}$$

Thế vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned} 1 - \log_2(2x-y) - \log_3 2 \cdot \log_2(2x-y) &= 1 \Leftrightarrow (1 + \log_3 2) \log_2(2x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x-y) &= 0 \Leftrightarrow 2x-y=1 \end{aligned}$$

Vậy ta được hệ mới:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ thoả mãn điều kiện } (*)$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm.

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. Phương pháp:

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để giải các hệ lôgarit là việc sử dụng các ẩn phụ. Tùy theo dạng của hệ mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức của hệ có nghĩa.

Bước 2: Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ đối xứng loại I, loại II và hệ đẳng cấp bậc hai)

Bước 3: Giải hệ nhận được

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ ban đầu.

II. VD minh họa:

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 4^{\frac{x+y}{y-x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

$$\text{Giải: Điều kiện: } \begin{cases} x-y > 0 \\ x+y > 0 \\ x, y \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Biến đổi hệ phương trình về dạng: } \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 5 \\ \log_3(x^2 - y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 5(1) \\ x^2 - y^2 = 3(2) \end{cases}$$

Giải (1): Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{t}$. Khi đó (1) có dạng:

$$2\left(t + \frac{1}{t}\right) = 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2x \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x=2y \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 4y^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=-1 \Rightarrow x=-2(1) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } y=2x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 3 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm (2;1)

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho 2 biểu thức của hệ có nghĩa

Bước 2: Từ hệ ban đầu chúng ta xác định được 1 phương trình hệ quả theo 1 ẩn hoặc theo cả 2 ẩn, giải phương trình này bằng phương pháp hàm số đã biết.

Bước 3: Giải hệ mới nhận được.

II. VD minh họa:

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1 + \log_3 y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1 + \log_3 x \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $x, y > 0$. Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x+3) = 2(1 + \log_3 y) \\ \log_2(y+3) = 2(1 + \log_3 x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+3) = 2(1 + \log_3 y) \\ 2(1 + \log_3 x) = \log_2(y+3) \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \log_2(x+3) + 2\log_3 x = \log_2(y+3) + 2\log_3 y \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \log_2(t+3) + 2\log_3 t$$

$$\text{Miền xác định } D = (0; +\infty).$$

Đạo hàm $f'(t) = \frac{1}{(t+3)\ln 2} + \frac{2}{t.\ln 3} > 0, \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy phương trình (1) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Khi đó hệ (I) trở thành:
$$\begin{cases} x = y \\ \log_2(x+3) = 2(1+\log_3 x) \end{cases} \quad (II)$$

+ Giải (2): $\Leftrightarrow x+3 = 2^{2(1+\log_3 x)} \Leftrightarrow x+3 = 4.2^{\log_3 x^2} \Leftrightarrow x+3 = 4.2^{\log_3 2 \cdot \log_2 x^2}$
 $\Leftrightarrow x+3 = 4.(x^2)^{\log_3 2} \Leftrightarrow x+3 = 4.x^{\log_3 4} \Leftrightarrow x^{1-\log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4} = 4 \quad (3)$

Xét hàm số $g(x) = x^{1-\log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4}$

Miền xác định $D = (0; +\infty)$

Đạo hàm: $g'(x) = (1-\log_3 4).x^{-\log_3 4} - 3\log_3 4.x^{-1-\log_3 4} < 0 \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến

Vậy phương trình (3) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Nhận xét rằng nếu $x=1$ là nghiệm của phương trình bởi khi đó:

$1^{1-\log_3 4} + 3.1^{-\log_3 4} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ đúng

Khi đó hệ (II) trở thành:
$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1;1)

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

II. VD minh họa:

VD1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \\ x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải: Điều kiện $x, y > 0$

*) Giải (1) ta có nhận xét sau:

- Nếu $x > y \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 y$, khi đó:
$$\begin{cases} VT_{(1)} > 0 \\ VP_{(1)} < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm}$$

- Nếu $x < y \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 y$, khi đó:
$$\begin{cases} VT_{(1)} < 0 \\ VP_{(1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm}$$

- Vậy $x=y$ là nghiệm của (1)

Khi đó hệ có dạng:
$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy hệ có 1 cặp nghiệm $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

VD2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(x+y) = x+y-1 \\ \log_{x+y+2}(xy+1) = x+y-1 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x+y > 0 \\ xy+1 > 0 \\ 0 < x+y+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ xy+1 > 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ với việc sử dụng ẩn phụ $t=x+y>0$, ta được: $\log_2 t = t-1$

Đặt $u = \log_2 t \Rightarrow t = 2^u$ khi đó phương trình có dạng:

$$2^u = u+1 \xrightarrow{\text{Bernoulli}} \begin{cases} u=0 \\ u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 t = 0 \\ \log_2 t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

+ Với $x+y=1$ hệ có dạng: $\begin{cases} x+y=1 \\ \log_3(xy+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; y=1 \\ x=1; y=0 \end{cases}$

+ Với $x+y=2$ hệ có dạng: $\begin{cases} x+y=2 \\ \log_4(xy+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 2t + 3 = 0$ vô nghiệm

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm $(0;1)$ và $(1;0)$

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1) $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 6$

2) $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 27 = 0$

3) $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{\frac{x}{2}}$

4) $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$

5) $\frac{7^{2x}}{100^x} = 6.(0.7)^x + 7$

6) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

7) $4x^2 + x.3^x + 3^{1+x} = 2x^2.3^x + 2x + 6$

8) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

9) $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$

10) $7.3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

11) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$

30) $4^x + 2^x - 6 = 0$

31) $25^x - 6.5^{x+1} + 5^3 = 0$

32) $9^x + 5.3^x + 7 = 0$

33) $9^x - 25.3^x - 54 = 0$

34) $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

35) $3^{2(x+1)} - 82.3^x + 9 = 0$

36) $7^{3x} + 9.5^{2x} = 5^{2x} + 9.7^{3x}$

37) $9^{x^2-1} - 36.3^{x^2-3} + 3 = 0$

38) $9^{x^2+1} - 3^{x^2+1} - 6 = 0$

39) $4^{x+\frac{3}{2}} + 9^x = 6^{x+1}$

40) $5^{2x} = 3^{2x} + 2.5^x + 2.3^x$

41) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$

- 12) $4^x = 8^{2x-1}$
- 13) $5^{2x+1} - 3.5^{2x-1} = 110$
- 14) $3.4^x + 2.9^x = 5.6^x$
- 15) $3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0$
- 16) $7.3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
- 17) $6.9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x+6}} + 6.4^{\frac{1}{x}} = 0$
- 18) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$
- 19) $5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} = 0$
- 20) $2^{2x-3} = 4^{x^2+3x-5}$
- 21) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$
- 22) $x + \log_2(9 - 2^x) = 3$
- 23) $(2+\sqrt{3})^x + (7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^x = 4(2+\sqrt{3})$
- 24) $25^x + 15^x = 2.9^x$
- 25) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10.2^{\sqrt{x-2}}$
- 26) $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$
- 27) $2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$
- 28) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$
- 29) $2^x = 128$
- 42) $2^x . 5^{x-1} = \frac{1}{5} 10^{2-x}$
- 43) $(3+\sqrt{5})^x + 16(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$
- 44) $3.16^x + 2.81^x = 2.36^x$
- 45) $(2+\sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2-\sqrt{2})^{\log_2 x} = 1+x^2$
- 46) $2^x(\sqrt{x^2+4}-x-2) = 4\sqrt{x^2+4}-4x-8$
- 47) $x^{\log_2 9} = x^2 . 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$
- 48) $3^x . 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$
- 49) $2.x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$
- 50) $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}$
- 51) $(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 4(x-2)^3$
- 52) $4^{\lg 10x} - 6^{\lg x} = 2.3^{\lg 100x}$
- 53) $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x = -2x+6$
- 54) $5.3^{2x-1} - 7.3^{x-1} + \sqrt{1-6.3^x} + 9^{x+1} = 0$
- 55) $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$
- 56) $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$
- 57) $3^x + 5^x = 6x+2$
- 58) $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$

PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

- 1) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$
- 2) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$
- 3) $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$
- 4) $\lg x - \frac{1}{2}\lg\left(x - \frac{1}{2}\right) = \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\lg\left(x + \frac{1}{8}\right)$
- 5) $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$
- 6) $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$
- 7) $\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$
- 8) $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2)^2 = 2$
- 42) $2.\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$
- 43) $\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)^2 + \log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}-x) = 6$
- 44) $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2(4x) = 3$
- 45) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + \log_3(3x^4) = 3$
- 46) $\log_x 2 - \log 4x + \frac{7}{6} = 0$
- 47) $\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3.\log_9 225$
- 48) $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{x+3} 2} = 2 + \log_2(x+1)$

$$\begin{aligned}
9) & 4\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} + 2\log_{4x} x^2 = 3\log_{2x} x^3 \\
10) & \log_{\frac{3}{x}} 2 - \log_3^2 x = 1 \\
11) & \log_{\frac{x}{2}} x^2 + 40\log_{4x} \sqrt{x} - 14\log_{16x} x^3 = 0 \\
12) & \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x \\
& = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \cdot \log_5 x + \log_3 x \cdot \log_5 x \\
13) & \log_3(3x) \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x} \\
14) & \lg(\lg x) + \lg[\lg(x^3) - 2] = 0 \\
15) & \log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2 \\
16) & \log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0 \\
17) & 2 \cdot \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x \\
18) & \log_{x^2-x-2} x = 1 \\
19) & \log_x 4x^2 \cdot \log_2^2 x = 12 \\
20) & \log_x(x+1) - \lg 4,5 = 0 \\
21) & \left| \log_2 \left(x + \frac{3}{x} \right) + \log_2 \left(x - \frac{3}{x} \right) \right| = 3 \\
22) & x + \lg(x^2 - x - 6) = 4 + \lg(x+2) \\
23) & \log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0 \\
24) & \log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_x 3\sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}} = \sqrt{6} \\
25) & \log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} (x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}} (x^2 - 2x - 3) \\
26) & 2 \cdot \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 [\sqrt{2x+1} - 1] \\
27) & 3 \cdot \sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0 \\
28) & \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{x/2}} = \sqrt{\log_2 x} \\
29) & \lg(x+10) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 2 - \lg 4 \\
30) & 3x^2 - 2^{\log_2(x^3+1)} = \log_2(x^2+1) - \log_2 x \\
31) & (x+3) \log_3^2(x+2) + 4(x+2) \log_3(x+2) = 16 \\
32) & \log_{(x+3)} (3 - \sqrt{1-2x+x^2}) = \frac{1}{2} \\
33) & \frac{\log_2 36}{\log_2 4} + \log_2 81 = \log_2 3^{x^2-4x-15} \\
34) & \log_{x+1} (2x^2 + 1) = 2 \\
35) &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
49) & \log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3) \\
50) & \log_2 x + 2\log_7 x = 2 + \log_2 x \cdot \log_7 x \\
51) & \log_4(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_{20}(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\
52) & \log_2(9^x + 5 \cdot 3^x) = 4 \\
53) & \log_x[9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 2] = 3x + 1 \\
54) & \log_x[\log_3(9^x - 6)] = 1 \\
55) & \log_2(2^x + 4) - x = \log_2(2^x + 12) - 1 \\
56) & \log_2(x+1) = \log_{x+1} 16 \\
57) & (2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2 \\
58) & \log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \\
59) & \log_2(\log_3(\log_2 x)) = 1 \\
60) & (x^2 - 1) \lg^2(x^2 + 1) + 4\sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \lg(x^2 + 1) = 0 \\
62) & \log_3^2(x+1) + (x-5) \log_3(x+1) - 2x + 6 = 0 \\
63) & \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\
64) & \log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5 \\
65) & \log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1 \\
66) & \log_5 x + \log_3 x = \log_5 3 \cdot \log_9 225 \\
67) & \log_9(x+8) - \log_3(x+26) + 2 = 0 \\
68) & x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4 \\
69) & \log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 9 \\
70) & \log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) - 2 = 0 \\
71) & (x^2 - 1) \lg^2(x^2 + 1) + 4\sqrt{2(x^2 - 1)} \lg(x^2 + 1) = 0 \\
72) & \log_5(x^2 + 1) + \log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_5(x+2) - 2\log_{\frac{1}{25}}(x-2) \\
73) & (x+2) \log_3^2(x+1) + 4(x+1) \log_3(x+1) - 16 = 0 \\
74) & \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3 \\
75) & \log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x} \\
76) & \log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+5}(6x^2 + 23x + 21) = 4 \\
77) &
\end{aligned}$$

$$36) \log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$$

$$37) 4.\log_9 x + \log_x 3 = 3$$

$$38) \log_2 \sqrt{6-x} = \log_2 (3 - \sqrt{x-1})$$

$$39)$$

$$\log_2 (x^2 + 3x + 2) + \log_2 (x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3$$

$$40) (\sqrt{x-1} + \sqrt{1+x} - 2)\log_2 (x^2 - x) = 0$$

$$41) \log_5 (5^x - 1) \cdot \log_{25} (5^{x+1} - 5) = 1$$

$$x^2 \cdot \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}} (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$$

$$78) \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 x^3 + \log_2 x - 3$$

$$79) \begin{aligned} & (x-3)^2 \cdot \log_2 (x-1) + 2\log_{x-1} \sqrt{2} \\ &= (x-3)^2 \cdot \log_{x-1} 2 + 2\log_2 \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

$$80) \log_2^2 x + x \log_7 (x+3) = \left[\frac{x}{2} + 2\log_7 (x+3) \right] \log_2 x$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

$$1) 2^x + 2^{7-x} \leq 9$$

$$2) \left[\frac{1}{3} \right]^{\frac{2}{x}} + 3 \left[\frac{1}{3} \right]^{\frac{1}{x}+1} = 12$$

$$3) 16^{\log_a x} \geq 4 + 3 \cdot x^{\log_a 4}$$

$$4) (\sqrt{5}+1)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3(\sqrt{5}-1)^{-x^2+x}$$

$$5) 3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$$

$$6) 3^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 3^{x-2} \geq 1$$

$$7) 4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_4 8$$

$$8) 4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-1)}{3}} > 52$$

$$9) 2^{2x+1} - 21 \left[\frac{1}{2} \right]^{2x+3} + 2 \geq 0$$

$$10) 9 \cdot 4^{\frac{-1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{-1}{x}} < 4 \cdot 9^{\frac{-1}{x}}$$

$$11) 8 \cdot 3^{\sqrt{x+4}\sqrt{x}} + 9^{\sqrt[4]{x+1}} \geq 9^{\sqrt{x}}$$

$$12) (x^2 + x + 1)^x < 1$$

$$13) 6 \cdot 9^{2x^2-x} - 13 \cdot 6^{2x^2-x} + 6 \cdot 4^{2x^2-x} \leq 0$$

$$14) \sqrt{2-5x-3x^2} + 2x > 2x \cdot 3^x \sqrt{2-5x-3x^2} + 4x^2 \cdot 3^x$$

$$15) 4x^2 + 3^{\sqrt{x}} \cdot x + 3^{1+\sqrt{x}} < 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x + 6$$

$$16) (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-1)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$17) 25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34 \cdot 15^{2x-x^2}$$

$$18) 5^{(\log_5 x)^2} + x^{\log_5 x} \leq 10$$

$$19) 5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$$

$$20) (0,12)^{\log_{x-1} x} \geq \left[\frac{5\sqrt{3}}{3} \right]^{\log_{(x-1)} (2x-1)}$$

$$21) 3^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 3^{x-2} \geq 1$$

$$22) 5^{\frac{\log_1 \log_2 (3^{2 \cdot \log_3 x} - 3x + \log_3 9)}{2}} < 1$$

$$23) 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$$

$$24) 2^{\log_2 x} \cdot 3^{\log_2 (x-1)} \cdot 5^{\log_2 (x-2)} \geq 12$$

$$25) 9^{\sqrt{x^2-2x-1}} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x-1}-1} \leq 2$$

$$26) x^{\log_2 x+4} \leq 32$$

$$27) 4x^2 + x \cdot 2^{x^2+1} + 3 \cdot 2^{x^2} > x^2 \cdot 2^{x^2} + 8x + 12$$

$$28) 3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

$$1) \log_2 \frac{x^2 + 8x - 1}{x+1} \leq 2$$

$$2) \log_2 (2^x + 1) + \log_3 (4^x + 2) \leq 2$$

$$3) \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3x + 2) \geq -1$$

$$4) \sqrt{\log_9 (3x^2 + 4x + 2)} + 1 > \log_3 (3x^2 + 4x + 2)$$

$$5) \log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} \geq \frac{-1}{3}$$

$$47) \log_x 2(2 + \log_2 x) > \frac{1}{\log_{2x} 2}$$

$$48) \log_x \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) > 1$$

$$49) \frac{1 + \log_3^2 x}{1 + \log_3 x} > 1$$

$$50) \frac{3}{4} \log_2 \sqrt[3]{x} - 2 \log_4 \sqrt{x} > 1$$

$$6) \log_4 \frac{2x-1}{x-1} < -\frac{1}{2}$$

$$7) \log_x \left(x - \frac{1}{4} \right) \geq 2$$

$$8) \log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{x^3}{8} \right) + 9 \log_2 \left(\frac{32}{x^2} \right) < 4 \cdot \log_{\frac{1}{2}}^2 x$$

$$9) 2x + \log_2 (x^2 - 4x + 4) > 2 - (x+1) \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$$

$$10) \log_{x^2} (4x+5) \leq 1$$

$$11) \log_2 x + \log_{2x} 8 \leq 4$$

$$12)$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1 \right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1 \right) \leq 0$$

$$13) (4x^2 - 16x + 7) \log_3 (x-3) \geq 0$$

$$14) \log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} (x-3)$$

$$15) \sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} < 1$$

$$16) \log_2 x + \log_3 x < 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x$$

$$17) \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}$$

$$18) \log_2 (x^2 + 3x) \leq 2$$

$$19) \log_5 (x^2 - 11x + 43) < 2$$

$$20) \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 4x + 6) < -2$$

$$21) \log_{\frac{1}{2}} (x+1) \leq \log_2 (2-x)$$

$$22) \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} < -\log_2 (x+1)$$

$$23) \log_4 (18 - 2^x) \cdot \log_2 \left[\frac{18 - 2^x}{8} \right] \leq -1$$

$$24) \log_x [\log_9 (3^x - 9)] < 1$$

$$25) \log_{\frac{1}{3}} (x-1) + \log_{\frac{1}{3}} (x+1) + \log_{\sqrt{3}} (5-x) < 1$$

$$26) \log_{3x-x^2} (3-x) > 1$$

$$27) \log_x (x^2 + x - 2) > 1$$

$$28)$$

$$\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12} \right) \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2 \right) \log_x$$

$$29) \log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2$$

$$51) \frac{\log_5 (35 - x^3)}{\log_5 (5 - x)} > 3$$

$$52) \log_{x^2-x+1} \sqrt{2x^2 - 2x - 1} < \frac{1}{2}$$

$$53) \log_7 \sqrt{x} - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}} x > 2$$

$$54) \frac{\log_2 (x+1)^2 - \log_3 (x+1)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0$$

$$55) \frac{\lg (x^2 - 3x + 2)}{\lg x + \lg 2} > 2$$

$$56) \log_{x\sqrt{3}} (5x^2 - 18x + 16) > 2$$

$$57) \log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$$

$$58) \log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0$$

$$59) \log_x \left(x - \frac{1}{4} \right) \geq 2$$

$$60) 2x + \log_2 (x^2 - 4x + 4) > 2 - (x+1) \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$$

$$61) \log_{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} 2 \leq \log_{\sqrt{x+1}} 2$$

$$62) 2 \cdot \log_{25}^2 (x-1) \geq \log_5 \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}-1} \right) \log_{\frac{1}{5}} (x-1)$$

$$63) \sqrt{\log_4 (2x^2 + 3x + 2)} + 1 > \log_2 (2x^2 + 3x + 2)$$

$$64) \log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{x^3}{8} \right) + 9 \log_2 \left(\frac{32}{x^2} \right) < 4 \log_{\frac{1}{2}}^2 x$$

$$65) \sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5} (\log_4 x^2 - 3)$$

$$66) \log_{\frac{1}{2}} (9^{x-1} + 1) - 2 > \log_{\frac{1}{2}} (3^{x-1} + 7)$$

$$a. \log_8 (x^2 - 4x + 3) \leq 1$$

$$b. |\log_3 x| - \log_3 x - 3 < 0$$

$$c. \log_{\frac{1}{3}} \left[\log_4 (x^2 - 5) \right] > 0$$

$$d. \log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 6x + 8) + 2 \log_5 (x-4) < 0$$

$$e. \log_{\frac{1}{3}} x + \frac{5}{2} \geq \log_x 3$$

$$f. \log_x \left[\log_9 (3^x - 9) \right] < 1$$

$$g. \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$$

$$30) =$$

$$31) \log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x - 1}{16}\right) \leq \frac{3}{4}$$

$$32) \log_{0,3}(\sqrt{x+5} - x + 1) > 0$$

$$33) \log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$$

$$34) \frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4 + 11)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} > 0$$

$$35) (\log_9 x)^2 \geq \left(\log_3 \sqrt{x - \frac{1}{4}} \right)^2$$

$$36) \log_{x^2} \left(\frac{4x-5}{x-2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$37) \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt[3]{2-x})$$

$$38) \frac{3}{2} \log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2} \log_2 x > 1$$

$$39) \frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0$$

$$40) \log_2 \sqrt{x^2 + 1} < \log_2(-2x - 2)$$

$$41) \frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(x+2)}{x}$$

$$42) \frac{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}{\sqrt{2x - x^2 + 8}} < 0$$

$$43) \sqrt{1 - 9 \cdot \log_{\frac{1}{8}}^2 x} > 1 - 4 \log_{\frac{1}{8}} x$$

$$44) \log_x [\log_2(4^x - 6)] \leq 1$$

$$45) \log_3 x - \log_5 x < \log_3 x \cdot \log_5 x$$

$$46) \frac{\log_2(x^2 - 9x + 8)}{\log_2(3-x)} < 2$$

$$h. \log_{\frac{1}{3}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$$

$$i. \log_2(x+3) \geq 1 + \log_2(x-1)$$

$$j. 2 \log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \frac{2}{3}$$

$$k. \log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) \geq 0$$

$$l. \log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$$

$$m. \log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x-5|} \geq 0$$

$$n. \log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$$

$$o. \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$$

$$p. \log_{3x-x^2}(3-x) > 1$$

$$q. \log_{\frac{3x}{x^2+1}} \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \right) \geq 0$$

$$r. \log_{\frac{x+6}{3}} \left(\log_2 \frac{x-1}{x+2} \right) > 0$$

$$s. \log_2^2 x + \log_2 x \leq 0$$

$$t. \log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}$$

$$u. \sqrt{\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 9} \geq 2 \log_3 x - 3$$

$$v. \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 4 \log_2 \sqrt{x}} < \sqrt{2} (4 - \log_{16} x^4)$$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGA

I. Hệ phương trình mũ.

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x^{y+4x} = y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases} & 10) \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases} \quad 11) \begin{cases} (x^4 + y) \cdot 3^{y-x^4} = 1 \\ 8(x^4 + y) - 6^{x^4-y} = 0 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} 4^{\frac{x+y}{y-x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases} & 12) \begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases} \quad 13) \begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y^{\log_y(y-3x)} = 1 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{1}{y}} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ \frac{x+3y}{x} = \frac{2x}{y} - 4 \end{cases} & 14) \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + xy + 1} = \sqrt{x+1} \end{cases} \\
 4) \begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases} & 15) \begin{cases} 2x + xy + y = 14 \\ \log_{(x+1)}(y+2) - \log_{y+2}(x+1) = \frac{8}{3} \end{cases} \\
 5) \begin{cases} xy = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2 \end{cases} & 16) \begin{cases} (3-2\sqrt{2})^x + (1+\sqrt{2})^y = 4 \\ (3+2\sqrt{2})^y + (1+\sqrt{2})^x = 4 \end{cases} \\
 6) \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases} & 17) \begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases} \quad 18) \begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1 \end{cases} \\
 7) \begin{cases} y^{2 \cdot \log_y x} = 3 + 4y \\ \log_x xy = \log_y x^2 \end{cases} & 19) \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases} \quad 20) \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases} \\
 8) \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -19 \end{cases} & 9) \begin{cases} x + y = 5^{\frac{x-y}{3}} \\ 5^{\frac{x-y}{3}} = 5 \cdot 3^{x-y-3} \end{cases}
 \end{array}$$

II. Hệ phương trình lôgarit.

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2 + xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases} & 15) \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases} & 16) \begin{cases} 2 \cdot \log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2 + \log_2 3 \\ \log_7(x+y) = 1 \end{cases} & 17) \begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x+3y) \\ \log_4(xy+1) - \log_4(4y^2 + 2y - 2x + 4) = \log_4 \frac{x}{y} - 1 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \\ xy = 8 \end{cases} & 18) \begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} & 19) \begin{cases} 4^{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases} \\
 6) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} &
 \end{array}$$

$$7) \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1) \cdot 3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ \log_3 x + y = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 y) \\ \log_4(\log_2 x) = \log_2(\log_4 x) \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x + xy + y = 14 \\ \log_{(x+1)}(y+2) - \log_{y+2}(x+1) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2 \\ \log_y(3y+2x) = 2 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \log_x(3x+5y) + \log_y(3y+5x) = 4 \\ \log_x(3x+5y) \cdot \log_y(3y+5x) = 4 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{1}{2} \log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 5 \cdot \log_2 x - \log_4 y^2 = -8 \\ 5 \cdot \log_2 x^3 - \log_4 y = -9 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ (2y^2 - y + 12) \cdot 3^x = 81y \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \log_2 xy = 4 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + xy + \frac{3}{2} = 2^y \\ (x^2 y + 2x)^2 - 2x^2 y - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \lg x + \lg y = 1 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \lg_3 x + \lg_3 y = 1 + \lg_3 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + 3 \lg 2 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3 \end{cases} \quad 26) \begin{cases} \lg_4 x - \lg_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \frac{x+y}{4^y x} = 32 \\ \lg_3(x+y) = 1 - \lg_3(x-y) \end{cases} \quad 28) \begin{cases} \log_x xy = \log_y x^2 \\ y^{2 \log_y x} = 4y + 3 \end{cases}$$

$$1) \quad (A-07) \quad 2 \log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2 \quad \left(\frac{3}{4} < x \leq 3 \right)$$

$$2) \quad (D3-05) \log_2 \frac{x+3}{x-2} + \log_4(x^2 + 4x + 4) > -\log_2 3 \quad (x > 2 \vee x < -4)$$

$$3) \quad (D2-06) \quad 2(\log_2 x + 1) \log_4 x + \log_2 \frac{1}{4} = 0 \quad (x = 2 \vee x = \frac{1}{4})$$

$$4) \quad (B2-03) \log_{0.5} x + 2 \log_{0.25}(x-1) + \log_2 6 \leq 0 \quad (x \geq 3)$$

$$5) \quad \log_2 |x-2| + \log_4 |x+5| + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0 \quad \begin{cases} x = -6; 3; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 6; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$6) \quad \log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0 \quad \begin{cases} x = -6; 3; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 6; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$7) \quad \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x) \quad (x = 3 \vee x = -3 + \sqrt{12})$$

$$8) \quad \log_9(x+3)^2 - \log_{\frac{1}{3}} |x-2| - \log_3 2 < 1 \quad (-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$$

$$9) \quad 2^{\log_{\sqrt{3}} |x+1|} \cdot 5^{\log_3 |x+1|} < 400 \quad (-10 < x < 8)$$

$$10) \quad (B1-04) \frac{2^{x-1} + 4x - 16}{x-2} > 4 \quad (x < 2 \vee x > 4)$$

$$11) \quad (A1-04) \log_{\frac{\pi}{4}} [\log_2(x + \sqrt{2x^2 - x})] < 0 \quad (x > 1 \vee x < -4)$$

$$12) \quad (B2-04) \log_3 x > \log_x 3 \quad (x > 3 \vee \frac{1}{3} < x < 1)$$

- 13) (D-03) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$ ($x = -1 \vee x = 2$)
- 14) (D2.05) $9^{x^2-2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3..$ ($1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$)
- 15) (B2-06) $9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0$ ($x = 1 \vee x = -2$)
- 16) (A.06) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$ ($x = 1$)
- 17) (D-06) $2^{x+x^2} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ ($x = 0 \vee x = 1$)
- 18) (CĐHQ-05) $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$ ($x > 0$)
- 19) (B-07) $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$ ($x = \pm 1$)
- 20) (D2-03) $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$ ($x = 1$)
- 21) (B-06) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$ ($2 < x < 4$)
- 22) (B-02) $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$ ($\log_9 73 < x \leq 2$)
- 23) (D-07) $\log_2\left(4^x + 15 \cdot 2^x + 27\right) + 2\log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$ ($x = \log_2 3$)
- 24) (D1-06) $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$ ($x = 1, y = -\frac{p}{2} - 1 + k2\pi$)
- 25) (D1-06) $\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6$ ($x = \log_3 10 \vee x = \log_3 \frac{28}{27}$)
- 26) (D1-02) $16\log_{27x^3} x - 3\log_{3x} x^2 = 0$ ($x = 1$)
- 27) (A1-02) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) \geq \log_{0,5}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$ ($x \geq 2$)
- 28) (A2-04) $2 \cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$ ($0 < x \leq 2 \vee x \geq 4$)
- 29) (A2-03) $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1} + 1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$ ($x \leq 2$)
- 30) (D1-03) $f(x) = x \log_x 2$ Giãi bpt $f'(x) \leq 0$ ($0 < x \leq e \wedge x \neq 1$)
- 31) (B3-03) $3^x + 2^x = 3x + 2$ ($x = 0 \vee x = 1$)
- 32) $x^{\log_2 9} = x^2 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$ ($x = 2$)
- 33) $x^{\log_5 3} + 4^{\log_5 x} = x$ ($x = 25$)
- 34) $\log_2(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3(x^2 - 5x + 7) \leq 2$ ($1 \leq x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{5+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 4$)
- 35) (A-08) $\lg_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \lg_{x+1}(2x-1)^2 = 4$ ($x = 2; x = \frac{5}{4}$)
- 36) (B-08) $\lg_{0,7} \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$ ($-4 < x < 3$)
- 37) (D-08) $\lg_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$ ($x \in (-\infty, -\sqrt{2}-1] \cup [2, \sqrt{2}-1)$)
- 38) (A1-08) $\lg_{\frac{1}{3}}(\lg_2 \frac{2x+3}{x+1}) \geq 0$ ($x < -1$)
- 39) (A1-08) $e^{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \tan x$ ($x = \pi/4 + k\pi$)
- 40) (A2-08) $3 + \frac{1}{\lg_3 x} = \lg_x(9x - \frac{6}{x})$ ($x = \sqrt{2}$)
- 41) (B1-08) $2 \lg_2(2x + 2) + \lg_{\frac{1}{2}}(9x - 1) = 1$ ($x = 1; x = \frac{3}{2}$)
- 42) (B2-08) $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x \notin 0$ ($x \notin \lg_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$)

- 43)(D1-08) $2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \neq 0$ $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$
- 44)(D1-07) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$
- 45)(D2-07) $\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$ $x = 1$
- 46)(D2-07) $2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$ $x = 0; \pm 1$
- 47)(A1-07) $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$ $0 < x \leq \frac{1}{2} \cup x > 1$
- 48)(A2-07) $\log_4 (x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$ $x = \frac{5}{2}$
- 49)(B1-07) $\log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) = 2$ $x = 2$
- 50)(B2-07) $(2 + \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$ $x = \frac{1}{3}; x = 81$