

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ CÁC ỨNG DỤNG

A. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp:

1. Để xác định nguyên hàm của hàm số $f(x)$, Chúng ta cần chỉ ra được hàm số $F(x)$ sao cho: $F'(x) = f(x)$.

- Áp dụng bảng các nguyên hàm cơ bản, các hàm số sơ cấp .
- Nếu gặp dạng căn thức đưa về dạng số mũ phân theo công thức: $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}, (m \neq 0)$
- Nếu gặp dạng $\frac{P(x)}{x^n}$ thực hiện phép chia theo công thức:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, (m > n); \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}, (m < n).$$

- Công thức đổi biến số (loại 2):

Tích phân dạng: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ Đặt $g(x) = u \Rightarrow g'(x) dx = du$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du.$$

2. Một số dạng cơ bản:

1. Sử dụng công thức cơ bản:

1. **Dạng:** $\int (ax+b)^\alpha dx (\alpha \neq -1, a \neq 0)$ đặt $u = ax + b \Rightarrow du = adx \Rightarrow dx = \frac{1}{a} du$

$$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)a} + C$$

2. **Dạng:** $\int (ax^n + b)^\alpha x^{n-1} dx, (a \neq 0, \alpha \neq -1)$ đặt

$$u = ax^n + b \Rightarrow du = a \cdot n \cdot x^{n-1} dx \Rightarrow x^{n-1} dx = \frac{1}{an} du$$

$$\int (ax^n + b)^\alpha x^{n-1} dx = \frac{1}{an} \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{na(\alpha+1)} + C = \frac{(ax^n + b)^{\alpha+1}}{na(\alpha+1)} + C$$

3. **Dạng:** a). $\int \cos^\alpha x \sin x dx (\alpha \neq -1)$ (Đặt

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow \int \cos^\alpha x \sin x dx = -\int u^\alpha du = \frac{-1}{(\alpha+1)} \cos^{\alpha+1} x + C$$

b). $\int \sin^\alpha x \cos x dx (\alpha \neq -1)$ (Đặt

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \int \sin^\alpha x \cos x dx = \int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} \sin^{\alpha+1} x + C$$

4. **Dạng:** $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C (a \neq 0)$

Nếu gặp: $\frac{P(x)}{ax+b}$ với bậc $P(x) \geq 1$: làm bài toán chia.

5. **Dạng:** $\int \frac{dx}{\cos^2 x(a+btgx)}$ Đặt

$$u = a + btgx \Rightarrow du = \frac{bdx}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{b} du; \int \frac{dx}{\cos^2 x(a+btgx)} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{b} \ln|a+btgx| + C$$

2. **Công thức:**

$$\int a^{u(x)} u'(x) dx = \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

3. **Công thức đổi biến số (loại 1):**

Tích phân dạng: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ Đặt $g(x) = u \Rightarrow g'(x) dx = du$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

4. **Công thức :**

$$a). \int \frac{du}{u^a - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C. (a \neq 0)$$

$$b). \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + k} \right| + C$$

5. **Công thức :**

$$\int \sqrt{x^2 + k} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + k}}{2} + \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$$

3. **Một số dạng thường gặp:**

1. Tích phân dạng: 1). $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ 2). $\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2 + bx + c}$ 3). $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ 4). $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Tuỳ vào mỗi dạng áp dụng các công thức tính tích phân chỉ trong bảng sau:

	Tử số bậc nhất	Tử số hằng số
Mẫu số không căn	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
Mẫu số có căn	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 + k} \right + C$

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Sử dụng hằng đẳng thức:

$$ax^2 + bx = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right]$$

4. Tích phân của các phân thức hữu tỉ:

$$\frac{ax+b}{cx^3+dx^2+ex} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-m} + \frac{C}{x-n}$$

Giải dạng này ta có hai cách:

- Cách 1: Đồng nhất hai vế: Cho tất cả các hệ số chứa x cùng bậc bằng nhau.
- Cách 2: Gán cho x những giá trị bất kỳ. Thường thì ta chọn giá trị đó là nghiệm của mẫu số

5. Tích phân của các hàm số lượng giác:

1. Dạng:

$$\int \cos^n x dx, \int \sin^n x dx, 1). \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, 2). \int \cos^n x dx$$

Phương pháp:

$$\diamond \quad n = \text{chẵn : hạ bậc} \quad \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\diamond \quad n \text{ lẻ:}$$

$$\text{Viết: } \cos^{2p+1} x dx = \cos^{2p} x \cos x dx = (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx$$

$$\text{Đặt } u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

2. Dạng: $\int \sin^m u \cos^n u du$

a. m, n cùng chẵn: hạ bậc.

b. m, n lẻ (một trong hai số lẻ hay cả hai cùng lẻ).

❖ **Nếu m lẻ:** Ta viết: $\sin^m u = \sin^{m-1} u \sin u$ thay

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u \quad \text{và} \quad \sin^m u = (1 - \cos^2 u)^{\frac{m-1}{2}} \sin u$$

❖ **Nếu m, n lẻ:** làm như trên cho số mũ nào bé

3. Dạng: $\int \tan^n x dx$ hay $\int \cot^n x dx$

$$\text{Chú ý: } d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

❖ Tương tự:

$$d(\cot x) = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) dx \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$\diamond \text{ Ngoại trừ: } \int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \ln |\cos x| + C \quad (u = \cos x)$$

$$\text{Để tính: } \int \tan^n x dx$$

Phương pháp:

Làm lượng $(\tan^2 x + 1)$ xuất hiện bằng cách viết:

$$\begin{aligned} * \operatorname{tg}^{2n} x &= \operatorname{tg}^{2n-2} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) - \operatorname{tg}^{2n-4} (\operatorname{tg}^2 x + 1) + \dots + (-1)^{n-1} (\operatorname{tg}^2 x + 1) + (-1)^n 1 \\ * \operatorname{tg}^{2n-1} x &= \operatorname{tg}^{2n-3} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) - \operatorname{tg}^{2n-5} (\operatorname{tg}^2 x + 1) + \dots + (-1)^{n-2} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) + (-1)^{n-1} \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

4. **Dạng:** $\int (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx$ hay $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}$

Ta viết: $\int (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{n-1} (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx$

Đặt $u = \operatorname{tg} x$ $du = (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx \Rightarrow \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)^n dx = \int (u^2 + 1)^{n-1} du$

Chú ý: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^n dx$

5. **Dạng:** $\int \frac{\operatorname{tg}^m x}{\cos^n x} dx$, or $\int \frac{\operatorname{cotg}^m x}{\sin^n x} dx$

Phương pháp:

❖ Nếu n chẵn : Thay

$$\frac{1}{\cos^n x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{n}{2}}; \Rightarrow \int \frac{\operatorname{tg}^m x dx}{\cos^n x} = \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{n}{2}} dx = \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{n}{2}-2} (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx$$

Đặt: $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx \Rightarrow \int \frac{\operatorname{tg}^m x}{\cos^n x} dx = \int u^m (1 + u^2)^{\frac{n}{2}-2} du$

❖ Nếu m lẻ và n lẻ: $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$ Đặt $u = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow du = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$

Thay:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow \int \frac{\operatorname{tg}^m x}{\cos^n x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^{n-1} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx = \int (u^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u^{n-1} du$$

6. **Dạng:** $\int \sin mx \cos nx dx$; $\int \sin mx \sin nx dx$; $\int \cos mx \cos nx dx$

Áp dụng các công thức biến đổi:

$$\bullet \sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\bullet \sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\bullet \cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

I. Tính các tích phân bất định.

Bài 1: Dùng các công thức cơ bản tính các tích phân sau:

- | | |
|--|--|
| 1/ $\int (3x^2 + 2x - \frac{1}{x})dx$ | 2/ $\int \frac{x-3}{x^2} dx$ |
| 3/ $\int 2(\sqrt{x} - \frac{3}{x^4})dx$ | 4/ $\int (3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$ |
| 5/ $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{3\sqrt{x^2}})dx$ | 6/ $\int 2^x \cdot 3^{2x} 4^{3x} dx$ |
| 7/ $\int \cos x (1 + \tan x) dx$ | 8/ $\int (4\sin x - \frac{2}{\cos^2 x})dx$ |
| 9/ $\int 2\cos^2 \frac{x}{2} dx$ | 10/ $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ |

Bài 2: Tính các tích phân sau đây:

- | | |
|---|---|
| 1/ $\int x(x-1)^{10} dx$ | 2/ $\int (\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2})dx$ |
| 3/ $\int x\sqrt{x^2+9}dx$ | 4/ $\int \frac{8x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^2}} dx$ |
| 5/ $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | 6/ $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ |
| 7/ $\int \sin 7x \cdot \cos 3x \cdot dx$ | 8/ $\int \cos^4 x dx$ |
| 9/ $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ | 10/ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ |

II: Tính các tích phân xác định sau:

Phương pháp:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1. Các phương pháp tính tích phân.

- Áp dụng bảng các nguyên hàm cơ bản, các hàm số sơ cấp .
- Tính tích phân bằng phương pháp phân tích.
- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng I.
- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng II.
- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng III.
- Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần.
- Tính tích phân bằng phương pháp sử dụng nguyên hàm phụ.
- Một số thủ thuật đổi biến khác, tích phân chứa biểu thức giá trị tuyệt đối...

2. Chứng minh bất đẳng thức tích phân

Để chứng minh bất đẳng thức tích phân, ta thường sử dụng chủ yếu 4 tính chất sau: với các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ ta có:

1. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
 Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $f(x) = g(x), \forall x \in [a; b]$
3. Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
4. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

Bài 1: Tính các tích phân xác định sau:

- | | |
|---|---|
| 1/ $\int_0^2 (3x^2 - 2x^3 + 4x^4)dx$ | 2/ $\int_{-1}^1 (-x^3 + 3x)^2 dx$ |
| 3/ $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$ | 4/ $\int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3} dx$ |
| 5/ $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} dx$ | 6/ $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}}$ |
| 7/ $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ | 8/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx$ |
| 9/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \cos 3x dx$ | 10/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tg^2 x + 5}{\sin^2 x} dx$ |
| 11/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx$ | 12/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\frac{\pi}{4} - x) dx$ |

Bài 2: Tính các tích phân có chứa trị tuyệt đối sau:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1/ $\int_{-2}^2 x-1 dx$ | 2/ $\int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$ |
| 3/ $\int_{-1}^4 x^2 - 3x + 2 dx$ | 4/ $\int_{-1}^1 e^x - 1 dx$ |

$$5/ \int_{-3}^3 (3+|x|)dx$$

$$6/ \int_{-2}^0 x^2 |x+1|dx$$

$$7/ \int_0^{\pi} |\cos x|dx$$

$$8/ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\cos 2x+1}dx$$

$$9/ \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

$$10/ \int_0^3 |2^x - 4| dx$$

Bài 3: Chứng minh các BĐT sau:

$$1/ 3 \leq \int_0^3 \sqrt{x+1} dx \leq 6$$

$$2/ 1 \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$3/ 1 \leq \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} \leq 2$$

$$4/ \frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3+\sin^2 x} dx \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$5/ \frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{3-2\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6/ \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan^2 x + 3} dx \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7/ \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} dx \leq e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$8/ \int_1^2 e^{x+1} dx \leq \int_1^2 e^{2x} dx$$

$$9/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$10/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

B: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN:

Phương pháp:

$$1. \text{ Dạng: } \int R(x^{\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{m}}) dx \text{ Đặt } t = x^{\frac{1}{mn}} \Rightarrow x=t^{mn} \Rightarrow dx=mnt^{mn-1}dt$$

$$2. \text{ Dạng: } \int R\left[(ax+b)^{\frac{1}{n}}, (ax+b)^{\frac{1}{m}}\right] dx$$

$$\text{Đặt } t=(ax+b)^{\frac{1}{mn}} \Rightarrow ax+b=t^{mn} \Rightarrow dx=\frac{mn}{a}t^{mn-1}dt$$

$$3. \text{ Dạng: } \int R(\ln x) \frac{dx}{x} \text{ đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int R(\ln x) \frac{dx}{x} = \int R(u) du$$

4. **Dạng:** $\int R(e^x)dx$

đặt

$$u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{du}{u} \Rightarrow \int R(e^x)dx = \int R(u) \frac{du}{u}$$

5. **Dạng:** $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

Đưa tam thức $ax^2 + bx + c$ về dạng: $u^2 + m^2, u^2 - m^2$ hay $m^2 - u^2$

Đổi tích phân thành 1 trong các dạng sau:

1). $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du.$

2). $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du.$

3). $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du.$

Nếu dưới dấu tích phân có chứa

• $\sqrt{m^2 - u^2}$ đặt $u = m \sin t \Rightarrow \sqrt{m^2 - u^2} = m \cos t$

• $\sqrt{m^2 + u^2}$ đặt $u = m \tan t \Rightarrow \sqrt{m^2 + u^2} = \frac{m}{\cos t}$

• $\sqrt{u^2 - m^2}$ đặt $u = \frac{m}{\cos t} \Rightarrow \sqrt{u^2 - m^2} = m \tan t$

6. **Dạng:** $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ Gặp tích phân này đặt: $t = \frac{1}{mx+n}$

Bài 1: Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến loại I

1/ $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

2/ $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx$

3/ $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

4/ $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$

5/ $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$

6/ $\int_0^7 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

7/ $\int_0^{\sqrt{5}} x^3 \cdot \sqrt{x^2+4} dx$

8/ $\int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$

9/ $\int_1^2 \frac{dx}{1-e^{-x}}$

10/ $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}}$

11/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x + 2}}{\cos^2 x} dx$

12/ $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$

13/ $\int_1^e \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx$	14/ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + 4 \sin x} \cdot \cos x dx$
15/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x (1 + \frac{1}{\sin^2 x}) dx$	16/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin 2x dx$
17/ $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx$	18/ $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$
19/ $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{x \sqrt{x^2 + 1}} dx$	20/ $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} \cdot \sin^3 x \cdot dx$

Bài 2 : Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến loại II:

1/ $\int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2} dx$	2/ $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$
3/ $\int_1^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$	4/ $\int_{-5}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}$
5/ $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$	6/ $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx$
7/ $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$	8/ $\int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 9}}$
9/ $\int_{-1}^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$	10/ $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9 + 3x^2}}{x^2} dx$
11/ $\int_{-1}^{1/2} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$	12/ $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 - 1} dx$
13/ $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$	14/ $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 3}$

Bài 3 : Tính tích phân các hàm số hữu tỉ:

1/ $\int_1^2 \frac{dx}{x(2x + 1)}$	2/ $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$
3/ $\int_1^2 \frac{6x + 7}{x} dx$	4/ $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$

$$5/ \int_3^4 \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$$

$$6/ \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}$$

$$7/ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$8/ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$$

$$9/ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$10/ \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+3x^2}}{x^2} dx$$

$$11/ \int_0^{1/2} \frac{dx}{4x^2-4x-3}$$

$$12/ \int_2^4 \frac{(x^3+x^2-x+1)dx}{x^4-1}$$

$$13/ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$14/ \int \frac{x^{2001} dx}{(x^2+1)^{2001}}$$

$$15/ \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$$

$$16/ \int_0^1 \frac{3dx}{1+x^3}$$

C: PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

Công thức: $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

- Công thức cho phép thay một tích phân $\int u dv$ phức tạp bằng 1 tích phân $\int v du$ đơn giản hơn.
- Công thức dùng khi hàm số dưới dấu tích phân có dạng:
 - Dạng tích số:
 - Hàm số logaric.
 - Hàm số lượng giác.
- * Dạng $x^n f(x)$ với $f(x)$ là hàm $e^x, \ln x, \sin x, \cos x$.
- Khi tính chọn:
 - Hàm số phức tạp đặt bằng u .
 - Hàm số cos tích phân được cho trong bảng tích phân thường dùng làm dv

Bài 1: Dùng phương pháp tích phân từng phần hãy tính:

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| 1/ | $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ | 2/ | $\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx$ |
| 3/ | $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx$ | 4/ | $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$ |
| 5/ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2 \cos^2 x - 1) dx$ | 6/ | $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ |
| 7/ | $\int_{1/e}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ | 8/ | $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$ |
| 9/ | $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \cos \sqrt{x} dx$ | 10/ | $\int_0^{\sqrt{3}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ |
| 11/ | $\int_0^1 (x+1)^2 \cdot e^{2x} dx$ | 12/ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \cdot \sin x \cdot dx$ |
| 13/ | $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$ | 14/ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx$ |

Bài 2: Tính các tích phân sau:

- | | | | |
|----|--|-----|---|
| 1/ | $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ | 2/ | $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$ |
| 3/ | $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$ | 4/ | $\int_1^e \ln^2 x dx$ |
| 5/ | $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$ | 6/ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (x + \sin x) dx$ |
| 7/ | $\int_0^{\pi} e^x \sin^2(\pi x) dx$ | 8/ | $\int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx$ |
| 9/ | $\int \frac{(1 + \sin x)e^x}{1 + \cos x} dx$ | 10/ | $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ |

D: ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2 - 2x + 2$; tiếp tuyến (d) của nó tại điểm M(3;5) và Oy.

Bài 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2 + 2x$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$.

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{3x^2 - 5x + 5}{x - 1}$ (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C); tiệm cận của nó và $x = 2$; $x = 3$.

Bài 4: Cho hàm số $y = (x + 1)(x - 2)^2$ (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng: $x - y + 1 = 0$.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{3}{2}$ (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

Bài 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y^2 = 4x$ và đường thẳng d: $4x - 3y - 4 = 0$.

Bài 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y^2 + x - 5 = 0$ và đường thẳng d: $x + y - 3 = 0$.

Bài 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$; $y = \tan x$; $y = \cot x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

Bài 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C): $x^2 + y^2 = 8$ và đường (P): $y^2 = 2x$.

Bài 10: Tính thể tích hình tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \frac{4}{x}$ và $y = -x + 5$ quay quanh Ox.

Bài 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ (C). Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi (C) trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay một vòng xung quanh Ox.

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ (C). Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi (C) trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay một vòng xung quanh Ox.

Bài 13: Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành do hình phẳng (D) giới hạn bởi: $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và $y = 0$ khi ta quay quanh (D) quanh Oy.

Bài 14: Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành do hình phẳng (D) giới hạn bởi:

$y = xe^x$, $x = 1$ và $y = 0$ ($0 \leq x \leq 1$) khi ta quay quanh (D) quanh Ox.

Bài 15: Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành do hình phẳng (D) giới hạn bởi : $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$ và ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) khi ta quay quanh (D) quanh Ox.

Bài 16: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

1/ $y = 0$; $y = x^2 - 2x$ và $x = -1$; $x = 2$.

2/ $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$

3/ $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

4/ $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$; $y = 0$; $x = 1$ và $x = e$.

5/ $y = x\sqrt{x^2 + 1}$; Ox và $x = 1$.

E. DẠNG THƯỜNG GẶP TRONG CÁC KÌ THI ĐH-CĐ

Bài 1: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}$

2/ $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$

3/ $\int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$

4/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \sin x \cdot \cos^5 x \cdot dx$

5/ $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$

6/ $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$

7/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\sin 2x} dx$

8/ $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

9/ $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x + 1) \cdot e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

10/ $\int_0^2 (3x^2 - 1) |x^2 + 3x - 4| dx$

Bài 2: Cho hàm số: $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bx \cdot e^x$

Tìm a, b biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$

Bài 3: Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^2 |x^2 - x| dx$$

$$2/ \int_0^1 x^3 . e^{x^2} dx$$

$$3/ \int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} \ln x . dx$$

$$4/ \int (\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}) dx$$

$$5/ \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx$$

$$6/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x . \sin 2x . \sin 3x . dx$$

$$7/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$8/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x . dx$$

$$9/ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$10/ \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

Bài 3: Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\sin x}) dx$$

$$2/ \int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4} dx$$

$$3/ \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$$

$$4/ \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$5/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x - 3 \sin x + 1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$$

$$6/ \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$7/ \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$$

$$8/ \int_0^1 (x^2 + 2x) e^{-x} dx$$

$$9/ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

$$10/ \int_{-1}^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1} + x+3} dx$$

Bài 4: Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}$$

$$2/ \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$$

$$3/ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$4/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$5 \int_0^{\pi} x . \sin x dx$$

$$6/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x . \cos^3 x . dx$$

$$7/ \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \cdot \ln x}{x} dx$$

$$8/ \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$9/ \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 4} dx$$

$$10/ \int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8 - 2x^4} dx$$

Bài 5: Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^3 \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$2/ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 + 1}{x} \ln x \cdot dx$$

$$3/ \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx$$

$$4/ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$$

$$5/ \int_{-1}^2 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx$$

$$6 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$7/ \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$$

$$8/ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$9/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$10/ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \sin x dx$$

Bài 6: Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

$$2/ \int_0^2 \frac{x^2 \cdot e^x}{(x+2)^2} dx$$

$$3/ \int_{-1}^4 \frac{2}{\sqrt{x+5} + 4} dx$$

$$4/ \int_0^1 (4x^2 - 2x - 1) \cdot e^{2x} dx$$

$$5/ \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$6/ \int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 2}$$

$$7/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x + 1} dx$$

$$8/ \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$9/ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + e^{\sin x} \cos x) dx$$

$$10/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2 \cos x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

Bài 7: Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2004} x}{\sin^{2004} x + \cos^{2004} x} dx$$

$$2/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$$

$$3/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$4/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$$

$$5/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x \cdot dx$$

$$6/ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx$$

$$7/ \int \frac{2x dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$8/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$$

$$9/ \int_{-1}^0 x (e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$$

$$10/ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin^2 x}{\sin 2x \cos^2 x} dx$$

Bài 8: Tính các tích phân sau.

$$1/ \int_{-1}^1 x^{2004} \sin x \cdot dx$$

$$2/ \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$3/ \int_0^{2\pi} x \cdot \cos^3 x \cdot dx$$

$$4/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$5/ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$6/ \int_0^1 x \cdot \tan^2 x \cdot dx$$

$$7/ \text{CM: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$8/ \text{CM: } \pi < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} < 2\pi$$

$$9/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 5x dx$$

$$10/ \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$



CHÚC CÁC EM LÀM BÀI TỐT !