

***Một số tính chất hay dùng trong hình
học phẳng Oxy tập 2***

VÕ QUANG MÃN

Ngày 3 tháng 5 năm 2016

Mục lục

1	TÍNH CHẤT KINH ĐIỂN CẦN NẮM VỮNG	3
1.1	Đường tròn Apolonius	3
1.2	Hàng điểm điều hòa	5
1.3	Phép nghịch đảo, cực và đối cực	9
1.4	Tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc	13
1.5	Tứ giác ngoại tiếp	17
1.6	Hai đường tròn trực giao	17
1.7	Trục tâm, trung điểm và tính đối trung	17
1.8	Tâm nội tiếp của tam giác đường cao	26
1.9	Tập phân tích những bài toán có sự đối xứng, yếu tố trung tâm và mối liên hệ giữa chúng	28
2	TÍNH CHẤT MỚI CÓ THỂ PHÙ HỢP VỚI XU HƯỚNG CỦA ĐỀ THI	29
3	TỔNG HỢP CÁC BÀI TRÊN GROUP OXY	41

Do thời gian gấp rút nên một số bài chưa kịp đăng lời giải, một số bài có thể thiếu dữ kiện (lỗi do đánh máy). Các em tự làm và tự phát hiện tính chất cho những bài không có đáp án. Do nhiều quá nên không nhớ hết tác giả của từng bài toán. Dù đã cố gắng hết sức nhưng không thể tránh khỏi nhiều sai sót, mong được bỏ qua. Sẽ có một bản hoàn thiện hơn cho cả hai tập. Thân chào các em và đồng nghiệp! .

Sử dụng bản gốc là sự tôn trọng về tác giả, còn sử dụng bản sách lậu là tiếp tay cho bọn tội phạm.

Võ Quang Mẫn

Chương 1

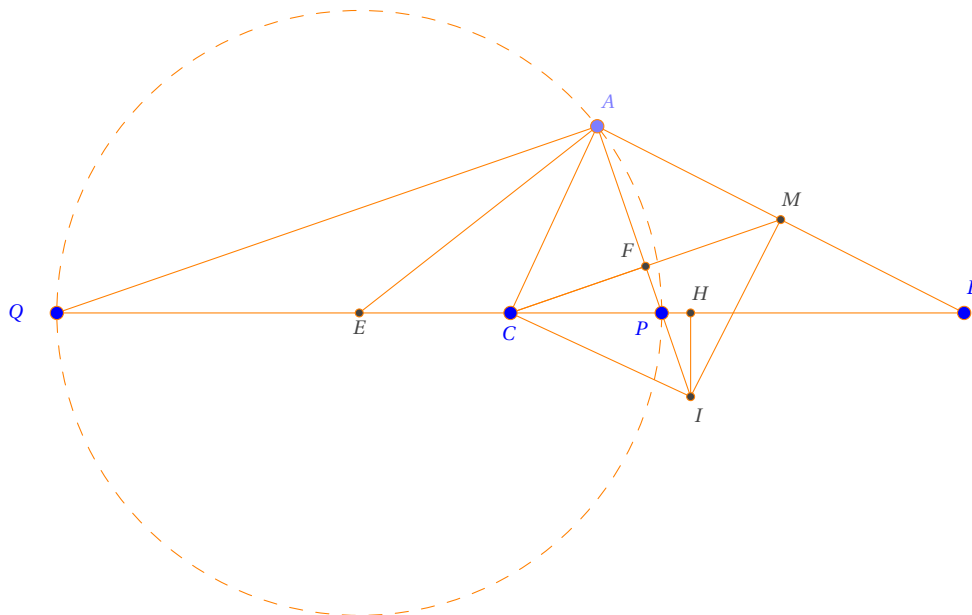
TÍNH CHẤT KINH ĐIỂN CẦN NẮM VỮNG

1.1 Đường tròn Apolonius

Định nghĩa 1. Cho tam giác ABC có BC cố định, điểm A di động sao cho $0 < \frac{AB}{AC} = k < 1$ không đổi. Khi đó A chạy trên một đường tròn và đường tròn này gọi là đường tròn Apolonius.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có $AB = 2AC$ và M là trung điểm AB . Cho $I(1; -8)$ là tâm đường tròn tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt tại M, C . Biết $BC : x - 9y + 5 = 0$ và $A \in x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

(Vted lần 6)



Gọi P, Q là các điểm chia đoạn CB theo tỷ số $k = -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$. Khi đó ta có $\frac{AC}{AB} = \frac{PC}{PB} = \frac{QC}{QB}$ nên AP, AQ là phân giác ngoài của tam giác CAB hay A chạy trên đường tròn đường kính PQ . Gọi E là trung

điểm PQ và F trên đoạn AP sao cho $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PA}$. Vì $QA \perp Ap$ nên $CF \perp AI$.

Cách 1: làm hình học pha thêm đại số

Gọi $(a; 3-a)$, $\overrightarrow{IA} = (a-1; 11-a)$ do đó đường thẳng $AI: (a-11)(x-1) + (a-1)(y+8) = 0$. Tọa độ P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (a-11)(x-1) + (a-1)(y+8) = 0 \\ x-9y+5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{-34a+11}{5(a-10)}; \frac{-a-29}{5(a-10)}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PA}$ suy ra $F()$ suy ra đường thẳng CF đi qua F vuông góc AI có phương trình. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (a-11)(x-1) + (a-1)(y+8) = 0 \\ x-9y+5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C().$$

Chú ý $CA \perp CI$ nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = 0$ suy ra $\begin{cases} a = \\ a = \end{cases}$.

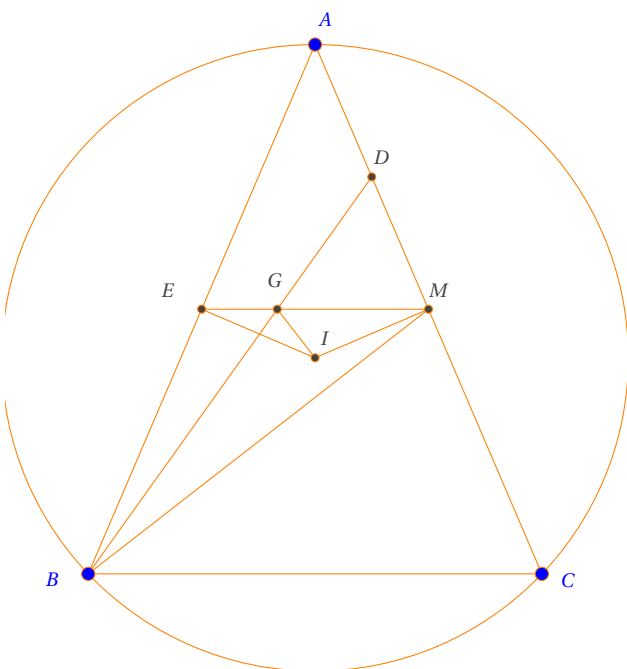
Nhận xét:

- Cách làm 1 có vẻ tự nhiên theo tư duy thông thường mà một học sinh đa số sẽ suy nghĩ theo hướng này.
- Dựa vào cách 1 ta có thể tổng quát cho tam giác có $AB = kAC$.

Cách 2: làm hình học theo tính chất suy đoán

Ta chứng minh thêm một tính chất đẹp hơn nữa nếu phát hiện đó là: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC khi đó $IG \perp BC$. Câu hỏi đặt ra là làm sao phát hiện được điều này? Xin thưa theo ý chủ quan của mình thì tác giả có thể xuất phát từ bài toán sau.

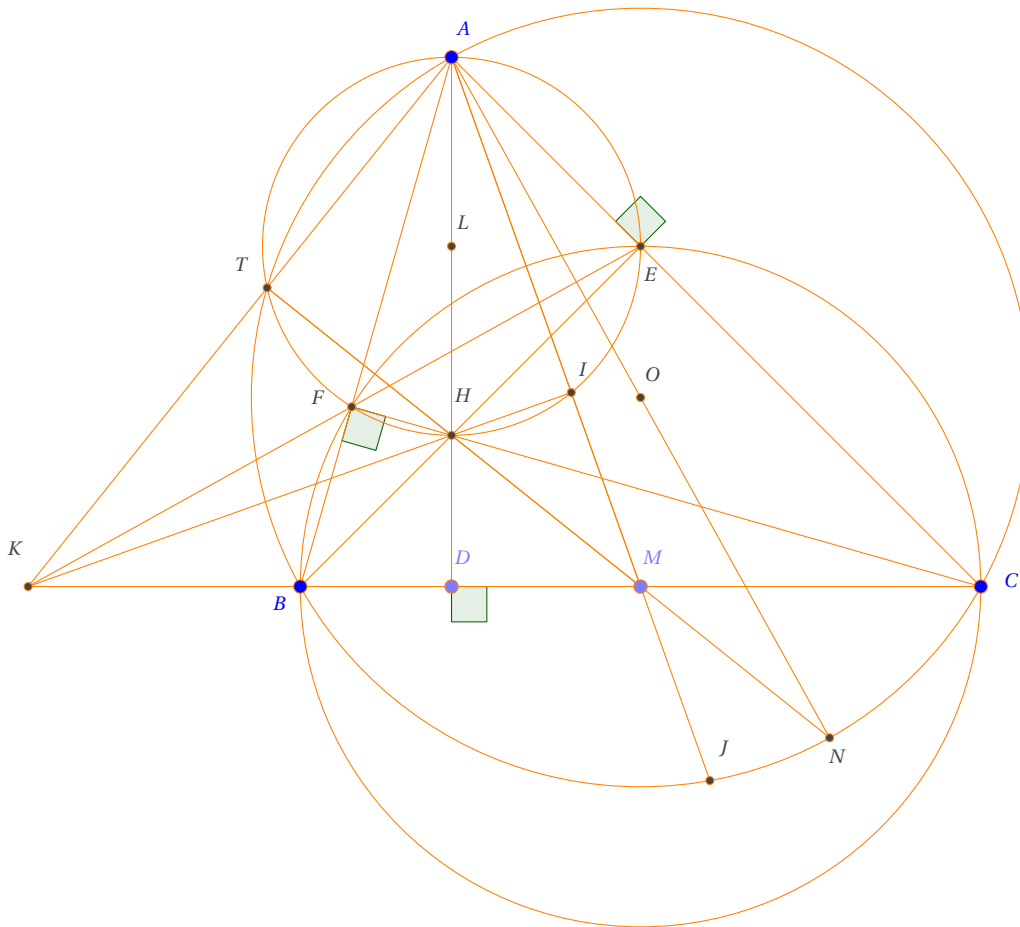
Tính chất 1. Cho tam giác cân ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm I có đường trung tuyến BM . Gọi G là trọng tâm tam giác ABM . Khi đó $GI \perp BM$.



1.2 Hàng điểm điều hòa

Tính chất 2. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt BC tại K, M là trung điểm BC . Khi đó

1. $\overline{MD} \cdot \overline{MK} = MB^2 = MC^2$.
2. Gọi T là giao điểm của tia MH với đường tròn (O) . Chứng minh rằng năm điểm T, F, H, A, E nằm trên một đường tròn. BC, EF, AT đồng quy tại K và $AM \perp KH$.
3. AM cắt KH tại I và AM cắt (O) tại J . Ta có $MI = MJ$



1. Ta có $(K, D, B, C) = -1$ và do M là trung điểm của BC nên $MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$. Chú ý ta có thể chứng minh bằng sơ cấp ý 1. bằng cách sử dụng ý 2. và ý 3. rồi suy ra lại ý 1. như sau
2. Giả sử AO cắt đường tròn (O) tại N . Chú ý H, M, N thẳng hàng suy ra $HT \perp AT$. Do đó năm điểm T, F, H, A, E nằm trên một đường tròn. Vì EF cắt BC tại K nên K là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(O), (M), (L)$ hay BC, EF, AT đồng quy tại K . Trong tam giác AKM có AH, MH là đường cao nên $KH \perp AM$.
3. Chú ý M là trung điểm của HN và HI, NJ song song vì cùng vuông góc với AM nên $HINJ$ là hình bình hành hay M là trung điểm của IJ .

Khi đó ta chứng minh lại ý 1. như sau: Ta có $MD \cdot MK = MI \cdot MA = MJ \cdot MA = MB \cdot MC = MB^2 = MC^2$
Nhận xét: Chú ý khi tam giác ABC tù thì H vẫn là trực tâm tam giác AKM .

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF . Cho $D(1;0)$, gọi $M(4;0)$ là trung điểm BC . Giả sử đường thẳng EF có phương trình $2x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Bài toán 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(3; 0)$ và trung điểm của BC là $I(6; 1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường thẳng $DE : x - 2 = 0$ và điểm D có tung độ dương.

(Chuyên Vĩnh Phúc 2015)

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$ với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC và N là giao điểm EF và BC . Cho $C(5; -4), N(-\frac{65}{2}; \frac{7}{2})$ và đường thẳng $AM : 9x - y - 3 = 0, H$ thuộc đường thẳng $d : x - 37 - 3 = 0$.

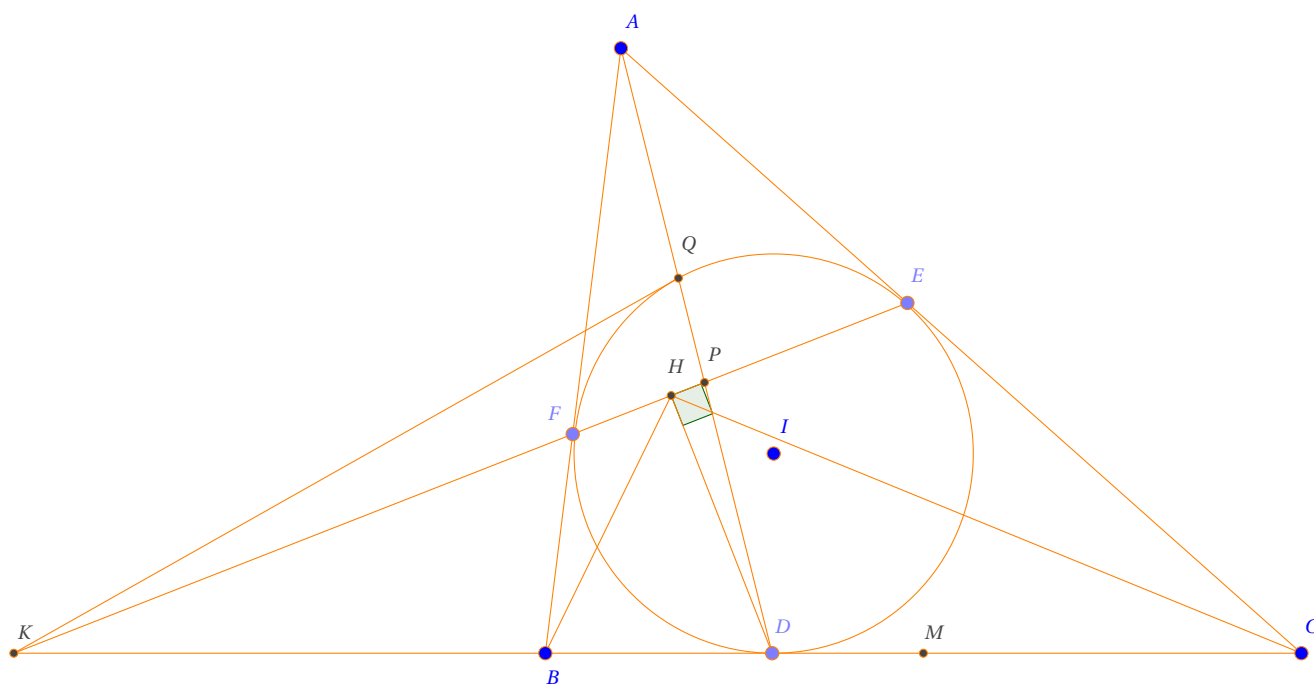
(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Bài toán 4. Trong Oxy cho tam giác nhọn ABC có $A(7;4), E, F$ là hình chiếu của B, C lên AC, AB . Gọi $K(1; -1)$ là giao điểm của EF và BC , trung điểm BC có tọa độ $M(9;1)$. Tìm tọa độ B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Tính chất 3. Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Khi đó

1. Giả sử EF cắt BC tại K thì $(K, D, B, C) = -1$ suy ra $MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$.
2. Giả sử AD cắt EF tại P và cắt (I) tại Q thì $(A, P, Q, D) = -1$.
3. Hạ DH vuông góc với EF ta có HD là phân giác $\angle BHC$.



1. Chú ý AD, BE, CF đồng quy nên theo định lý Ceva và Menelaus ta có $(K, D, B, C) = -1$. từ đó theo công thức Maclaurin nên ta có $MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$.
2. Được suy ra từ 1.
3. Vì $(K, D, B, C) = -1$ và $KH \perp HD$ nên HD là phân giác trong của $\angle BHC$.

Chú ý KQ là tiếp tuyến của (I) .

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Cho $D(3; 1)$, $EF: y - 3 = 0$. Tìm A biết A có tung độ dương.

(B-11)

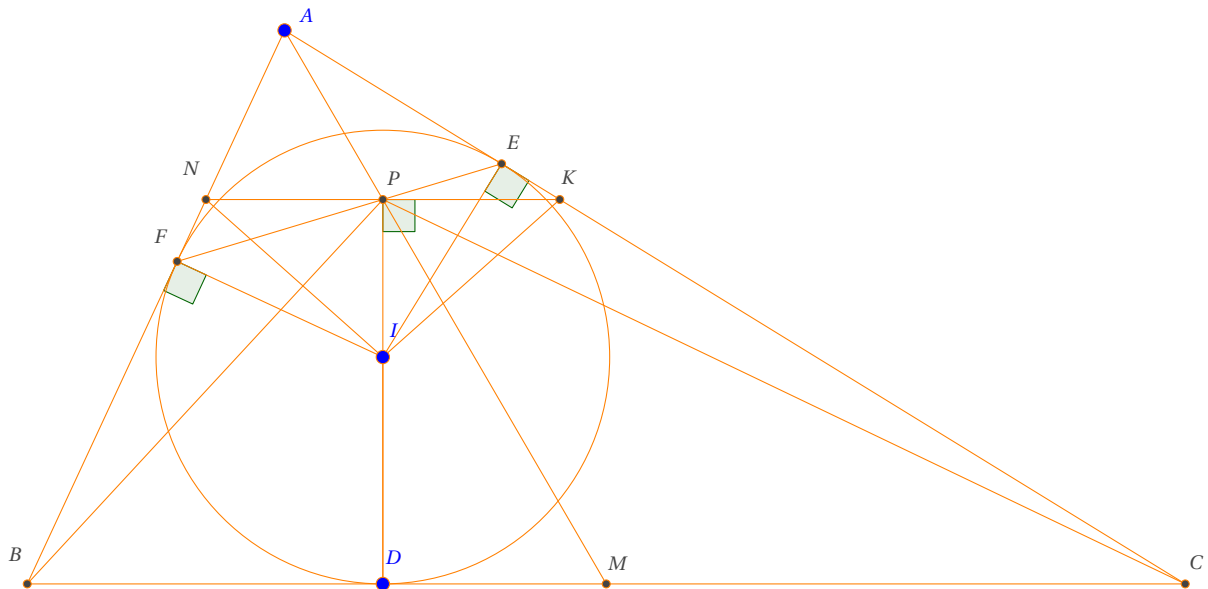
Bài toán 6. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Cho $D(2; -2)$, $EF: y - 1 = 0$, điểm $M(0; -3)$ là trung điểm của BC . Tìm A, B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Cho $D(2; -2)$, $EF: y - 1 = 0$, điểm $A(1; 5)$. Tìm B, C .

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

Tính chất 4. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm của các cạnh BC, CA, AB là D, E, F . Đường thẳng ID cắt EF tại P . Khi đó AP đi qua trung điểm M của BC .



Qua P kẻ đường thẳng song song với BC , cắt AB, AC tại N, K . Xét tam giác ANK có $IF \perp AN, IP \perp NK, IE \perp AK$ và E, P, F thẳng hàng nên theo định lý đảo Simson ta có tứ giác $ANIK$ nội tiếp, hay $\angle FNI = \angle EKI$. Do $IF = IE$ nên $\triangle IFN = \triangle IEK$. Do đó $IN = IK$ suy ra tam giác NIK cân tại N có IP là đường cao nên P là trung điểm NK . Vậy AP đi qua trung điểm M của BC .

Cách 2: Không dùng định lý đảo Simson, ta có thể dùng cộng góc cũng ra.

Ta có tứ giác $IFNP, IPEK$ nội tiếp. Suy ra $\angle INP = \angle IFP = \angle IEF = \angle IKP$ do đó tam giác NIK cân tại N .

Cách 3: Dùng hàng điểm điều hòa (tuyệt chiêu).

Bài tập 2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $r = 2$ và các tiếp điểm với các cạnh BC, CA, AB là D, E, F . Đường thẳng DI cắt EF tại P . Giả sử $AP : 2x - y + 1 = 0$, trục tâm $H(-1;3)$, trọng tâm G thuộc đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

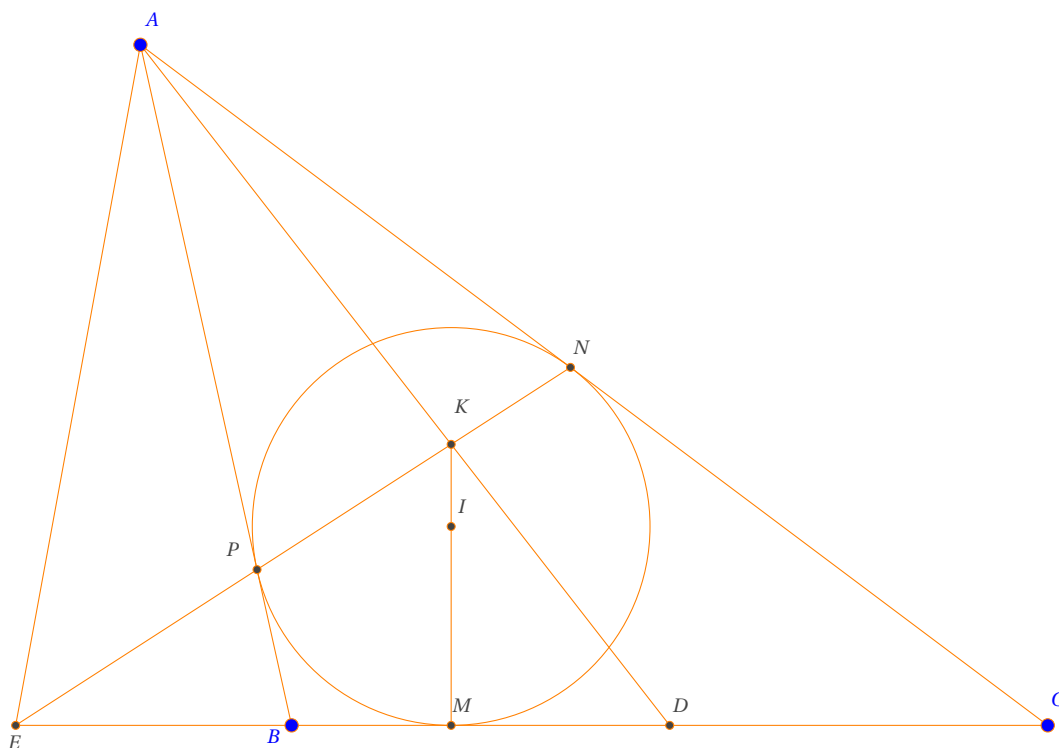
Bài tập 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm tại các cạnh BC, CA, AB lần lượt là M, N, P . Gọi D là trung điểm BC . Biết $M(-1;1), NP : x + y - 4 = 0, AD : 14x - 13y + 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(HSG Nghệ An)

Để làm bài này ta cần ôn lại các tính chất đã học

1. PN, AD, MI đồng quy tại K .

2. Giả sử PN cắt BC tại E , khi đó $DM \cdot DE = DB^2 = DC^2$. (Tính chất hàng điểm điều hòa)



Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 14x - 13y + 7 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc MK nên BC : $8x + 4y + 3 = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 14x - 13y + 7 = 0 \\ 8x + 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-\frac{1}{2}; 0).$$

Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 8x + 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(-5; 9).$$

Sử dụng tính chất $DM \cdot DE = DB^2 = DC^2$ suy ra

$$\begin{cases} B(-2; 3), C(1; -3) \\ C(-2; 3), B(1; -3). \end{cases}$$

- $B(-2; 3), C(1; -3)$

Sử dụng $\overline{EPEN} = EM^2$ suy ra $P(0; 4), N(3; 1)$ do đó đường thẳng AB đi qua B, P nên có phương trình $AB : x - 2y + 8 = 0$, tương tự $AC : 2x - y - 5 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

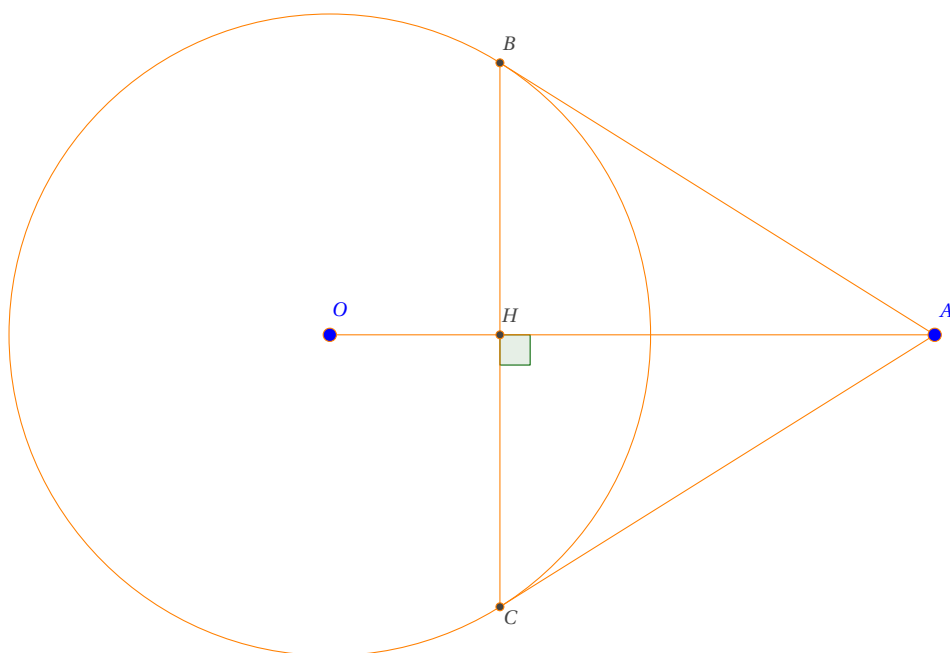
$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6; 7).$$

- $C(-2; 3), B(1; -3)$

Giải tương tự ta cũng có $A(6; 7)$.

1.3 Phép nghịch đảo, cực và đối cực

Định nghĩa 2. Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm A. Xét phép nghịch đảo cực O phương tích R^2 biến A thành H. Đường thẳng d đi qua H và vuông góc với OA được gọi là đường đối cực của điểm A đối với đường tròn (O) và A là cực của d đối với đường tròn (O).



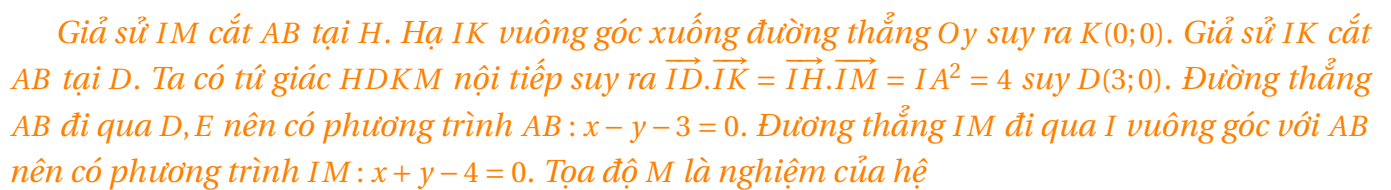
Bài tập 4. Tìm $M \in Oy$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến $(C) : (x - 4)^2 + y^2 = 4$ sao cho AB đi qua $E(4; 1)$.

Cách 1: dùng hình học Ta cần tính chất quan trọng của cực và đối cực

Tính chất 5. AB là đường đối cực của điểm M và AB đi qua E do đó M nằm trên đường đối cực của điểm E .

AB là đường đối cực của điểm M do đó M nằm trên đường đối cực của điểm E . Đường thẳng $IE : x = 4$, trên đường thẳng IE lấy điểm H sao cho $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IH} = R^2$ suy ra $H(4; 4)$. Qua H dựng đường thẳng vuông góc với IH cắt đường thẳng Oy tại M suy ra $M(0; 4)$.

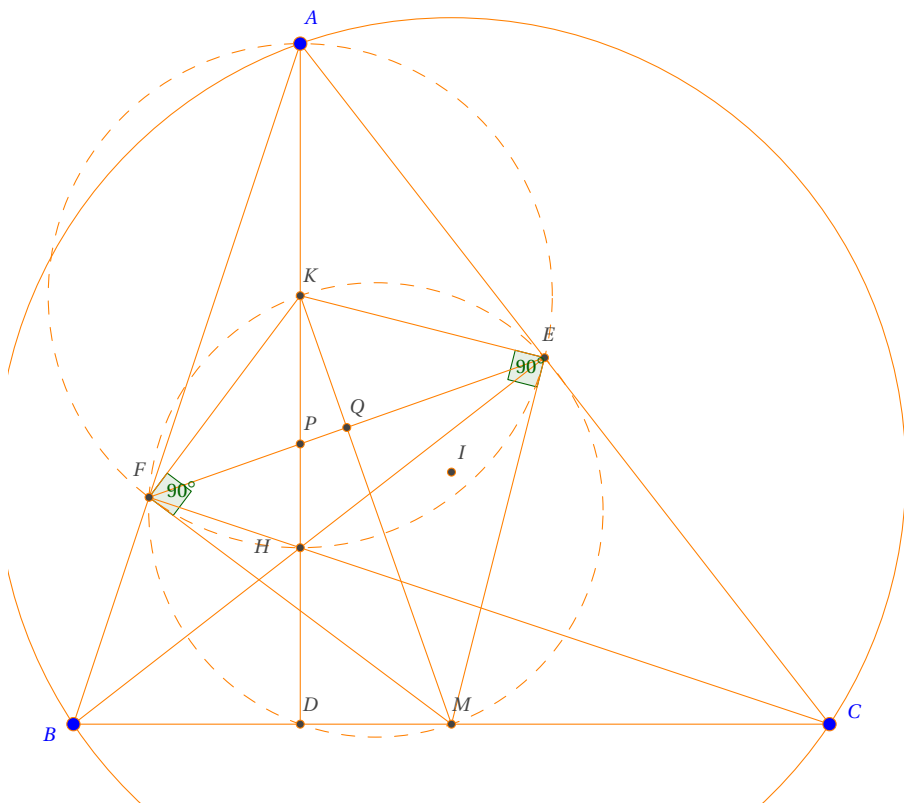
Cách 2: dùng hình học theo ngôn ngữ THCS



Cách 3: dùng đại số Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$ và bán kính $R = 2$. Gọi $M(0;m)$, ta có $MA^2 = MI^2 - IA^2 = m^2 + 16 - 4 = m^2 + 12$. Do đó đường tròn tâm M bán kính MA có phương trình $x^2 + (y - m)^2 = m^2 + 12$. Vì vậy đường thẳng AB có phương trình $AB : 8x - 2my - 24 = 0$. Đường thẳng AB đi qua $E(4;1)$ suy ra $m = 4$ hay $M(0;4)$.

(Trần Công Hưng)

11



Cách 1 dùng trục đẳng phương Đường thẳng AD đi qua P và song song với IM nên AD : $x - 2 = 0$. Gọi $K(2; a)$, ta có đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE là đường tròn tâm K bán kính IM nên có phương trình $(x - 2)^2 + (y - a)^2 = 1$. Đường tròn đường kính KM có phương trình (KM) : $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{a+2}{2})^2 = \frac{1 + (2-a)^2}{4}$. Do đó đường thẳng EF có phương trình EF : $x + (2-a)y + a^2 - 2a - 3 = 0$.

Đường thẳng EF đi qua P suy ra $a^2 - \frac{11}{2}a + 6 = 0$ suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} K(2; 4) \\ K(2; \frac{3}{2}) \end{cases}$, vì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IM}$ nên

$$\begin{cases} A(2; 5) \\ A(2; \frac{5}{2}) \end{cases}.$$

Cách 2 tuyệt chiêu, dùng cực và đối cực hay hàng điểm điều hòa

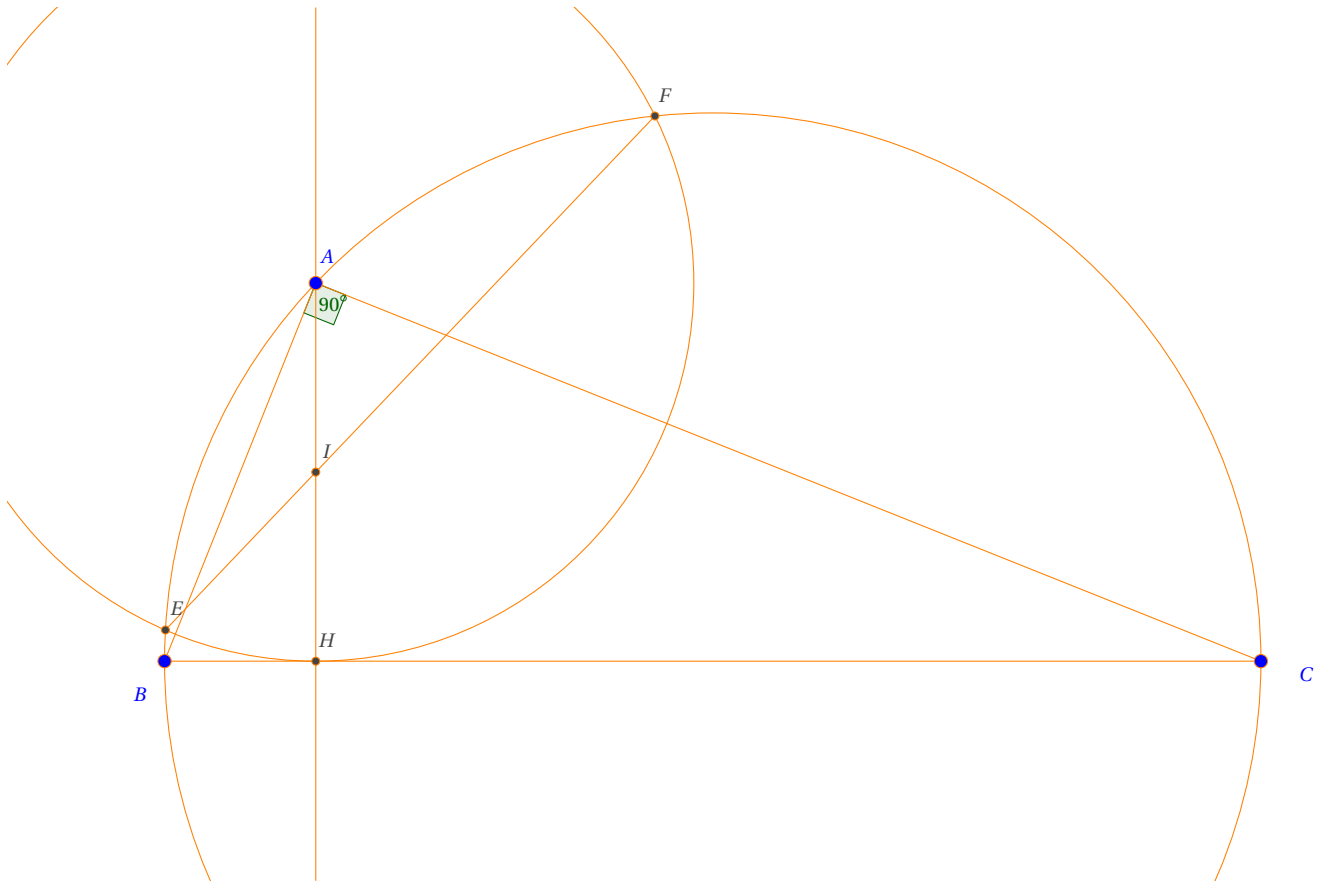
Tính chất 7. $KP.KD = KH^2 = KA^2 = IM^2$.

Đường thẳng AD đi qua P và song song với IM nên AD : $x - 2 = 0$, AD : $y = 2$. Suy ra tọa độ $D(2; 2)$. Chú ý $KP.KD = KQ.KM = KE^2 = IM^2$ suy ra $\begin{cases} K(2; 4) \\ K(2; \frac{3}{2}) \end{cases}$, vì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IM}$ nên $\begin{cases} A(2; 5) \\ A(2; \frac{5}{2}) \end{cases}$.

Nhận xét:

- Tính chất trên là hệ quả của định lý Brocard. Ta có $(A, H, P, D) = -1$. suy ra $KP.KD = KH^2 = KA^2$.
- Theo quan niệm cực và đối cực. Xét đường tròn tâm K bán kính KA. Vì đường đối cực của M là EF đi qua P nên đường đối cực của P cũng đi qua M do đó đường đối cực của P là đường thẳng qua M vuông góc với KP, tức là đường thẳng BC.

Tính chất 8. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH , đường tròn tâm A bán kính AH cắt (O) tại E, F . Gọi I là giao điểm của AH và EF . Khi đó I là trung điểm AH .

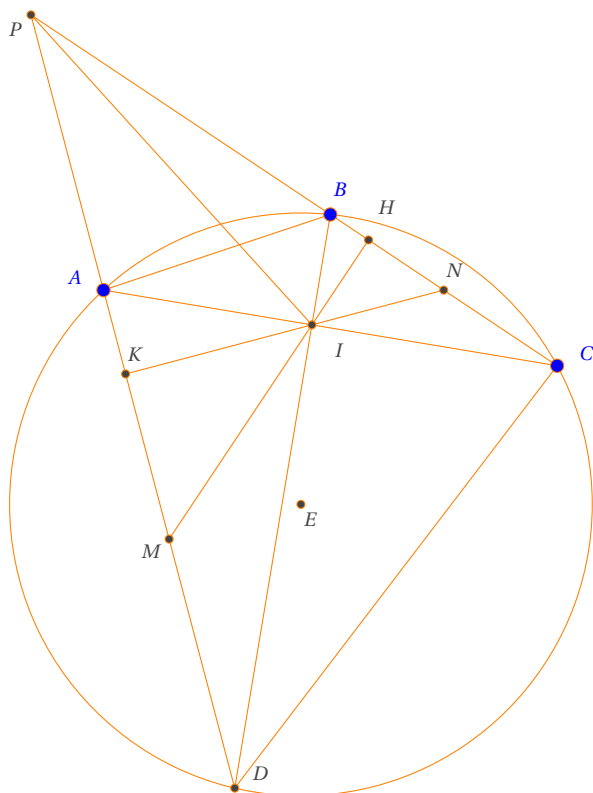


Gọi A' là điểm đối xứng của A qua BC . Xét phép nghịch đảo f cực A theo phương tích $k = AH^2$. Ta có $f(E) = E, f(F) = F$ mà (O) đi qua A nên qua phép nghịch đảo f biến (O) thành đường thẳng EF hay $f(A') = I$. Do đó $AI \cdot AA' = AH^2$ mà $AH = \frac{1}{2}AA'$ nên $AI = \frac{1}{2}AH$ hay I là trung điểm AA' .

Nhận xét: Gọi M là trung điểm BC theo tính chất của phép nghịch đảo ta có $AM \perp EF$.

1.4 Tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc

Tính chất 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo $AC \perp BD$ và cắt nhau tại I . Gọi M, N là trung điểm AD, BC . MI, NI cắt BC, AD tại H, K . Khi đó $MH \perp BC, NK \perp AD$.



Ta có $\angle HBI = \angle IAD$ và $\angle BIH = \angle MID = \angle MDI$ do đó $\angle HBI + \angle BIH = \angle IAD + \angle ADI = 90^\circ$ hay $MH \perp BC$. Tương tự $NK \perp AD$.

Bài tập 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo $AC \perp BD$ và cắt nhau tại $I(3;3)$. Biết $BC: x + 7y - 48 = 0, AD: x - 7y - 6 = 0, x_B > 0$. Tìm tọa độ A, B, C, D .

(Vted lần 13)

Đường thẳng NI đi qua I và vuông góc AD nên $NI: 7x + y - 24 = 0$. Tọa độ N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x + y - 24 = 0 \\ x + 7y - 48 = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{2}\right).$$

Gọi $B(48 - 7b; b)$ ta có $NB = NC = NI$ suy ra

$$\begin{cases} B(6;6) \\ B(-1;7) \end{cases} \text{ loại}$$

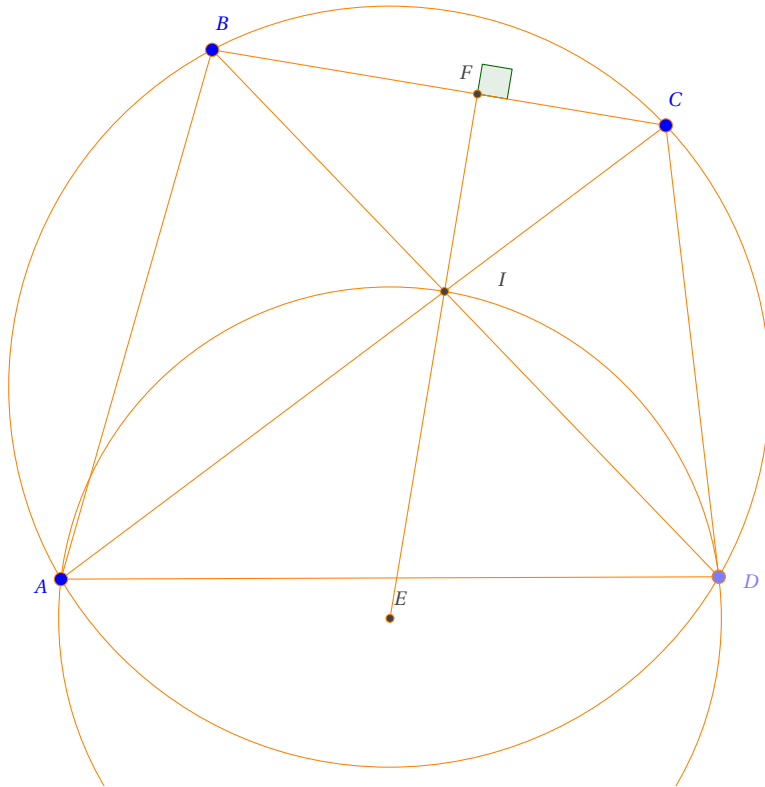
Suy ra $C(-1;7)$. Đường thẳng BI đi qua B, I nên có phương trình $BI: x - y = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 7y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -1).$$

Tương tự giải ra $A(6;0)$.

Mở rộng lên ta có tính chất tương tự.

Tính chất 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I . Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI . Khi đó $EI \perp BC$.

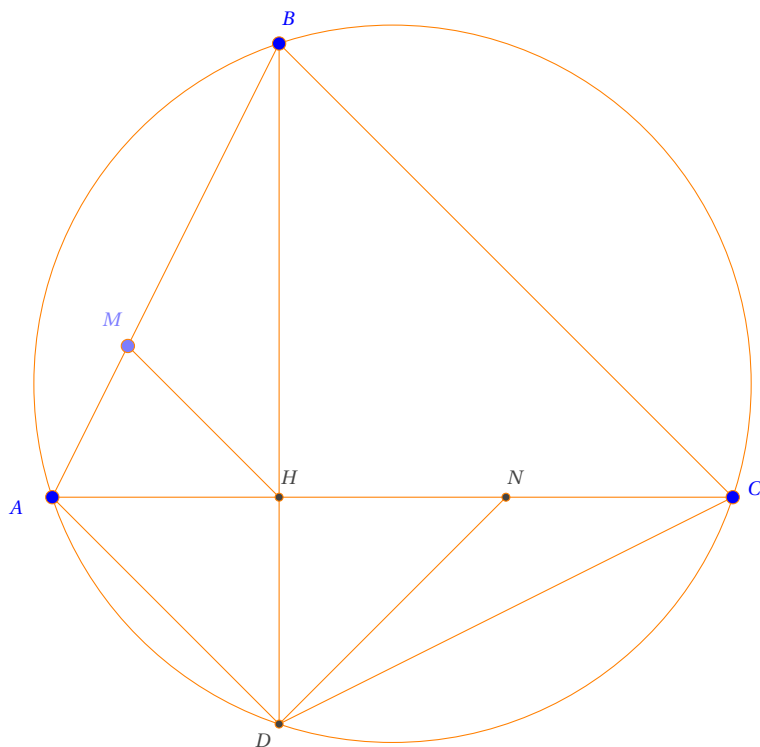


Ta có tam giác AEI cân tại E nên $\angle AIE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AEI) = 90^\circ - \angle IDA = 90^\circ - \angle ICF$ do đó $EI \perp BC$.

Bài tập 7. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có đỉnh $A(2; -1)$. Giao điểm hai đường chéo AC và BD là điểm $I(1; 2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI có tâm là $E(-\frac{27}{8}; -\frac{9}{8})$. Biết đường thẳng BC đi qua điểm $M(9; -6)$. Tìm tọa độ đỉnh B, D biết điểm B có tung độ nhỏ hơn 3.

(Trần Phú - Hà Tĩnh lần 1)

Tính chất 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$ và N là trung điểm của HC. Khi đó $HM \perp DN$.



Tứ giác ABCD nội tiếp suy ra $HA \cdot HC = HB \cdot HD$ hay $HM \perp DN$. Ta có $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HD}$. Do đó $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{3}(-HA \cdot HC + HB \cdot HD) = 0$

Bài tập 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại $H(1; -1)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$ và $N(-\frac{1}{2}; -1)$ là trung điểm của HC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết rằng $D(1; 4)$ và điểm M nằm trên đường thẳng $d: 3x + y - 11 = 0$.

(Vted lần 21)

Đường thẳng HM đi qua H và vuông góc DN nên $HM: 3x + 10y + 7 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 10y + 7 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{13}{3}; -2).$$

Đường thẳng HN: $y + 1 = 0$, HD: $x - 1 = 0$. Gọi $A(a; -1)$, $B(1; b)$, điểm M chia đoạn AB theo tỷ số $k = -\frac{1}{2}$ suy ra tọa độ $M(\frac{2a+1}{3}; \frac{b-2}{3}) = (\frac{13}{3}; -2)$ do đó $\begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} A(6; -1) \\ B(1; -4) \end{cases}$.

Ta có N là trung điểm HC suy ra $C(-2; -1)$.

Nhận xét: Ta có thể làm bài này thông qua tính chất kinh điển đã học "gọi P là trung điểm AB khi đó $HP \perp DC$ ".

+) Tìm tọa độ $C(2; -1)$.

+) Viết phương trình HP, HA, HB.

+) Tham số hóa điểm A, B sau đó tìm tọa độ M, P (vẫn theo tham số) thế vào phương trình đã có ta suy ra tọa độ điểm A, B.

Bài tập 9. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AD = 3BC$) có hai đường chéo vuông góc tại I . M trên cạnh AB sao cho $MB = 2MA$ và N là trung điểm IC . Biết $B(-1; -3)$, đường thẳng IM đi qua $E(2; -3)$ và $DN: x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ A, C, D .

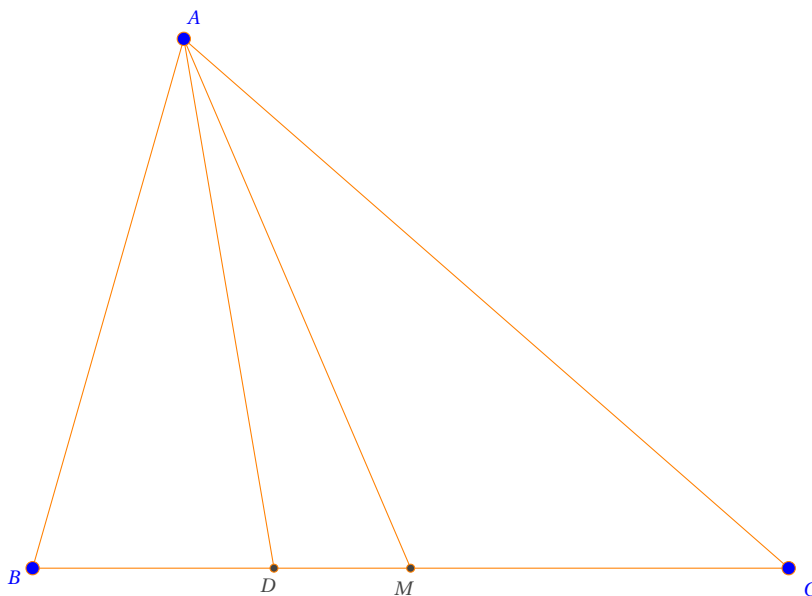
1.5 Tứ giác ngoại tiếp

1.6 Hai đường tròn trực giao

1.7 Trực tâm, trung điểm và tính đối trung

Định nghĩa 3. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC . Gọi D là một điểm tùy ý trên cạnh BC sao cho AD, AM đối xứng nhau qua đường phân giác khi AD được gọi là đường đối trung (trong) của trung tuyến AM .

Tính chất 12. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC . Gọi D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Khi đó AD, AM đối xứng nhau qua đường phân giác khi và chỉ khi $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.



Bài này có nhiều cách chứng minh. Cách đơn giản nhất là dùng diện tích. Thật vậy ta có

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot \sin BAD}{AC \cdot \sin DAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin CAM}{\sin BAM} = \frac{AB^2}{AC^2} \frac{AC \cdot \sin CAM}{AB \cdot \sin BAM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{BAM}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Cách dựng đường đối trung.

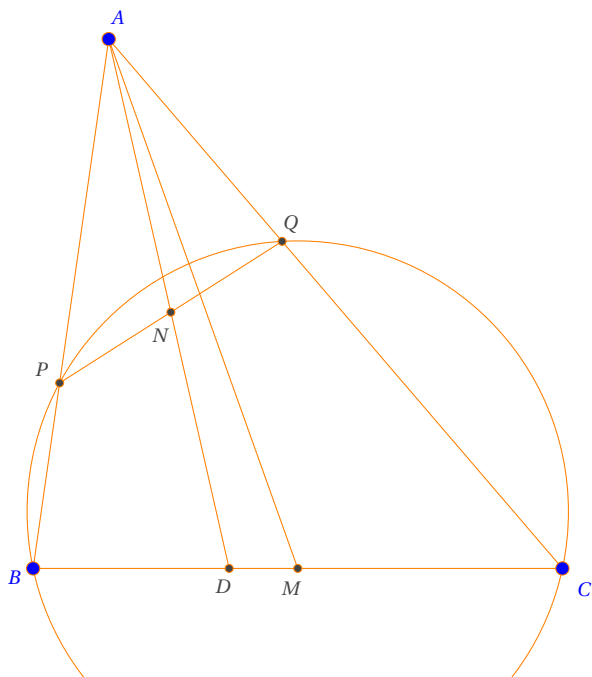
Cách 1



Ta có $\frac{EP}{EQ} = \frac{EB \sin \angle EBP}{EC \sin \angle ECQ} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} = \frac{AB}{AC}$. Hạ DH, DK vuông góc xuống AB, AC . Khi đó $\frac{DH}{DK} = \frac{EP}{EQ} = \frac{AB}{AC}$. Do đó $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{2AB \cdot DH}{2AC \cdot DK} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Suy ra AE là đường đối trung.

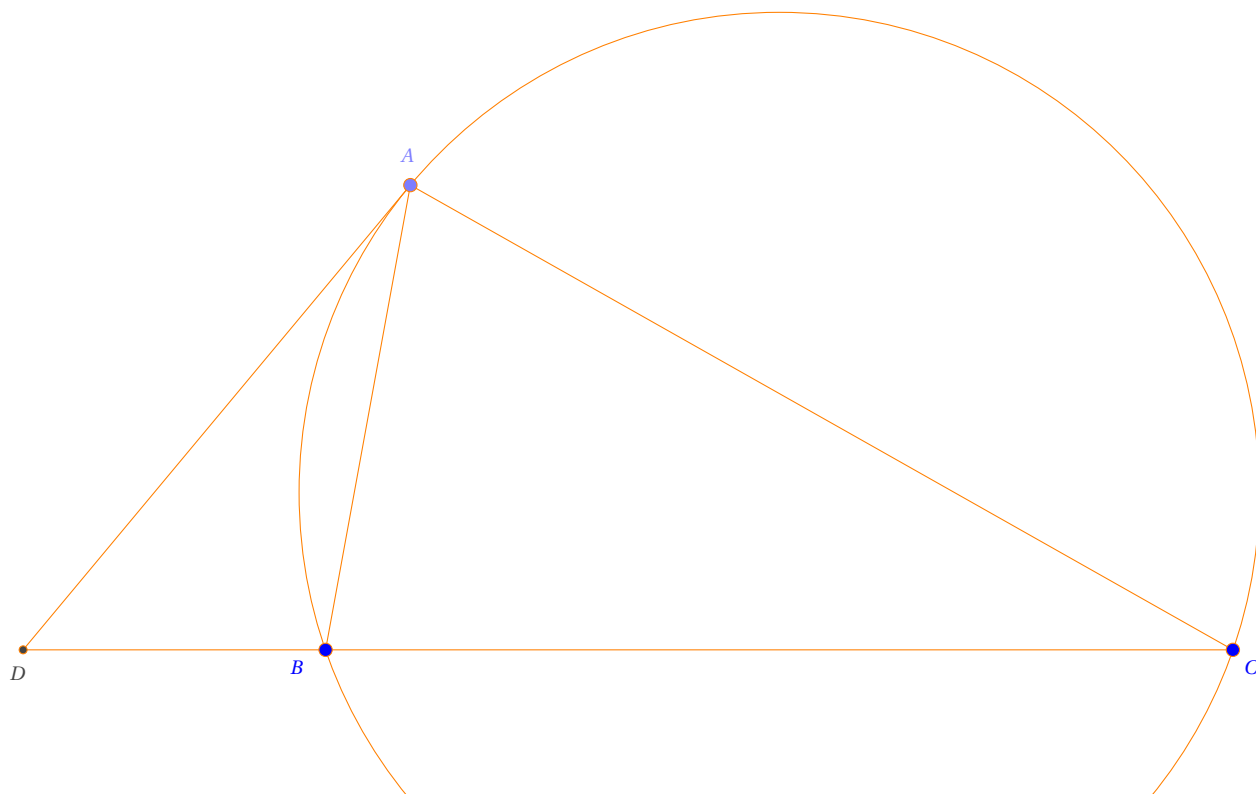
$$\frac{BM}{MC} = \frac{AM \cdot \sin \angle BAM \cdot \sin \angle ACB}{AM \cdot \sin \angle CAM \cdot \sin \angle ABC} = \frac{\sin \angle BAM \cdot \sin \angle ACB}{\sin \angle CAM \cdot \sin \angle ABC} = \frac{\sin \angle CAE \cdot \sin \angle ABE}{\sin \angle BAE \cdot \sin \angle ACE} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AE}{BE} = 1.$$

Cách 2



Một đường tròn bất kỳ qua B, C cắt AB, AC tại P, Q. Gọi N là trung điểm PQ. Khi đó AN là đường đối trung. Còn nhiều cách nữa nhưng tạm ngưng đây.

Tính chất 13. Cho tam giác ABC, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại D. Khi đó $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.



Ta có $\triangle DBA \sim \triangle DAC$ suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Do đó $\frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DA} \cdot \frac{DA}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Nhận xét: đường thẳng AD được gọi là đường đối trung ngoài đỉnh A của tam giác ABC.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC có $AB = 2AC$, $B(1;2)$, $C(-2;5)$. Biết tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua $M(3;2)$, tìm tọa độ điểm A.

Ta có $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ suy ra $D(2;1)$. Đường thẳng AM đi qua D, N nên có phương trình AM: $x - y - 1 = 0$. Gọi $A(a; a - 1)$ sử dụng $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ giải ra ta được $\begin{cases} A(0; -1) \\ A(4; 3) \end{cases}$.

Bài tập 11. Cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $M(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Biết đường thẳng EF có phương trình $x - 2 = 0$, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

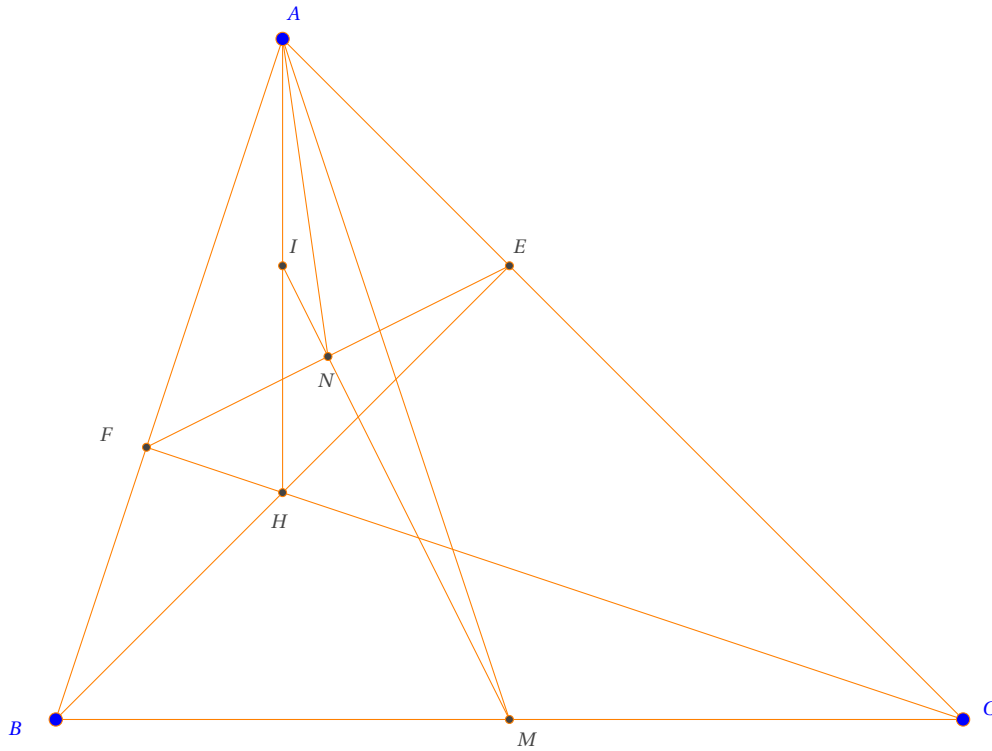
Nâng lên mức độ một chút

Bài tập 12. Cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Biết đường thẳng EF có phương trình $x - 2 = 0$, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Nâng lên một chút nữa hai bài sau:

Bài tập 13. Cho tam giác ABC có $M(3;-2)$ là trung điểm BC và $H(1;1)$ là trực tâm tam giác. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC. Đường thẳng EF có phương trình $2x - 5y + 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

Bài tập 14. Cho tam giác ABC có $M(3;1)$ là trung điểm BC và $A(-4;0)$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC. Đường thẳng EF có phương trình $EF: x + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.



Cách 1: Tính chất hình học, cách CÀNG KHÔN ĐẠI NA DI, đọc cho biết không nên luyện.

Ta có ba dữ kiện đã biết là điểm A, M và đường thẳng EF . Giả sử MI cắt EF tại N . Ta có Nhận xét: như sau:

- N là trung điểm EF
- AM là đường đối trung của AN .

Do đó bài toán trên được quy về bài toán tìm tọa độ E, F (xét tam giác AEF) khi ta biết điểm A , trung điểm N , đường đối trung AM , đường thẳng EF . Đây là bài toán cơ bản. Khi có tọa độ điểm E, F ta chỉ cần dựng đường tròn tâm M bán kính $ME = MF$, cắt đường thẳng AE, AF lần lượt tại C, B .

Cách dựng E, F :

$a = -2$. Suy ra $(C_1) : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Do đó tọa độ E, F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(-1;3), F(-1;-1) \\ E(-1;-1), F(-1;3) \end{cases}.$$

Đường tròn tâm M bán kính ME có phương trình $(C) : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$.

- $E(-1;3), F(-1;-1)$

Đường thẳng AE đi qua A, E có phương trình: $AE : x - y + 4 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow C(1;5).$$

Đường thẳng AF đi qua A, F có phương trình: $AF : x + 3y + 4 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

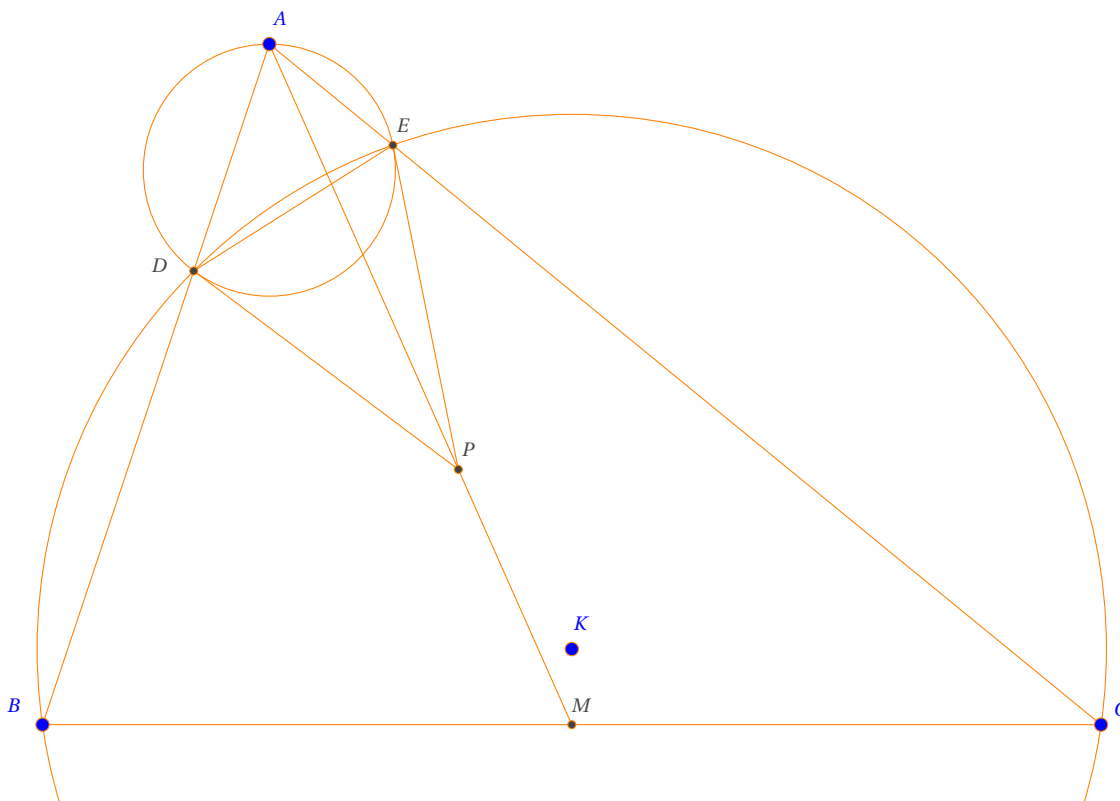
$$\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow B(5;-3).$$

- $E(-1;-1), F(-1;3)$

Làm tương tự ta có $B(1;5), C(5;-3)$.

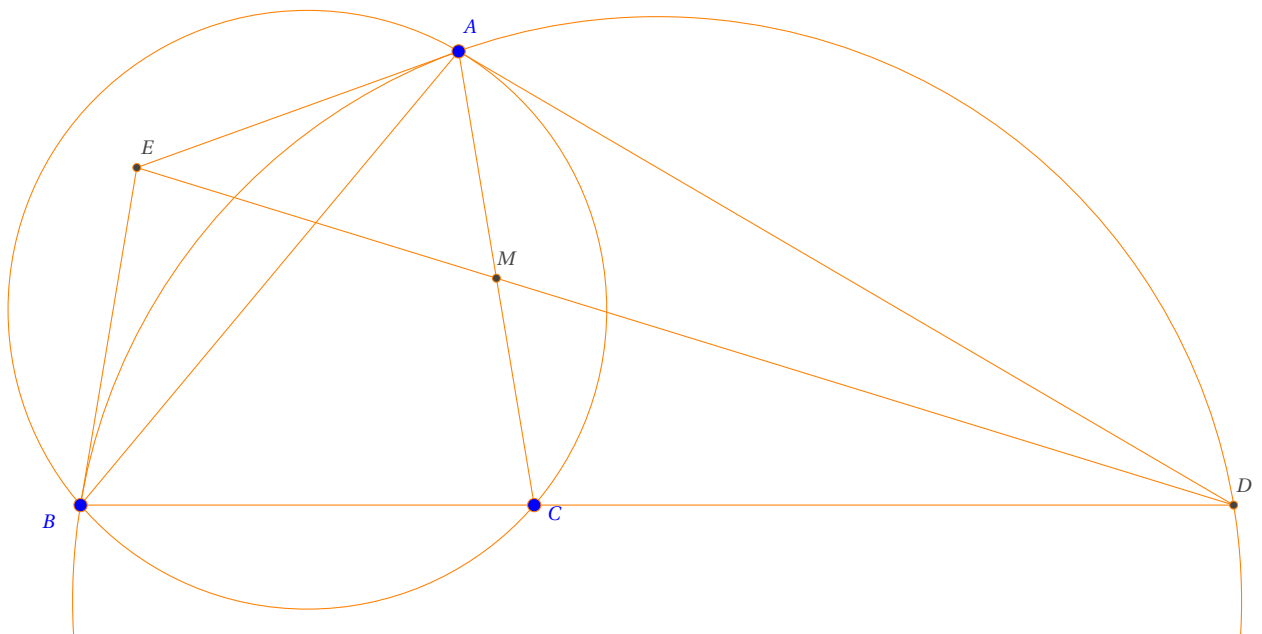
Nhận xét: Các em nên làm theo cách 2 là cách dùng hình học, pha thêm đại số nhưng cũng phải cần nắm vững các tính chất kinh điển trong sách "**Các tính chất hay dùng trong hình học phẳng Oxy tập 1 - tác giả Võ Quang Mậu**" để vận dụng.

Tính chất 14. Cho tam giác ABC . Một đường tròn tâm K đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC tại D, E . Tiếp tuyến tại D, E của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt nhau tại P . Khi đó AP đi qua trung điểm M của BC .



Ta có AP là đối trung của tam giác DAE do đó AP đi qua M .

Tính chất 15. Cho tam giác ABC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam ABC cắt đường thẳng BC tại D . Tiếp tuyến tại A, B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại E . Khi đó DE đi qua trung điểm M của AC .

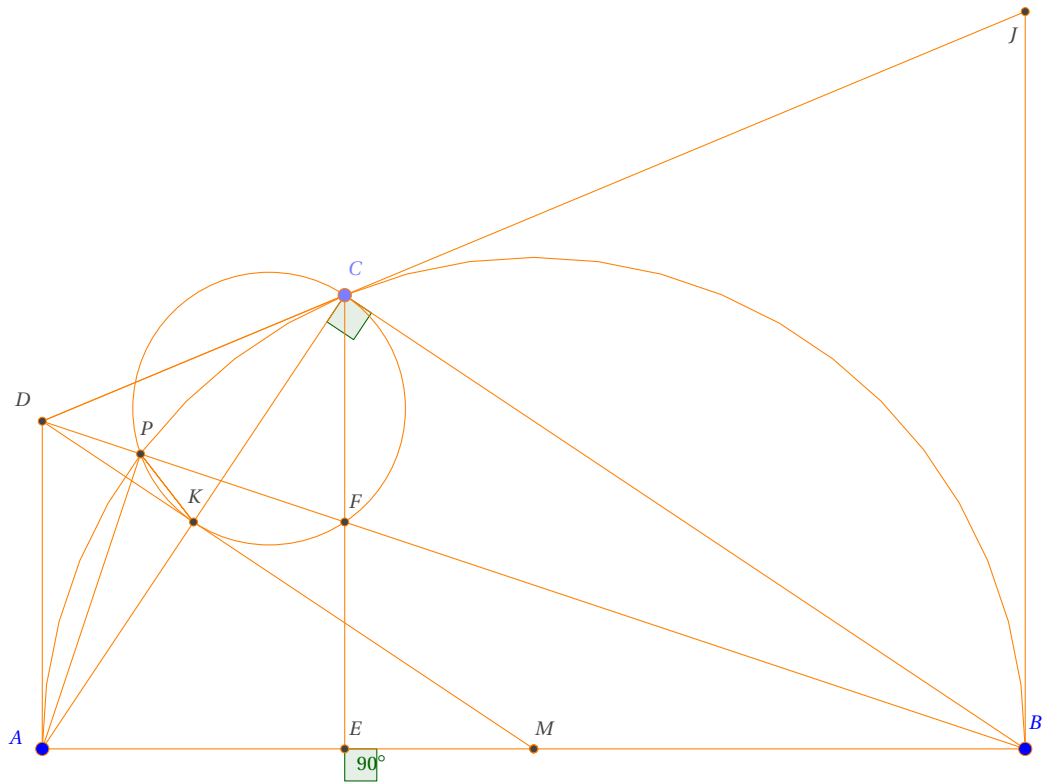


Ta có DE là đường đối trung của tam giác ADB do đó DE đi qua trung điểm M của AC .

Nhận xét: Tính chất này là sự mở rộng của tính chất cơ bản sau đã có trong sách tập 1.

Tính chất 16. Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CE . Tiếp tuyến tại A, C cắt nhau tại D . Khi đó

1. BD đi qua trung điểm F của CE .
2. Giả sử AC cắt DM tại K và BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $P \neq B$. Ta có bốn điểm C, F, K, P nội tiếp đường tròn.



1. Dùng Thalet và tính chất tiếp tuyến. Dựng tiếp đường tròn tại B cắt CD tại J. Ta có

$$\frac{EF}{AD} = \frac{EB}{AB} = \frac{CJ}{DJ} = \frac{JB}{DJ} = \frac{CF}{DC} = \frac{CF}{AD}.$$

Vậy $CF = FE$, hay BD đi qua trung điểm của CE.

2. Để thấy $AP \perp DP$ và $AK \perp DK$ nên tứ giác ADPK nội tiếp. Suy ra $\angle KPF = \angle KAD = \angle ACE$ (do $AD \parallel CE$) do đó tứ giác KPCF nội tiếp.

Chú ý ta có thể chứng minh DB qua trung điểm CE thông qua 2. như sau: Thật vậy do tứ giác KPCF nội tiếp nên $\angle FKC = \angle BPC = \angle BAC$ nên $KF \parallel AB$ mà K là trung điểm AC nên F là trung điểm CE.

Bài toán 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp đường tròn tâm I, chân đường cao hạ từ đỉnh C là điểm H. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại A, C cắt nhau tại M, đường thẳng BM cắt CH tại N. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết $H(\frac{1}{5}; \frac{12}{5})$, $N(\frac{13}{5}; \frac{6}{5})$ và điểm $P(0; -\frac{5}{2})$ thuộc đường thẳng AC

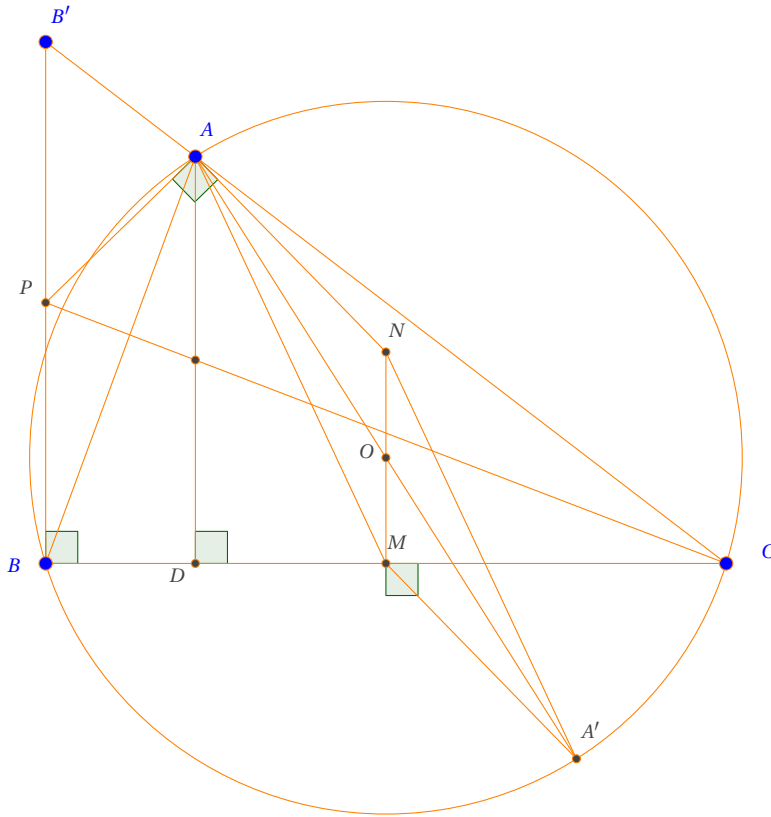
Đáp số $A(-3; -4)$, $B(2; 6)$ và $C(5; 0)$.

Bài toán 9. Trong Oxy cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I(2; 1)$ và H là bình chiếu vuông góc của C lên AB. Gọi K là trung điểm của CH. Tiếp tuyến của (T) tại A, C cắt nhau tại M. Phương trình đường thẳng MK: $27x + 14y - 93 = 0$ và $B \in x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Chuyên Hạ Long lần 1)

Tổng quát theo hướng khác cho tính chất trên

Tính chất 17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AD . Gọi M là trung điểm của BC , giả sử N là điểm đối xứng của M qua O . Đường thẳng qua A vuông góc AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D . Khi đó ta có PC đi qua trung điểm của AD .



Dựng đường kính AA' , khi đó $ANA'M$ là hình bình hành nên $A'M \perp AP$. Chú ý $AB \perp BA'$ nên $\triangle BAP \sim \triangle BA'M$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua P . Ta suy ra $\triangle BAB' \sim \triangle BA'C$ hay B', A, C thẳng hàng. Trong tam giác BCB' có CP là trung tuyến mà $AD \parallel BB'$ nên CP đi qua trung điểm AD .

Bài toán 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-2; 1)$, gọi $H(-1; -1)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A , và M là trung điểm cạnh BC , N là điểm đối xứng của M qua I . Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D , đường thẳng CD cắt AH tại điểm $E(0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độ dương.

1.8 Tâm nội tiếp của tam giác đường cao

Bài tập 15. Cho tam giác ABC vuông tại A , có AH là đường cao. Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC . Biết $A(2; 5), I(2; -1), J(6; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh B, C .

(HSG Cần Thơ)

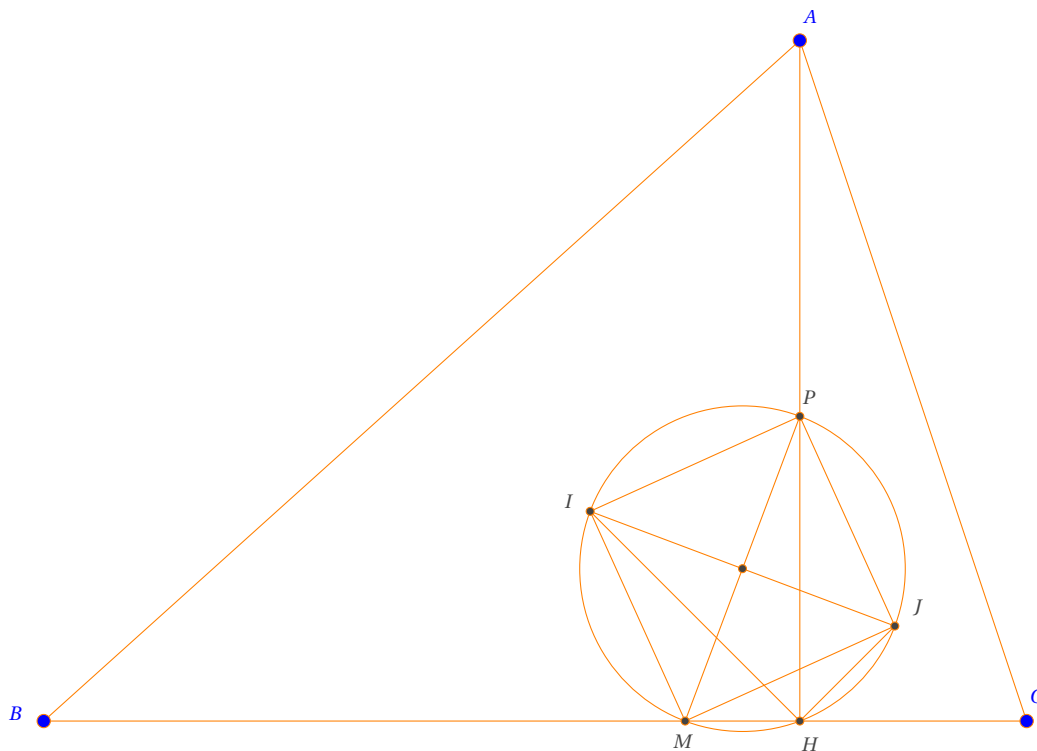
Thấy trên mạng có nhiều nhóm bình luận bài này, nên cũng xin góp một bài tổng quát cho vui.

- Thứ nhất bài cho dữ kiện tam giác ABC vuông tại A là một dữ kiện thừa.

- Hoặc tác giả bài này không biết đến tính chất đẹp của bài toán tổng quát hay cố tình cho góc A vuông để dễ xử lý.

Ta tính chất đẹp sau:

Tính chất 18. Cho tam giác ABC có AH là đường cao sao cho H nằm giữa B và C. Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC. Đường tròn đường kính IJ cắt AH, BC tại P, M. Khi đó IPJM là hình vuông.



Chú ý tam giác IHJ vuông tại H nên năm điểm I, P, J, H, M nội tiếp đường tròn do đó $\angle MIP = \angle AM = \angle MJP = 90^\circ$ nên tứ giác IPJM là hình chữ nhật. Mặt khác $\angle MIJ = \angle JHC = 45^\circ$ do đó tam giác IMJ là tam giác vuông cân hay IPJM là hình vuông.

Dựa vào tính chất này ta có thể giải quyết được bài toán cho dù đề không cho $\angle A = 90^\circ$.

Vì IPJM là hình vuông nên giải ra được $\begin{cases} P(3;2), M(5;-2) \\ P(5;-2), M(3;2) \end{cases}$ loại vì A, P khác phía. Đường cao AH đi qua A, P nên có phương trình AH: $3x + y - 11 = 0$. Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc AP nên có phương trình BC: $x - 3y - 11 = 0$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác AHB tiếp xúc với BC nên có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{18}{5}$. Tương tự đường tròn nội tiếp tam giác AHC có phương trình $(x-6)^2 + (y-1)^2 = \frac{32}{5}$.

Phương trình đường thẳng AB tiếp xúc với (I) có dạng $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases}$ loại trùng AH.

Đường thẳng AC tiếp xúc với (J) có dạng $\begin{cases} x + 3y - 17 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases}$ loại trùng AH.

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x - 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -4).$

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y - 17 = 0 \\ x - 3y - 11 \end{cases} \Rightarrow C(14; 1).$

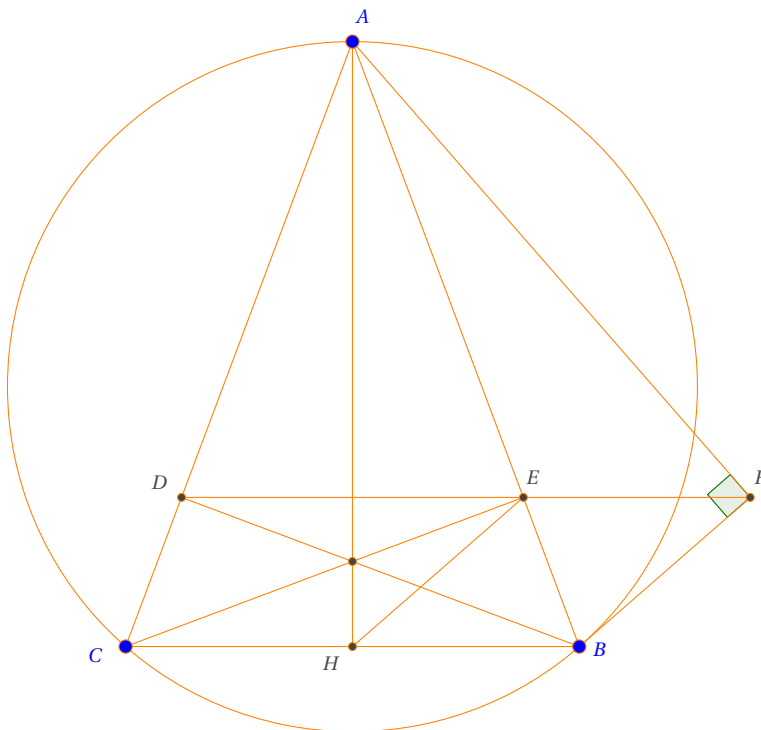
1.9 Tập phân tích những bài toán có sự đối xứng, yếu tố trung tâm và mối liên hệ giữa chúng

Chương 2

TÍNH CHẤT MỚI CÓ THỂ PHÙ HỢP VỚI XU HƯỚNG CỦA ĐỀ THI

Tính chất 19. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao BD, CE, AH . Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại F . Khi đó

1. $AF \perp BF$.
2. $BF = BH$.
3. $BFEH$ là hình thoi.



1. Ta có $\angle ABF = \angle ACB = \angle ADF$ suy ra tứ giác $ADBF$ nội tiếp suy ra $AF \perp BF$.
2. Ta có $\angle BAF = \angle BDF = \angle DBH = \angle DAH = \angle HAB$ suy ra $\triangle AHB = \triangle AFB$ hay $BH = BF$.
3. Ta có $\angle EFB = \angle DAB = \angle BHE = \angle DEH$ suy ra $HE \parallel BF$ hay $BFEH$ là hình thoi.

Bài tập 16. Cho tam giác ABC cân tại A, có đường cao BD, CE. Gọi F là giao điểm của DE với tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng DE đi qua $M(0; -\frac{6}{5})$. Biết $B(5; -3), F(\frac{37}{5}; -\frac{6}{5})$, tìm tọa độ điểm A, C.

(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng DF đi qua M, F nên $DF: y + \frac{6}{5} = 0$. Gọi $E(a; -\frac{6}{5})$, ta có BFEH là hình thoi suy ra

$$\begin{cases} E(\frac{22}{5}; -\frac{6}{5}), H(2; -3) \\ E(\frac{52}{5}; -\frac{6}{5}), H(8; -3) \end{cases}$$

- $E(\frac{52}{5}; -\frac{6}{5}), H(8; -3)$

Đường thẳng AB đi qua B, E nên $AB: x - 3y - 14 = 0$. Đường cao AH đi qua H và vuông góc với DF nên $AH: x - 8 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

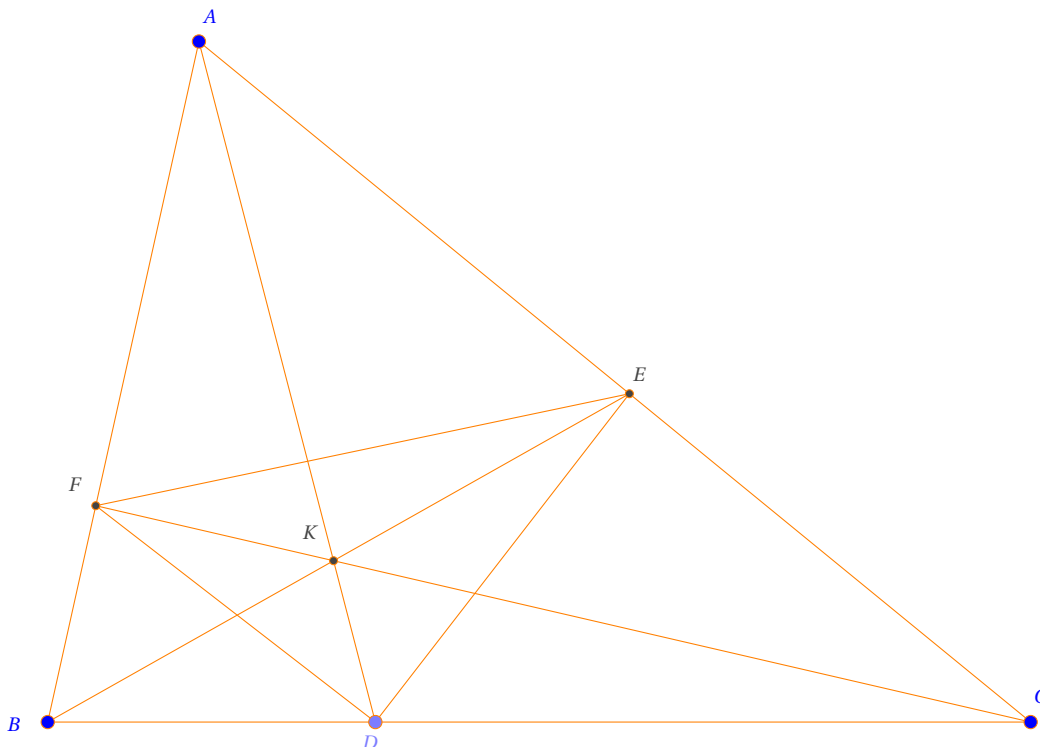
$$\begin{cases} x - 3y - 14 = 0 \\ x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8; -2).$$

Điểm C đối xứng với B qua H nên $C(11; -3)$.

- $E(\frac{22}{5}; -\frac{6}{5}), H(2; -3)$

Hoàn toàn tương tự như trên ta có $A(2; 6), B(-1; -3)$ thỏa bài toán.

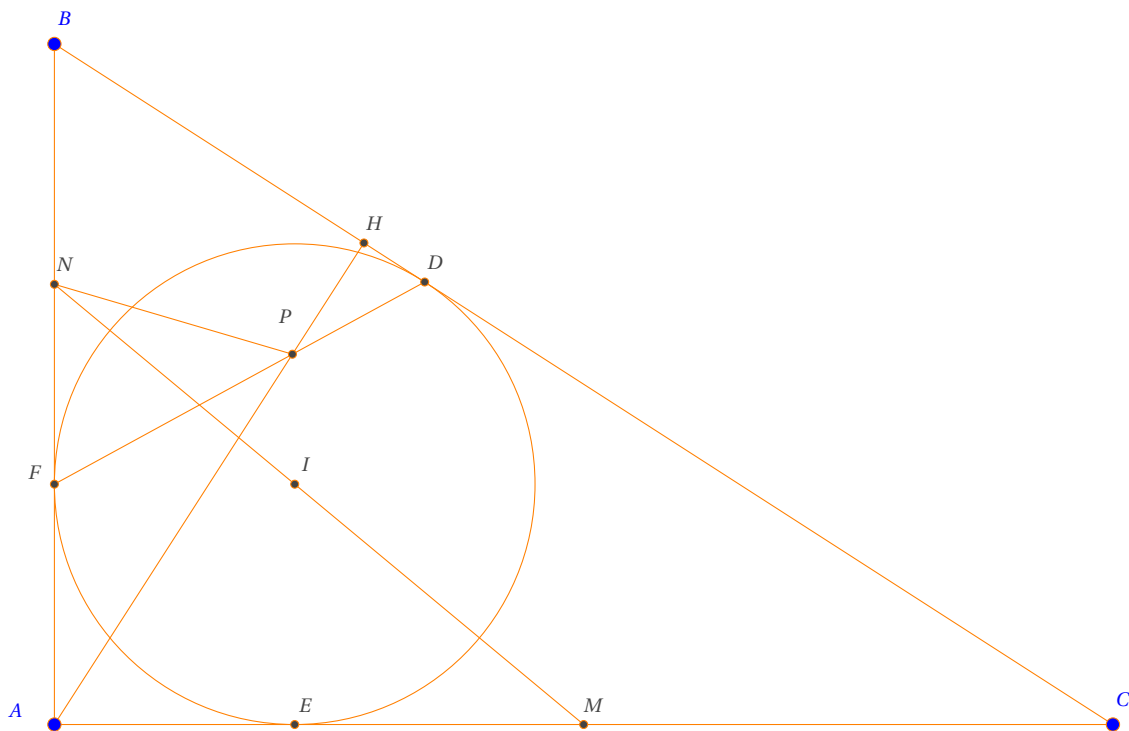
Tính chất 20. Cho tam giác ABC, D là điểm tùy ý trên cạnh BC. DE là phân giác của $\angle ADC$. Đường thẳng BE cắt AD tại K. Kéo dài CK cắt AB tại F. Khi đó DF là phân giác của $\angle ADB$.



Bài tập 17.

Tính chất 21. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với (I) và M là trung điểm cạnh AC . Đường thẳng MI cắt cạnh AB tại N , đường thẳng DF cắt đường cao AH tại điểm P . Khi đó

- 1.
2. $AN = AP$.
- 3.



Bài tập 18. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm $I(2;1)$. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với (I) và M là trung điểm cạnh AC . Đường thẳng MI cắt cạnh AB tại N , đường thẳng DF cắt đường cao AH tại điểm P . Biết $N(3;4)$, $P(1;2)$ và đỉnh A thuộc đường thẳng $x - 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Tính chất 22. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Gọi M, N là điểm đối xứng của H qua A, B . các đường thẳng ME, DN cắt các cạnh BC, AC tương ứng tại P, Q . Khi đó $PQ \parallel AB$.

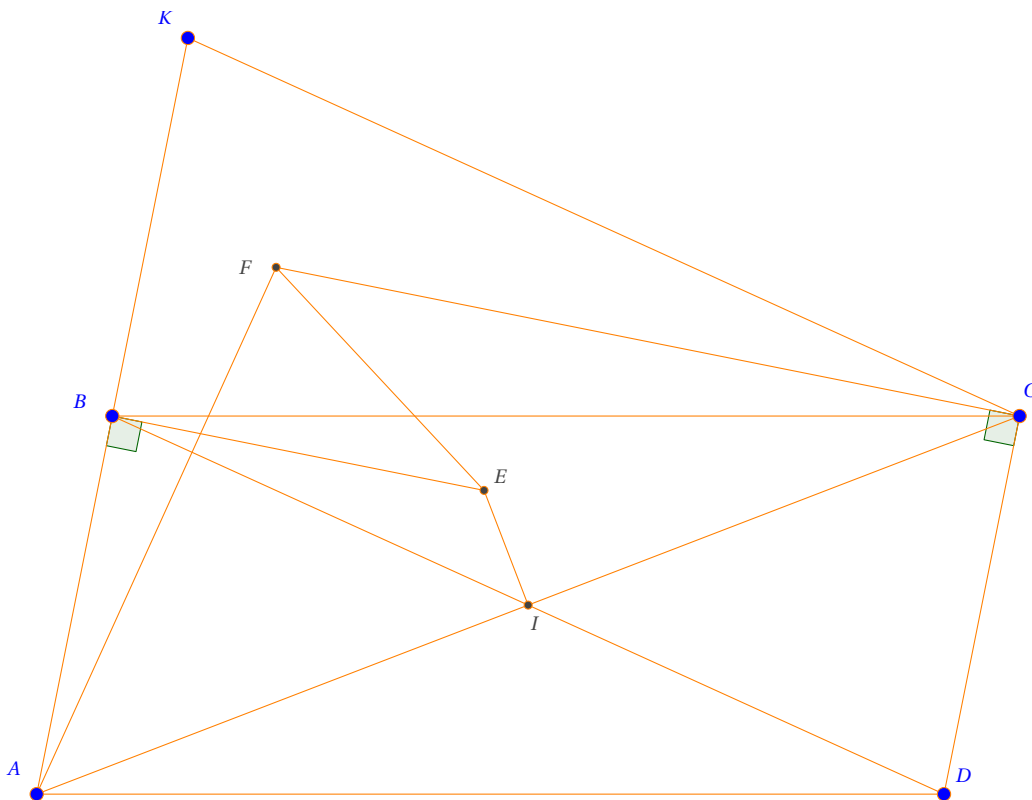


Facebook: Võ Quang Mẫn

$AD \perp AM$.

Bài tập 20.

Tính chất 24. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt trung trực AC tại E . Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A và vuông góc BD tại F . Gọi K là điểm đối xứng của A qua B , khi đó E, F là tâm ngoại tiếp và trực tâm tam giác AKC .

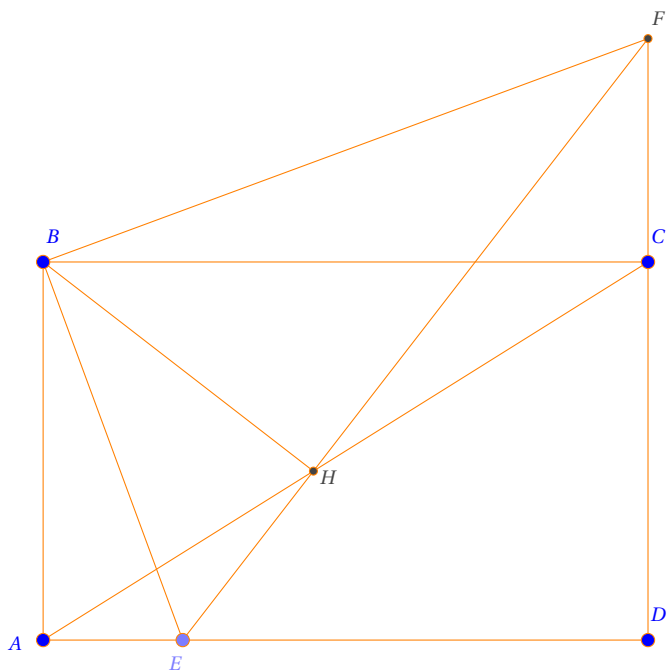


Để thấy BE, EI là trung trực của AK, AC nên E là tâm ngoại tiếp tam giác AKC . Ta có BI là đường trung bình của tam giác AKC mà $AF \perp BI$ nên $AK \perp KC$. mặt khác $FC \perp CD$ nên $CF \perp AK$, vậy F là trực tâm tam giác AKC .

Bài tập 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt trung trực AC tại E . Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A và vuông góc BD tại F . Biết $A(-1; -3), E(\frac{83}{20}; -\frac{3}{80}), F(\frac{17}{10}; \frac{123}{40})$, tìm tọa độ các đỉnh B, C, D .

(Võ Quang Mẫn)

Tính chất 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$, E là một điểm trên cạnh AD . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt đường thẳng CD tại F . EF cắt AC tại H . Khi đó $BH \perp EF$.



Ta có $\angle ABE = \angle CBF$ suy ra $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ suy ra $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ do đó $\angle BAH = \angle BEH$ hay tứ giác BAEH nội tiếp suy ra $BH \perp EF$.

Bài tập 22. Cho hình chữ nhật ABCD, E là một điểm trên cạnh AD. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt đường thẳng CD tại F. EF cắt AC tại H. Biết $A(-2; -3), E(0; -3), H(\frac{54}{25}; \frac{3}{25})$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEH có phương trình (AEH) : $(x+1)^2 + y^2 = 10$. Đường thẳng BH đi qua H và vuông góc AH nên có phương trình BH : $9x + 13y - 21 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 9x + 13y - 21 = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow B(-2; 3).$$

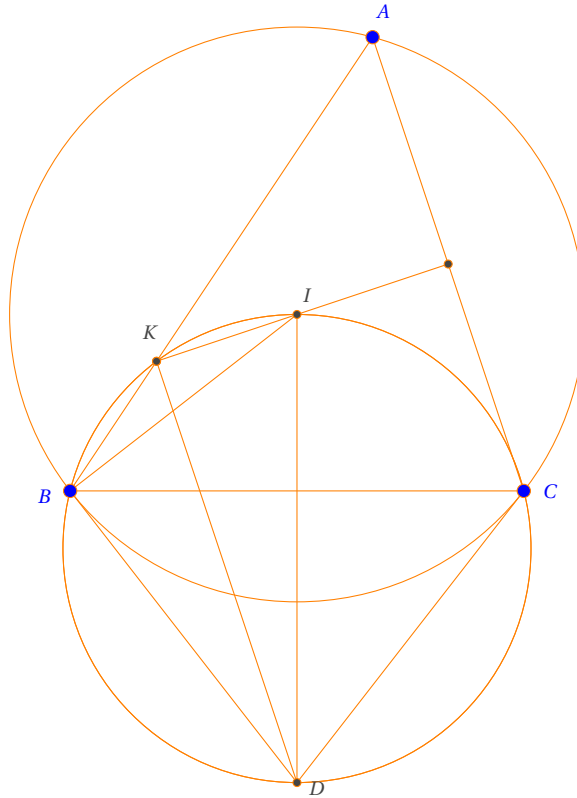
Đường thẳng EH : $13x - 9y - 27 = 0$. Đường thẳng BF đi qua B và vuông góc BE nên BF : $x - 3y + 11 = 0$. Tọa độ F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + 11 = 0 \\ 13x - 9y - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(6; \frac{17}{3}).$$

Đường thẳng CD đi qua F song song với AB nên CD : $x - 6 = 0$. Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc AB nên BC : $y = 3$. Giải ra ta được C(6; 3), D(6; -3).

Tính chất 26. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Hai tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D. Trung trực AC cắt đường thẳng AB tại K. Khi đó

1. Năm điểm B, K, I, C, D nằm trên một đường tròn.
2. $IK \perp KD$.
3. $DK \parallel AC$.



1. Theo các tính chất kinh điển ta có $\angle BKC = 2\angle A = \angle BIC$ nên tứ giác BKIC nội tiếp. Mặt khác do $IC \perp CD$ và $IB \perp BD$ nên tứ giác BICD nội tiếp. Do đó năm điểm B, K, I, C, D nằm trên một đường tròn.
2. Theo ý 1, ta có tứ giác IKDC nội tiếp suy ra $IK \perp KD$.
3. $\angle BKD = \angle BID = \angle A$ suy ra $DK \parallel AC$.

Bài tập 23. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Hai tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D. Trung trực AC cắt đường thẳng AB tại K. Biết $A(4; 5)$, $D(4; -5)$, $K(\frac{3}{2}; 0)$. Tìm tọa độ điểm B, C.

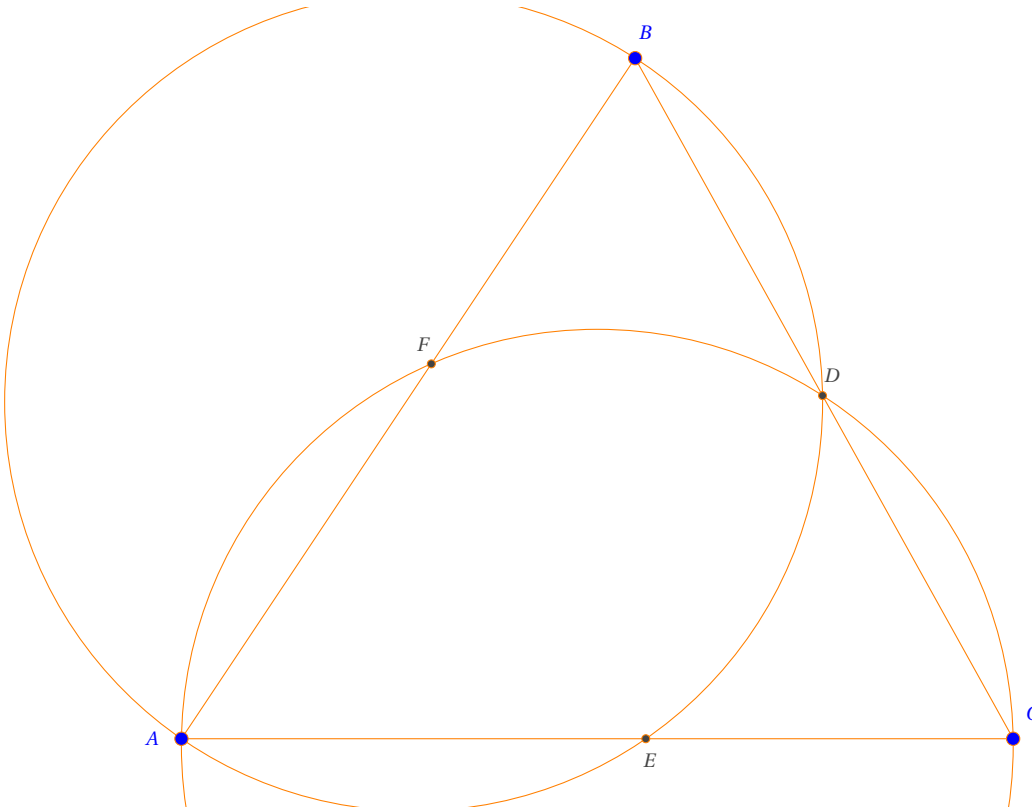
(Võ Quang Mẫn)

Đường trung trực AC đi qua K và vuông góc KD nên $KI: 2x - 4y - 3 = 0$. Điểm C đối xứng với A qua KI nên $C(7; -1)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KDC có phương trình (KDC): $(x - 4)^2 + (y + \frac{15}{8})^2 = \frac{625}{64}$. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - 4y - 3 = 0 \\ (x - 4)^2 + (y + \frac{15}{8})^2 = \frac{625}{64} \end{cases} \Rightarrow I(4; \frac{5}{4}).$$

Đường thẳng $DI: x - 4 = 0$. Điểm B đối xứng với C qua ID nên $B(1; -1)$.

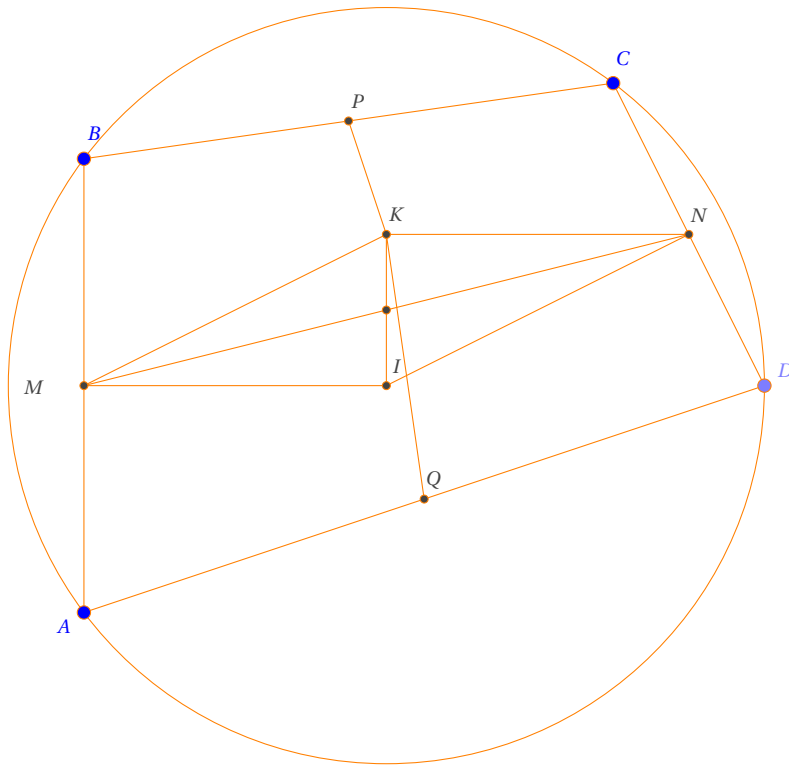
Tính chất 27. Cho tam giác ABC nhọn, phân giác AD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD lần lượt cắt các cạnh AC, AB tại E, F . Khi đó $CE = BF$.



Bài tập 24.

Tính chất 28. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm I . Gọi M, N, P, Q là trung điểm cạnh AB, CD, BC, AD .

- $MPNQ$ là hình bình hành có tâm E .
- Đường thẳng qua M, N, P, Q lần lượt vuông góc với CD, AB, AD, BC đồng quy tại K , ở đây K đối xứng với I qua E .



Bài tập 25. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm $I(5;0)$. Gọi $M(1;0), N(9;2)$ là trung điểm cạnh AB, CD. Tìm tọa độ các đỉnh của tứ giác ABC, biết $A \in y + 3 = 0$.

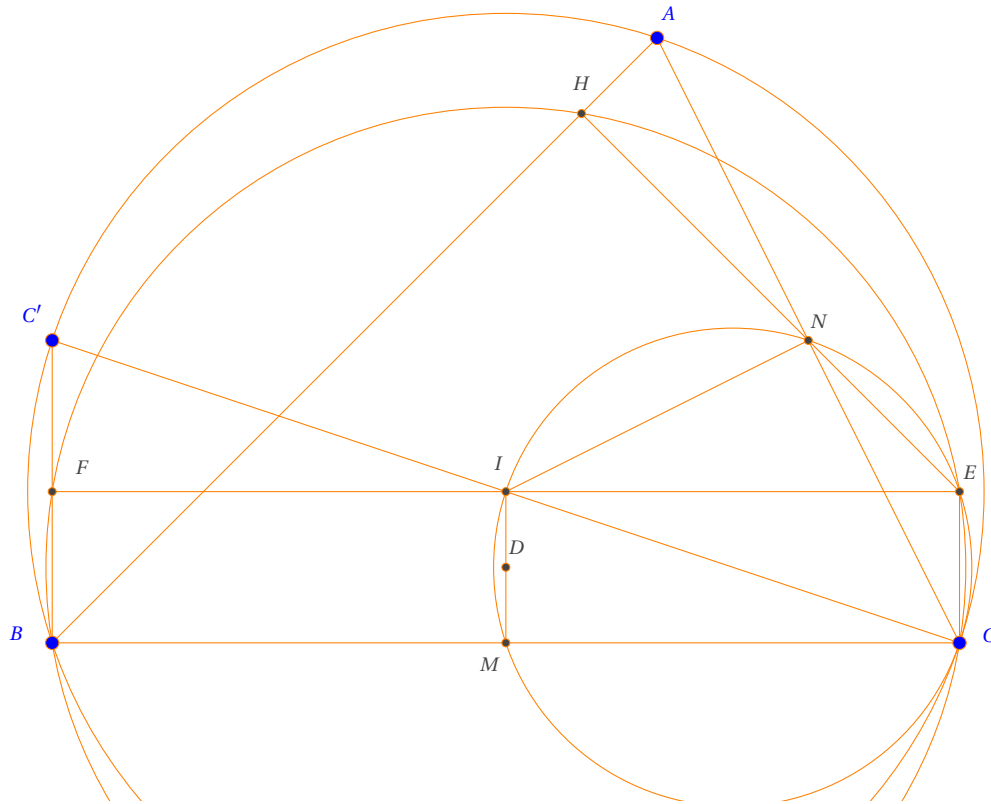
(Võ Quang Mẫn)

Bài tập 26. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi $M(1;0), N(9;2), P, Q$ là trung điểm cạnh AB, CD, BC, AD. Đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt đường thẳng qua Q vuông góc với BC tại $K(5;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tứ giác ABC, biết $A \in y + 3 = 0$.

(Võ Quang Mẫn)

Tính chất 29. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N là trung điểm BC, AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên AB. Dựng hình chữ nhật MIEC. Khi đó

1. H, N, E thẳng hàng hay H nằm trên đường tròn đường kính BE.
2. Gọi C' là đối xứng của C qua I và F là trung điểm $C'B$, ta có năm điểm B, F, H, E, C nội tiếp.



1. Ta có $IN \perp NC, IM \perp MC$ do đó năm điểm I, N, E, C, M nội tiếp. Suy ra $\angle ENC = \angle EIC = \angle ICM = 90^\circ - \angle A = \angle ANH$ do đó H, N, E thẳng hàng hay H nằm trên đường tròn đường kính BE .
2. Chú ý $IF \perp BF, BF \perp BC$ nên $BFEC$ là hình chữ nhật do đó F nằm trên đường tròn đường kính BE hay năm điểm B, F, H, E, C nội tiếp.

Bài tập 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC có $B(-2; -3)$ và $C(10; -3)$ nội tiếp đường tròn tâm $I(4; -1)$. Gọi N là trung điểm AC , H là hình chiếu vuông góc của N lên AB . Tìm tọa độ của A biết rằng H thuộc đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$ và H có hoành độ dương.

(Võ Quang Mẫn)

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(ABC) : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 40$. Gọi M là trung điểm BC suy ra $M(4; -3)$. Dựng hình chữ nhật $IMCE$ suy ra $E(10; -1)$. Đường tròn đường kính BE có phương trình $(BE) : (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 37$. Ta có H, N, E thẳng hàng hay H nằm trên đường tròn đường kính BE . Tọa độ của H là nghiệm của hệ

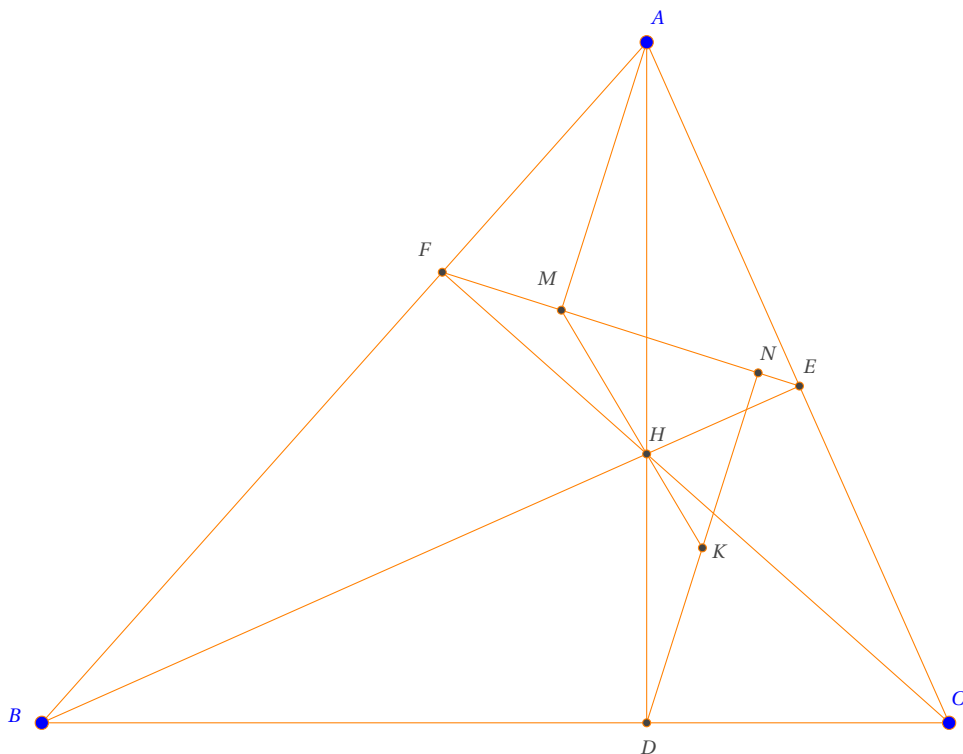
$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 37 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(5; 4).$$

Đường thẳng BA đi qua B, H nên có phương trình $AB : x - y - 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 40 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6; 5).$$

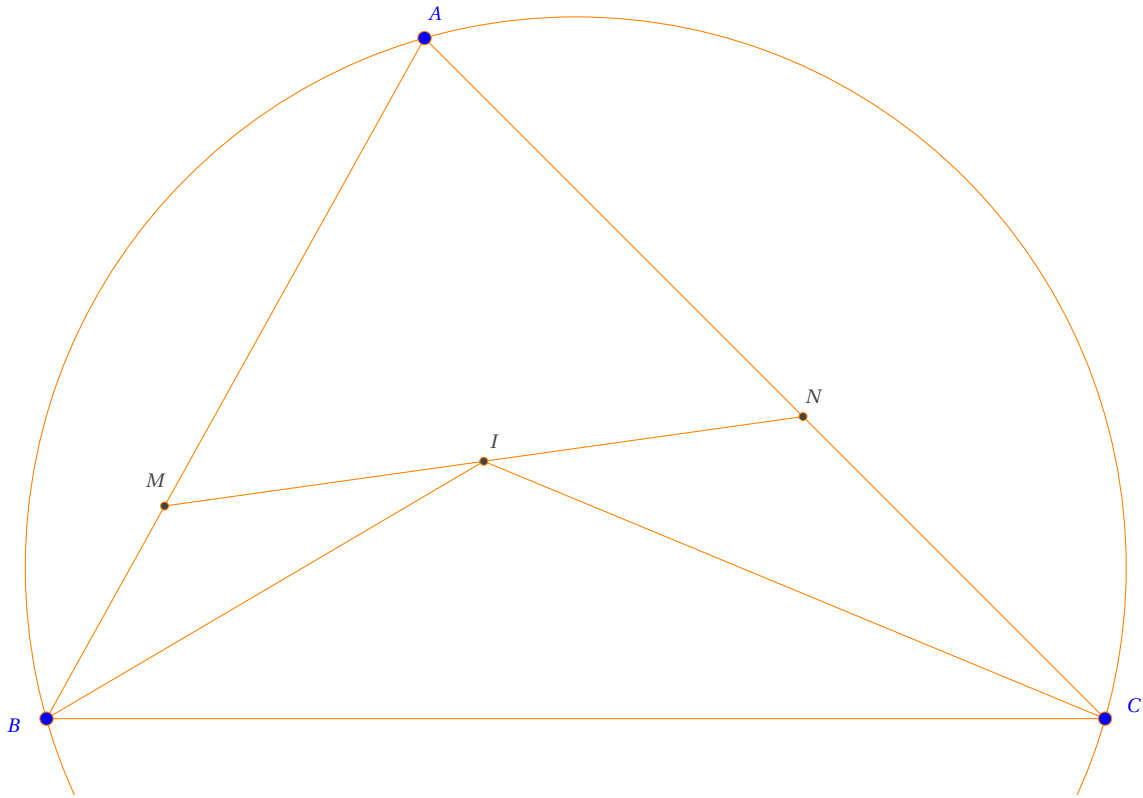
Tính chất 30. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF , trực tâm H . Kẻ AM, DN lần lượt vuông góc xuống EF . Khi đó

1. MH đi qua trung điểm DN .
2. ND là phân giác $\angle BNC$.
- 3.



Bài tập 28.

Tính chất 31. Cho tam giác nhọn ABC có tâm đường tròn nội tiếp I . Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Khi đó $\triangle BMI \sim \triangle INC$ hay $BM \cdot CN = MI \cdot NI = IM^2$.



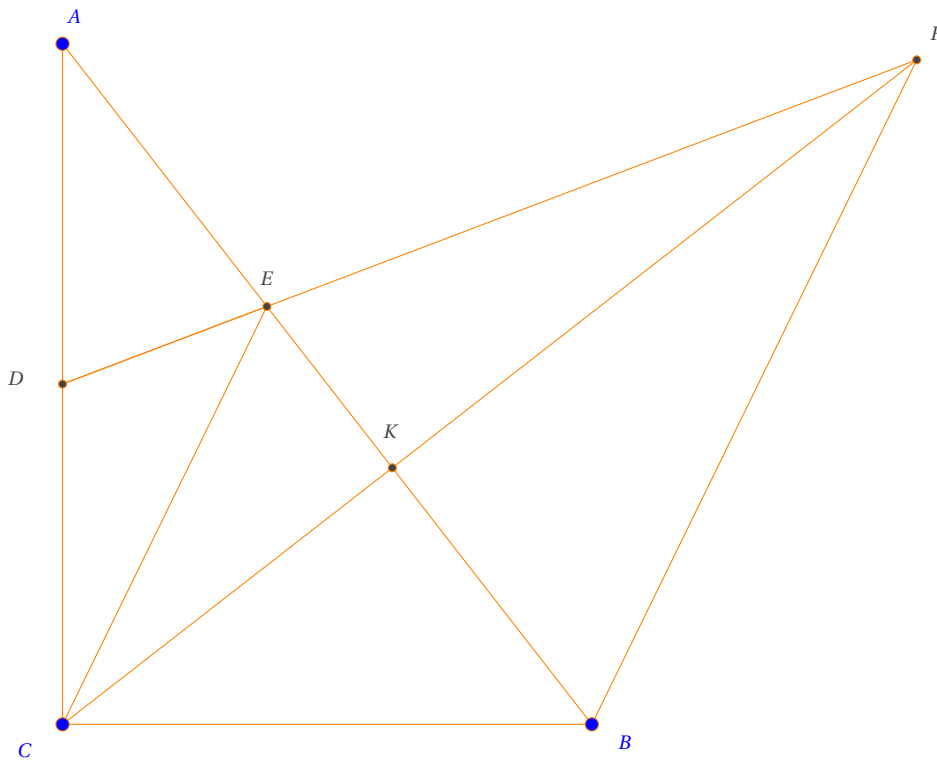
Bài tập 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC có tâm đường tròn nội tiếp $I(1;0)$. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N sao cho $BM \cdot CN = 50$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng $P(3;11)$ thuộc đường thẳng AB, M thuộc đường thẳng $x + y + 7 = 0$ và M có hoành độ âm.

(HSG Nghệ An 2015)

Chương 3

TỔNG HỢP CÁC BÀI TRÊN GROUP OXY

Tính chất 32. Cho tam giác ABC vuông tại C với đường cao CK . Trong tam giác ACK kẻ đường phân giác CE , D là trung điểm của đoạn thẳng AC , F là giao điểm của các đường thẳng DE và CK . Chứng minh rằng $BF \parallel CE$.

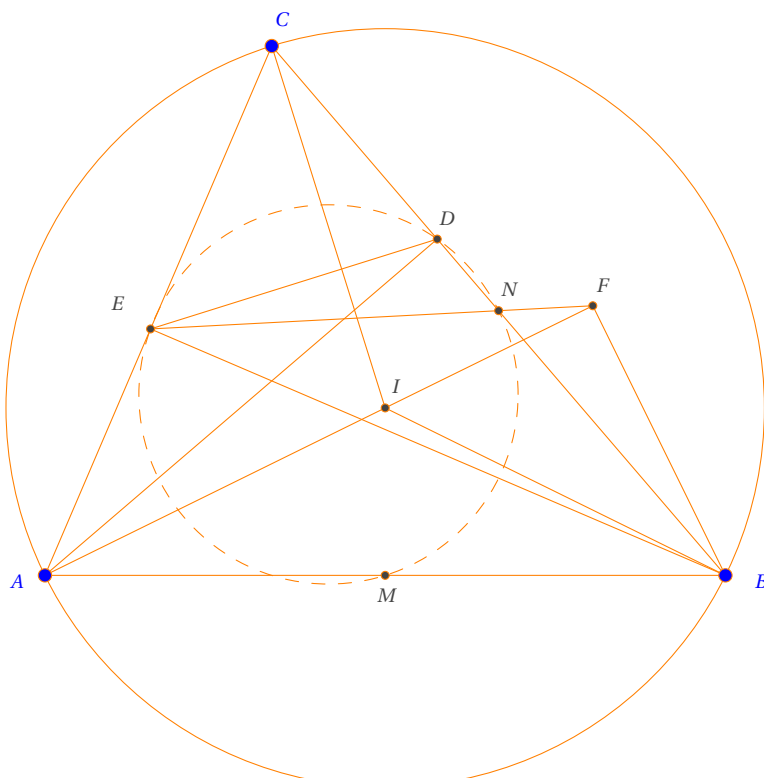


Chú ý tam giác CBE cân tại B vì $\angle ECB = \angle CEB = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Dùng định lý Menelaus đối với tam giác ACK ta có $\frac{KF}{KC} \cdot \frac{DC}{DA} \cdot \frac{EA}{EK} = 1$ suy ra $\frac{KF}{KC} = \frac{EK}{EA} = \frac{CK}{CA} = \frac{BK}{BC} = \frac{BK}{BE}$ do đó $CE \parallel BF$.

Bài tập 30.

Bài tập 31. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm I với các đường cao AD, BE . Biết $D(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5})$, $E(2; 2)$ và $F(1; 0)$ là hình chiếu của B lên đường thẳng AI . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC .

(Nguyễn Đại Dương)



Chú ý năm điểm A, K, D, F, B nằm trên đường tròn tâm M bán kính $R = MD = \frac{BC}{2}$. Gọi $M(a; b)$ vì $MK = MD = MF$ nên $M(-\frac{3}{10}; \frac{19}{10})$. Chú ý theo tính chất cũ ta có EF đi qua trung điểm N của BC và bốn điểm E, D, M, N nằm trên đường tròn Euler. Đường tròn Euler có phương trình $(x - \frac{9}{10})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{53}{20}$. Phương trình $EF: 2x - y - 2 = 0$. Tọa độ N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{9}{10})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{53}{20} \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}).$$

Đường thẳng BC đi qua D, N nên có phương trình $BC: x + 2y + 1 = 0$. Đường cao $AD: 2x - y = 0$. Vì M là trung điểm AB , $A \in 2x - y = 0$; $B \in x + 2y + 1 = 0$ suy ra $A(\frac{8}{5}; \frac{16}{5})$, $B(-\frac{11}{5}; \frac{3}{5})$. Đường trung trực của AB có phương trình $MI: 19x + 13y - 19 = 0$. Đường thẳng $AF: 16x - 3y - 16 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 16x - 3y - 16 = 0 \\ 19x + 13y - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0).$$

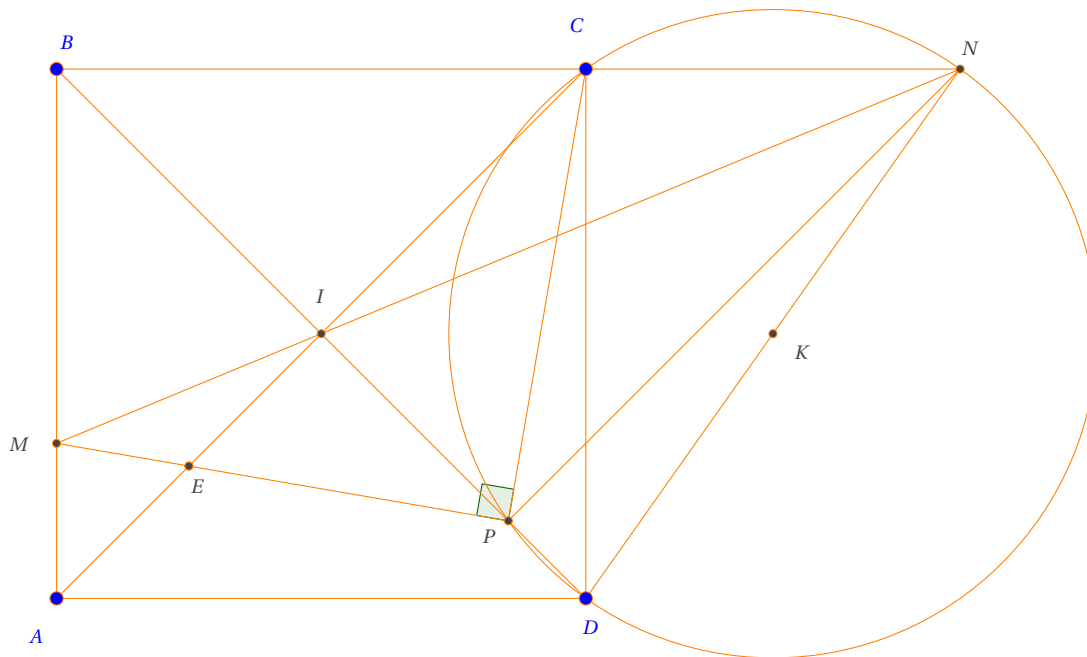
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{53}{5}$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = \frac{53}{5} \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{17}{5}; -\frac{11}{5}).$$

Nhận xét: Ta có thể tìm điểm N không cần thông qua đường tròn Euler. Chú ý MN là trung trực của DF .

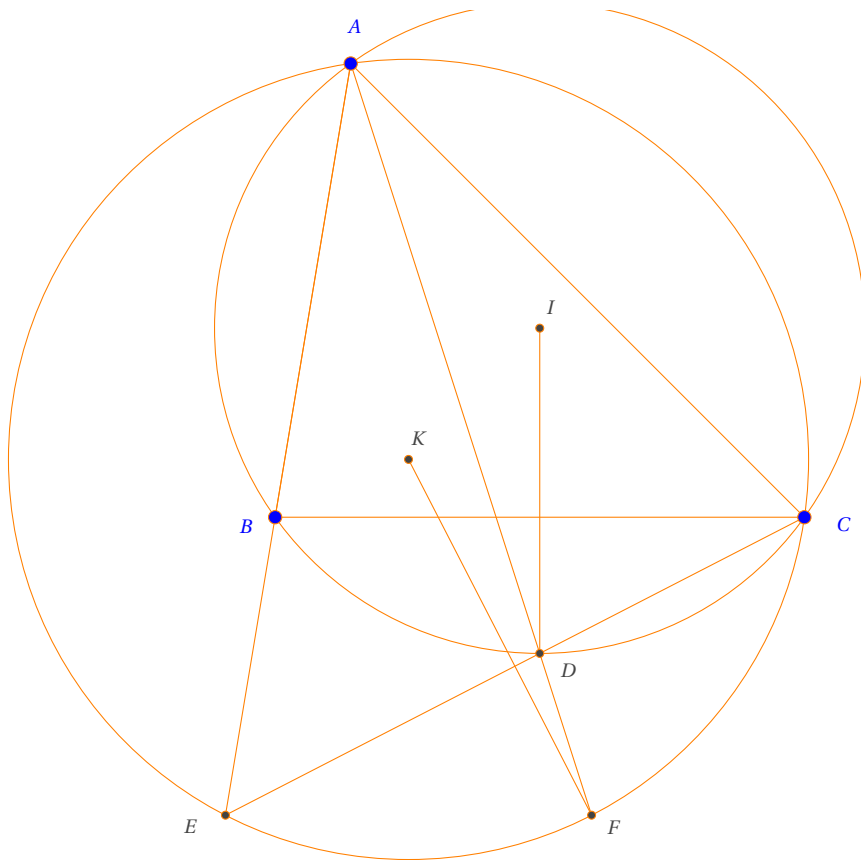
Tính chất 33. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I , M là một điểm thuộc cạnh AB sao cho $BI = BM$. Gọi N là giao điểm của IM và BC , đường tròn đường kính DN cắt BD tại $P \neq D$. Khi đó

1. Tam giác MPC vuông cân tại P .
2. Giả sử MP cắt AI tại E , ta có E là trung điểm AI .
- 3.



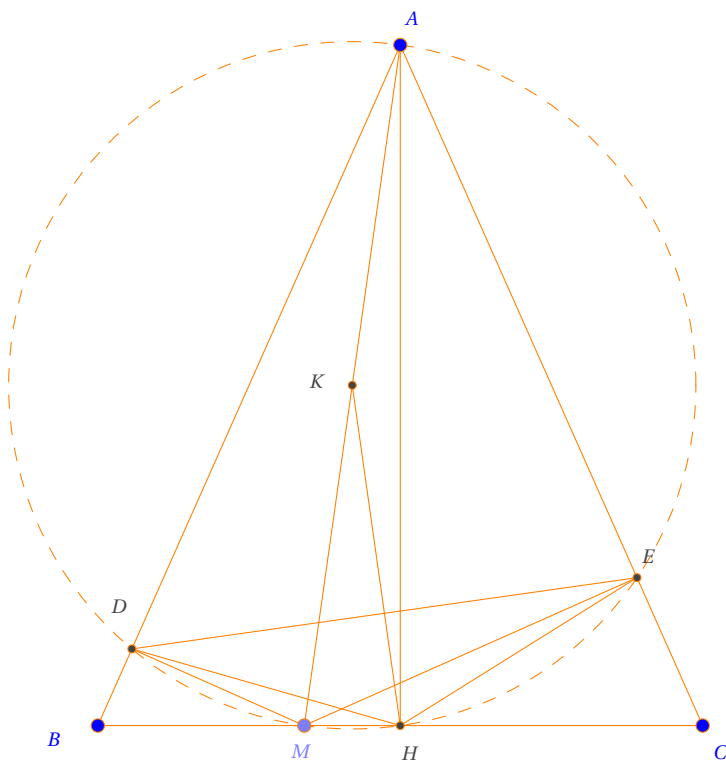
Bài tập 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ có tâm I , M là một điểm thuộc cạnh AB sao cho $BI = BM$. Gọi N là giao điểm của IM và BC , trung điểm của cạnh DN là điểm K thuộc $d: \sqrt{2}x - y + 2 = 0$. Đường tròn đường kính DN cắt BD tại $P \neq D$, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác PMC là $x^2 + y^2 - 2x - \sqrt{2}y = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết tung độ các điểm K, B, C đều nguyên.

Tính chất 34.



Bài tập 33. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (S) có tâm I , phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt (S) tại điểm thứ hai D , $DI: x+2y-10=0$, CD cắt AB tại $E(4;5)$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE có phương trình $(T): x^2+(y-2)^2=25$. Tìm A, B, C .

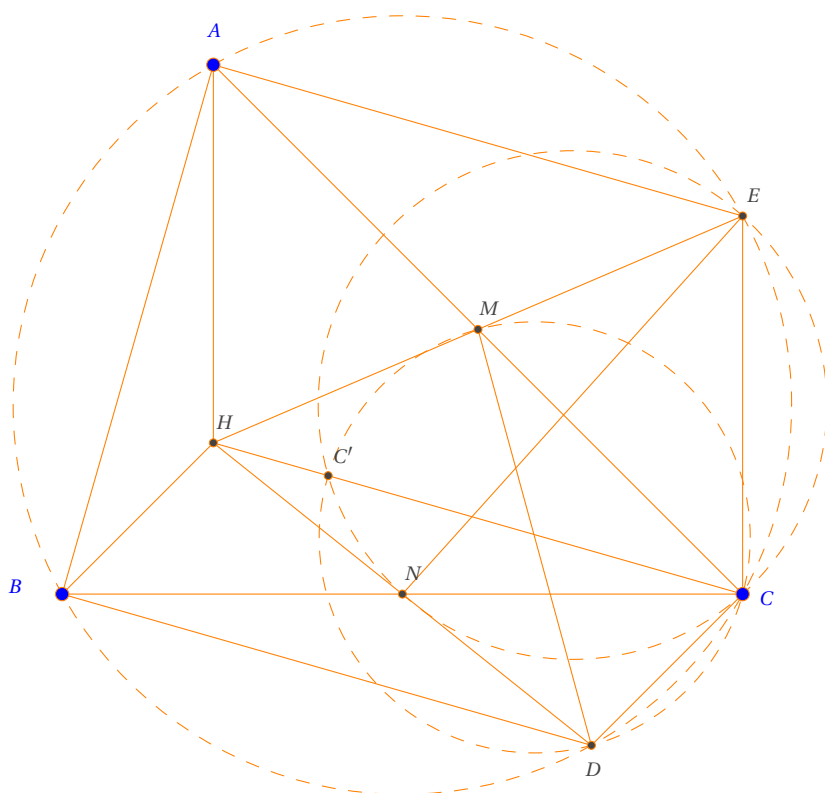
Tính chất 35.



Bài tập 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác cân ABC tại A . Biết trung điểm cạnh BC là $H(2;0)$ và $M(1;0)$ là một điểm nằm trên cạnh BH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng DE song song với đường thẳng $x - 5y = 0$ và $A \in 5x + 2y - 20 = 0$.

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)

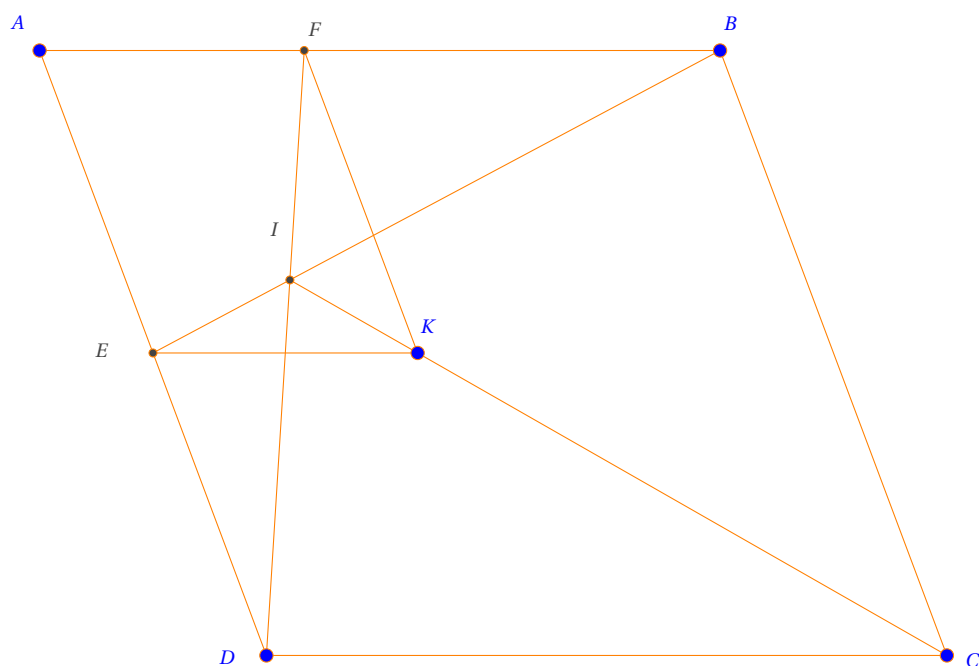
Bài tập 35. Cho tam giác ABC , trực tâm $H(-1;6)$, các điểm $M(2;2), N(1;1)$ là trung điểm các cạnh AC, BC . Tìm tọa độ tam giác ABC .



Gọi D, E là điểm đối xứng của H qua N, M suy ra $E(5; -2), D(3; -4)$. Ta có AD, BE là các đường kính nên các tam giác ECN, DCM vuông tại C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ECN và tam giác DCM có phương trình $(ECN) : (x - 3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$, $(DCM) : (x - \frac{5}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{37}{4}$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

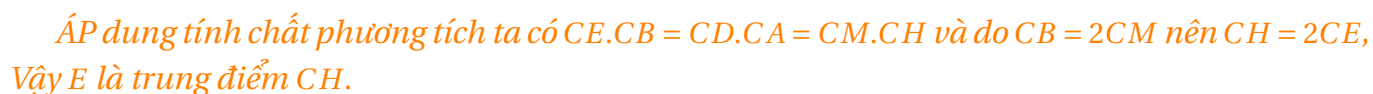
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \\ (x - \frac{5}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{37}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}) \\ C(3; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 2), B(-1; 0) \\ A(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}), B(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}) \end{cases}$$

Tính chất 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AD, AB lấy điểm E, F . BE, BF cắt nhau tại I . Dựng hình hành $AEKF$ khi đó I, K, C thẳng hàng.



Bài tập 36.

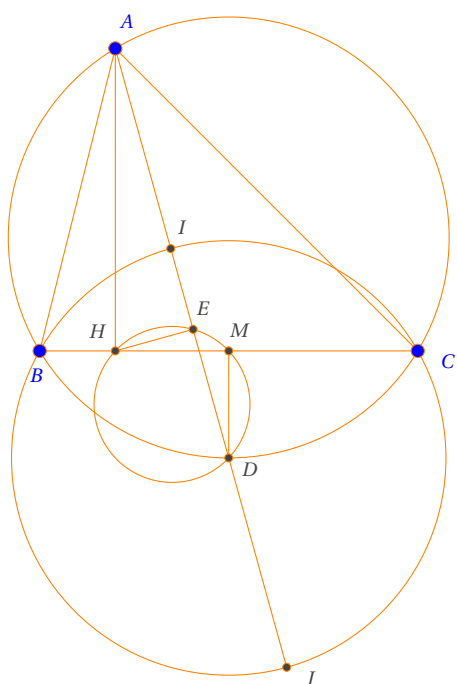
Tính chất 37. Cho tam giác ABC có đường cao AH , M là trung điểm BC . Gọi D là hình chiếu của M lên AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại E . Khi đó E là trung điểm CH .



Áp dụng tính chất ta có E là trung điểm HC suy ra $H(1; -2)$. Đường thẳng AH đi qua H và vuông góc EC nên có phương trình $3x - y - 5 = 0$. Gọi $A(a; 3a - 5)$ ta có $OA = 5$ suy ra

$\begin{cases} A(3; 4) \\ A(0; -5) \end{cases}$	loại	}
---	------	---

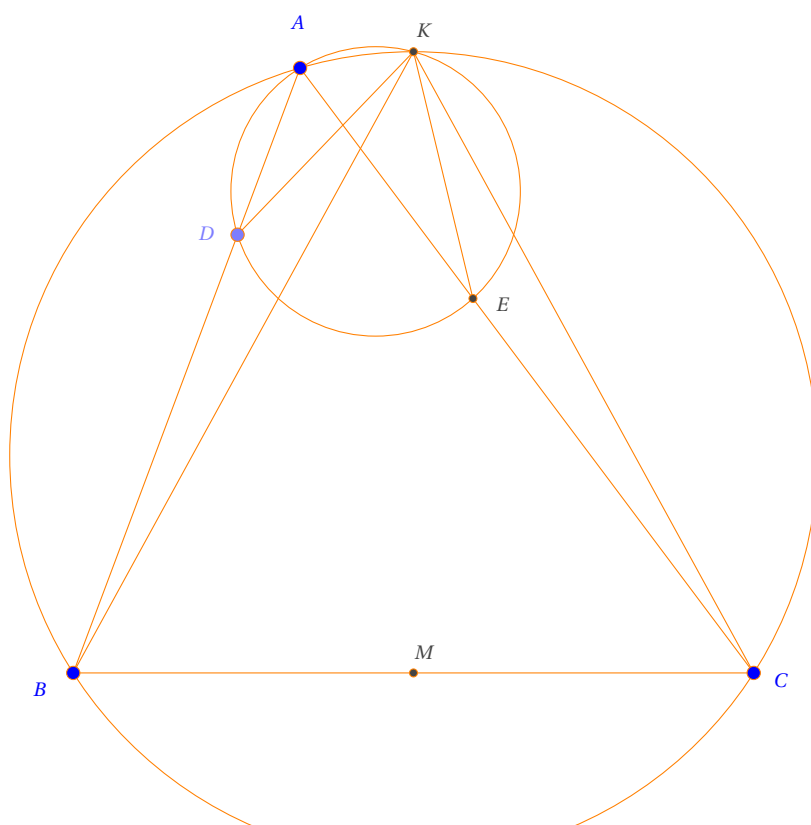
47



Bài tập 38. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp $I(0; -1)$, tâm bàng tiếp góc A là $J(5; 4)$ và hình chiếu của A lên BC là $H(\frac{11}{25}; -\frac{2}{25})$. Tính độ dài cạnh BC của tam giác.

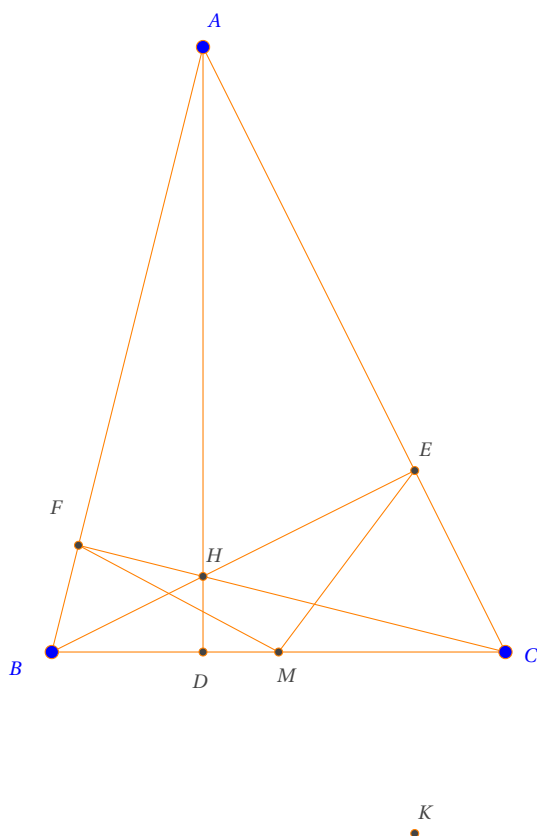
Tính chất 39. Cho tam giác không cân ABC . Trên tia $BACA$ lấy các điểm D, E . Gọi K là chính giữa cung BC chứa A . Khi đó

1. đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua K .
2. Bài toán vẫn còn đúng khi D, E chạy trên tia đối của BA, CA .
- 3.



Bài tập 39.

Bài tập 40. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng $BC : x - 2y - 6 = 0$ và $K(\frac{32}{5}; -\frac{14}{5})$ là điểm đối xứng của E qua đường thẳng BC . Biết $F(0; 2), x_B \in \mathbb{Z}$, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .



Điểm E đối xứng với K qua đường thẳng BC nên $E(4;2)$. Gọi $M(2m+6;6)$ chú ý tam giác BFC, BEC vuông tại F, E nên $MF = ME$ suy ra $M(2; -2)$. Gọi $B(2b+6;6)$ ta có $MB = MF$ suy ra

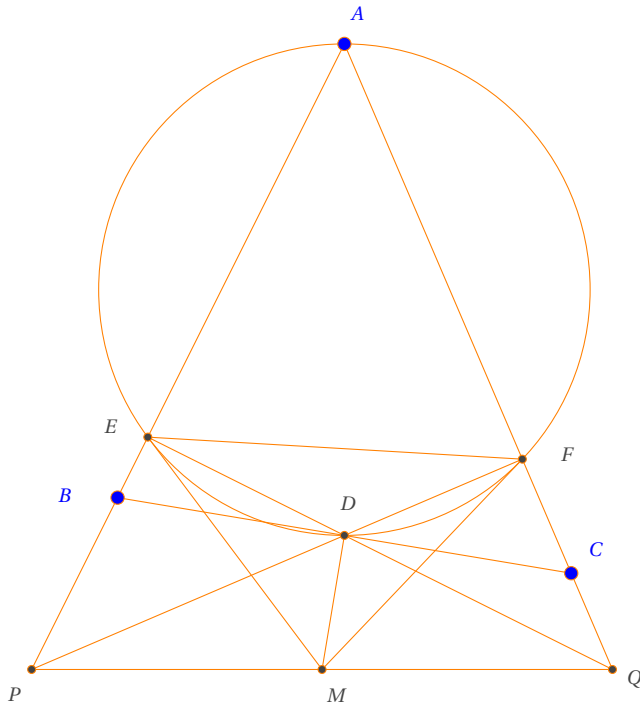
$$\begin{cases} B(6;0) \\ B(-2;-4) \end{cases} \text{ loại} \text{ do đó } C(-2;-4). \text{ Đường thẳng BF cắt CE tại K suy ra } K(1;5).$$

Tính chất 40.

Bài tập 41. Cho hình vuông ABCD có M, N lần lượt là điểm nằm trên đường chéo AC sao cho $AC = 3AM = 4AN$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN có phương trình $x^2 + y^2 - 15x - 13y + 86 = 0$. Biết trung trực CD đi qua gốc O và $x_A \in \mathbb{Z}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài tập 42. Cho tam giác ABC và D là trung điểm BC. Gọi E, F là hình chiếu của D lên AB, AC. DF cắt AB tại P. DE cắt AC tại Q. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác EAF cắt nhau tại M. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $DM: 4x - y - 6 = 0, PQ: x - y = 0$ và P có tọa độ nguyên và $B(\frac{11}{25}; \frac{81}{25})$.

(Chế đề lại của Đoàn Trí Dũng)



Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(2; 2).$$

Ta có DM là trung trực của BC do đó $D(\frac{11}{5}, \frac{14}{5})$ và $C(\frac{99}{25}, \frac{59}{25})$. Gọi $P(a; a)$ vì M là trung điểm PQ suy ra $Q(4 - a; 4 - a)$. Ta có D là trực tâm tam giác APQ nên

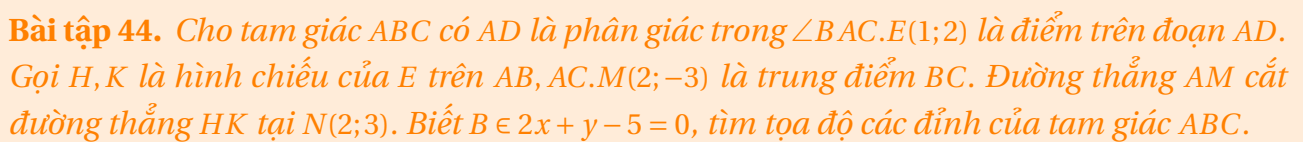
$$\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0 \\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1; 1) \\ Q(3; 3) \end{cases}.$$

Do đó đường thẳng PB: $4x + y - 5 = 0$ và đường thẳng QC: $2x + 3y - 15 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

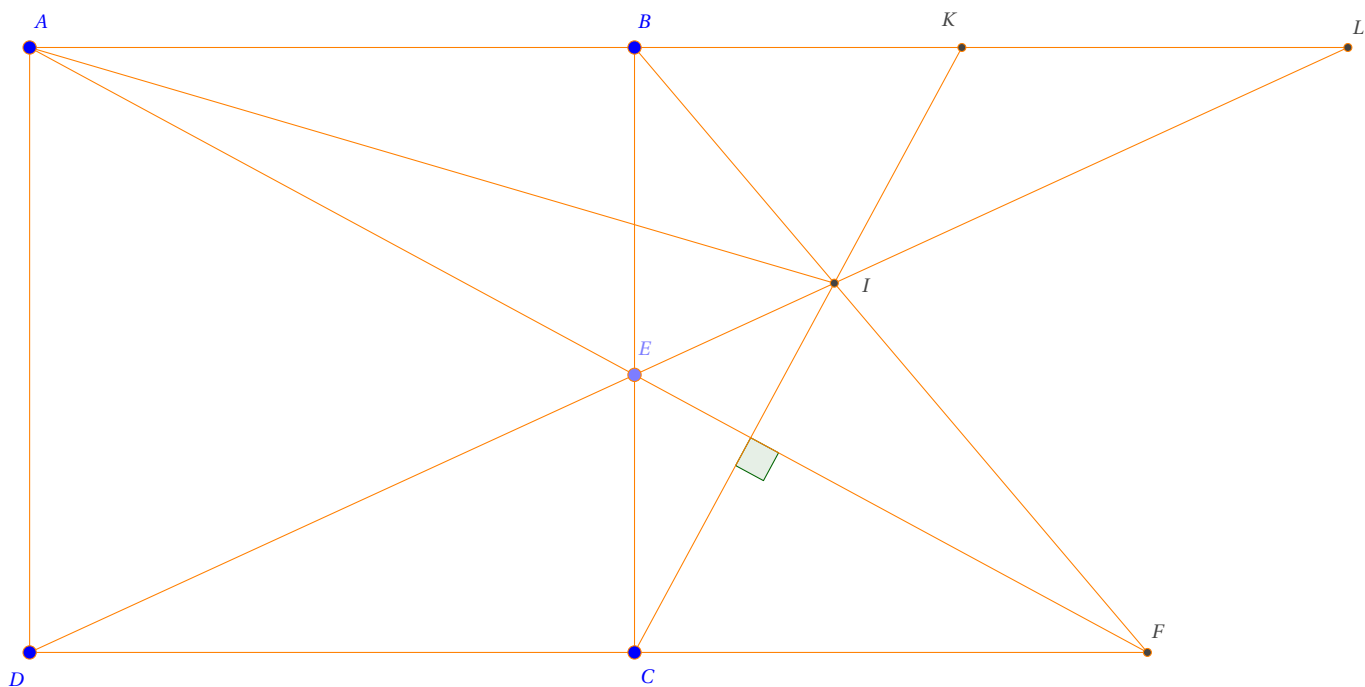
$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ 2x + 3y - 15 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $H(3; -\frac{4}{3})$ và $I(6; -\frac{7}{3})$ là trực tâm, tâm ngoại tiếp và các đường cao BE, CF. Đường trung trực của đoạn EF có phương trình: $x - 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết điểm B có tung độ dương và BE: $x - 3 = 0$.

(www.facebook.com/groups/moingaymottinhchat/)



Facebook: Võ Quang Mẫn



Kéo dài CI cắt AB tại K. Theo định lý Menelaus với đường thẳng DI trong tam giác BCF ta có:

$$\frac{DC}{DF} \cdot \frac{IF}{IB} \cdot \frac{EB}{EC} = 1. (*)$$

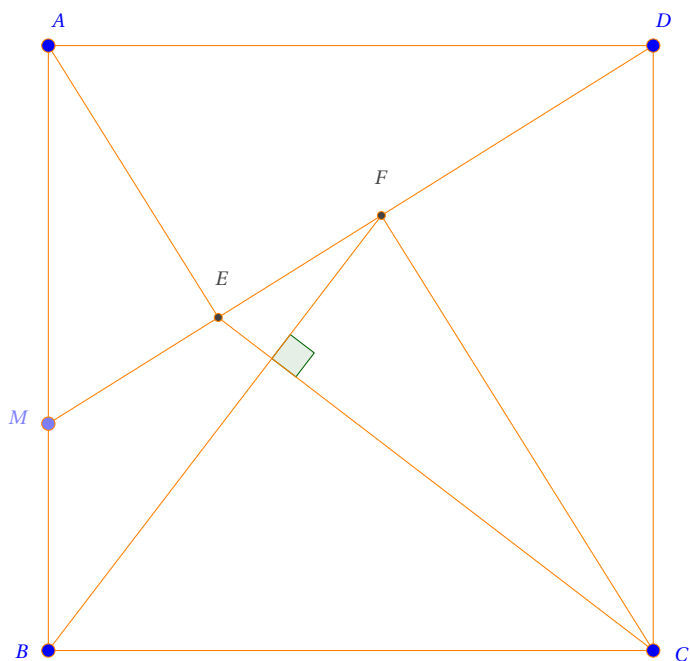
Mặt khác theo Thalet ta có $\frac{IF}{IB} = \frac{CF}{BK}$ và $\frac{EC}{CF} = \frac{EB}{AB} = \frac{CE+EB}{CF+AB} = \frac{CD}{DF}$. Thế vào (*) ta được $\frac{BK}{BC} = \frac{EC}{CF}$, do đó tam giác $\triangle KBC \sim \triangle ECF$. Vậy $EF \perp CK$.

Nhận xét: ta có thể chứng minh bằng cách khác, cụ thể chứng $BD \parallel EK$, vì $BD \perp AC$ nên $EK \perp AC$ do đó E là trực tâm tam giác ACK. Từ đó suy ra $AE \perp CI$.

Cách 2: Kéo dài DE cắt AB tại L. Dễ dàng chứng minh được $\frac{LK}{BK} = \frac{LI}{ID}$ do đó $EK \parallel BD$. Mà $BD \perp AC$ nên $EK \perp AC$ hay E là trực tâm tam giác ACK. Vậy $AE \perp CK$.

Bài tập 45. Cho hình vuông ABCD có $C(3; -3)$ và $A \in x + 2y - 2 = 0$. Điểm E thuộc cạnh BC. Giả sử đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại F. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BF tại $I(\frac{87}{19}; -\frac{7}{19})$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông biết đường thẳng AF đi qua $M(\frac{4}{3}; 0)$.

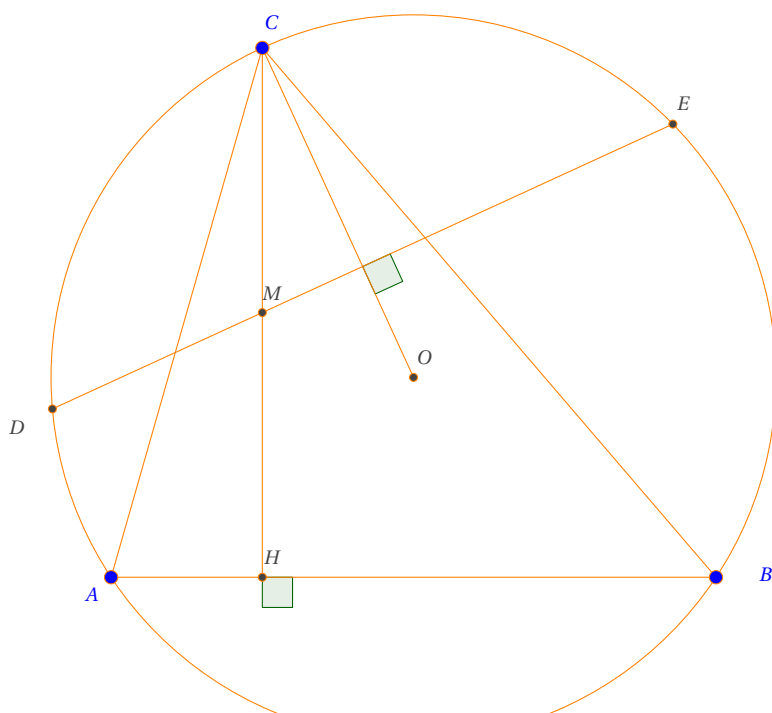
Tính chất 43. Cho hình vuông ABCD có M nằm trên cạnh AB. Gọi E, F là hình chiếu của A, C lên DM và I là giao điểm của CE với BF. Khi đó $CE \perp BF$.



Chú ý $\triangle AED = \triangle DFC$ nên suy ra $\triangle BCF = \triangle CDE$ do đó $\angle CBF = \angle DCE$ hay $CE \perp BF$.

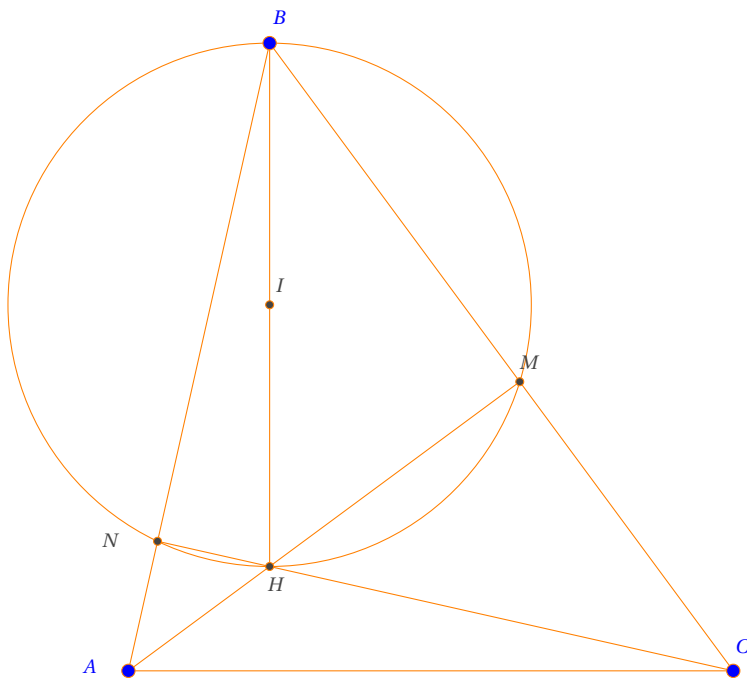
Bài tập 46. Cho hình vuông ABCD có $C(-4; -3)$, M thuộc cạnh AB. Gọi E, F là hình chiếu của A, C lên DM . $I(2; 3)$ là giao điểm của CE và BF . Điểm $B \in x - 2y + 10 = 0$, tìm tọa độ các đỉnh của bình vuông.

Tính chất 44.



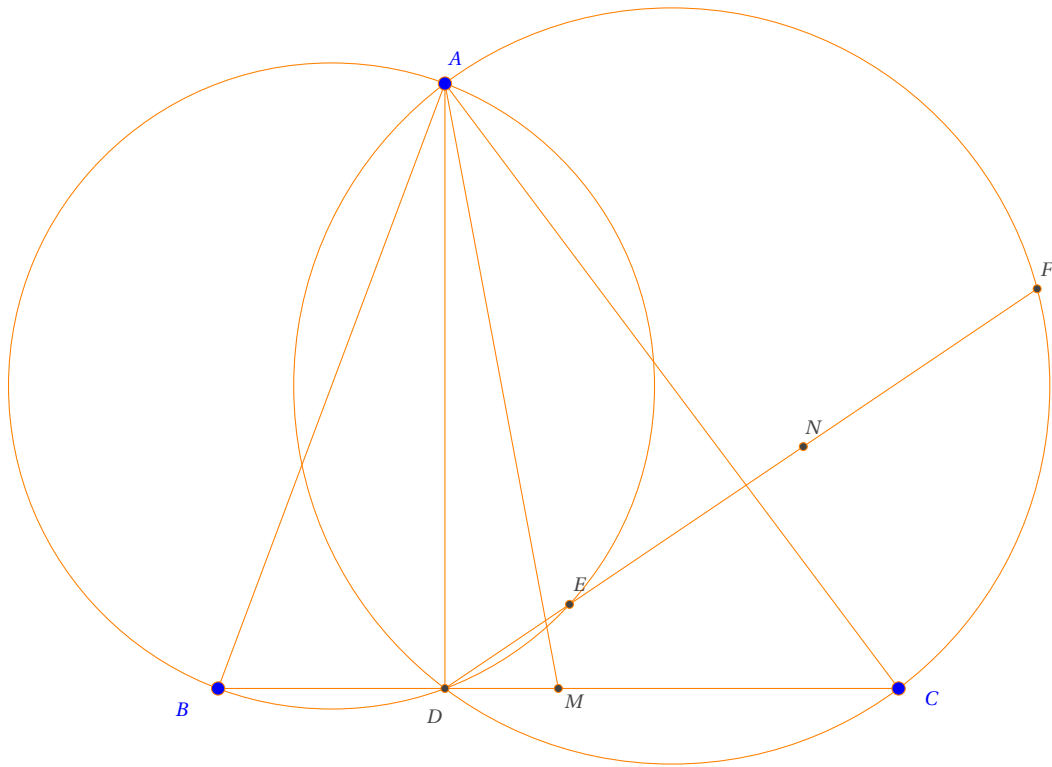
Bài tập 47. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính OA . Gọi H là hình chiếu của C lên AB . M là trung điểm CH , Kẻ đường thẳng đi qua M và vuông góc OC cắt (C) tại D và E . Tìm tọa độ D và E biết $AB: 2x - y - 6 = 0, C(-8; 3), E \in d: x + y = 0$.

Tính chất 45.



Bài tập 48. Cho tam giác ABC . Có góc A là góc nhọn, M và N lần lượt là hình chiếu của A, C lên BC và AB , H là trực tâm tam giác ABC . $I(2, 0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN . Tìm tọa độ điểm B, C biết $A(-1, 4)$ và B thuộc $d: x + 2y - 2 = 0$ và C thuộc đường thẳng $y = -4$.

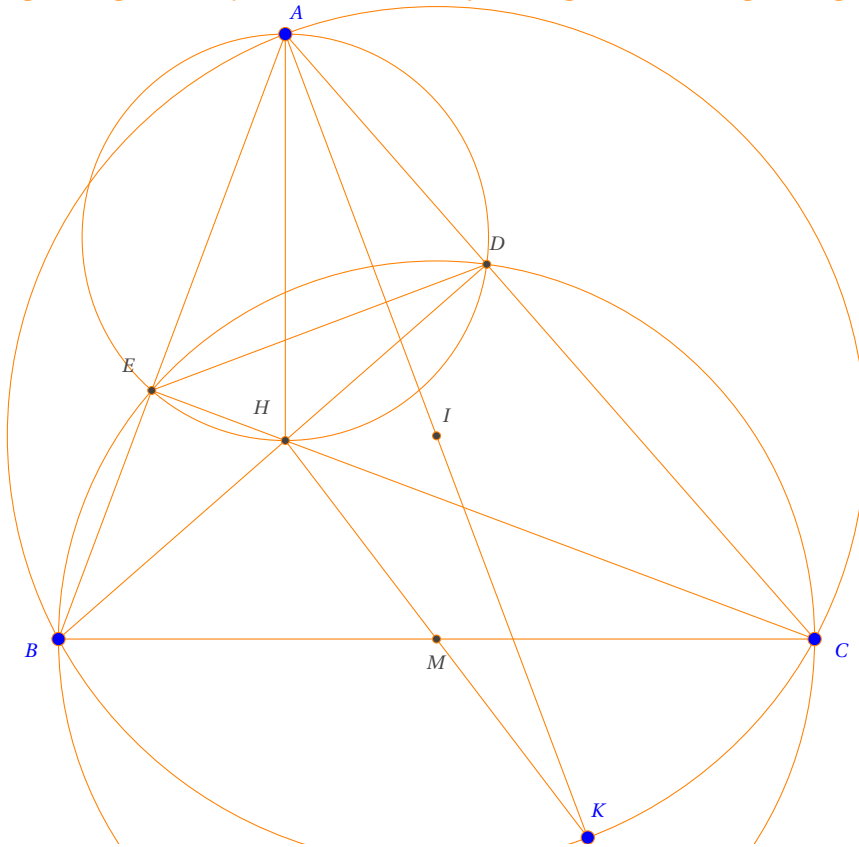
Tính chất 46.



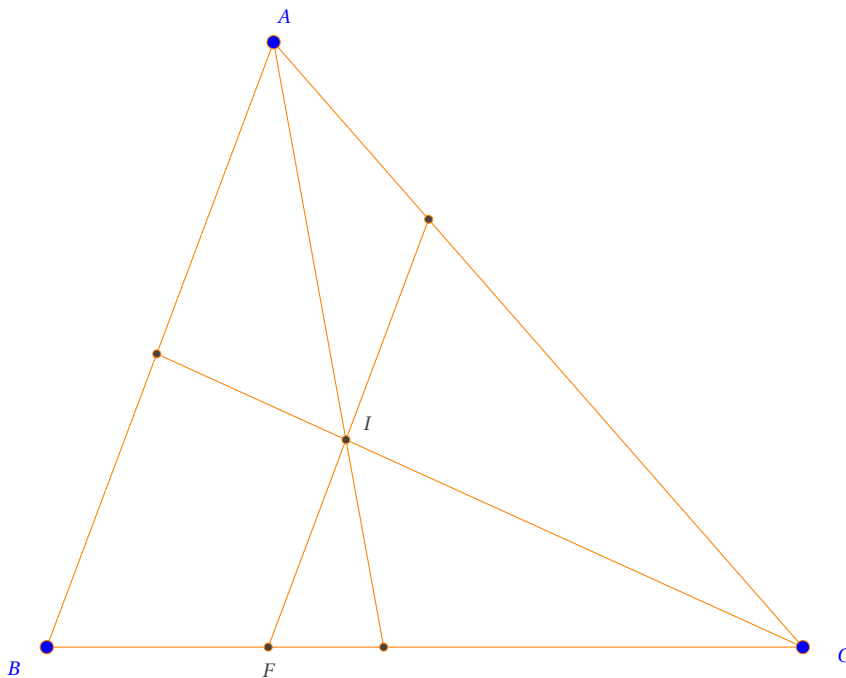
Bài tập 49. Cho tam giác ABC có $D(3;1)$ là chân đường cao hạ từ A xuống BC , M là trung điểm BC . Đường thẳng qua D cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và tam giác ACD tại E và F . Điểm $N(6;4)$ là trung điểm EF . Đường thẳng AB có phương trình $2x - y - 1 = 0$ và M thuộc đường thẳng có phương trình $x - 5y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Tính chất 47. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH . Gọi I là trung điểm AC và M thuộc cạnh AB . Đường thẳng IM cắt BC tại N . Đường thẳng HM cắt AN tại E . Khi đó $BE \perp AN$

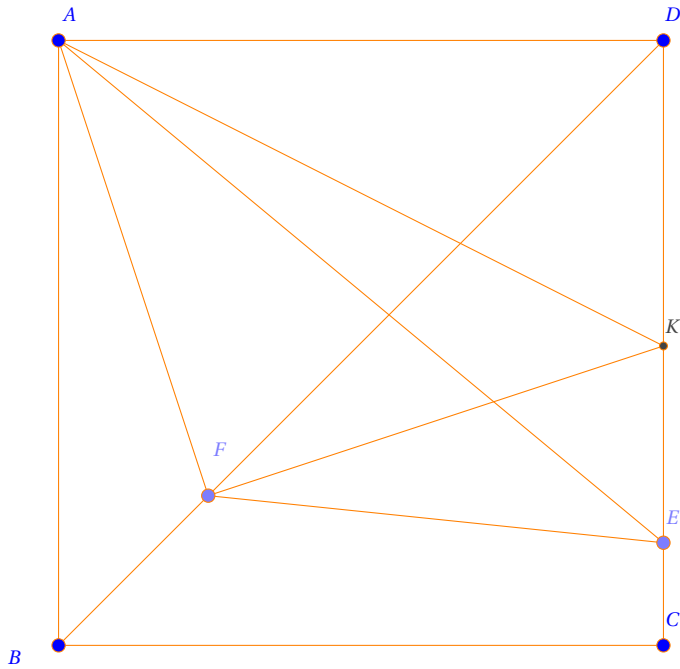
sử đường thẳng DE đi qua $K(3; -4)$, viết phương trình đường thẳng BC .



Bài tập 52. Cho tam giác ABC có $A(5;3), B(-4;6)$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng qua I song song AB cắt BC tại $F(-\frac{11}{4}; \frac{9}{4})$. Tìm tọa độ điểm C .



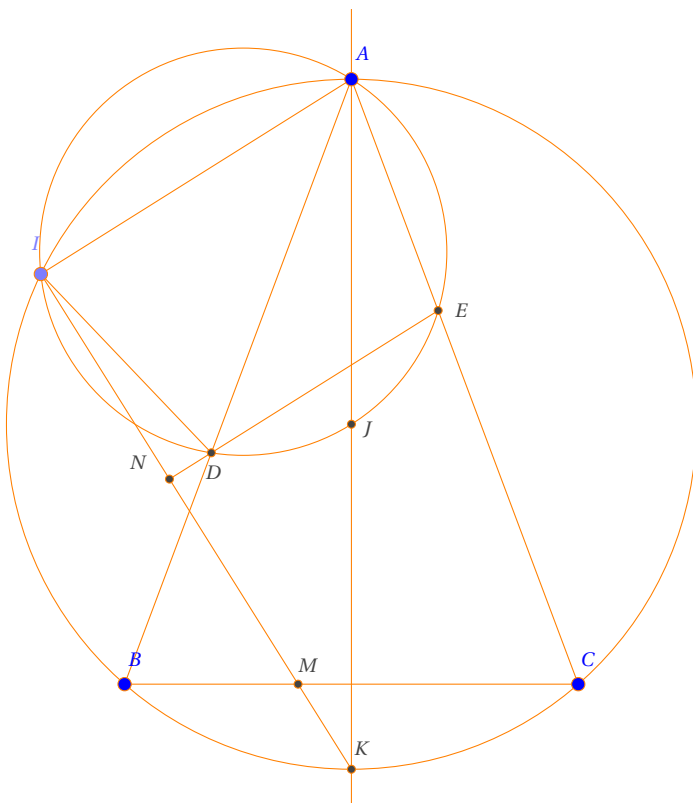
Bài tập 53. Cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1;1), E(4;1), F(2;2)$ lần lượt thuộc vào đường thẳng CD và BD biết hệ số góc của đường thẳng AB dương. Tìm tọa độ B, C, D .



Cho ba điểm cụ thể A, E, F làm sao dựng lại hình vuông? Chú ý tính chất tam giác vuông cân. Thật vậy nếu K nằm trên đường thẳng CD khi đó tam giác AFK vuông thì nó vuông cân.

Cách làm là dựng điểm K sao cho tam giác AFK vuông cân tại F suy ra đường thẳng CD là đường thẳng đi qua E, K rồi suy ra điểm B, C, D .

Bài tập 54. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (C) đường kính AK , điểm I nằm trên cung nhỏ AB , gọi M là giao điểm giữa IK và BC . Đường trung trực của MI cắt AB, AC tại D, E . Giả sử biết tọa độ $I(-3;0), D(-1; -1), E(3,3)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .



Đường tròn ngoại tiếp tam giác IDE : $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp J của tam giác ABC là chính giữa cung DE và khác phía đối với I nên $J(2;0)$. Đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với DE nên có phương trình $x + y + 3 = 0$. Ta có A, K đối xứng nhau qua J mà $K \in x + y + 3 = 0$ nên $A \in x + y - 7 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;5).$$

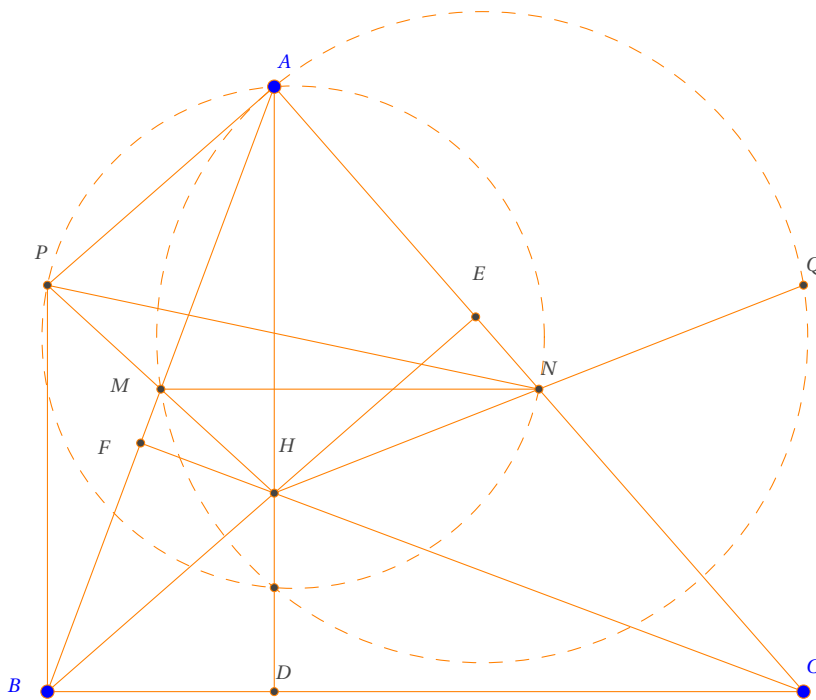
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm J bán kính JA nên có phương trình $(x - 2)^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng AD đi qua A, D nên có phương trình AD : $2x - y + 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 25 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -3).$$

Đường thẳng AE đi qua A, E nên có phương trình AE : $2x + y - 9 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

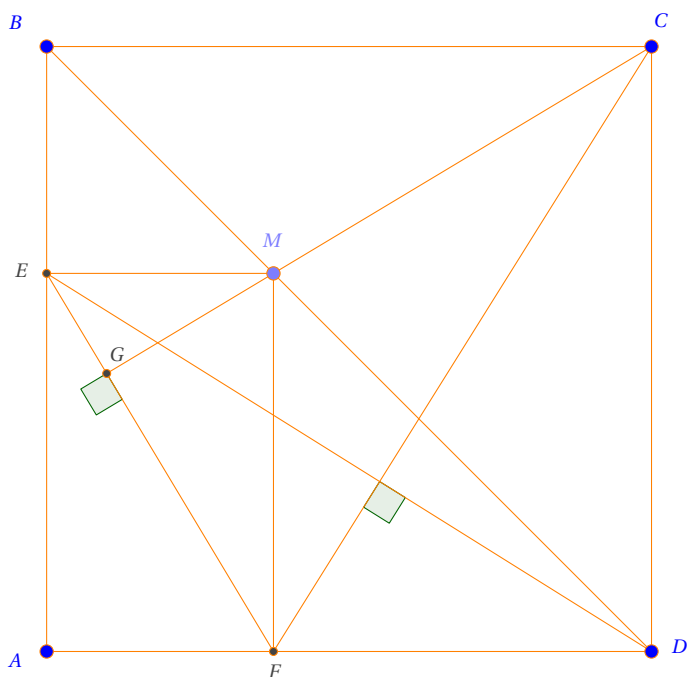
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6; -3).$$

Bài tập 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC. Giả sử $M(2; 4)$, $N(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết A có tung độ nhỏ hơn $\frac{3}{2}$.



Tính chất 48. 1. $CM \perp EF$

2. $CF \perp DE$



Bài tập 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M thuộc cạnh BD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh AB, AD . Đường thẳng CM, DE lần lượt có phương trình $CM : x + 3y - 8 = 0, DE : -4x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B, C biết $F(1;2)$.

(Nhóm thi thử lần 9)

Đường thẳng CF đi qua F và vuông góc CE nên $CF : x + 4y - 9 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;1).$$

Đường thẳng EF đi qua F và vuông góc CM nên có phương trình $FE : 3x - y - 1 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ -4x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2;5).$$

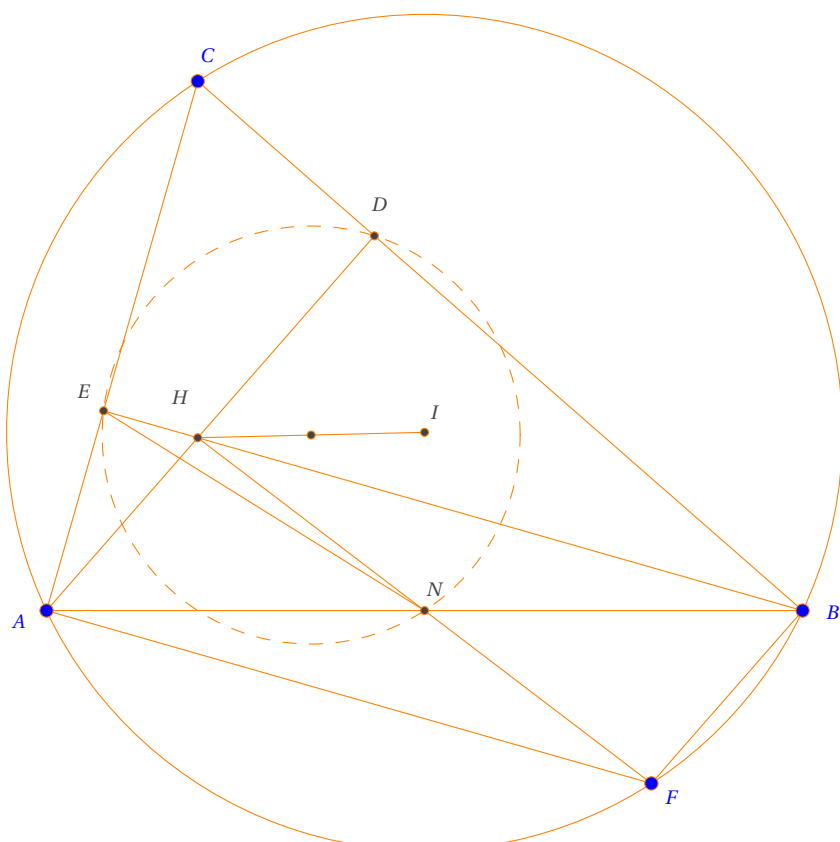
Đường tròn đường kính EF có phương trình $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2}$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2} \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;2) \\ M(\frac{1}{5}; \frac{18}{5}) \end{cases} \text{ loại vì } M, C \text{ khác phía } EF$$

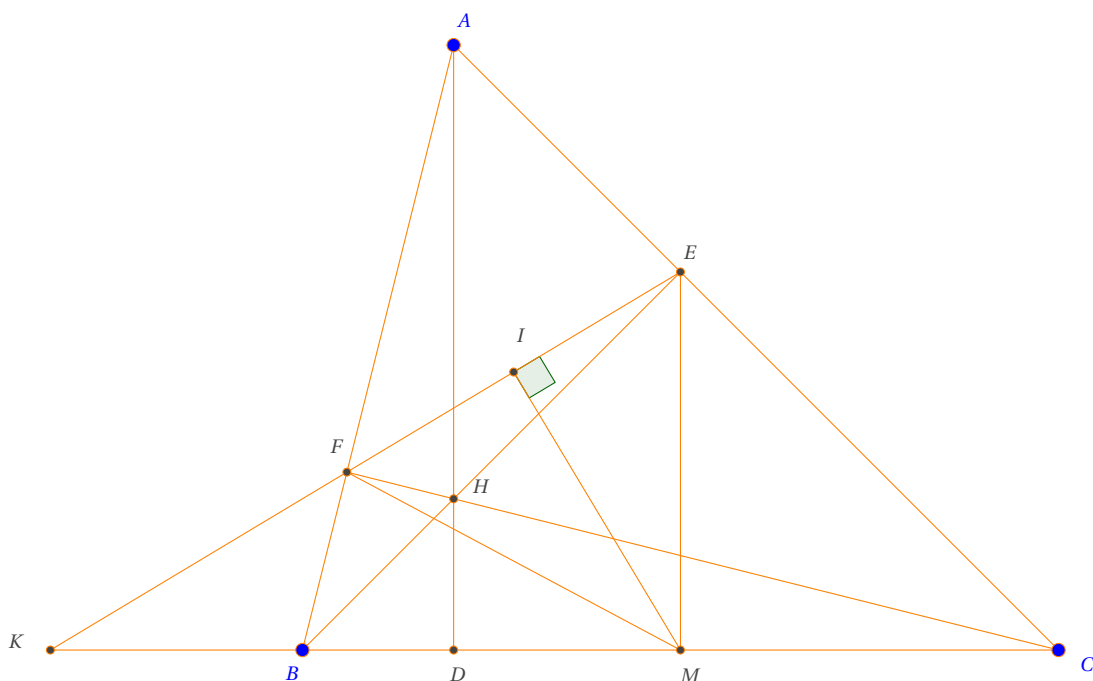
Đường thẳng CB đi qua C và song song ME nên có phương trình $x = 5$. Đường thẳng AB đi qua E và vuông góc ME nên có phương trình $AB : y = 5$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(5;5).$$

Bài tập 57. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$ với trực tâm H và đường cao BE . Cho $F(4;5)$ là điểm đối xứng của C qua tâm (C) . Đường thẳng HF cắt AB tại N , biết $EN : x - 3y + 1 = 0$ và $x_E > 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .



Bài tập 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC , gọi E, F lần lượt là hình chiếu của các đỉnh B, C lên các cạnh AC, AB . Các đường thẳng BC và EF lần lượt có phương trình là $BC : x - 4y - 12 = 0, EF : 8x + 49y - 6 = 0$, trung điểm I của EF nằm trên đường thẳng $\Delta : x - 12y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $BC = 2\sqrt{17}$ và đỉnh B có hoành độ âm.



Đầu tiên chỉ ra tọa độ điểm I Các em suy nghĩ vì sao đề cho điểm I là trung điểm EF? Tìm mối liên hệ tại điểm E, F.

Thấy tam giác BFC, BEC như thế nào?

Do đó gọi M là trung trực của EF thì ta được điều gì? (MI là trung trực EF) suy tọa độ điểm M

Dùng tính chất nội tiếp ta suy ra tọa độ E, F rồi suy ra A

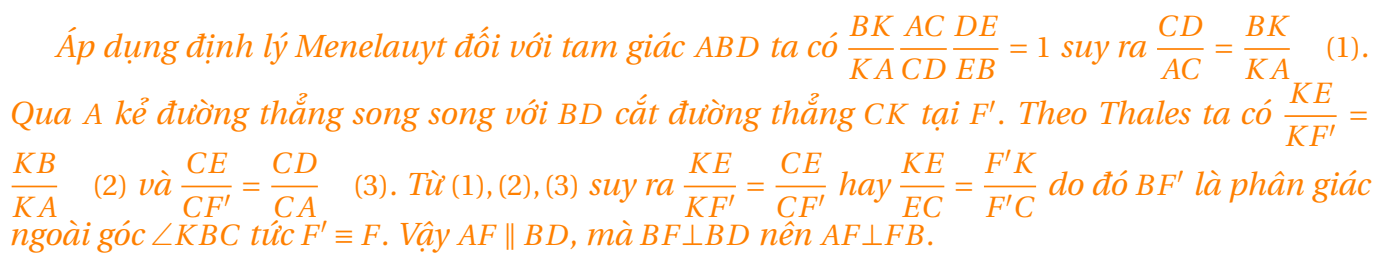
Tính chất 49.

Bài tập 59. Cho tam giác ABC không vuông, trực tâm H thuộc trục hoành. M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn AH, BH, CH. đường tròn qua ba điểm M, N, P có tâm $K(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Xác định tọa độ ba đỉnh tam giác biết phương trình trung trực AB là $x + y = 0$, $C \in x + 2y = 0$.

Tính chất 50.

Bài tập 60. Trong tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có phương trình $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $I(1; 1)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

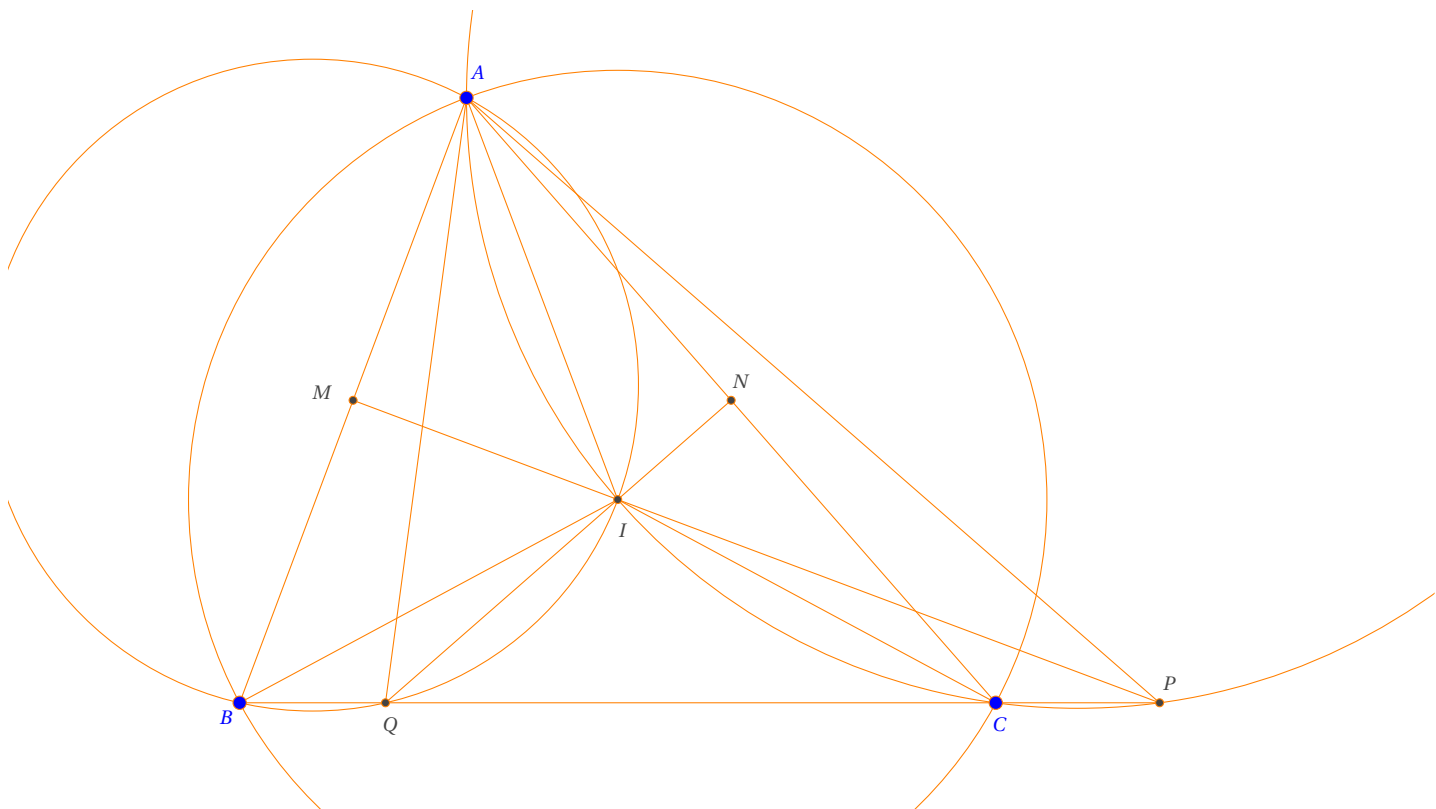
Tính chất 51. Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong $\angle ABC$, E là trung điểm BD. Đường thẳng CE cắt phân giác ngoài $\angle ABC$ tại F. Khi đó $AF \parallel BD$ hay $AF \perp BD$.



Đường thẳng $BF: 2x + y - 11 = 0$. Đường thẳng AF đi qua F và vuông góc FB nên có phương trình $AF: x - 2y + 2 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8; 5).$$
 Gọi A' là đối xứng của A qua BF , vì $AF \perp FB$ nên A' là điểm đối xứng của A qua F do đó $A'(0; 1)$. Khi đó đường thẳng BC là đường thẳng đi qua B, A' nên $BC: y = 1$.

Bài tập 62. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = 2BA$. Gọi E, F là trung điểm BC, AC . Trên tia đối của tia FE lấy điểm M sao cho $FM = 3FE$. Biết $M(5; -1)$, đường thẳng $AC: 2x + y - 3 = 0$, $x_A \in \mathbb{Z}$. Tìm toạ độ các đỉnh tam giác ABC .

Facebook: [Võ Quang Mẫn](#)



1. Ta có $\angle AIB = 2\angle C = \angle QCA + \angle QAC = \angle AQB$ do đó tứ giác AIQB nội tiếp. Tương tự tứ giác AICP nội tiếp.
2. Theo 1. ta có $\angle QAI = \angle QBI = \angle QCI = \angle IAP$ hay AI là phân giác góc $\angle QAP$.

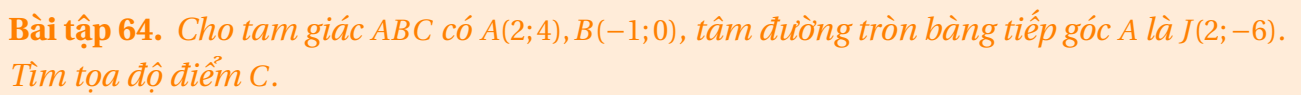
Bài tập 63. Cho tam giác ABC có A(6;3) nội tiếp đường tròn tâm I thuộc đường thẳng $x - y - 6 = 0$. Gọi M, N là trung điểm AB, AC. Các đường thẳng IM, IN cắt đường thẳng BC tại P(12;0) và Q. Biết đường thẳng AQ đi qua H(8;4), tìm tọa độ B, C.

Đường thẳng AH: $x - 2y = 0$. Ta có AI là phân giác trong $\angle QAP$ nên AI: $y - 3 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(9;3)$. Điểm B đối xứng với A qua IP nên B(9;6). Đường thẳng BC đi qua P, B nên có phương trình BC: $2x + y - 24 = 0$. Tọa độ Q là nghiệm của hệ

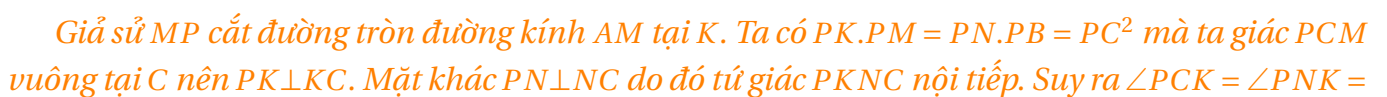
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{48}{5}; \frac{24}{5}\right).$$

Điểm C đối xứng với A qua QI nên $C\left(\frac{57}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Tính chất 54.



Tính chất 55. Cho hình chữ nhật ABCD có M thuộc đường thẳng BC. Đường tròn đường kính AM, BC cắt nhau tại điểm thứ hai N. Đường thẳng BN cắt CD tại P. Khi đó $MP \perp AC$.



$\angle KMB = \angle KAB$ do đó A, K, C thẳng hàng hay $MP \perp AC$.

Bài tập 65. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $M(1;2)$ thuộc đường thẳng BC sao cho $MB \cdot MC = 27$. Đường tròn đường kính AM, BC cắt nhau tại điểm thứ hai N . Đường thẳng BN cắt CD tại $P(2; -1)$. Biết đường thẳng AC đi qua $E(\frac{3}{5}; -\frac{9}{5})$, $x_C < 1$, tìm tọa độ điểm B .

(Hocmai lần 5)

Đường thẳng AC :

Tọa độ K là nghiệm của hệ.

Bài tập 66. Cho tam giác ABC vuông tại A , có AD là phân giác trong. Từ D hạ DM, DN xuống các cạnh AB, AC . BN, CM cắt nhau tại H . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN có phương trình $(DMN): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$, $AH: 3x - y + 10 = 0$ và A có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ A, B, C .

(Nguyễn Minh Tiến)

Đường tròn có tâm $I(-2;1)$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \\ 3x - y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2;4).$$

Điểm D đối xứng với A qua I nên $D(-2;-2)$. Đường thẳng BC đi qua D vuông góc AH nên $BC: x + 3y + 8 = 0$. Đường thẳng AB tạo AD một góc 45° suy ra

$$\begin{cases} AB: x + y - 2 = 0, AC: x - y + 6 = 0 \\ AB: x - y + 6 = 0, AC: x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(7;-5), C(-\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}) \\ B(-\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}), C(7;-5) \end{cases}.$$

Bài tập 67. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $C(-1;-2)$ ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC . Gọi $K(-1;-4)$ là giao điểm của BI với MN . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC , biết $H(-\frac{9}{4}; -\frac{13}{4})$.

(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng KB đi qua K vuông góc KC nên $KB: y + 4 = 0$. Đường thẳng CB đi qua H, C nên $HC: x - y - 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-4).$$

Đường thẳng HI đi qua H vuông góc BC nên $HI: 2x + 2y + 11 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 2y + 11 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-\frac{3}{2}; -4).$$

Đường thẳng BA đối xứng BC qua BI nên $BA: x + y + 7 = 0$. Đường thẳng AC đối xứng BC qua CI nên $AC: 23x + 7y + 37 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ 23x + 7y + 37 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{4}; -\frac{31}{4}).$$

Bài tập 68. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$ đường tròn bàng tiếp góc B có tâm là I. Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC. Gọi $K(-1; -4)$ là giao điểm của BI với MN. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC, biết $H(2; 1)$.
(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng KB đi qua K vuông góc KC nên $KB: y + 4 = 0$. Đường thẳng CB đi qua H, C nên $HC: x - y - 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -4).$$

Đường thẳng HI đi qua H vuông góc BC nên $HI: x + y - 3 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

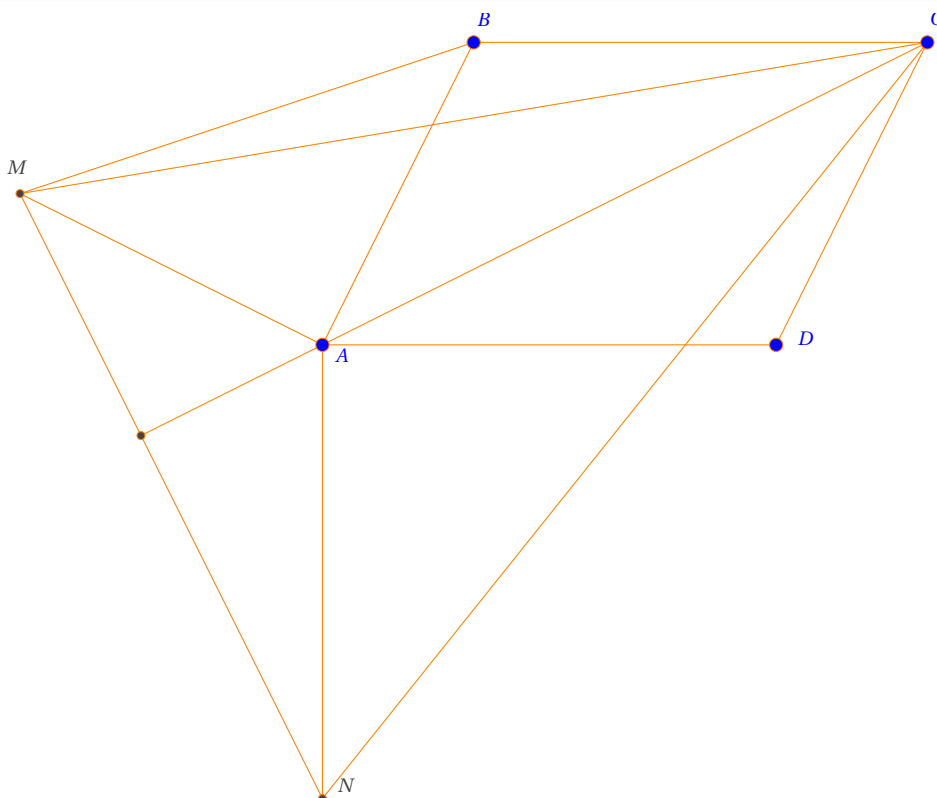
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-\frac{3}{2}; -4).$$

Đường thẳng BA đối xứng BC qua BI nên $BA: x + y + 7 = 0$. Đường thẳng AC đối xứng BC qua CI nên $AC: 23x + 7y + 37 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ 23x + 7y + 37 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{4}; -\frac{31}{4}).$$

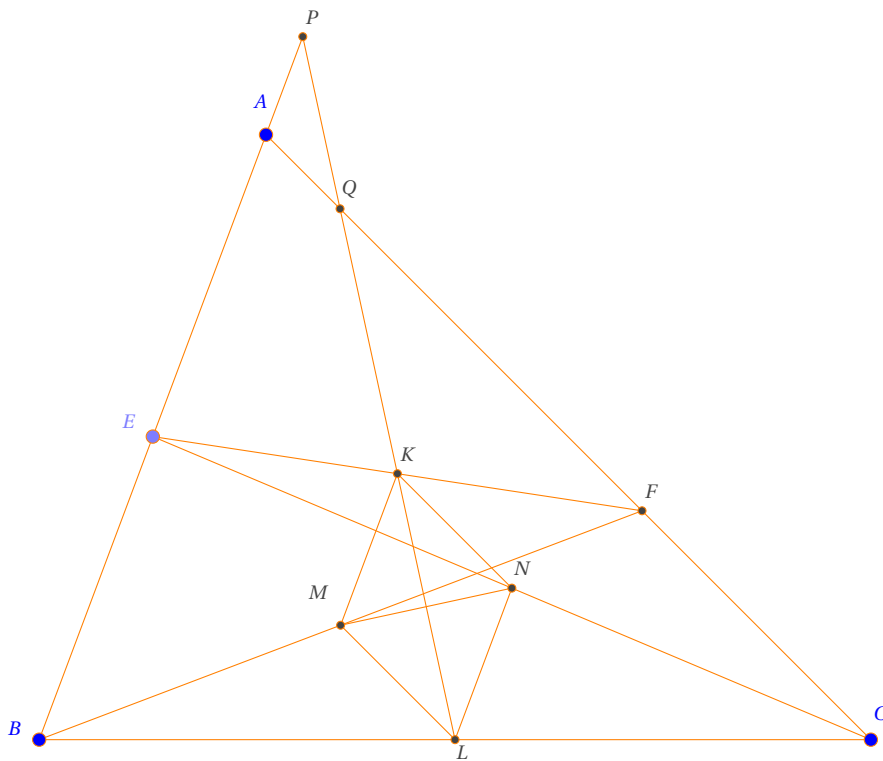
Tính chất 56. 1. $MD = BN$ và $MD \perp BN$.

2. $AC \perp MN$.



Bài tập 69. Cho hình bình hành $ABCD$ có $C(3; -2)$. Bên ngoài hình bình hành dựng các tam giác BAM, DAN đều vuông cân tại A . Biết $M(2; 7), N(-2; 4)$, tìm tọa độ các đỉnh A, B, D .

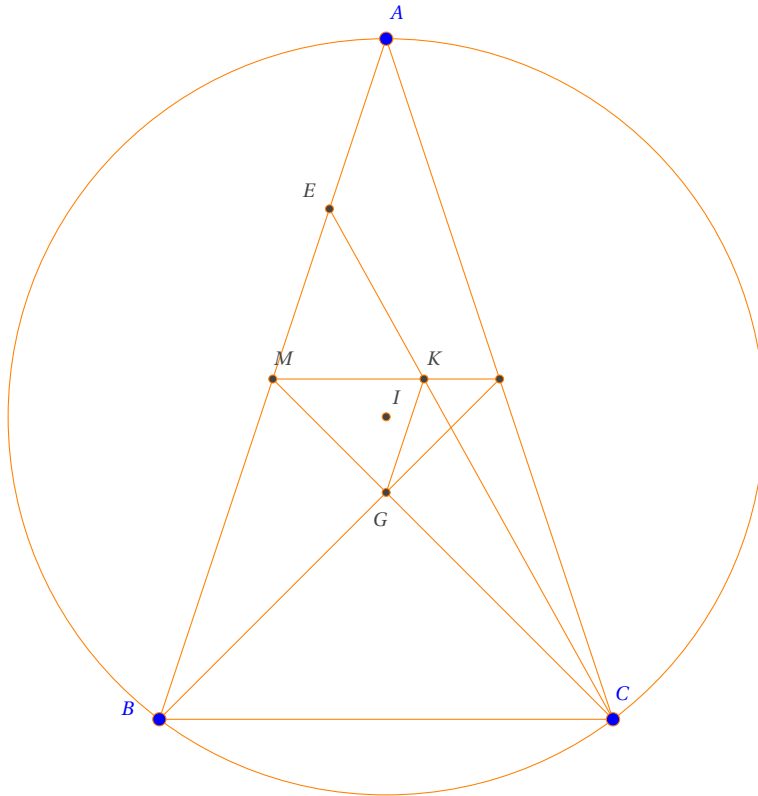
Tính chất 57. Trung trực MN song song với phân giác trong góc A .



Bài tập 70. Cho tam giác ABC , trên cạnh AB, AC lấy điểm E, F sao cho $BE = CF$. Trung điểm BF, CE là M, N . Biết $A(1; 1), B(5; 3), MN: 2x + 2y - 19 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB, AC .

(Chuyên Bắc Ninh lần cuối)

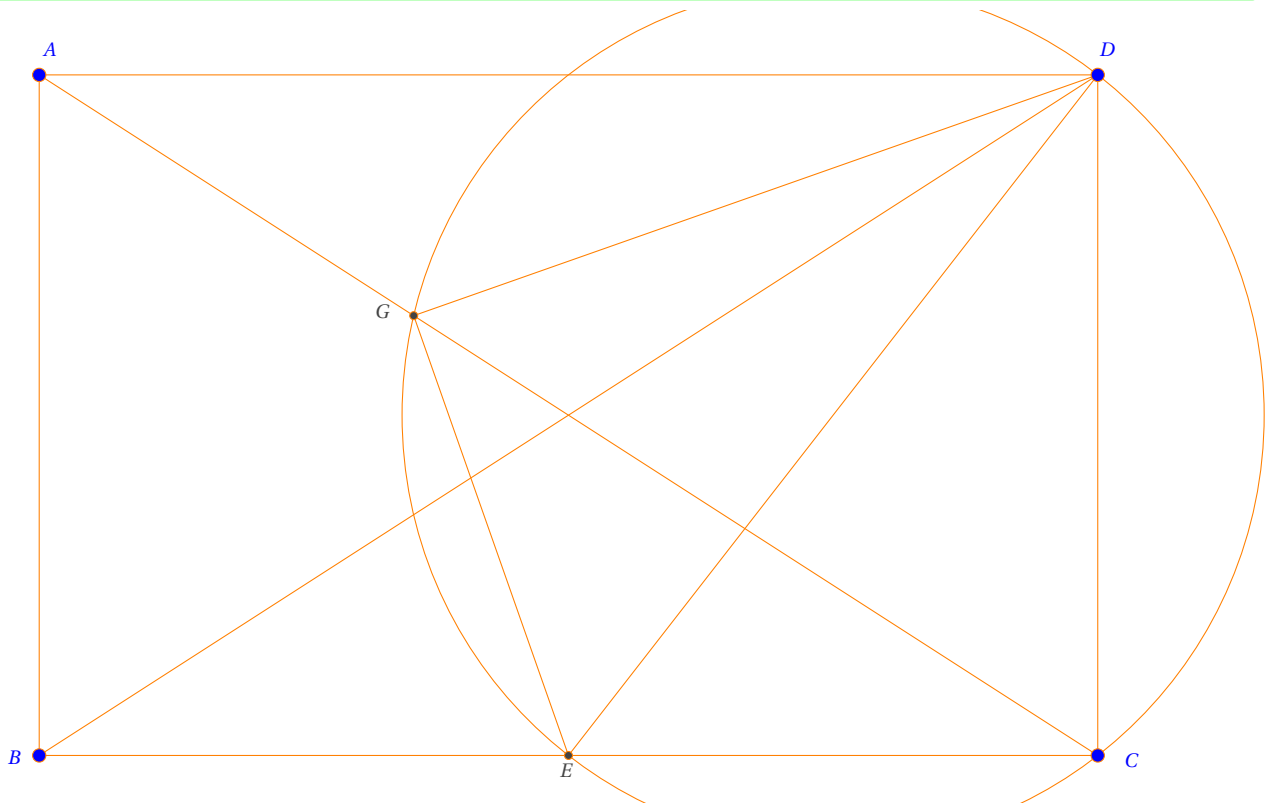
Tính chất 58. I là trực tâm tam giác MKG .



Bài tập 71. Cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm AB. Biết $I(\frac{8}{3}; \frac{1}{3})$ là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và $G(3; 0), K(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ là trọng tâm tam giác ABC, ACM. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Sở Lào Cai)

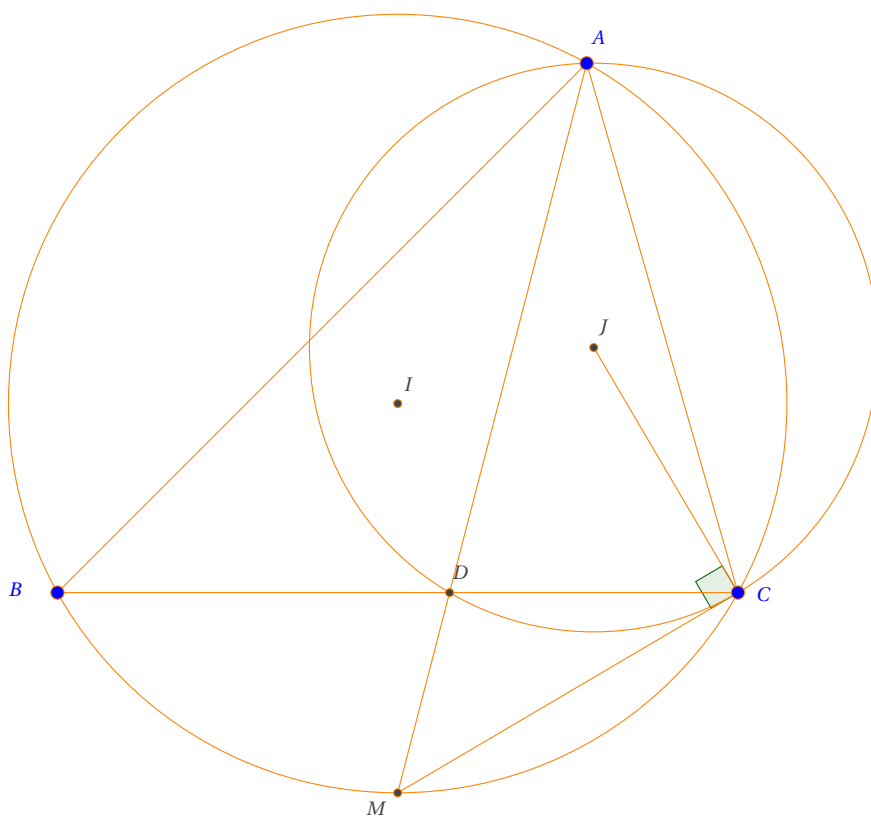
Tính chất 59. $\triangle DGE \sim \triangle DAB$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{DG}{GE}$.



Bài tập 72. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích 18. Gọi E là trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt đường chéo AC tại $G \neq C$. Biết $E(1; -1), G(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}), D \in x + y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

(Sở Nam Định)

Tính chất 60. $CM \perp CJ$.

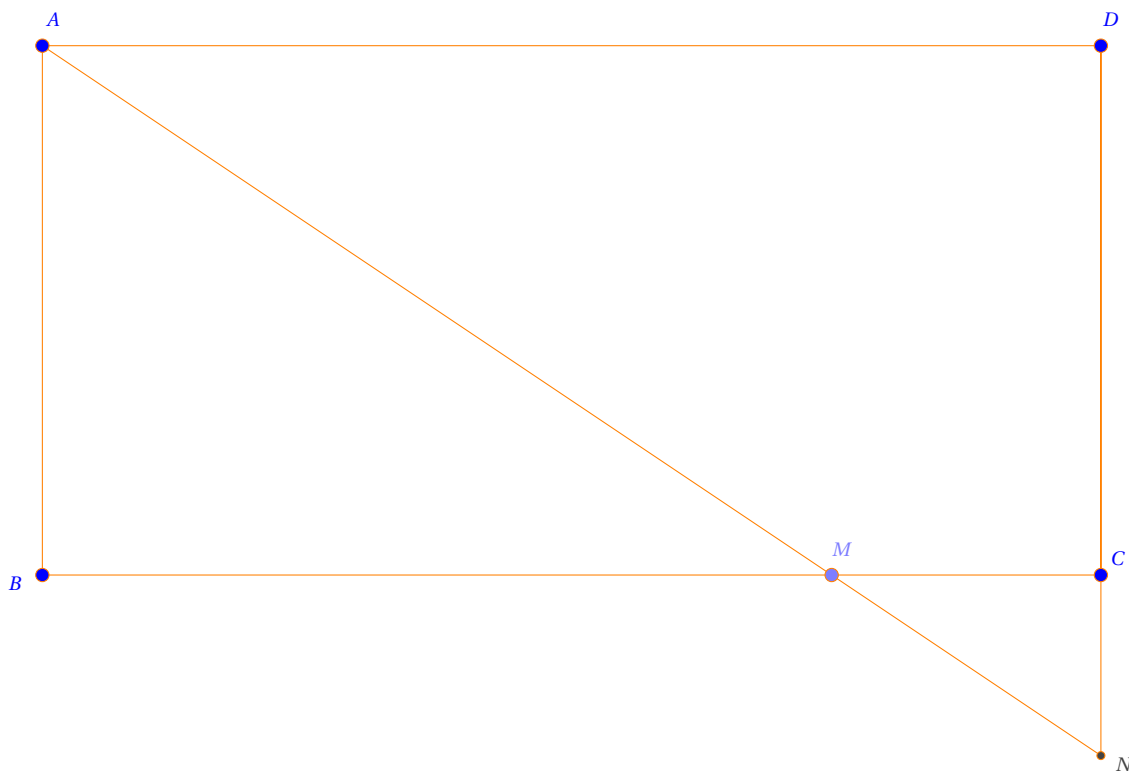


Ta có $\angle MCD = \angle MAB = \angle DAC$ suy ra MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC hay $CM \perp CJ$.

Bài tập 73. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2; 2)$ và AD là phân giác trong góc A. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai M. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có tâm $J(0; 2)$, $CM: x - y + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm A, B, C.

(Chuyên Hưng Yên lần 2)

Tính chất 61. Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm M trên cạnh BC đường thẳng AM cắt CD tại N. Khi đó $MB \cdot DN = BC \cdot CD$.



Ta có $\triangle ABM \sim \triangle NDA$ suy ra $\frac{AB}{BM} = \frac{DN}{DA}$ hay $MB \cdot DN = BC \cdot CD$.

Cách 2 Ta có $\frac{1}{2}BM \cdot DN = S_{DBM} + S_{BMN} = S_{DBM} + S_{AMC} = S_{DBM} + S_{MDC} = S_{BDC} = \frac{1}{2}BC \cdot CD$ suy ra $MB \cdot DN = BC \cdot CD$.

Bài tập 74. Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Điểm $M(\frac{21}{4}; -1)$ trên cạnh BC đường thẳng AM cắt CD tại N thỏa mãn $BM \cdot DN = 50$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật đã cho, biết rằng A có tung độ dương và đường thẳng AB có phương trình $3x + 4y - 18 = 0$.
(Vted lần 23)

Ta có $AB \cdot BC = BM \cdot DN = 50$ suy ra $\begin{cases} BC = 10 \\ BA = 5 \end{cases}$. Đường thẳng BC đi qua M vuông góc AB nên

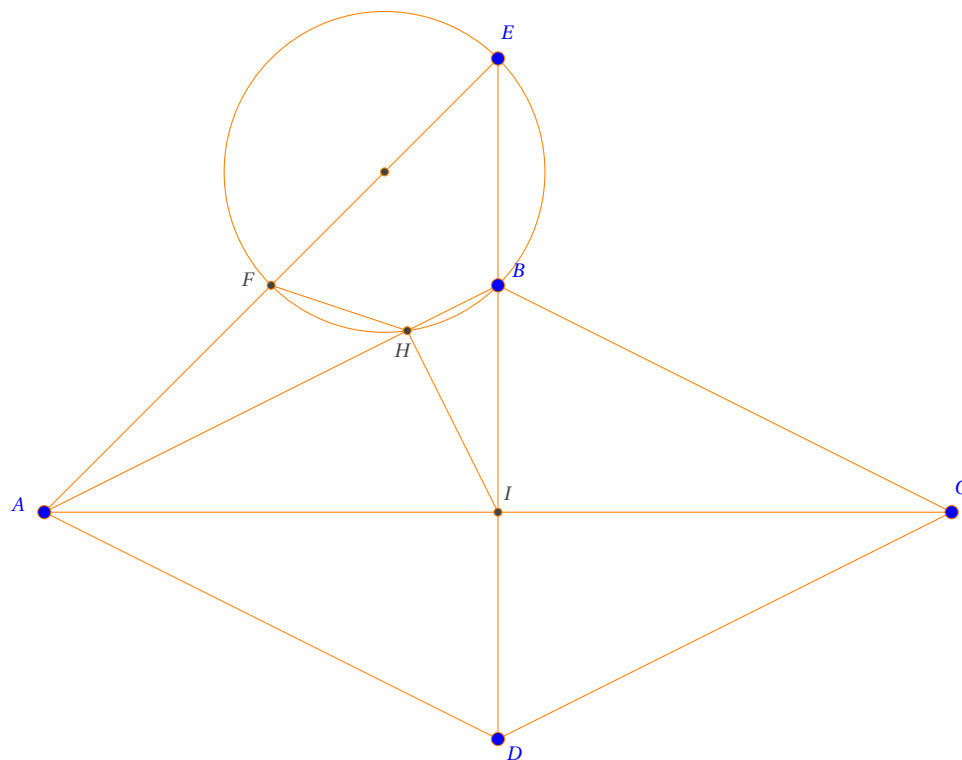
$BC: 4x - 3y - 24 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y - 18 = 0 \\ 4x - 3y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6; 0)$. Gọi $C(c; \frac{3c}{4} - 8)$, ta có

$BC = 10$ suy ra $\begin{cases} B(0; -8) \\ C(12; 8) \end{cases}$ loại vì B nằm giữa M, C. Tương tự gọi $A(6 - \frac{4}{3}a; a)$ ta có $AB = 5$ suy ra

$\begin{cases} A(2; 3) \\ A(10; -3) \end{cases}$ loại. Ta có $\vec{AD} = \vec{BC}$ suy ra $D(-4; -5)$.

Tính chất 62. Cho hình thoi ABCD, tâm I có $AC = 2BD$, Gọi E là điểm đối xứng của I qua B. F là trung điểm AE. H là hình chiếu vuông góc của I lên AB. Khi đó

1. $AH = 2HI = 4HB$.
2. tứ giác EFHB nội tiếp.



Đặt $BI = a$ suy ra $AI = 2a$, $AB = a\sqrt{5}$, $AE = 2a\sqrt{2}$. Ta có $AH = \frac{4}{5}AB$. Do đó $AH \cdot AB = AF \cdot AE$ hay tứ giác $EFHB$ nội tiếp.

Bài tập 75. Cho hình thoi $ABCD$, tâm I có $AC = 2BD$, Gọi E là điểm đối xứng của I qua B . F là trung điểm AE . H là hình chiếu vuông góc của I lên AB . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác $(ABC) : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$, $HI : 3x + 4y - 2 = 0$, $x_H > 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$.

(Nguyễn Đại Dương)

Tính chất 63. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AD , AE lần lượt là các phân giác trong và ngoài của tam giác. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của DE , BC . Khi đó,

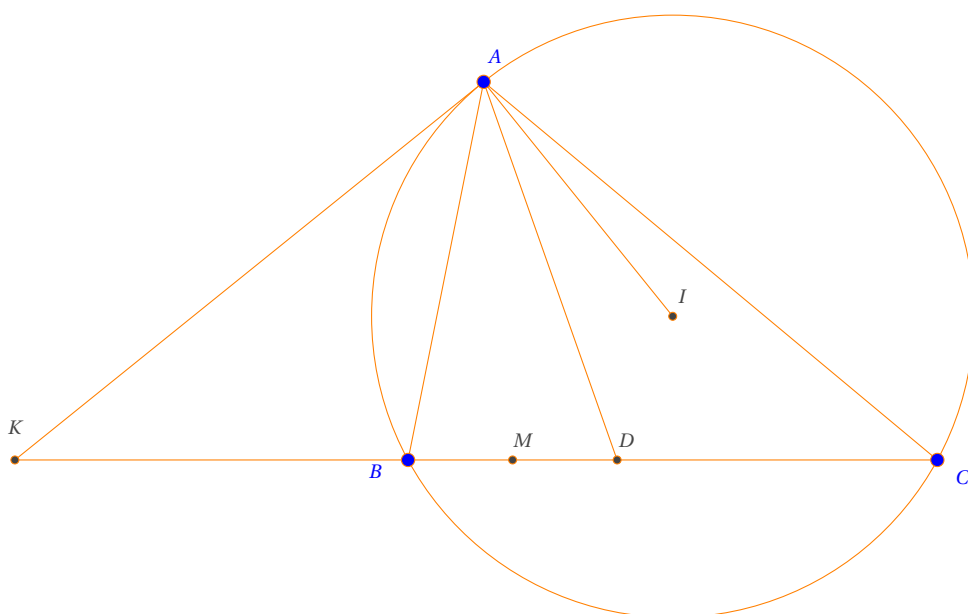
1. AD , AE lần lượt đi qua trung điểm cung nhỏ và cung lớn BC của (O) .
2. Tứ giác $AMNO$ nội tiếp.
3. AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
4. Tam giác AMD cân tại M .



3. Vì $Am \perp AO$ nên AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

4. Vì AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\angle MAD = \angle MAK = \angle ACK = \angle ADB$ suy ra tam giác AMD cân tại M.

(Thuận Thành Số 1 lần 1)



Gọi K là giao điểm của tiếp tuyến tại A và đường thẳng BC . Theo tính chất kinh điển đã học ta có tam giác AKD cân tại K . Đây là tính chất mấu chốt của bài toán. Điểm B đối xứng với D qua M nên $B(\frac{21}{5}; \frac{3}{5})$ và đường thẳng BC đi qua D, M nên có phương trình $BC: x - 2y - 3 = 0$. Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(5; 1).$$

Gọi $A(7 - 2a; a) \in x + 2y - 7 = 0$. Ta có $KD = KA$ suy ra $\begin{cases} A(1; 3) \\ A(9; -1) \end{cases}$ loại Đường thẳng AI đi qua A và vuông góc AK nên có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Trung trực AB có phương trình $4x - 3y - 5 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-4; -7).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(ABC): (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 125$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

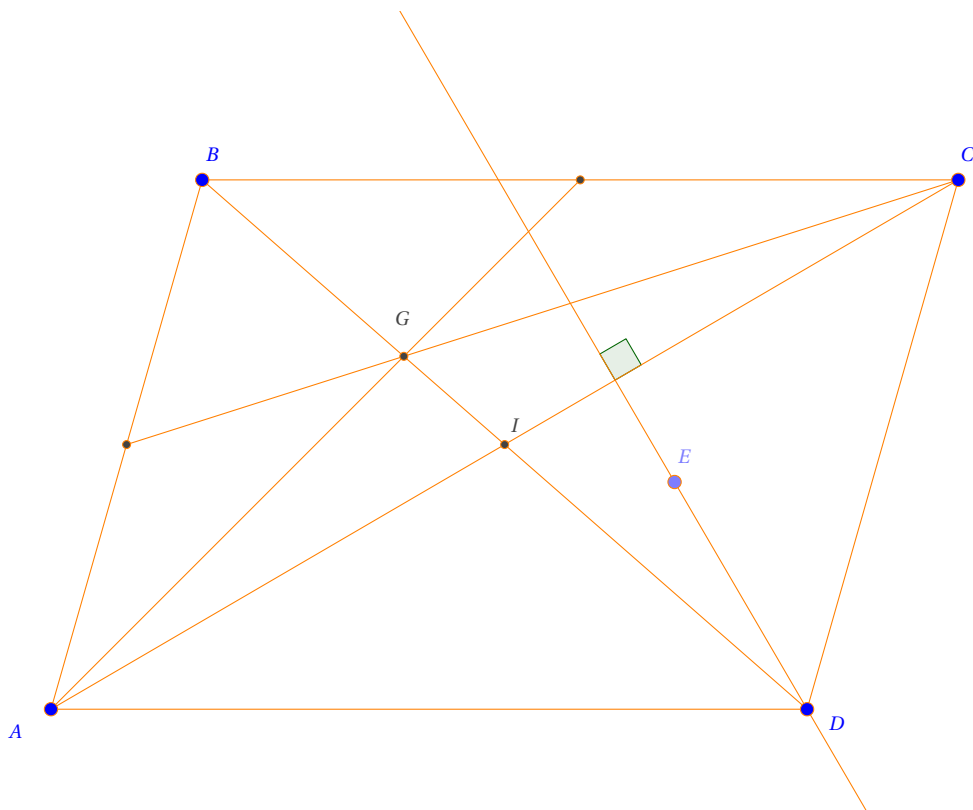
$$\begin{cases} (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 125 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-15; -9) \\ C(\frac{21}{5}; \frac{3}{5}) \end{cases} \text{ loại vì trùng } B$$

Nhận xét:

- Ta có thể tìm đường thẳng AC bằng cách AC và AB đối xứng nhau qua phân giác AD cụ thể ở trên $AC: 3x - 4y + 9 = 0$.
- Nếu đề không cho $y_A > 0$ ta vẫn giải ra nghiệm vẫn đẹp cụ thể $A(9; -1), C(-15; -9)$.

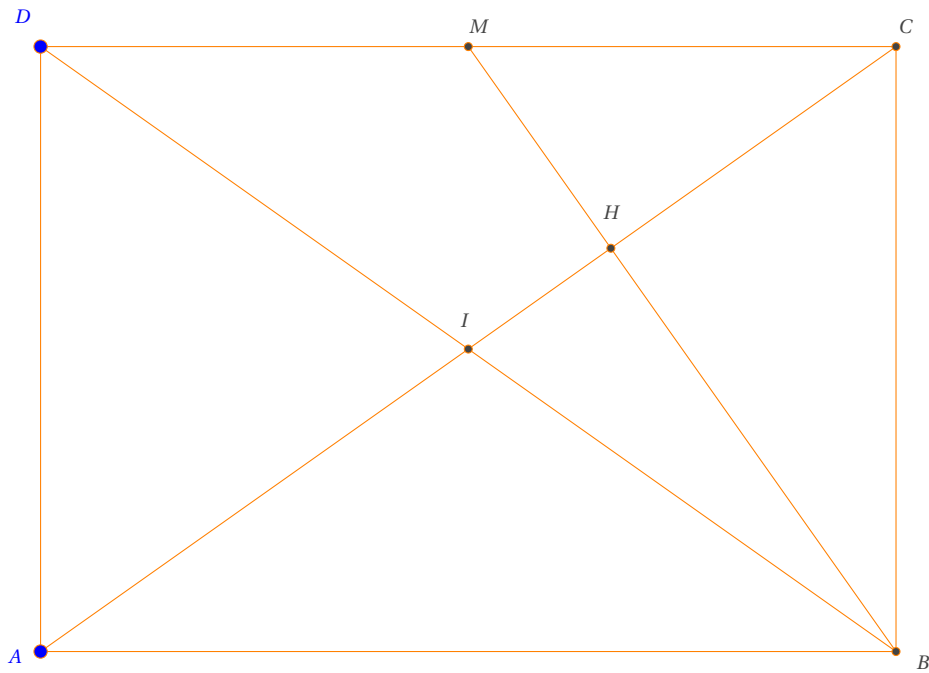
Bài tập 77. Cho hình bình hành $ABCD$ đường chéo $AC : x - y + 1 = 0$, $G(1; 4)$ là trọng tâm tam giác ABC . $E(0; -3)$ thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD . Biết diện tích tứ giác $AGCD$ bằng 32, $y_A > 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

(Nguyễn Huệ- Yên Bái lần 1)



Bài tập 78. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = AD\sqrt{2}$ và tâm $I(1; -2)$. Gọi M là trung điểm CD , $H(2; -1)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BM . Tìm tọa độ A, B .

(Trúc Ninh-Nam Định lần 1)

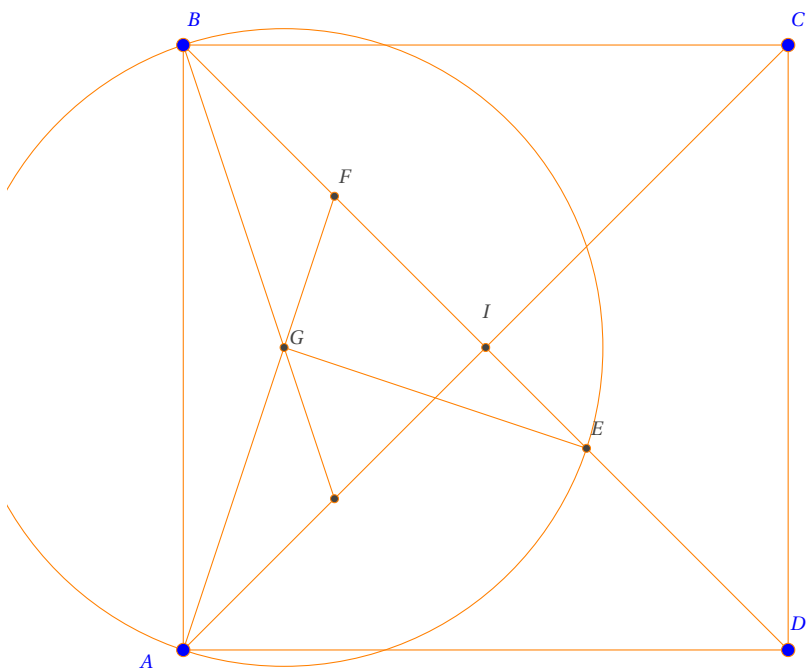


Bài tập 79. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Điểm $G(\frac{5}{6}; \frac{13}{6})$ là trọng tâm tam giác ABI . Điểm $E(2; \frac{7}{3})$ thuộc đoạn BD , biết tam giác BGE cân tại G và $y_A < 3$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(Chuyên Quốc Học lần 1)

Phát hiện tính chất

Tính chất 64. Tam giác AGE vuông cân tại G .

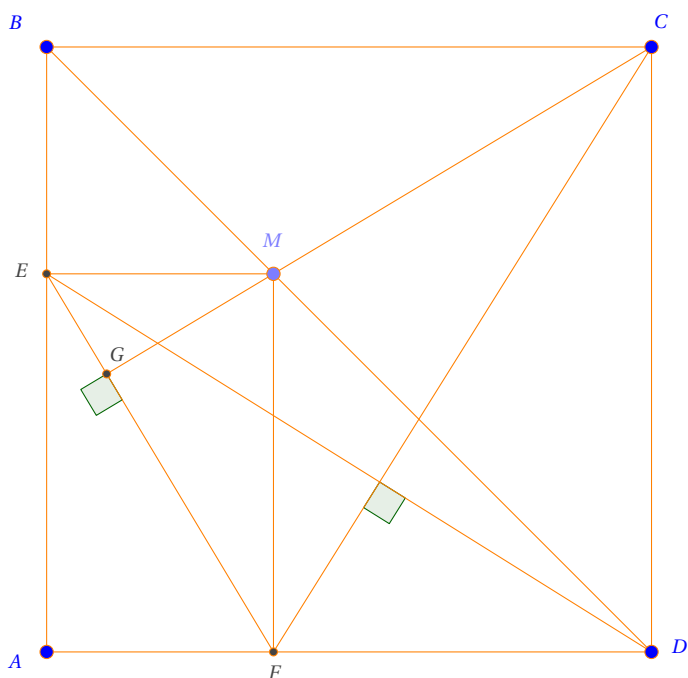


Chú ý tam giác AIB cân tại I nên tam giác AGB cân tại G hay G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Do đó $\angle AGE = 2\angle ABE = 90^\circ$ hay tam giác AGE vuông cân tại G.

Trở lại bài toán ta có đường thẳng GA đi qua A và vuông góc GE nên có phương trình GA:

Tính chất 65. 1. $CM \perp EF$

2. $CF \perp DE$



Bài tập 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, lấy điểm M thuộc cạnh BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh AB, AD. Đường thẳng CM, DE lần lượt có phương trình $CM: x + 3y - 8 = 0$, $DE: -4x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B, C biết $F(1; 2)$.

(Nhóm thi thử lần 9)

Đường thẳng CF đi qua F và vuông góc CE nên $CF: x + 4y - 9 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; 1).$$

Đường thẳng EF đi qua F và vuông góc CM nên có phương trình $FE: 3x - y - 1 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ -4x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2; 5).$$

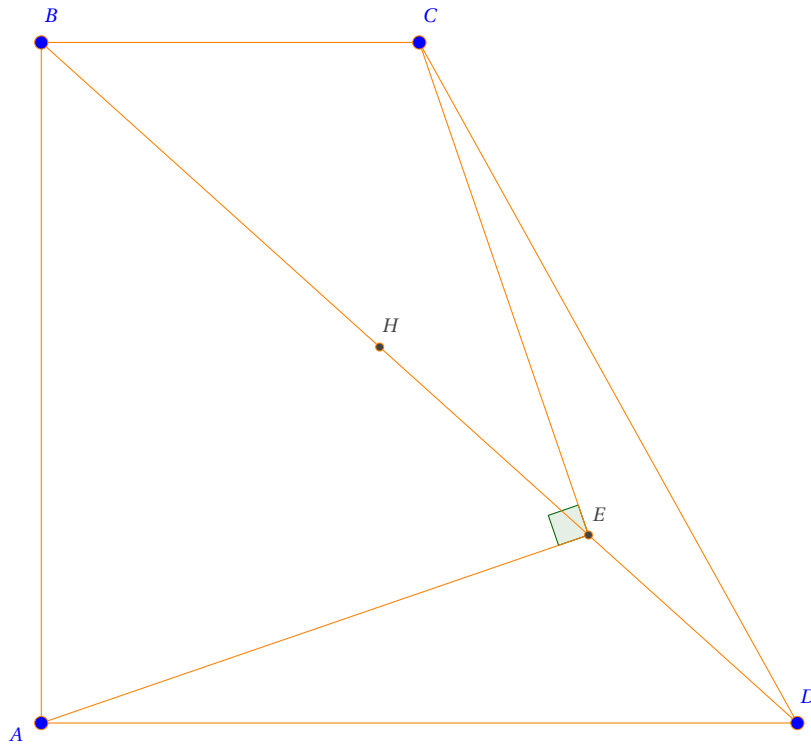
Đường tròn đường kính EF có phương trình $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2}$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2} \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 2) \\ M(\frac{1}{5}; \frac{18}{5}) \end{cases} \text{ loại vì } M, C \text{ khác phía } EF.$$

Đường thẳng CB đi qua C và song song ME nên có phương trình $x = 5$. Đường thẳng AB đi qua E và vuông góc ME nên có phương trình $AB: y = 5$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(5; 5).$$

Tính chất 66.

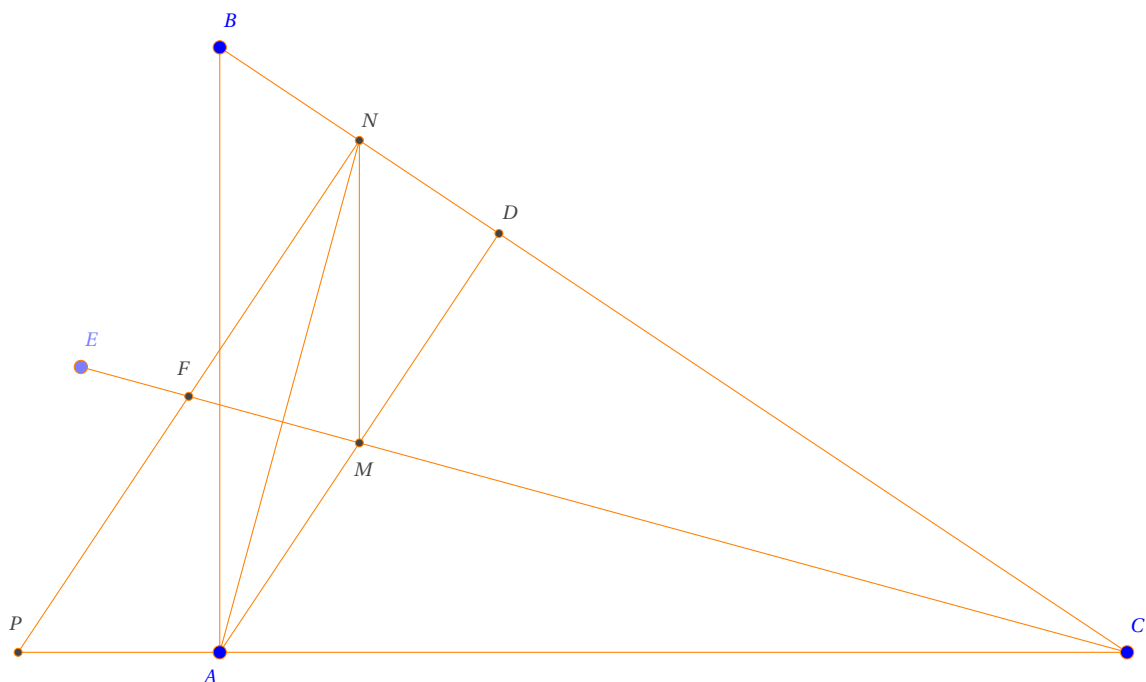


Bài tập 81. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và $AD = 2BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1; 3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x + y + 3 = 0$, $C(\frac{5}{2}; 4)$ Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

(Triệu Sơn 1-Thanh Hóa lần 1)

Tính chất 67. 1. $CM \perp AN$.

2. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt thẳng CM, CA tại F, P. Ta có F là trung điểm NP.



1. Ta có $\triangle ACD \sim \triangle BAD$ mà M, N là trung điểm AD, BD suy ra $\triangle ACM \sim \triangle BAN$ hay $\angle ACM = \angle BAN$ do đó $CM \perp AN$.
2. Do $AD \parallel NP$ mà M là trung điểm AD nên F là trung điểm NP .

Cách 2: Các em có thể lý luận $MN \perp AC, AM \perp NC$ nên M là trực tâm tam giác ANC do đó $CM \perp AN$.

Bài tập 82. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AD và $C(7;0)$. Gọi M, N là trung điểm AD, BD . Biết $N(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ và $E(-4;3)$ thuộc đường thẳng CM . Tìm tọa độ A, B .

(Vted lần 9)

Đường thẳng CN có phương trình $CN: x - 5y - 7 = 0$. Đường thẳng CM đi qua C, E có phương trình $CM: 3x + 11y - 21 = 0$. Đường thẳng AN đi qua N và vuông góc với CE nên có phương trình $AN: 11x - 3y + 1 = 0$. Đường thẳng NP qua N vuông góc với CN có phương trình $5x + y + 4 = 0$. Tọa độ F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x + y + 4 = 0 \\ 3x + 11y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(-\frac{5}{4}; -\frac{9}{4}).$$

Ta có F là trung điểm NP suy ra $P(-2;6)$. Đường thẳng AC đi qua C, P nên có phương trình $AC: 2x + 3y - 14 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

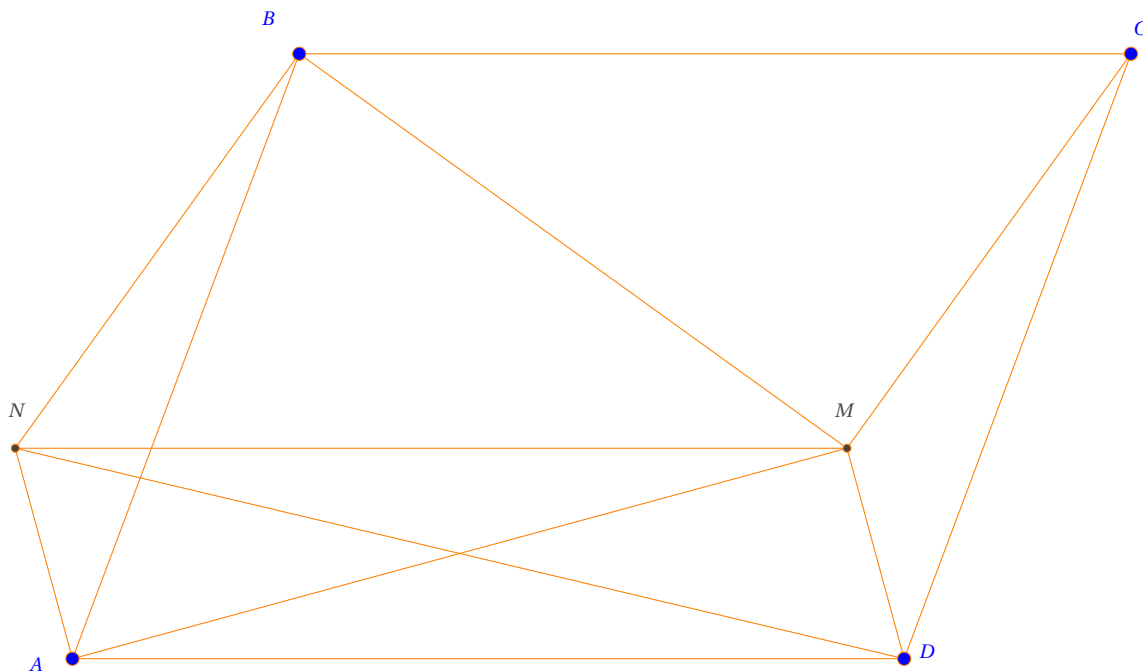
$$\begin{cases} 2x + 3y - 14 = 0 \\ 11x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;4).$$

Đường cao AD đi qua A và vuông góc CN có phương trình $5x + y - 9 = 0$, tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x + y - 9 = 0 \\ x - 5y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2; -1).$$

N là trung điểm BD suy ra $B(-3; -2)$.

Tính chất 68. Cho hình bình hành ABCD điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\angle MDC = \angle MBC$ khi và chỉ khi $\angle AMB + \angle DMC = 180^\circ$.



Dựng hình bình hành ANMD khi đó $\angle MDC = \angle MBC \Leftrightarrow \angle ABM = \angle MDA = \angle ANM \Leftrightarrow$ tứ giác ANBM nội tiếp $\Leftrightarrow \angle AMB + \angle DMC = 180^\circ$.

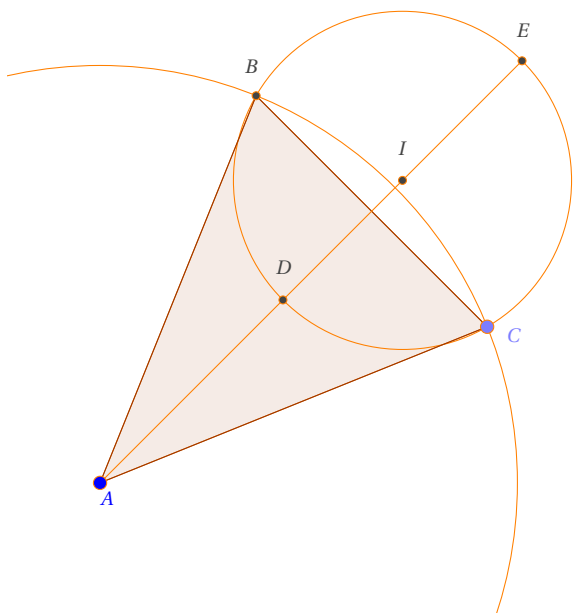
Bài tập 83. Cho hình bình hành ABCD có $A(-5; 2)$. $M(-1; -2)$ là điểm nằm trong hình bình hành sao cho $\angle MDC = \angle MBC$ và $MB \perp MC$. Tìm tọa độ điểm D biết $\tan \angle DAM = \frac{1}{2}$.
(HSG Phú Thọ 2016)

Áp dụng tính chất trên ta có $\angle BMC + \angle AMD = 180^\circ$ mà $\angle BMC = 90^\circ$ nên $\angle AMC = 90^\circ$ do đó tam giác AMC vuông tại M hay đường thẳng MD: $x - y - 1 = 0$. Mặt khác $\tan \angle DAM = \frac{1}{2}$ nên

$$MD = \frac{1}{2}MA \text{ suy ra } \begin{cases} D(1; 0) \\ D(-3; -4) \end{cases}.$$

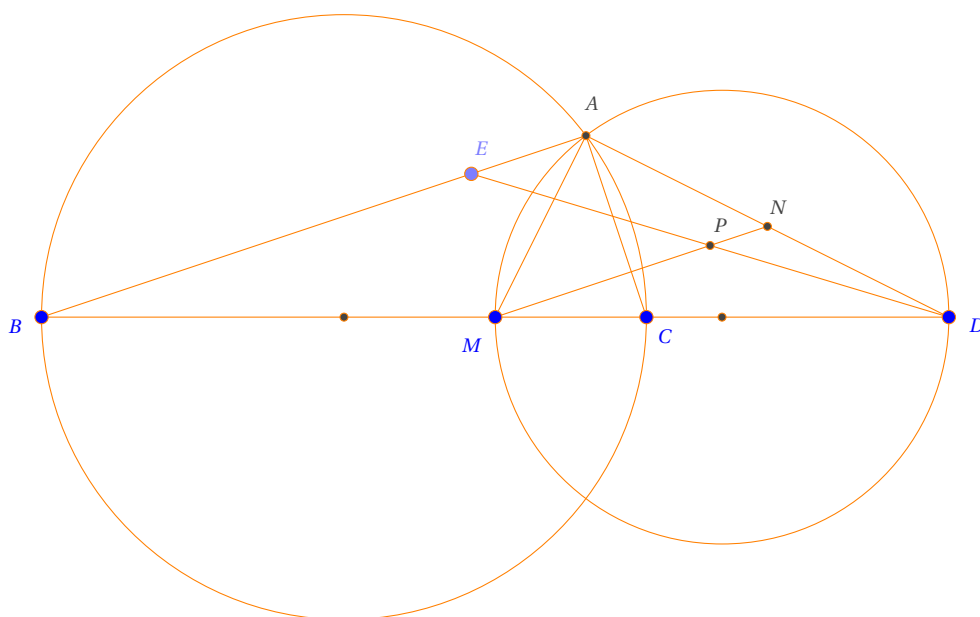
Bài tập 84. Trong Oxy cho $A(-2; 2)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 5$. Đường tròn (K) có tâm A cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt B, C. Biết tung độ B, C đều âm và $S_{ABC} = \frac{1}{2}$. Viết phương trình đường tròn (K).

(Vted lần 7)



Tính chất 69. Cho tam giác ABC vuông tại A, với $AB = 3AC$. Gọi D là điểm thuộc tia đối của tia CB sao cho $BC = 2CD$. Gọi M là điểm chia đoạn BC theo tỷ số $k = -3$. Khi đó

1. A nằm trên đường tròn đường kính MD.
2. $AM = \frac{1}{2}AD$.
3. Gọi N là trung điểm AD, ta có tam giác MAN vuông cân tại A hay trung điểm P của ED nằm trên MN.



1. Ta có $\frac{BA}{AC} = \frac{BM}{MC} = \frac{BD}{CD} = 3$ nên AM, AD là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác

BAC hay $\angle MAD = 90^\circ$ do đó A nằm trên đường tròn đường kính MD .

2. Chú ý $\angle BAC = 90^\circ$ nên $\angle MAC = 45^\circ = \angle CAD$ hay AC cũng là phân giác của $\angle MAC$. Ta có $\frac{MC}{CD} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{MA}{AD} = \frac{1}{2}$ hay $AM = \frac{1}{2}AD$.

3. Theo 1. và 2. ta có $\angle MAD = 90^\circ$ và $MA = AN$ suy ra tam giác MAN vuông cân tại A và MN là đường trung bình của tam giác ABD suy ra trung điểm P của DE nằm trên MN .

Bài tập 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A , với $AB = 3AC$. Gọi $D(-\frac{21}{2}; -\frac{9}{2})$ là điểm thuộc tia đối của tia CB sao cho $BC = 2CD$. Biết rằng điểm A nằm trên tia đối của tia Oy và điểm $E(3; 1)$ thuộc đoạn AB . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

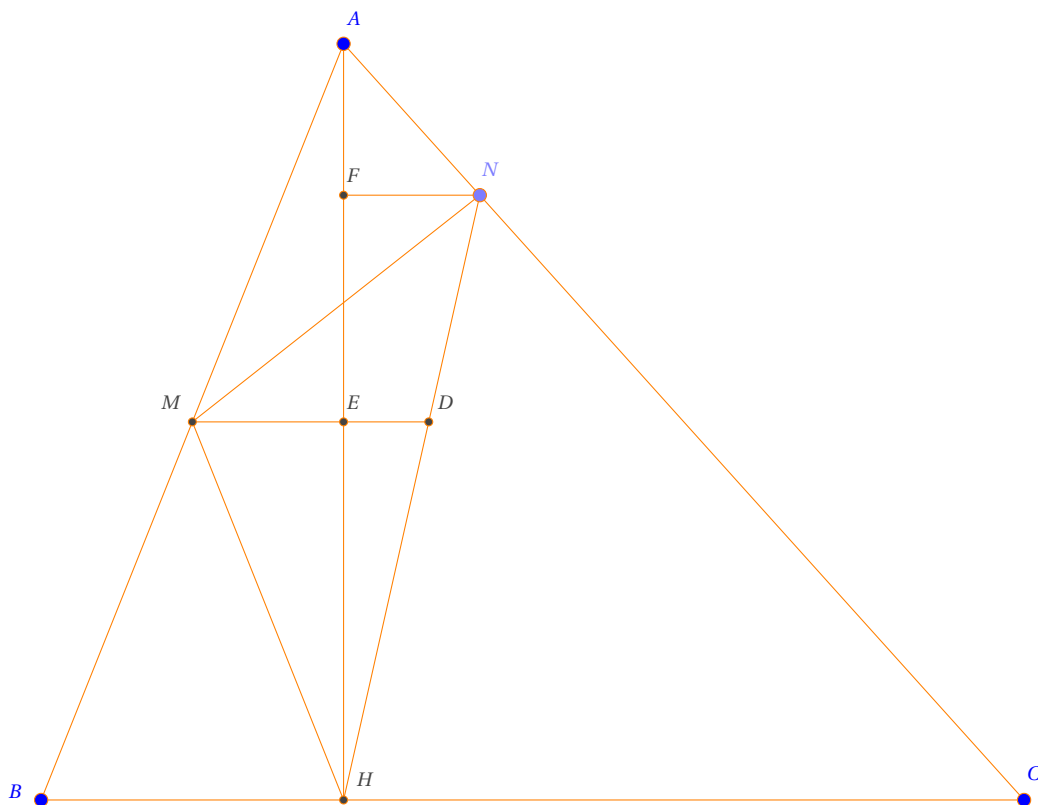
(Vted lần 8)

Khi làm bài này các em chú ý tam giác MAN vuông cân hay P nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm N của AD và tạo với đường thẳng AD một góc 45° . Hoặc ta có thể dùng cách 2 là $\angle BAD = 135^\circ$. Khi đó chỉ cần tham số hóa tọa độ điểm A mọi vấn đề là xong.

Cách 1: P là trung điểm ED suy ra $P(-\frac{15}{4}; -\frac{7}{4})$. Gọi $A(0; a), a \leq 0$. Ta có $\angle AND = 45^\circ$ rồi giải ra ta được $a = -3$ hay $A(0; -3)$. N là trung điểm AD nên $N(-\frac{21}{4}; -\frac{15}{4})$, Đường thẳng MN đi qua N, P nên có phương trình $MN: 16x - 12y + 39 = 0$. Đường thẳng AM đi qua A và vuông góc AD nên có phương trình $AM: 7x + y + 3 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x + y + 3 = 0 \\ 16x - 12y + 39 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-\frac{3}{4}; \frac{9}{4})$. Ta có M là trung điểm AD nên $B(9; 9)$ và $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$ suy ra $C(-4; 0)$.

Cách 2: Gọi $A(0; a), a \leq 0$. Ta có $\angle EAD = 135^\circ$ tương đương $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$. Giải ra ta được $a = -3$ hay $A(0; -3)$. Đường thẳng AB đi qua A, E nên có phương trình $AB: 4x - 3y - 9 = 0$. Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với AB nên $AC: 3x + 4y + 12 = 0$. Gọi $B(b; \frac{4b-9}{3}), C(c; -\frac{12+3c}{4})$. Ta có $\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DC}$ giải ra ta được $B(9; 9), C(-4; 0)$.

Tính chất 70. Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AB . Cho H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC và N nằm trên cạnh AC thỏa $NC = 4NA$. Gọi D là điểm chia đoạn HN theo tỷ số $k = -\frac{5}{3}$. Ta có $MD \perp HA$.



Qua M, N kẻ đường thẳng song song với BC cắt AH, HN như hình vẽ. Theo Thales ta có E là trung điểm HA và $\frac{EH}{EF} = \frac{DH}{DN} = \frac{5}{3}$ do đó nếu D là điểm chia đoạn HN theo tỷ số $k = -\frac{5}{3}$ thì $MD \perp HA$.

Bài tập 86. Cho tam giác ABC có $M(-1;1)$ là trung điểm cạnh AB . Cho $H(2;0)$ là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC và $N(2;4)$ nằm trên cạnh AC thỏa $NC = 4NA$. Viết phương trình cạnh BC và tìm tọa độ điểm A .

(Phan Chu Trinh-Đà Nẵng lần 1)

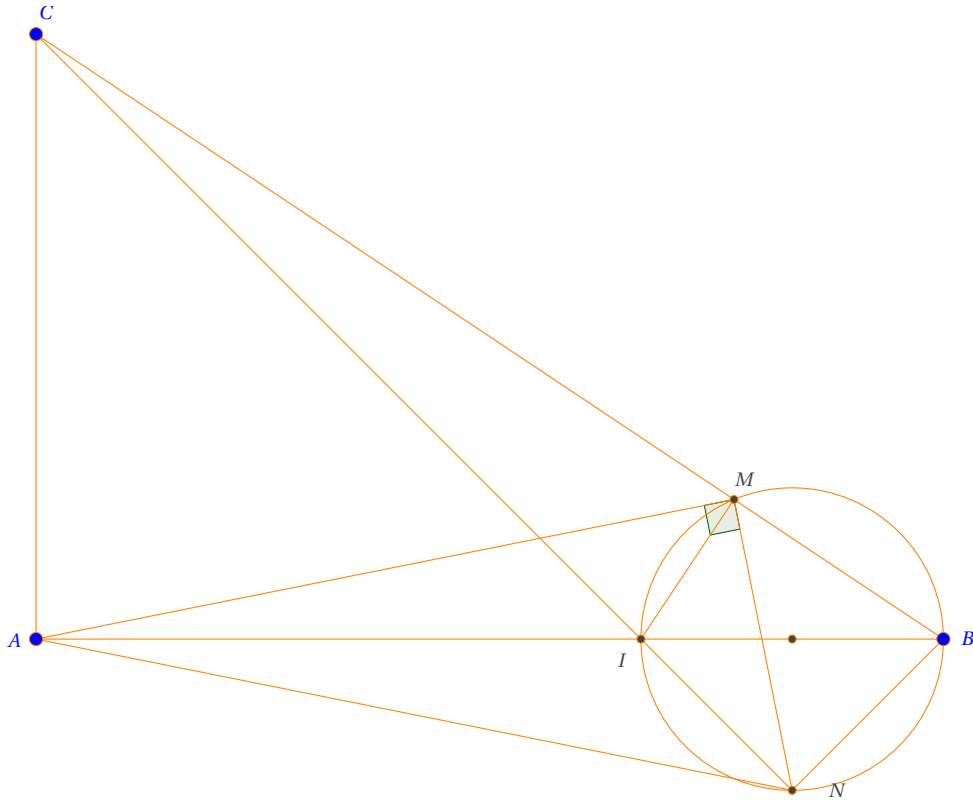
Gọi D là điểm chia đoạn HN theo tỷ số $k = -\frac{5}{3}$ suy ra $D(2; \frac{5}{2})$. Đường thẳng MD đi qua M, D có phương trình $MD: x - 2y + 3 = 0$. Đường thẳng AB qua H song song với MD nên $BC: x - 2y - 2 = 0$. Đường thẳng AH đi qua A và vuông góc BC nên $AH: 2x + y - 4 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1;2). \text{ Điểm } E \text{ là trung điểm } AH \text{ nên } A(0;4).$$

Tính chất 71. 1. $AM \perp MN$

2. Tứ giác $ACBN$ nội tiếp.

3. MI, MB là phân giác trong và ngoài của tam giác AMN và AI là phân giác trong góc MAN hay I là tâm nội tiếp tam giác MAN .



1. Ta có $IM \perp MB$ nên tứ giác $ACMI, IMBN$ nội tiếp. Suy ra $\angle CMA = \angle CIA = \angle MIB = \angle NMB = 45^\circ$ do đó $\angle AMN = 90^\circ$ hay $AM \perp MN$.
2. Ta có $\angle CNB = \angle CMI = \angle CAB = 90^\circ$ nên tứ giác $ACBN$ nội tiếp.
3. Theo 1. ta có tứ giác $ACMI, IMBN$ nội tiếp nên $\angle AMI = \angle ACI = 45^\circ = \angle NIB = \angle NMB$ do đó MI, MB là phân giác trong và ngoài của tam giác AMN .

Bài tập 87. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Trên cạnh AB lấy điểm I sao cho $AI = AC$. Đường tròn đường kính IB cắt BC tại $M(\frac{60}{17}; \frac{15}{17})$ và cắt đường thẳng CI tại $N(4; -1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $A \in 2015x - 2016y = 0$.

(Hocmai lần 6)

Đường thẳng AM đi qua M và vuông góc MN nên $AM: x - 4y = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2015x - 2016y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; 0).$$

Đường phân giác trong và ngoài của tam giác AMN tại A lần lượt có phương trình $MI: 5x - 3y - 15 = 0$ và $MB: 3x + 5y - 15 = 0$. Đường thẳng AB là phân giác trong góc $\angle MAN$ nên $AB: y = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 5y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5; 0).$$

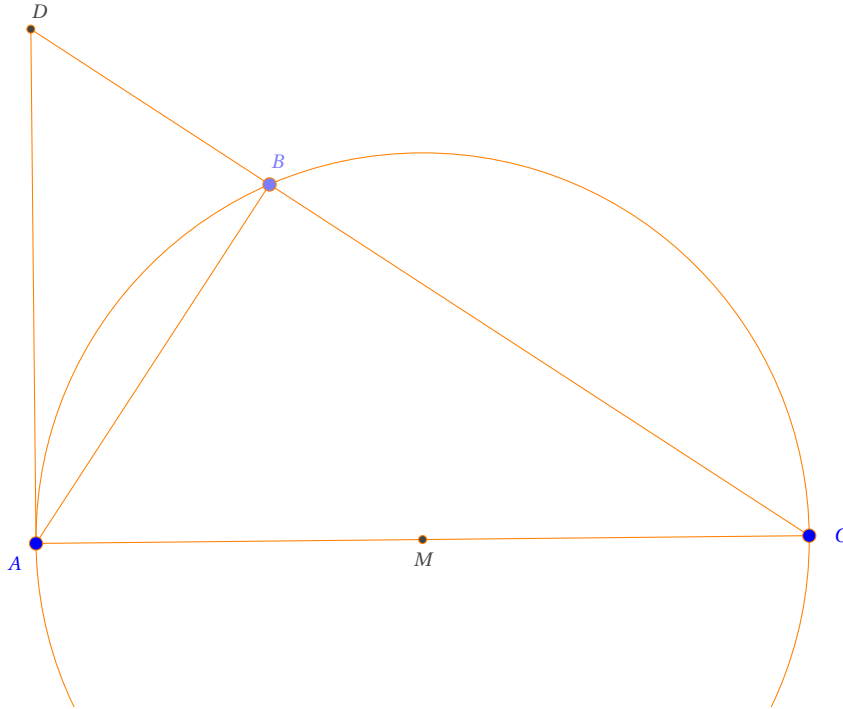
Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc AB nên $AC: x = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0; 3).$$

Tính chất 72. 1.

2.

3.



Bài tập 88. Cho hai đường thẳng $d_1 : x + \sqrt{3}y = 0$, $d_2 : x - \sqrt{3}y = 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc d_1 tại A và cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình đường tròn (C), biết $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ và A có hoành độ dương.

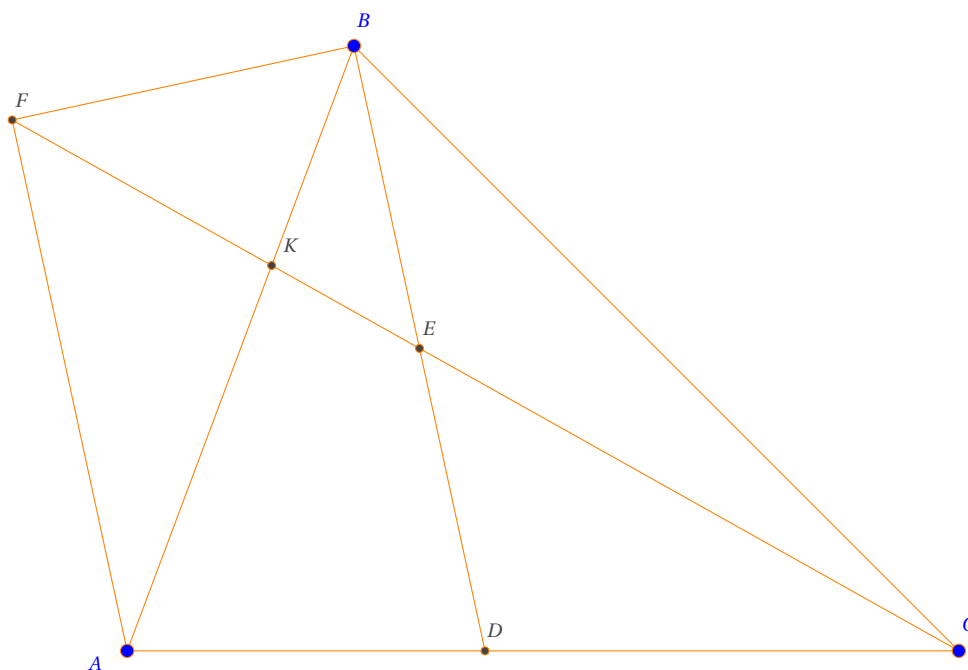
(Lê Quý Đôn- Đà Nẵng lần 1)

Tính chất 73.

Bài tập 89. Tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp $I(0;1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $K(2;2)$, đỉnh $A(-2;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

(HSG Đồng Nai)

Tính chất 74. Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong $\angle ABC$, E là trung điểm BD. Đường thẳng CE cắt phân giác ngoài $\angle ABC$ tại F. Khi đó $AF \parallel BD$ hay $AF \perp BD$.



Áp dụng định lý Menelaus đối với tam giác ABD ta có $\frac{BK}{KA} \frac{AC}{CD} \frac{DE}{EB} = 1$ suy ra $\frac{CD}{AC} = \frac{BK}{KA}$ (1).

Qua A kẻ đường thẳng song song với BD cắt đường thẳng CK tại F'. Theo Thales ta có $\frac{KE}{KF'} = \frac{KB}{KA}$ (2) và $\frac{CE}{CF'} = \frac{CD}{CA}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{KE}{KF'} = \frac{CE}{CF'}$ hay $\frac{KE}{EC} = \frac{F'K}{F'C}$ do đó BF' là phân giác ngoài góc $\angle KBC$ tức $F' \equiv F$. Vậy $AF \parallel BD$, mà $BF \perp BD$ nên $AF \perp FB$.

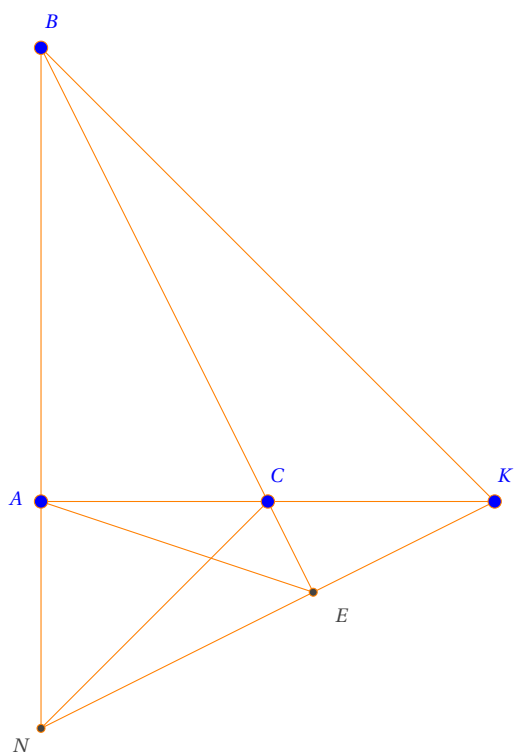
Bài tập 90. Trong Oxy cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong $\angle ABC$, E là trung điểm BD. Đường thẳng CE cắt phân giác ngoài $\angle ABC$ tại F. Biết $B(5;1)$, $F(4;3)$ và A thuộc d: $x + 2y - 18 = 0$. Viết phương trình BC.

Đường thẳng BF: $2x + y - 11 = 0$. Đường thẳng AF đi qua F và vuông góc FB nên có phương trình AF: $x - 2y + 2 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8;5)$. Gọi A' là đối xứng của A qua BF, vì $AF \perp FB$ nên A' là điểm đối xứng của A qua F do đó $A'(0;1)$. Khi đó đường thẳng BC là đường thẳng đi qua B, A' nên BC: $y = 1$.

Tính chất 75. 1. $AK = 2AN$.

2. Tam giác BAK vuông cân tại A.

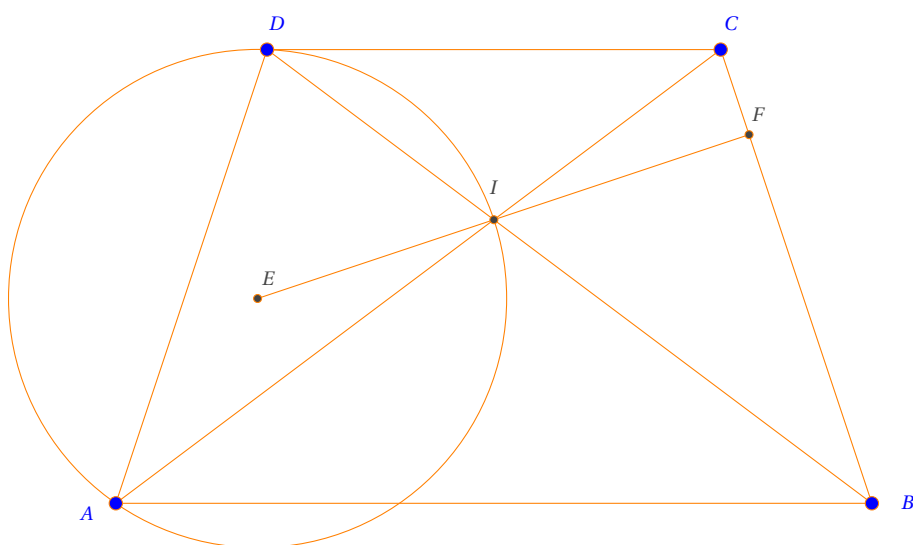
3. C là trực tâm tam giác BKN.



Bài tập 91. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi K là điểm đối xứng của A qua C . Đường thẳng qua K vuông góc BC cắt BC tại E và cắt AB tại $N(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $\angle AEB = 45^\circ$, phương trình đường thẳng $BK : 3x + y - 15 = 0, x_B > 3$.

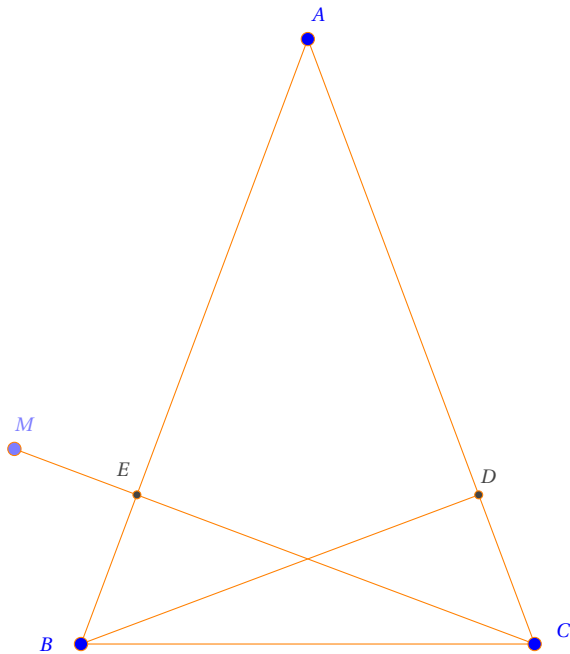
(Phúc Thành-Hải Dương lần 1)

Tính chất 76. $EI \perp BC$



Bài tập 92. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có đỉnh $A(2; -1)$. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại $I(1; 2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI có tâm $E(-\frac{27}{8}; -\frac{9}{8})$. Biết đường thẳng BC đi qua $M(9; -6)$. Tìm tọa độ B, D biết $y_B < 3$.

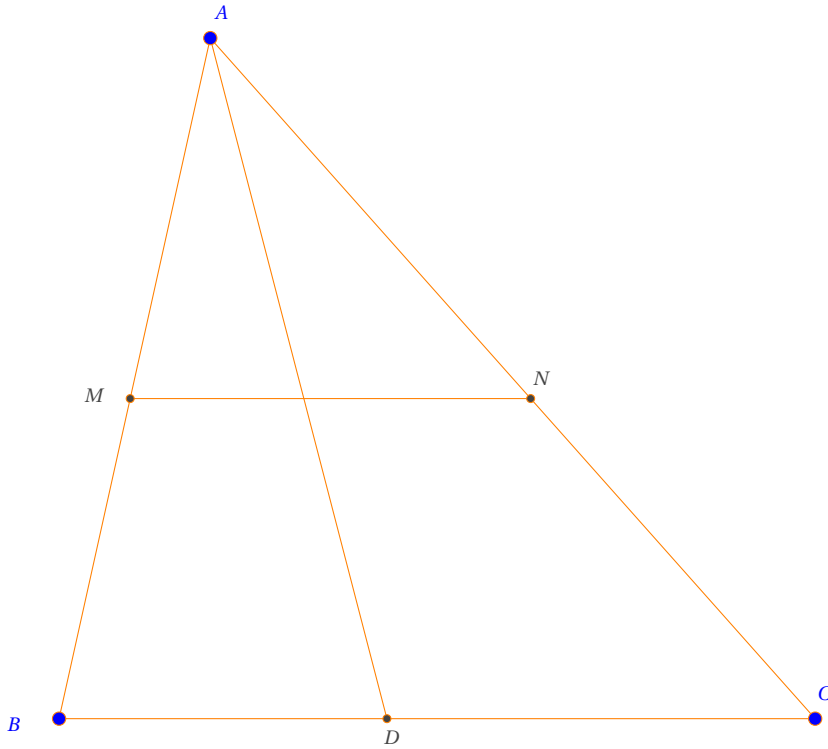
Tính chất 77.



Bài tập 93. Cho tam giác ABC cân tại A , BC nằm trên đường thẳng $x - y + 1 = 0$. Đường cao của tam giác ABC kẻ từ B là $x + 2y - 2 = 0$. Điểm $M(1; 1)$ thuộc đường cao kẻ từ C . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(Chuyên Thái Nguyên)

Tính chất 78. $MN \parallel BC$.



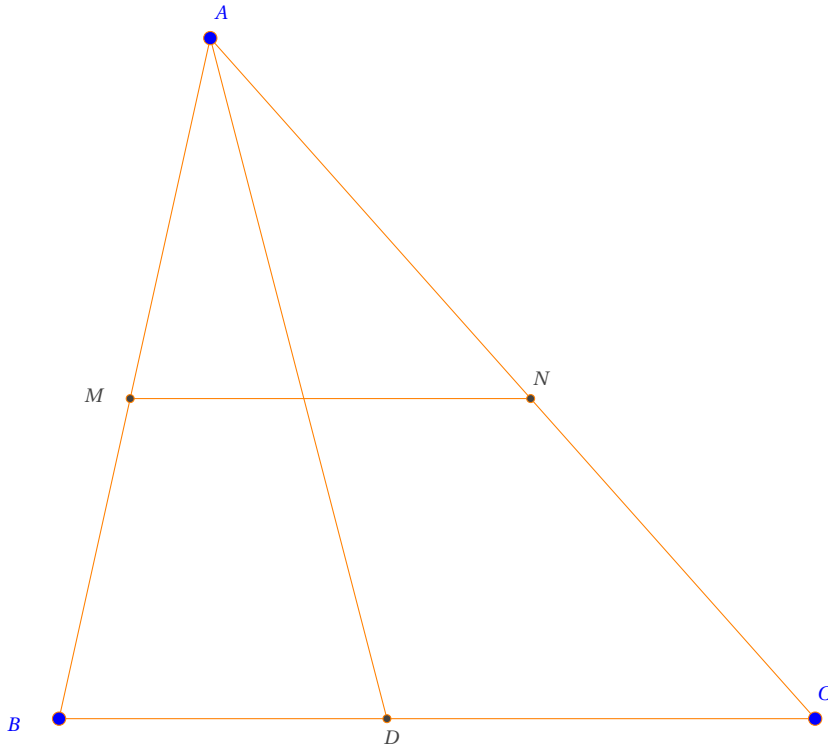
Do AD là phân giác nên $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB - BD}{AC - CD} = \frac{AM}{AN}$ hay $MN \parallel BC$.

Bài tập 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có AD là phân giác trong góc A. Các điểm M và N tương ứng thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = BD, CN = CD$. Biết $D(2;0), M(-4;2), N(0;6)$, hãy viết phương trình các cạnh tam giác ABC.

(Chuyên DHSP lần 1)

Đường thẳng BC đi qua D và song song MN nên có phương trình $x - y - 2 = 0$. trung trực MD có phương trình $3x - y + 4 = 0$. Vì tam giác MBD cân tại B nên B nằm trên đường trung trực MD do đó tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -5)$. Tương tự trung trực ND có phương trình $x - 3y + 8 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7; 5)$. Đường thẳng AB đi qua B, M nên có phương trình AB: $7x + y + 26 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C, N nên có phương trình $x + 7y - 42 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x + y + 26 = 0 \\ x + 7y - 42 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{14}{3}; \frac{20}{3})$.

Tính chất 79. $MN \parallel BC$.



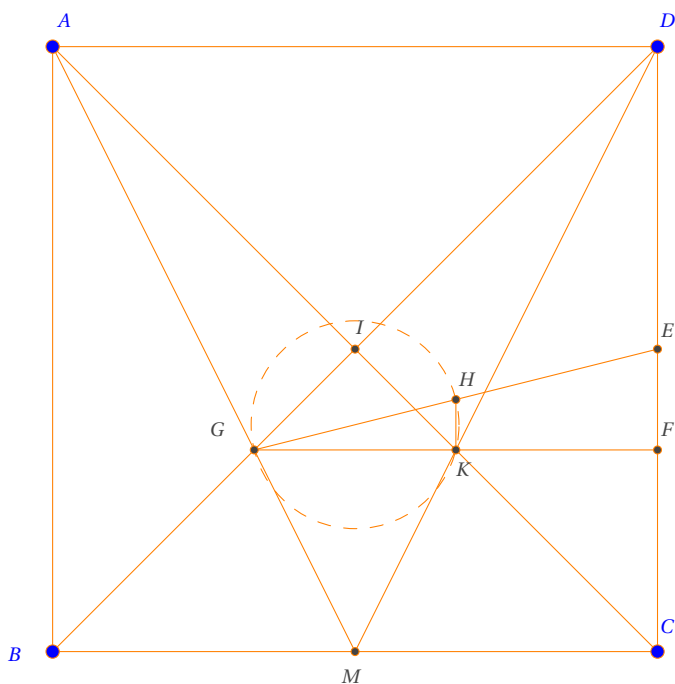
Do AD là phân giác nên $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB - BD}{AC - CD} = \frac{AM}{AN}$ hay $MN \parallel BC$.

Bài tập 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có AD là phân giác trong góc A. Các điểm M và N tương ứng thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = BD, CN = CD$. Biết $D(2;0), M(-4;2), N(0;6)$, hãy viết phương trình các cạnh tam giác ABC.

(Chuyên DHSP lần 1)

Đường thẳng BC đi qua D và song song MN nên có phương trình $x - y - 2 = 0$. trung trực MD có phương trình $3x - y + 4 = 0$. Vì tam giác MBD cân tại B nên B nằm trên đường trung trực MD do đó tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -5)$. Tương tự trung trực ND có phương trình $x - 3y + 8 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7; 5)$. Đường thẳng AB đi qua B, M nên có phương trình AB: $7x + y + 26 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C, N nên có phương trình $x + 7y - 42 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x + y + 26 = 0 \\ x + 7y - 42 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{14}{3}; \frac{20}{3})$.

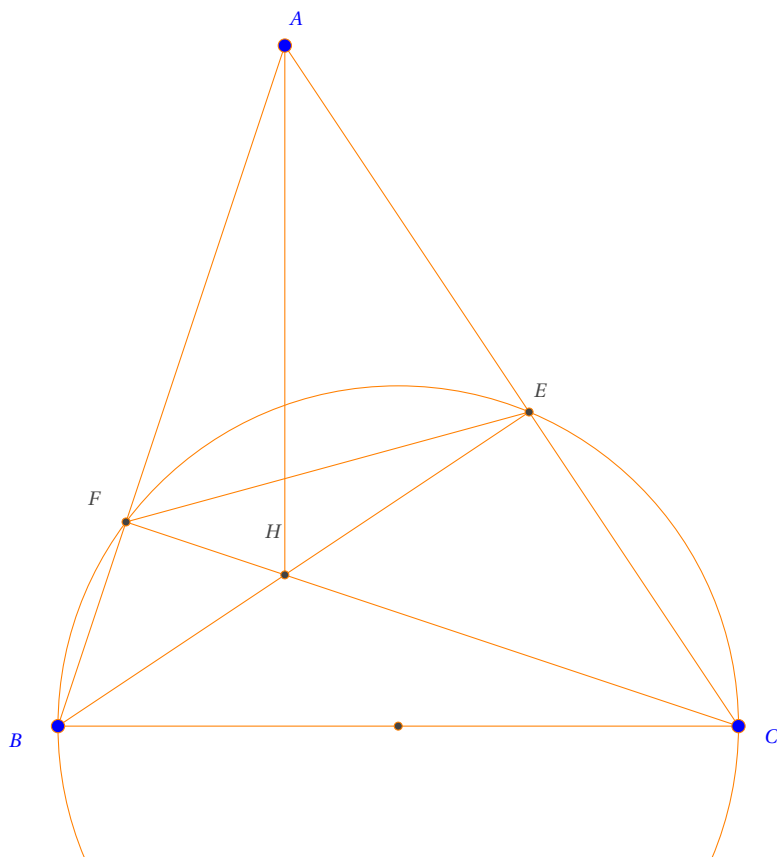
Tính chất 80. Gọi H là trung điểm GE. Khi đó K nằm trên đường tròn đường kính GH và HK là đường trung bình của tam giác GEF.



Bài tập 96. Cho hình vuông $ABCD$ có trọng tâm tam giác BCD là K thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$. Trọng tâm tam giác ABC là $G(4; 3)$ biết đường thẳng CD đi qua điểm $E(1; -4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết $y_K \in \mathbb{Z}$.

(Moon lần 7)

Tính chất 81. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và điểm H cố định trong (O) . BC là đường kính thay đổi, giả sử BH, CH cắt đường tròn tại E, F . Khi đó EF luôn đi qua một điểm cố định K .



Đường tròn (T) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Đường thẳng $HI : y = 1$. Áp dụng tính chất trên ta có K nằm trên tia đối HI và $HK = \frac{IH(R - IH)}{R + IH} = 6 - 4\sqrt{2}$ do đó $K(9 - 4\sqrt{2}; 1)$. Khoảng cách từ N đến EF lớn nhất khi $EF \perp NK$. Suy ra đường thẳng EF đi qua K và vuông góc NK có phương trình $x = 9 - 4\sqrt{2}$. Tọa độ điểm E, F là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 9 - 4\sqrt{2} \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow$ rồi suy ra tọa độ điểm E, F suy ra tọa độ điểm B, C suy ra $A(5;1)$.

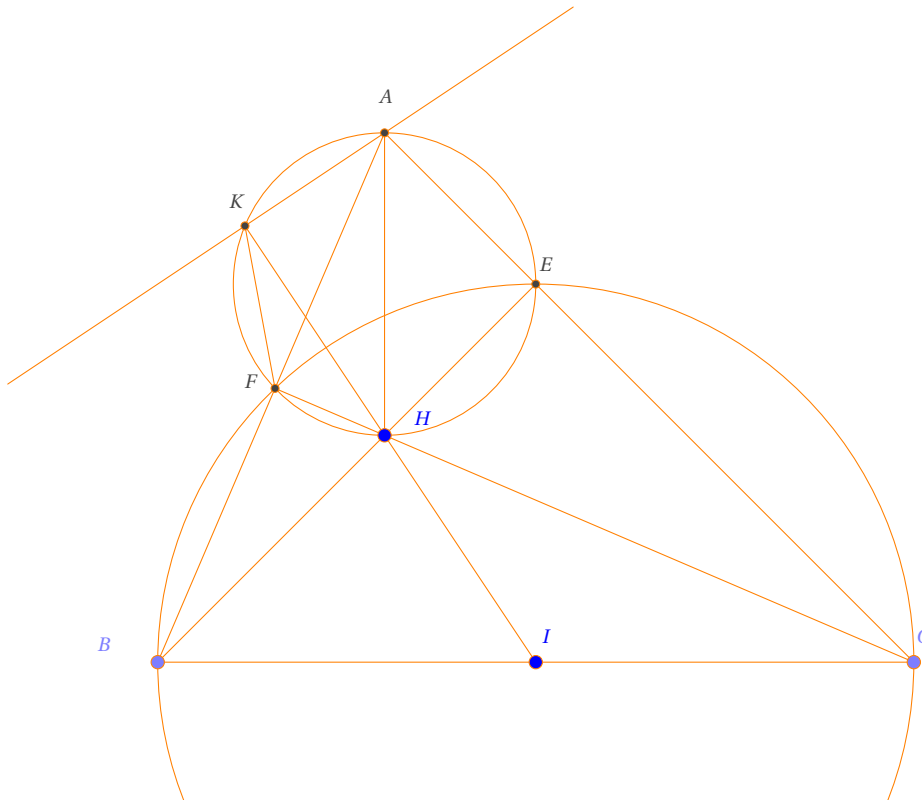
Nhận xét: ta có thể tìm tọa độ điểm A bằng cách khác như sau. Áp dụng nhận xét trên ta có A nằm trên đường thẳng vuông góc với IQ ở đây Q được xác định bởi $\overline{IH} \cdot \overline{IQ} = R^2$. Do đó ta có $Q(5;1)$ suy ra $A \in x = 5$. Mặt khác ta có nhận xét N, H, I, K thẳng hàng do đó nếu tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán thì tam giác ABC phải cân tại A , do đó A thuộc đường thẳng $HI : y = 1$. Vậy tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(5;1)$.

Bài tập 98. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC , đường tròn đường kính BC có phương trình (T) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$, hai đường cao BE, CF cắt nhau tại $H(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A biết $A \in 2x - y - 10 = 0$ và khoảng cách từ $N(-\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$ đến EF là lớn nhất.

(Moon lần 6)

Để làm bài này tôi sử dụng tính chất đơn giản sau, không biết tác giả làm như thế nào và cho ra kết quả như thế nào.

Tính chất 82. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và điểm H cố định trong (O). BC là đường kính thay đổi, giả sử BH, CH cắt đường tròn tại E, F. Khi đó A nằm trên một đường thẳng cố định.



Giả sử IH kéo dài cắt đường tròn đường kính AH tại K. ta có $\angle FKH = \angle FAH = \angle ICH$ hay tứ giác FKCI nội tiếp. Suy ra $HK.HI = HF.HC = P_{H|(O)}$ do đó K cố định. mặt khác $AK \perp IK$ nên A nằm trên đường thẳng qua K và vuông góc với IK.

Trở lại bài toán ta thấy đề cho điểm A thuộc $2x - y - 10 = 0$ và áp dụng tính chất ta suy ra có duy nhất tọa độ điểm A(5;0). Như vậy yếu tố khoảng cách từ N đến EF là vô nghĩa, mà tóm lại chẳng hiểu tác giả ra **khoảng cách từ N đến EF lớn nhất** là dụng ý gì? Nên tôi mạnh dạn làm mạnh theo tư duy hình học và cho bài toán mới như sau. Mong được lĩnh giáo các cao thủ ạ.

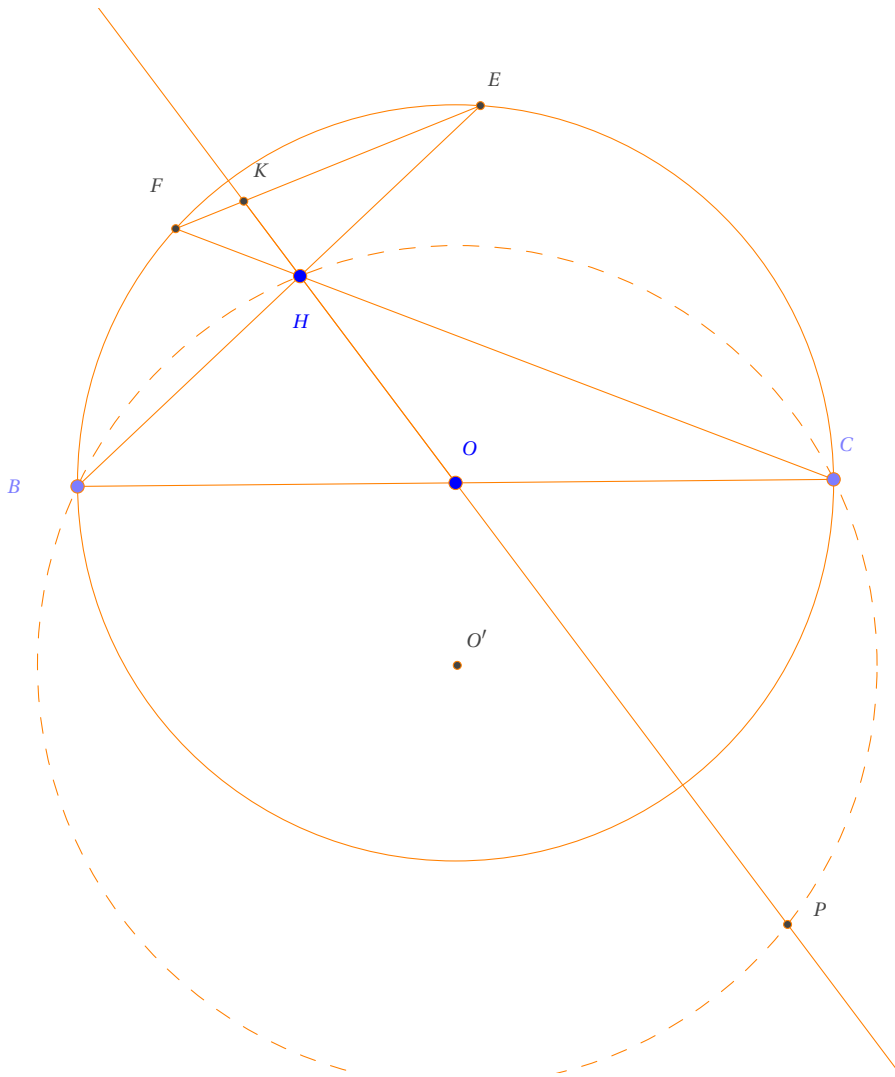
Nhận xét: $\overline{IH} \cdot \overline{IK} = R^2$

Bài tập 99. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC, đường tròn đường kính BC có phương trình (T) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$, hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H(3;1). Tìm tọa độ điểm A biết khoảng cách từ N(0;1) đến EF là lớn nhất.

(Võ Quang Mẫn)

Để giải bài này ta dùng tính chất sau:

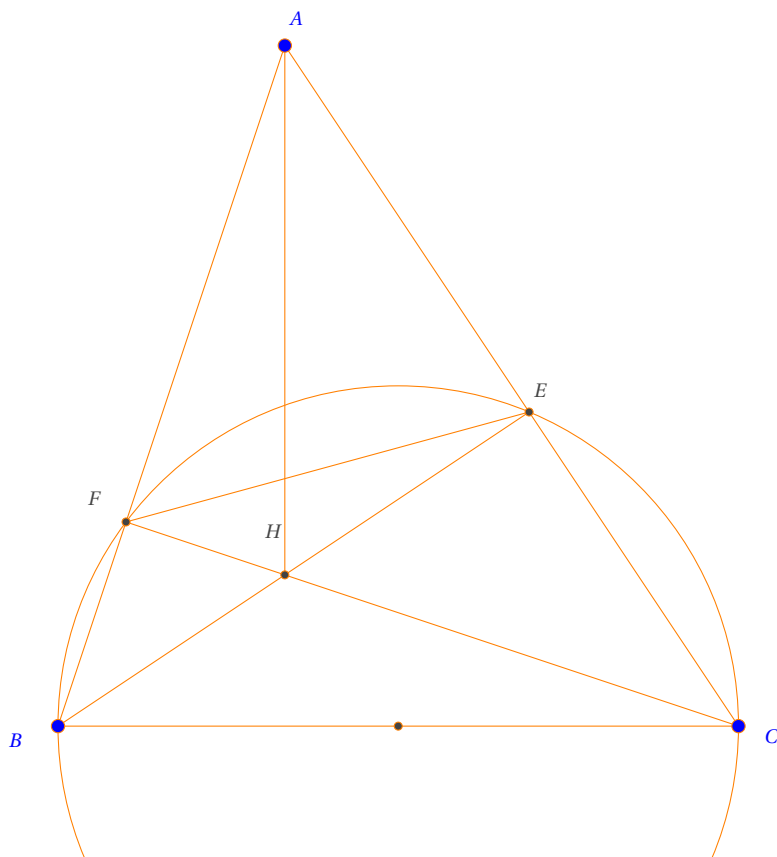
Tính chất 83. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và điểm H cố định trong (O). BC là đường kính thay đổi, giả sử BH, CH cắt đường tròn tại E, F. Khi đó EF luôn đi qua một điểm cố định K.



Xét phép nghịch đảo cực H theo phương tích $k = P_{H|(O)}$. Khi đó qua phép nghịch đảo này biến đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC thành đường thẳng EF. Mà đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC luôn đi qua điểm H cố định nên đường thẳng EF cũng qua một điểm K cố định.

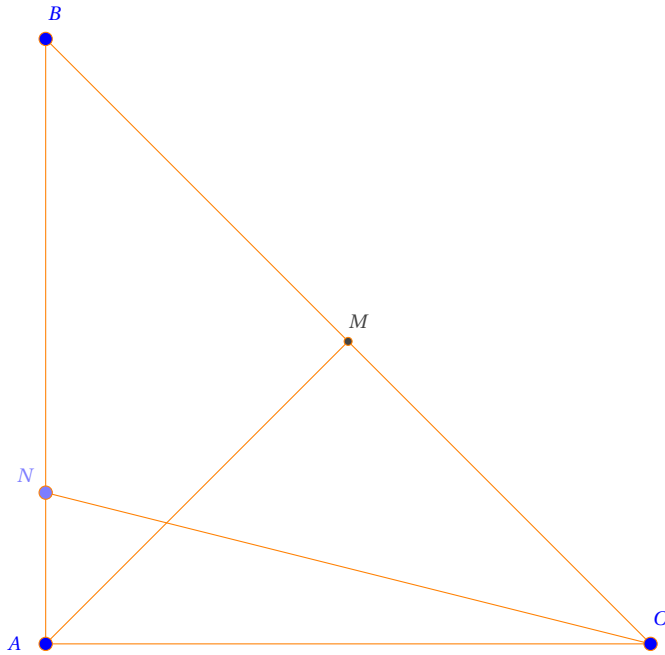
Cách xác định điểm K Giả sử HO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tại $P \neq H$. Ta sẽ chứng minh P là điểm cố định. Thật vậy $\overline{OH} \cdot \overline{OP} = \overline{OB} \cdot \overline{OC} = -\frac{BC^2}{4}$ không đổi nên P cố định.

Trở lại trên theo tính chất của phép nghịch đảo ta có K chính là ảnh của P qua f. Do đó $\overline{HKHP} = P_{H|(O)} = HO^2 - R^2$. Hay K nằm trên tia đối HO thỏa $HK = \frac{OH(R^2 - OH^2)}{R^2 + OH^2}$.



Đường tròn (T) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Đường thẳng $HI: y = 1$. Áp dụng tính chất trên ta có K nằm trên tia đối HI và $HK = \frac{IH(R-IH)}{R+IH} = 6 - 4\sqrt{2}$ do đó $K(9 - 4\sqrt{2}; 1)$. Khoảng cách từ N đến EF lớn nhất khi $EF \perp NK$. Suy ra đường thẳng EF đi qua K và vuông góc NK có phương trình $x = 9 - 4\sqrt{2}$. Tọa độ điểm E, F là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 9 - 4\sqrt{2} \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{rồi suy ra tọa độ}$$
 điểm E, F suy ra tọa độ điểm B, C suy ra $A(5;1)$.

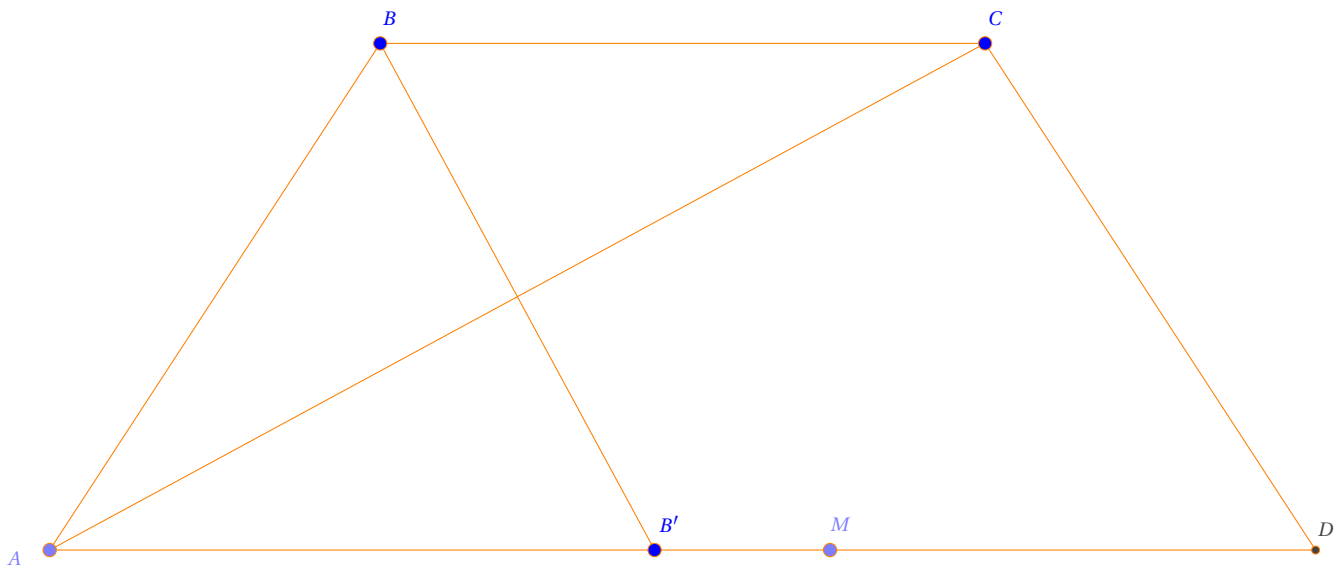
Nhận xét: ta có thể tìm tọa độ điểm A bằng cách khác như sau. Áp dụng nhận xét ở tính chất 1 ta có A nằm trên đường thẳng vuông góc với IQ ở đây Q được xác định bởi $\overline{IH} \cdot \overline{IQ} = R^2$. Do đó ta có $Q(5;1)$ suy ra $A \in x = 5$. Mặt khác ta có nhận xét N, H, I, K thẳng hàng do đó nếu tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán thì tam giác ABC phải cân tại A , do đó A thuộc đường thẳng $HI: y = 1$. Vậy tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(5;1).$$



Bài tập 100. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, N thuộc cạnh AB sao cho $AB = 4AN$. Biết $M(2;2)$. Phương trình đường thẳng CN: $4x + y - 4 = 0$ và C nằm phía trên trục hoành. Tìm tọa độ điểm A.

(Hùng Vương-Bình Phước lần 1)

Tính chất 85. AC là phân giác $\angle BAD$.



Do tam giác ABC cân tại B nên $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC$ hay AC là phân giác angle BAD.

Bài tập 101. Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn là AD. Biết $B(2;3)$ và $AB = BC$, đường thẳng $AC : x - y - 1 = 0$, điểm $M(-2;-1)$ nằm trên đường thẳng AD. Tìm tọa độ A, C, D.

(Triệu Sơn 2 lần 1)

B' đối xứng của B qua AC nên $B'(4;1)$. Đường thẳng AD đi qua M, B' nên có phương trình $AD : x - 3y - 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0).$$

Đường thẳng BC đi qua B và song song AD nên có phương trình $BC : x - 3y + 7 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

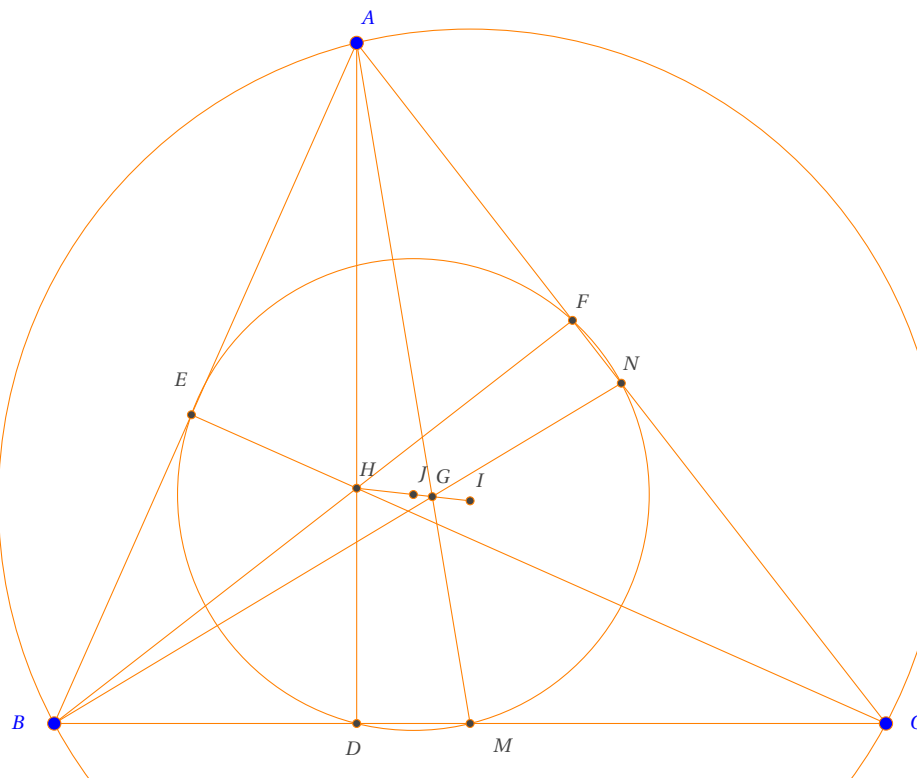
$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;4).$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC khi đó $N(\frac{7}{2}; \frac{7}{2})$. Đường thẳng MN đi qua N và vuông góc BC nên có phương trình $MN : 3x + y - 14 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{43}{10}; \frac{11}{10}).$$

Vì M là trung điểm AD nên $D(\frac{38}{5}; \frac{11}{5})$.

Tính chất 86.



Bài tập 102. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I bán kính $R = 5$ có trọng tâm $G(\frac{5}{3}; \frac{8}{3})$. $E(4;4), F(0;1)$ lần lượt là hình chiếu của C, B lên AB, AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Hocmai lần 7)

Gọi H, I, J là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn Euler. Ta có $EF = 5$ và bán kính đường tròn Euler $R' = \frac{1}{2}R = \frac{5}{2}$. Do đó J là trung điểm EF. Mặt khác J là trung điểm HI và $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$ nên ta suy ra $H(3;2), I(1;3)$. Gọi H', H'' là ảnh đối xứng của H qua E, F suy ra $H'(5;6)$ và $H''(-3;0)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I bán kính $R = 5$ nên có phương trình $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$. Đường cao CH đi qua H, E có phương trình $HE: 2x - y - 4 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

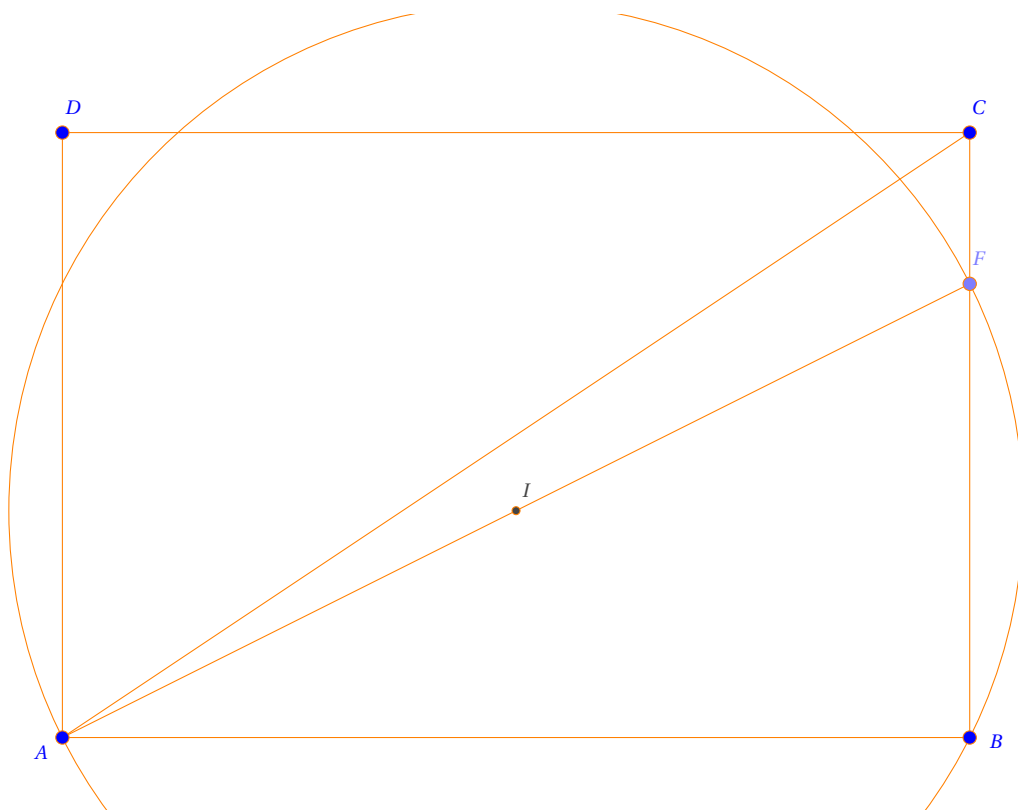
$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(1; -2) \\ C(5; 6) \end{cases} \text{ loại vì trùng } H'$$

Hoàn toàn tương tự ta giải ra $B(6;3)$. Đường thẳng AB đi qua B, E nên có phương trình $AB: x + 2y - 12 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C, F nên có phương trình $AC: 3x + y - 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 7).$$

Nhận xét: Có nhiều em nhầm tin cho mình có tính chất $EF = R$ tương đương $\angle A = 45^\circ$ là sai nha các em. Mà đúng là $EF = R$ tương đương $\angle A = 45^\circ$ hoặc $\angle A = 135^\circ$.

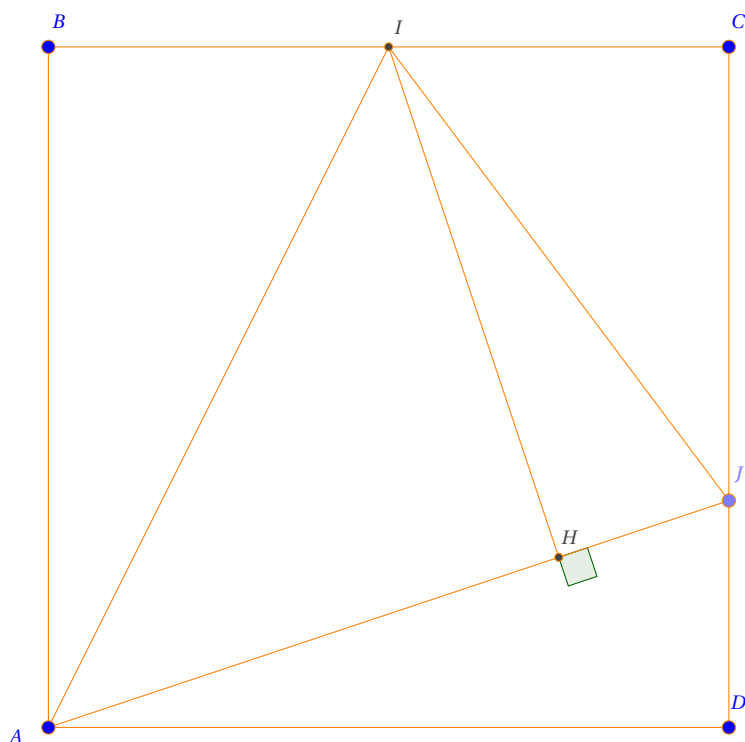
Tính chất 87.



Bài tập 103. Cho hình chữ nhật ABCD biết $AB = \frac{3}{2}AD$. Gọi F là điểm thuộc đoạn BC sao cho $BF = \frac{3}{4}BC$. Đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABF có phương trình $(x - \frac{9}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{225}{8}$. Đường thẳng AC: $3x + 11y - 2 = 0$. Tìm tọa độ C biết $x_A < 0$.

(Lý Tự Trọng-Nam Định lần 1)

Tính chất 88.



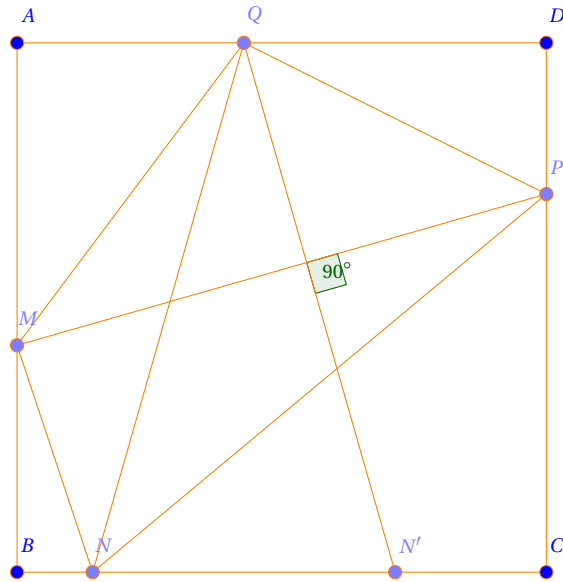
Bài tập 104. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là trung điểm BC, J trên CD sao cho $CJ = 2JD$. Biết $I(\frac{11}{2}; \frac{1}{2})$. Đường thẳng AJ: $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

(Thanh Oai A- Hà nội lần 1)

Tính chất 89.

Bài tập 105. Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC = 2BA$. Gọi E, F là trung điểm BC, AC. Trên tia đối của tia FE lấy điểm M sao cho $FM = 3FE$. Biết $M(5; -1)$, đường thẳng AC: $2x + y - 3 = 0$, $x_A \in \mathbb{Z}$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

Tính chất 90. Cho hình vuông ABCD với 4 điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Cho tọa độ các điểm M, N, P, Q. Dựng lại hình vuông? (Bài này đã từng đọc khi học phổ thông)



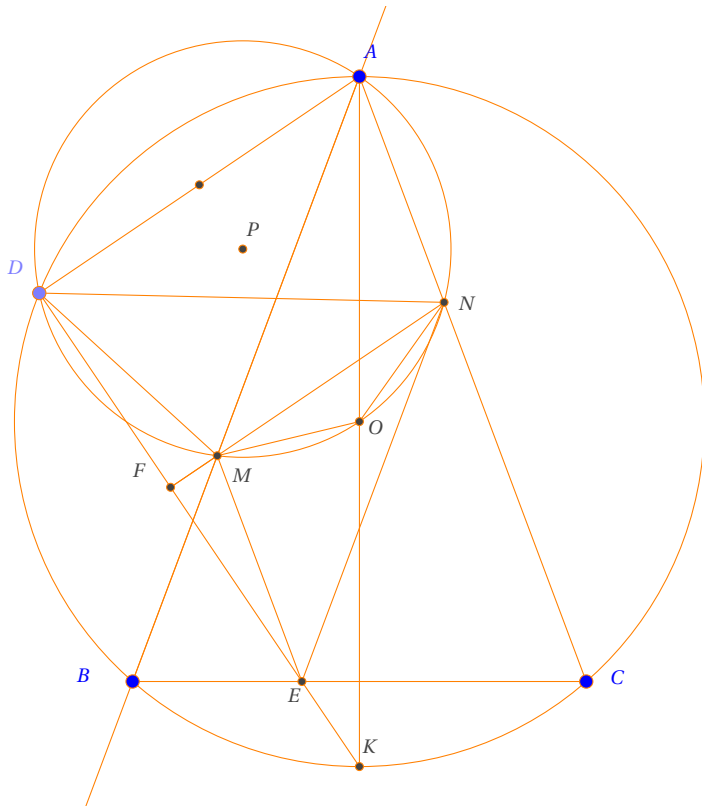
1. Dựng QN' vuông góc với MP và $QN' = MP$ thì N, N' nằm trên cạnh BC .

2. Từ đó suy ra cách dựng.

Bài tập 106. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $O(\frac{7}{2}; \frac{3}{2})$. Điểm $M(6;6)$ thuộc cạnh AB , điểm $N(8; -2)$ thuộc cạnh BC . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông.

Tính chất 91. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . AK là đường kính. D là điểm trên cung BC chứa A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt các cạnh AB, AC tại M, N . Nối DK cắt BC tại E . Khi đó

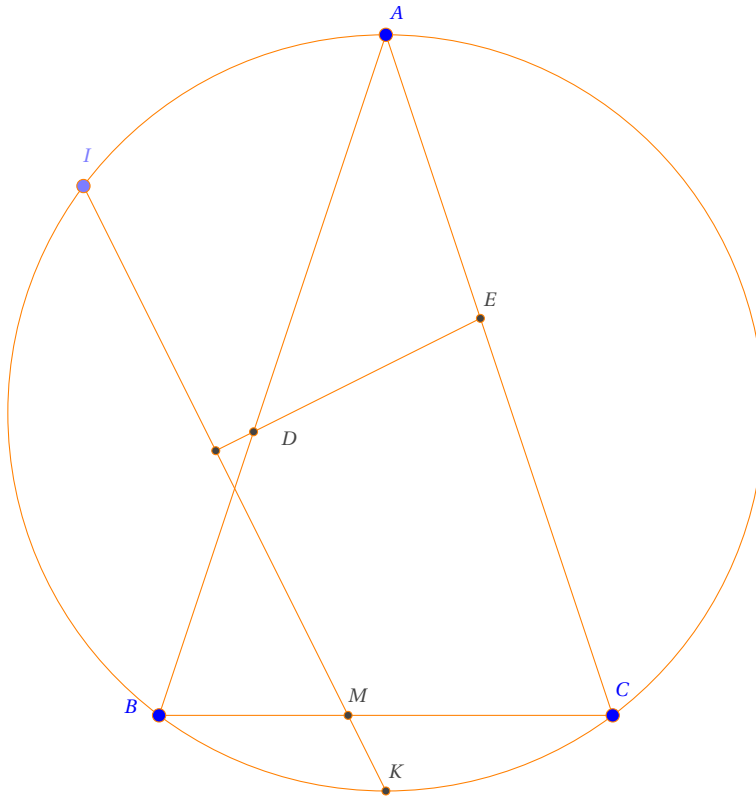
1. $DANM$ là hình thang cân.
2. MN là trung trực của DE
3. Bài toán vẫn còn đúng khi D di động trên (O)



1. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DAO . Chú ý AO là phân giác MAN nên $OM = ON$ suy ra OP là trung trực MN (vì M không trùng N). Tam giác DOA cân tại O nên $OP \perp DA$. Do đó tứ giác $DANM$ là hình thang hay là hình thang cân.
2. Chú ý $\angle AND = \angle AMD = \angle AOD = 2\angle ACD = 2\angle ABD$ do đó tam giác DMB cân tại M . Dựng đường tròn tâm M bán kính MB cắt BC, AB tại E', T khi đó $\angle BE'T = 90^\circ$ hay $E'T \parallel AK$ (1). Ta có $\angle TE'D = \angle TBD = \angle AND = \angle DKA$ kết hợp với (1) ta có D, E', K thẳng hàng hay $E \equiv E'$ do đó $ME = MB$. Chú ý tam giác ABC cân tại A mà tam giác BME cân tại M nên $ME = AN$ và $ME \parallel AN$ hay $ANEM$ là hình bình hành. Do đó $NE = AM = DN$ suy ra MN là trung trực của DE .

Bài tập 107. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (C) với AK là đường kính. Điểm $I(-3;0)$ nằm khác phía với điểm K so với đường thẳng AB và $IA \perp IK$. Nối IK cắt BC tại M , đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại các điểm $D(-1;-1), E(3;3)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

(Vted lần 10 - sách tính chất oxy bài 106)



Áp dụng tính chất trên ta có A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IED và IK vuông góc với ED.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác IDE : $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp J của tam giác ABC là chính giữa cung DE và khác phía đối với I nên $J(2;0)$. Đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với DE nên có phương trình $x + y + 3 = 0$. Ta có A, K đối xứng nhau qua J mà $K \in x + y + 3 = 0$ nên $A \in x + y - 7 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;5).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm J bán kính JA nên có phương trình $(x - 2)^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng AD đi qua A, D nên có phương trình AD : $2x - y + 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 25 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -3).$$

Đường thẳng AE đi qua A, E nên có phương trình AE : $2x + y - 9 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6; -3).$$

Tính chất 92.

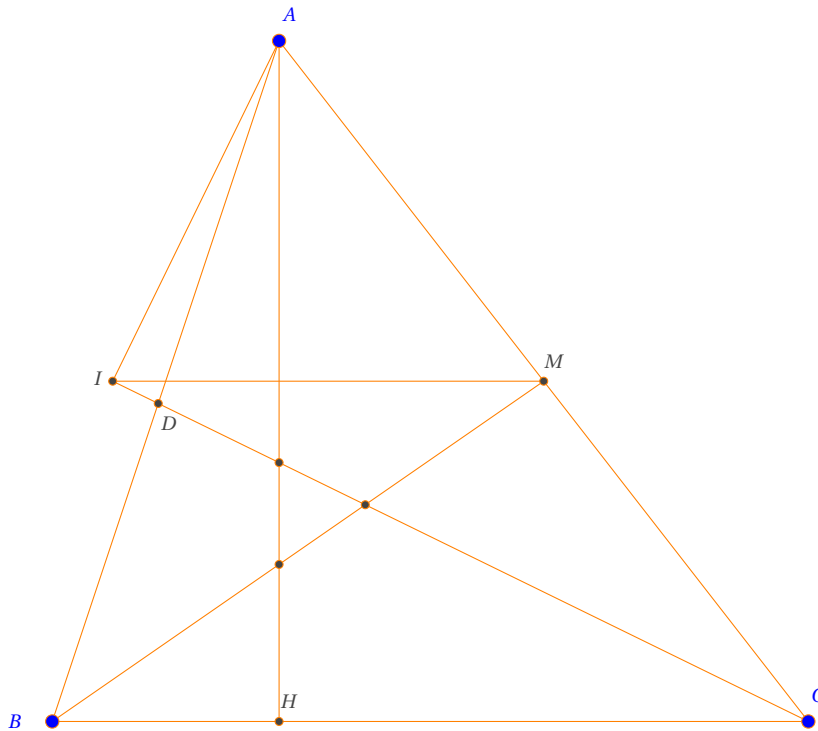
Bài tập 108. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trọng tâm G. Gọi E, H là trung điểm các cạnh AB, BC. D là điểm đối xứng của H qua A, I là giao điểm của đường thẳng AB, CD. Biết $D(-1; -1)$ đường thẳng IG : $6x - 3y - 7 = 0$, $x_E = 1$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC
(Thạch Thành I lần 2)

Tính chất 93.

Bài tập 109. Cho hình vuông $ABCD$ có $C(3; -3)$ và đỉnh $A \in 3x + y - 2 = 0$. Gọi M là trung điểm BC , đường thẳng $DM: x - y - 2 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, D .

(Ngô Gia Tự - Bắc Ninh lần 1)

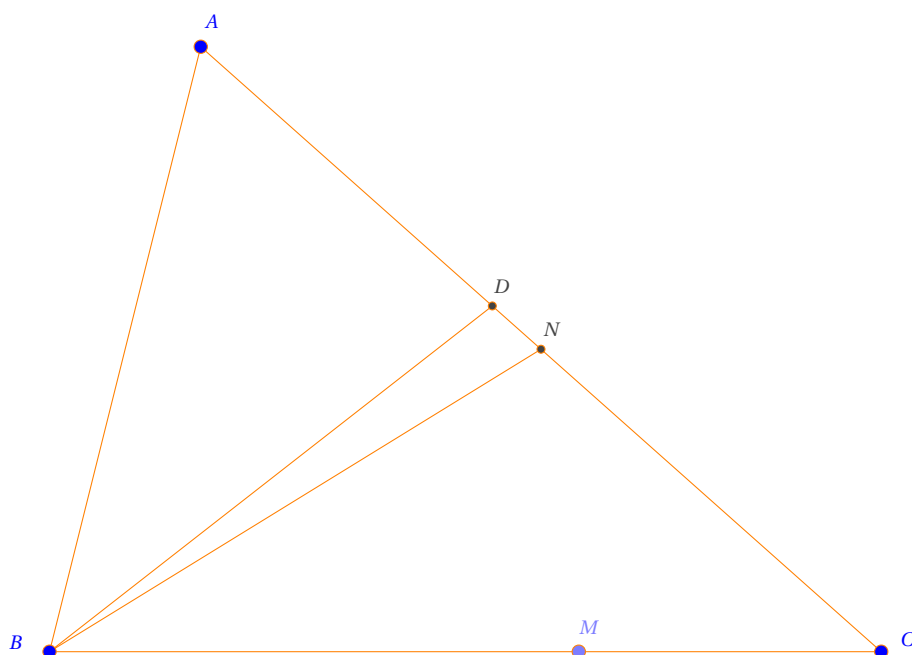
Tính chất 94.



Bài tập 110. Cho tam giác ABC có đường cao $AH: 3x - 4y + 27 = 0$, trung tuyến $BM: 4x + 5y - 3 = 0$, phân giác trong góc C có phương trình $CD: x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(chuyên Bắc Giang lần 1)

Tính chất 95.



Bài tập 111. Cho tam giác ABC nhọn. Đường phân giác trong BD: $x + y - 2 = 0$. Đường trung tuyến BN: $4x + 5y - 9 = 0$. Điểm $M(2; \frac{1}{2})$ nằm trên cạnh BC. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $R = \frac{15}{6}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Chuyên Hùng Vương lần 1)

Gợi ý!

Tìm tọa độ điểm B, viết phương trình các cạnh BC, BA.

Từ đó suy ra dạng tham số cho cạnh AC.

Sử dụng $\frac{b}{\sin B} = 2R$ là xong.

Tính chất 96.

Bài tập 112. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi $H(\frac{22}{5}; \frac{11}{5})$ và $K(\frac{4}{5}; \frac{23}{5})$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên các cạnh AC, AB. Trung tuyến CM: $12x + 5y - 43 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết $x_C < 2$.

(Yên Phong số I-Bắc Ninh lần 1)

Tính chất 97.

Bài tập 113. Cho tam giác ABC vuông cân tại $A(2; -1)$. Gọi E là trung điểm AC. Đường thẳng qua A vuông góc với BE cắt BC tại D(3; 2). Biết $E \in x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

(Chuyên Lê Quý Đôn lần 1)

Tính chất 98.

Bài tập 114. Cho hình vuông ABCD, điểm $M(5;7)$ nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BC tại B và cắt BD tại $N(6;2)$. Điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết $x_A < 2, x_C \in \mathbb{Z}$.

(Chu Văn An-Phú Yên lần 1)

Tính chất 99.

Bài tập 115. cho hai đường thẳng $d_1: x - y + 1 = 0$ và $d_2: y - 6 = 0$. Các đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính bằng nhau, có tâm cùng thuộc đường thẳng (d_1) và chúng cắt nhau tại hai điểm $A(1;6), B$. Đường thẳng (d_2) cắt $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại hai điểm C, D (khác A) sao cho diện tích của tam giác BCD bằng 24. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác BCD.

(Nguyễn Khuyến - HCM lần 1)

Tính chất 100.

Bài tập 116. Cho hình vuông ABCD có tâm I các điểm $G(\frac{10}{3}; \frac{11}{3}), E(3; -\frac{2}{3})$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABI, ACD. Biết $y_A \in \mathbb{Z}$, tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

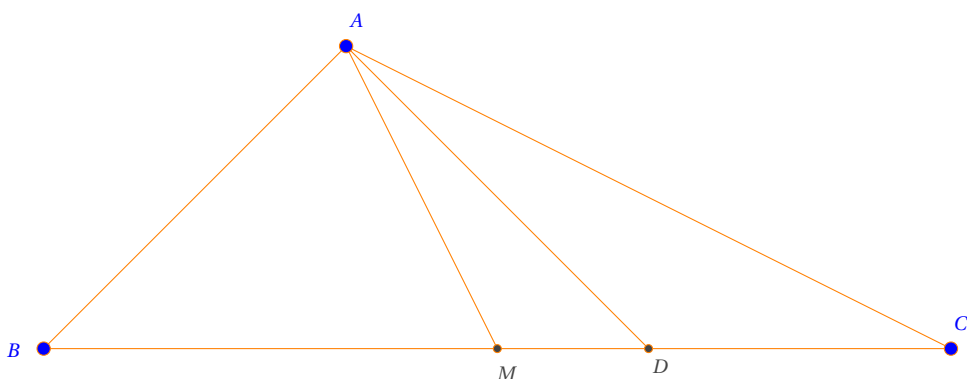
(Thanh Chương I-Nghệ An lần 1)

Tính chất 101.

Bài tập 117. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho $GD = GC$. Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: 2x + 3y - 13 = 0$ và tam giác BDG nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ âm và tọa độ điểm G là số nguyên.

(Phù Cừ lần 1)

Tính chất 102. AB là phân giác ngoài góc A của tam giác MAC hay $AB \perp AD$.



Ta có AD là phân giác trong góc A của tam giác MAC nên $\frac{AM}{AC} = \frac{DM}{DC} = \frac{1}{2} = \frac{BM}{BC}$ do đó AB là phân giác ngoài góc A của tam giác MAC hay $AB \perp AD$.

Bài tập 118. Cho tam giác ABC có $B(4; -3)$, M là trung điểm cạnh BC, D là giao điểm của đường phân giác trong góc $\angle MAC$ với cạnh BC. Biết $CB = 3CD$, đường thẳng AD: $3x - 2y - 5 = 0$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{39}{4}$ và $x_C > 0$. Tìm tọa độ A, C.

(THTT số 5)

Đường thẳng AB qua B vuông góc AD nên có phương trình AB: $2x + 3y + 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

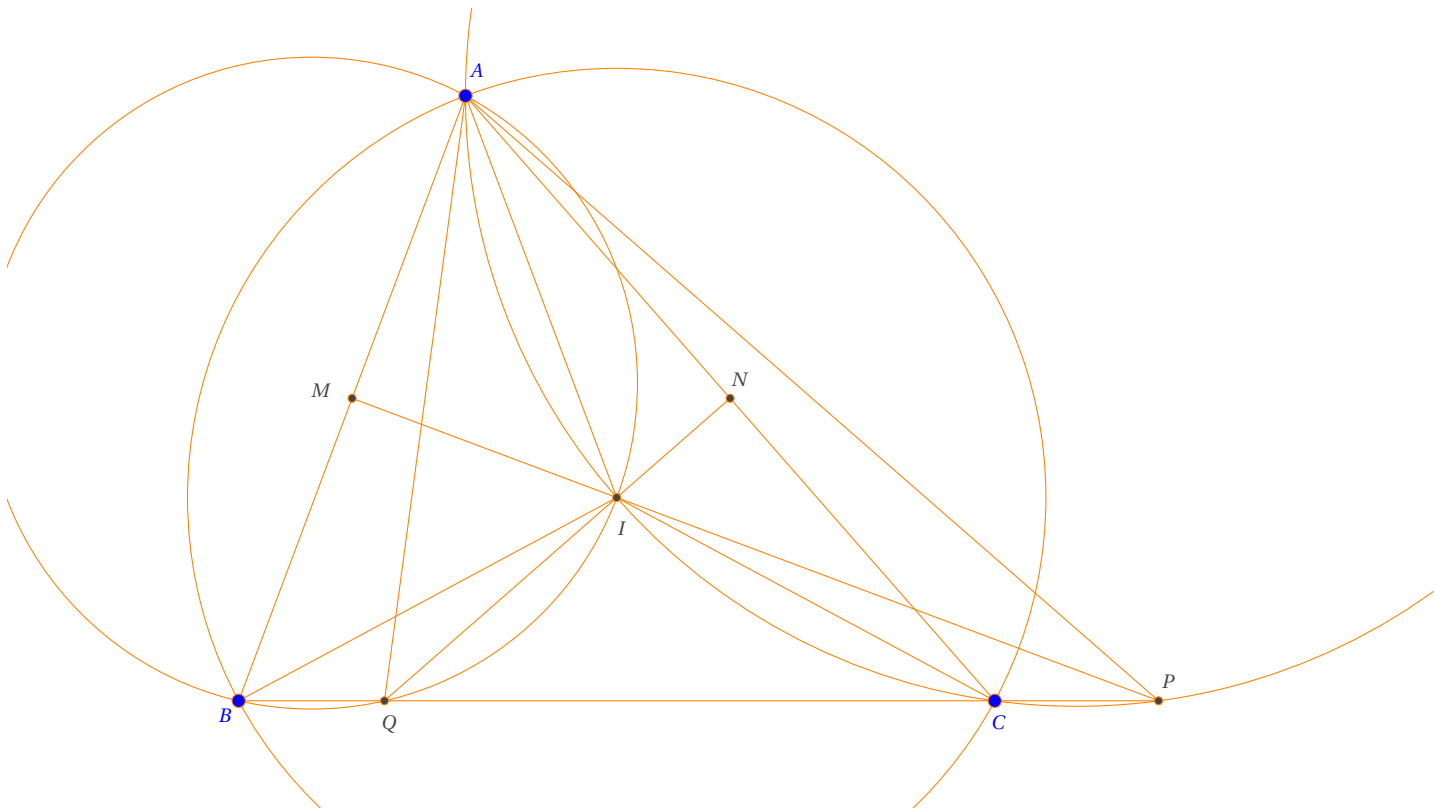
$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1).$$

Gọi $D(d; \frac{3d-5}{2}) \in 3x - 2y - 5 = 0$. Ta có $S_{BAD} = \frac{2}{3} S_{BAC} = \frac{13}{2}$. Suy ra $AD = \sqrt{13}$.

Giải ra ta được $\begin{cases} D(3; 2) \\ D(-1; -4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(\frac{5}{2}; \frac{9}{2}) \\ C(-\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}) \end{cases}$ loại vì $x_C > 0$.

Tính chất 103. 1. Tứ giác AIQB, AICP nội tiếp.

2. $\angle QAI = \angle IAP$ hay AI là phân giác góc $\angle QAP$.



1. Ta có $\angle AIB = 2\angle C = \angle QCA + \angle QAC = \angle AQB$ do đó tứ giác AIQB nội tiếp. Tương tự tứ giác AICP nội tiếp.
2. Theo 1. ta có $\angle QAI = \angle QBI = \angle QCI = \angle IAP$ hay AI là phân giác góc $\angle QAP$.

Bài tập 119. Cho tam giác ABC có $A(6;3)$ nội tiếp đường tròn tâm I thuộc đường thẳng $x - y - 6 = 0$. Gọi M, N là trung điểm AB, AC. Các đường thẳng IM, IN cắt đường thẳng BC tại P(12;0) và Q. Biết đường thẳng AQ đi qua H(8;4), tìm tọa độ B, C.

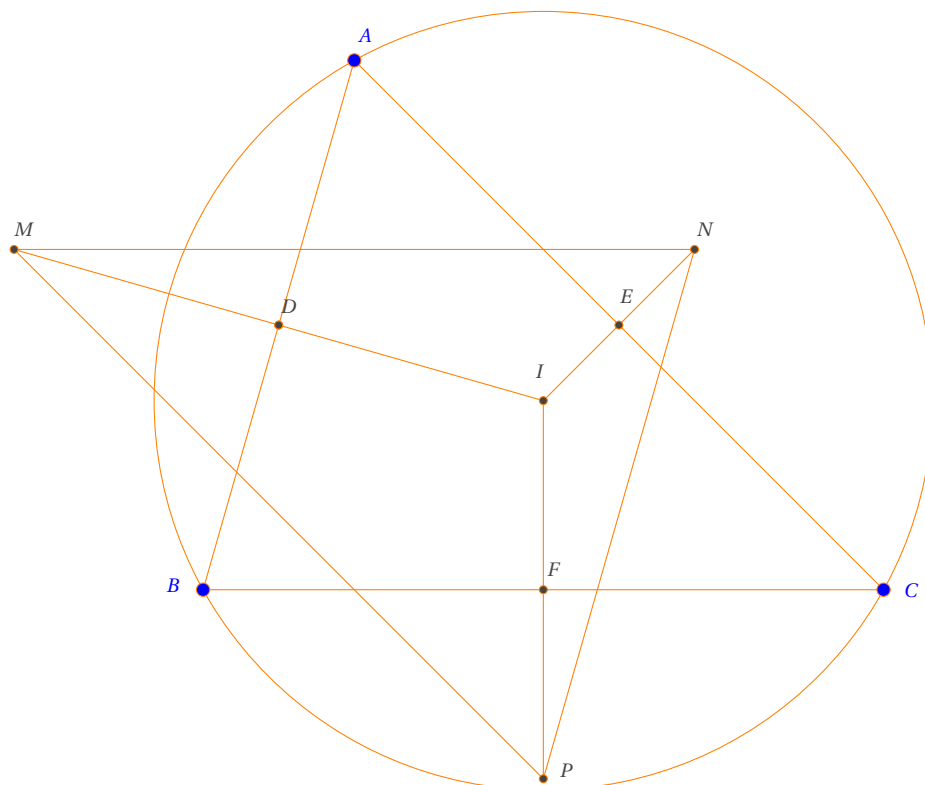
Đường thẳng AH: $x - 2y = 0$. Ta có AI là phân giác trong $\angle QAP$ nên AI: $y - 3 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(9;3)$. Điểm B đối xứng với A qua IP nên $B(9;6)$. Đường thẳng BC đi qua P, B nên có phương trình BC: $2x + y - 24 = 0$. Tọa độ Q là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{48}{5}; \frac{24}{5}\right).$$

Điểm C đối xứng với A qua QI nên $C\left(\frac{57}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Tính chất 104. 1. AB, AC, BC là trung trực của MI, NI, PI.

2. I là trực tâm tam giác MNP.



1. Để thấy AB, AC, BC là trung trực của MI, NI, PI .
2. Chú ý EF là đường trung bình của tam giác INP và tam giác ABC nên $NP \parallel AB$ do đó $MI \perp NP$. Tương tự suy ra I là trực tâm tam giác MNP .

Bài tập 120. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I . Biết rằng các điểm $M(\frac{21}{2}; \frac{3}{2}), N(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}), P(\frac{15}{2}; -\frac{9}{2})$ lần lượt là các điểm đối xứng của I qua trung điểm các cạnh AB, AC và BC . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

(Vted lần 11)

Đường thẳng $MI: x - 3y - 6 = 0, NI: 6x + 12y - 51 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ 6x + 12y - 51 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(\frac{15}{2}; \frac{1}{2}).$$
 Đường thẳng AB là trung trực MI nên có phương trình $AB: 3x + y - 28 = 0$. Đường thẳng AC là trung trực NI nên có phương trình $AC: 2x - y - 12 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x + y - 28 = 0 \\ 2x - y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8; 4). \text{ Tương tự } B(10; -2), C(5; -2).$$

Tính chất 105.

Bài tập 121. Cho hình vuông $ABCD$ có $C(3; -3)$ và $A \in 3x + y - 2$. Gọi M là trung điểm BC , đường thẳng $DM: x - y - 2 = 0$. Xác định tọa độ A, B, D .

(Ngô Gia Tự- Bắc Ninh lần 2)

Tính chất 106.

Bài tập 122. Cho hình thang vuông ABCD, vuông tại A(-3;1) và vuông tại B, có $BC = 2AD$, $H(\frac{3}{5}; \frac{9}{5})$ là hình chiếu vuông góc của B lên CD. Biết trung điểm M của BC thuộc đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$, tìm tọa độ B, D.

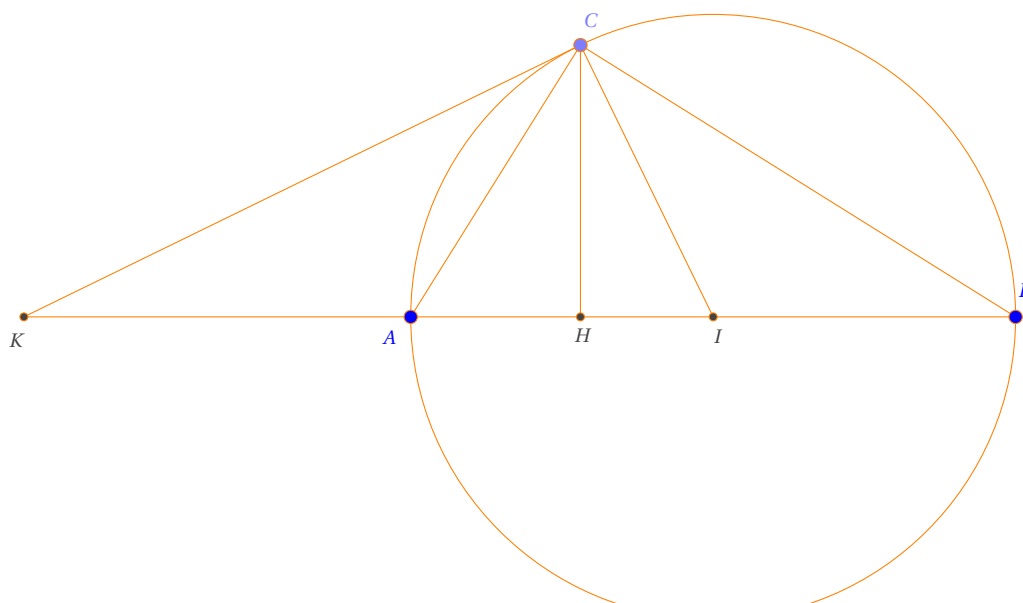
(Kim Sơn A-Ninh Bình lần 1)

Tính chất 107.

Bài tập 123. Cho $A(-1; -1)$ và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$, B, C là hai điểm phân biệt $\neq A$ thuộc (C). Viết phương trình đường thẳng BC biết $K(1;1)$ là tâm nội tiếp tam giác ABC.

(Trần Khát Chân-Thanh Hóa lần 1)

Tính chất 108.



Bài tập 124. Trong mặt phẳng tọa độ cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp đường tròn (C) tâm I bán kính $R = 5$. Tiếp tuyến của (C) tại C cắt tia đối của tia AB tại $K(-4; \frac{26}{3})$. Biết $S_{ABC} = 20$ và $A \in x + y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C).

(Moon lần 10)

$S_{ABC} = 20$ suy ra $CH \cdot AB = 2 \cdot 20$ suy ra $CH = 4$. Tam giác CHI vuông tại H nên suy ra $HI = 3$, $AH = 2$ (H nằm giữa A, I). Ta cần tính AK là xong bài toán.

Cách 1: Đặt $AK = a$. Do đó $CK^2 = KI^2 - CI^2 = (a+5)^2 - 5^2 = a^2 + 10a$. Tam giác KCI vuông tại C nên $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CI^2} + \frac{1}{CK^2}$ suy ra $a = \frac{10}{3}$.

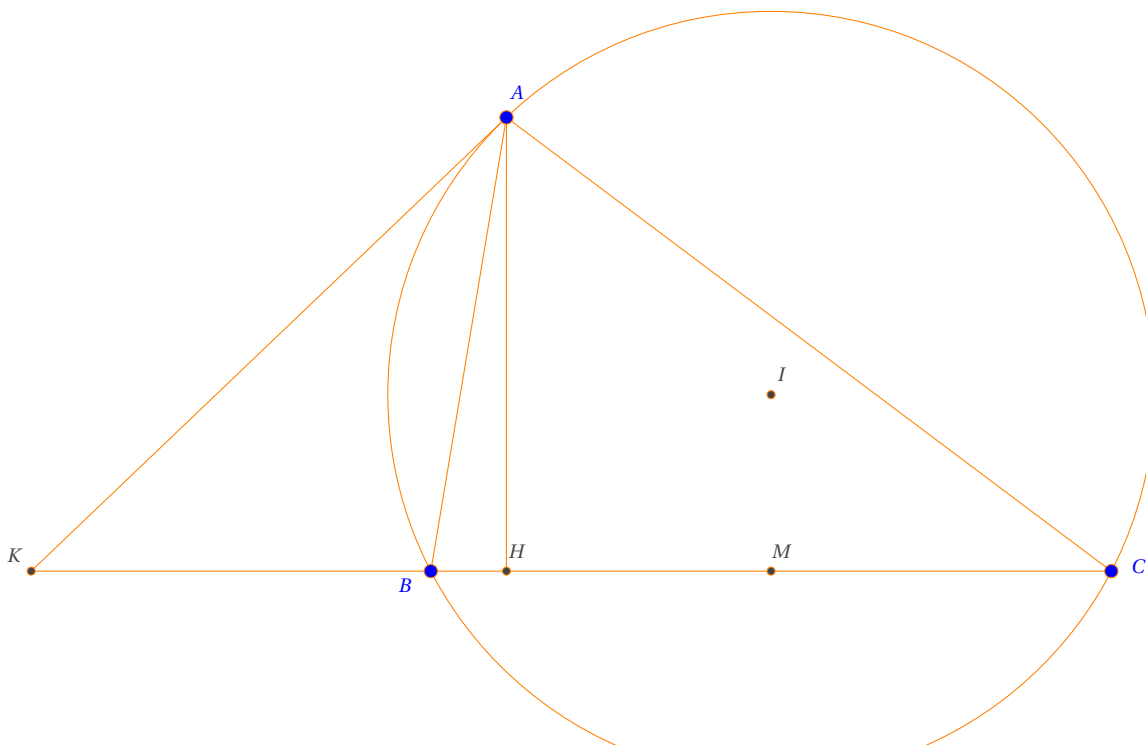
Cách 2: Chú ý CA là phân giác của $\angle KCH$. Do đó $\frac{CK}{AK} = \frac{CH}{AH} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$. Mà $KA \cdot KB = KC^2$ suy ra $KB = 4KA$ suy ra $KA = \frac{10}{3}$.

Cách 3: Chú ý $(K, H, A, B) = -1$ nên theo công thức Maclaurin ta có $IH \cdot IK = IA^2$ suy ra $IK = \frac{IA^2}{IH} = \frac{25}{3}$ suy ra $AK = KI - AI = \frac{10}{3}$.

Trở lại bài toán gọi $A(b; 4-b)$. Ta có $KA = \frac{10}{3}$ suy ra $\begin{cases} A(-2; 6) \\ A(-\frac{20}{3}; \frac{32}{3}) \end{cases}$. Chú ý $\vec{KI} = \frac{5}{2}\vec{KA}$. Suy ra

$$\begin{cases} I(1; 2) \\ I(\frac{32}{3}; \frac{41}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ (C): (x+\frac{20}{3})^2 + (y-\frac{32}{3})^2 = 25 \end{cases}.$$

Tính chất 109.



Bài tập 125. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M(\frac{15}{2}; -2)$ là trung điểm cạnh BC. Gọi d là tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Δ là đường cao kẻ từ đỉnh A. Biết rằng $d: x + 7y - 36 = 0, \Delta: x - 8 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C.
(Vted lần 12)

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 7y - 36 = 0 \\ x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8; 4).$

Đường thẳng AI đi qua A và vuông góc với d nên có phương trình $AI: 7x - y - 52 = 0$. Đường thẳng MI đi qua M và song song với đường cao Δ nên $MI: x - \frac{15}{2} = 0$. Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc Δ nên có phương trình $BC: y + 2 = 0$. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

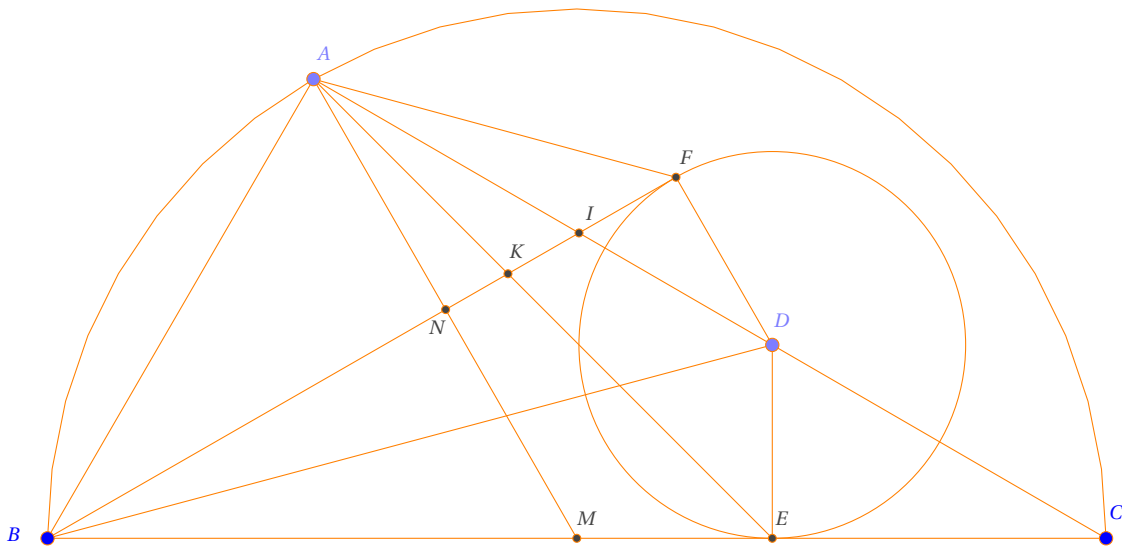
$$\begin{cases} 7x - y - 52 = 0 \\ x - \frac{15}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow I(\frac{15}{2}; \frac{1}{2}).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I, bán kính IA nên có phương trình (ABC) : $(x - \frac{15}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ (x - \frac{15}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(5; -2), C(10; -2) \\ B(10; -2), C(5; -2) \end{cases}.$$

Tính chất 110. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm M. D là điểm bất kỳ trên cạnh AC, đường tròn tâm D tiếp xúc BC tại E sao cho E nằm giữa M và C. Kẻ tiếp tuyến thứ hai BF của đường tròn tâm D. Khi đó

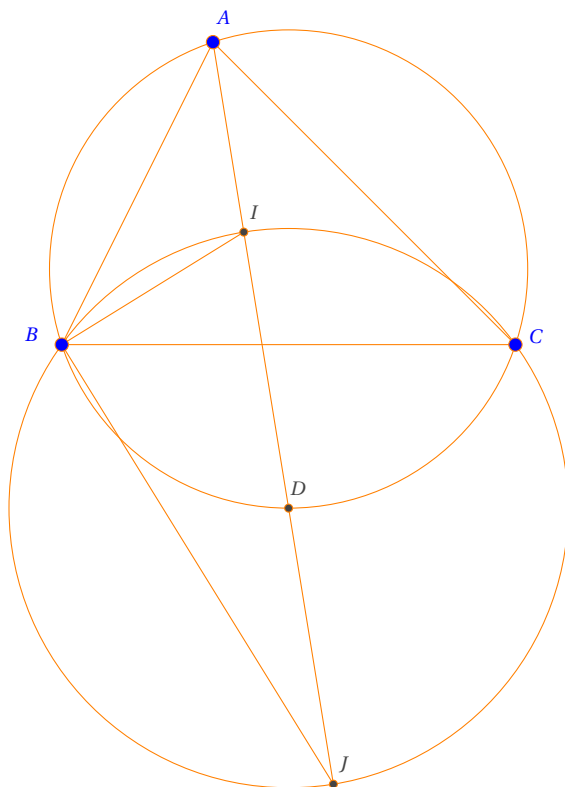
1. A, B, E, F, D nằm trên một đường tròn.
2. AC là phân giác trong góc $\angle EAF$.
3. Giả sử AM cắt BF tại N, tam giác ANF cân tại N.



1. Để thấy A, B, E, F, D nằm trên một đường tròn đường kính BD.
2. Ta có $\angle FAD = \angle FBD = \angle EBD = \angle EAD$ hay AC là phân giác trong góc $\angle EAF$.
3. Chú ý tam giác AMC cân tại M nên $\angle MAC = \angle MCA$. Suy ra $\angle FAN = \angle MAC + \angle DAF = \angle MCD + \angle DBC = \angle BDA = \angle BFA$ do đó tam giác ANF cân tại N.

Bài tập 126.

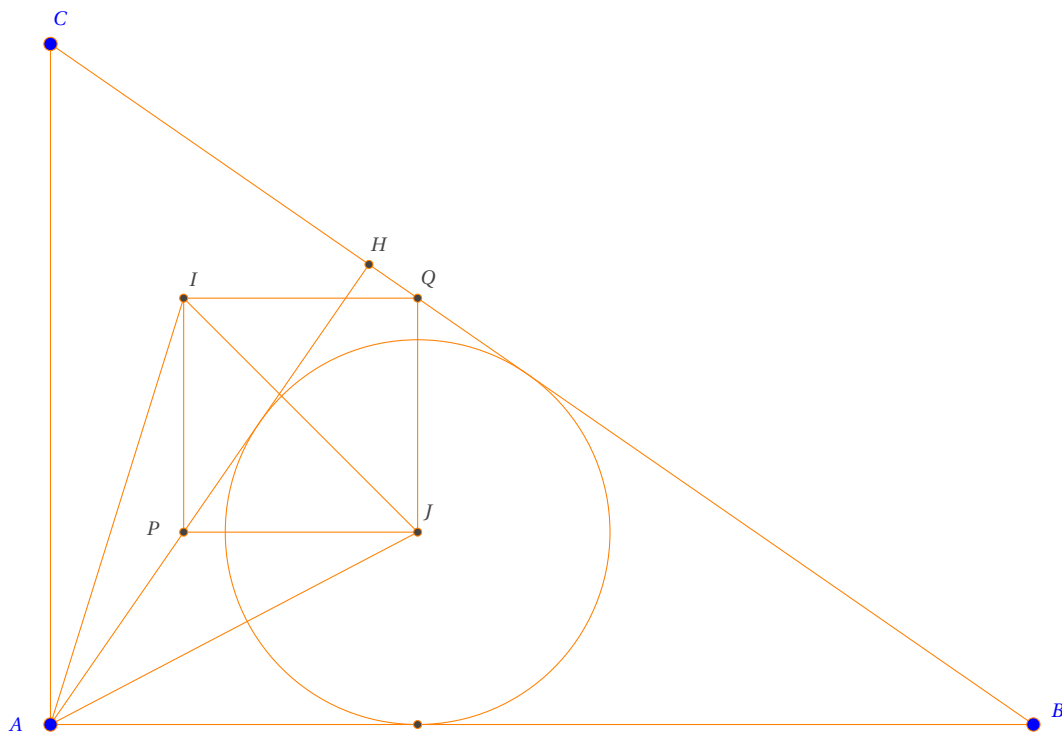
Tính chất 111.



Bài tập 127. Cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-1;0)$, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là $J(2;-6)$.
Tìm tọa độ điểm C .

Tính chất 112. Dụng hình chữ nhật $IPJQ$.

1. P nằm trên đường cao AH .
2. Q nằm trên cạnh BC .
3. P là tâm ngoại tiếp tam giác AIJ .



Bài tập 128. Cho tam giác ABC vuông tại A. H là hình chiếu của A trên BC. Tam giác ABH ngoại tiếp (C) : $(x - \frac{16}{5})^2 + (y - \frac{33}{5})^2 = \frac{36}{25}$. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACH là $I(\frac{26}{5}; \frac{23}{5})$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Ta có tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB là $J(\frac{16}{5}; \frac{33}{5})$.

Dựng hình vuông IPJQ, khi đó ta có $\begin{cases} P(\frac{26}{5}; \frac{23}{5}), Q(\frac{16}{5}; \frac{23}{5}) \\ P(\frac{16}{5}; \frac{23}{5}), Q(\frac{26}{5}; \frac{33}{5}) \end{cases}$.

- $P(\frac{26}{5}; \frac{23}{5}), Q(\frac{16}{5}; \frac{23}{5})$.

Đường cao AH là đường thẳng qua P, tiếp xúc với (J) và cắt đoạn IJ nên AH : $15x - 20y + 54 = 0$. Chú ý P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ, và A, P cùng phía đối với IJ nên giải ra ta được $A(\frac{34}{5}; \frac{39}{5})$. Đường thẳng AB đi qua A và tiếp xúc với (J) nên

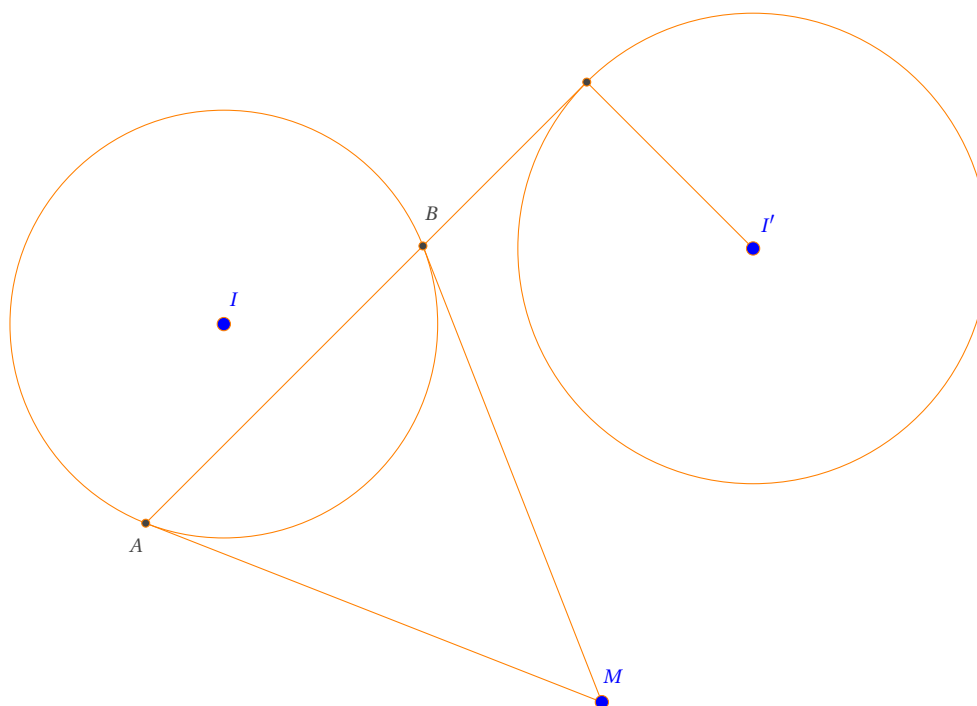
$$\begin{cases} AB : y = \frac{39}{5} \\ AB : 15x - 20y + 54 = 0 \quad \text{loại vì trùng AH} \end{cases}$$

Đường thẳng BC đi qua Q và vuông góc với AH nên BC : $20x + 15y - 133 = 0$. Đường thẳng AC đi qua A vuông góc AB nên có phương trình AC : $x - \frac{34}{5} = 0$. Giải hệ ta được tọa độ $B(\frac{4}{5}; \frac{39}{5}), C(\frac{34}{5}; -\frac{1}{5})$.

- $P(\frac{16}{5}; \frac{23}{5}), Q(\frac{26}{5}; \frac{33}{5})$

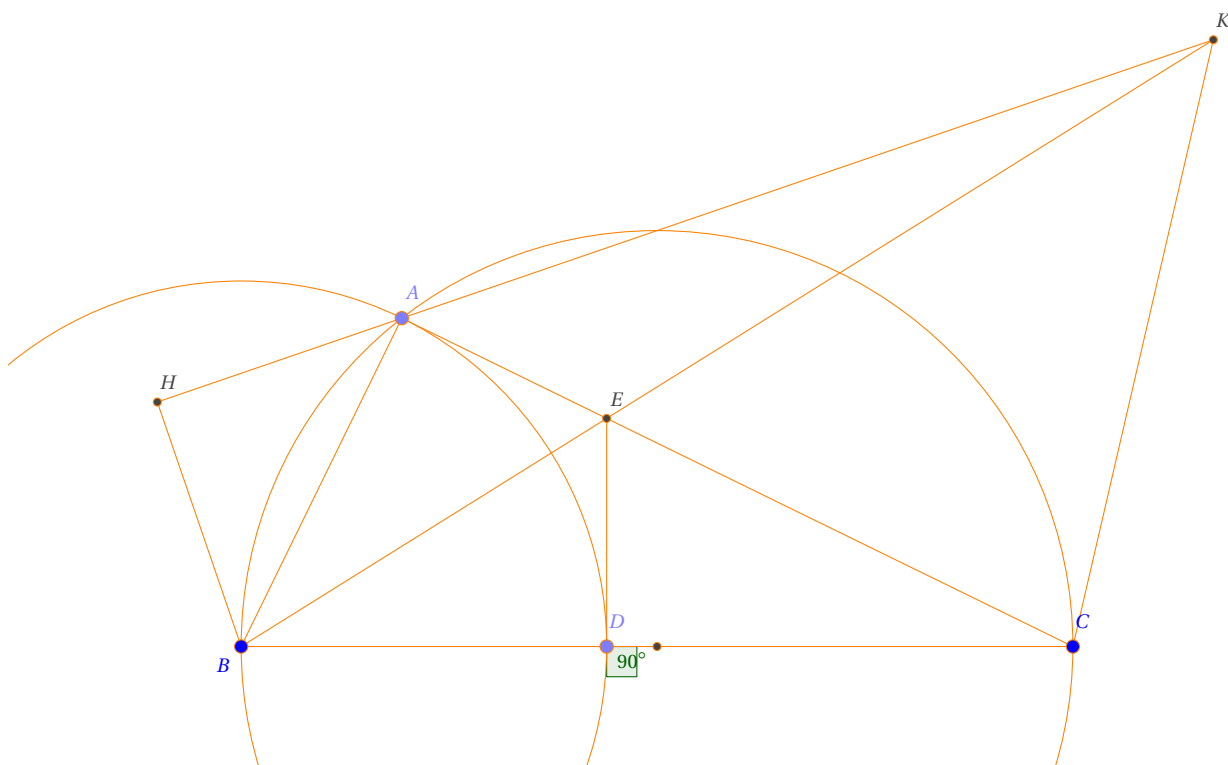
Hoàn toàn tương tự ta giải ra được $A(2; 3), B(2; 9), C(10; 3)$.

Tính chất 113.



Bài tập 129. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 4$.
 Tìm điểm M thuộc Ox sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) tại hai tiếp điểm phân
 biệt A, B thỏa đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn $(C_1) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$.
 (Chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An lần 1)

Tính chất 114.



Bài tập 130. Cho tam giác ABC vuông tại A có $B(-2;2)$, đường tròn tâm B bán kính BA cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E. Đường thẳng BE cắt phân giác ngoài góc C tại K. Tìm tọa độ điểm A, biết $AK: x - 5y + 25 = 0$.

Chú ý K là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\angle B$ nên AK là phân giác ngoài góc $\angle A$. Hạ $BH \perp AK$ khi đó $\angle HAB = 45^\circ$ hay tam giác HAB vuông cân tại H.

Tính chất 115.

Bài tập 131. Cho hình vuông ABCD có đỉnh $C \in d: x + 2y - 6 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết hình chiếu vuông góc của M lên AB, AD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

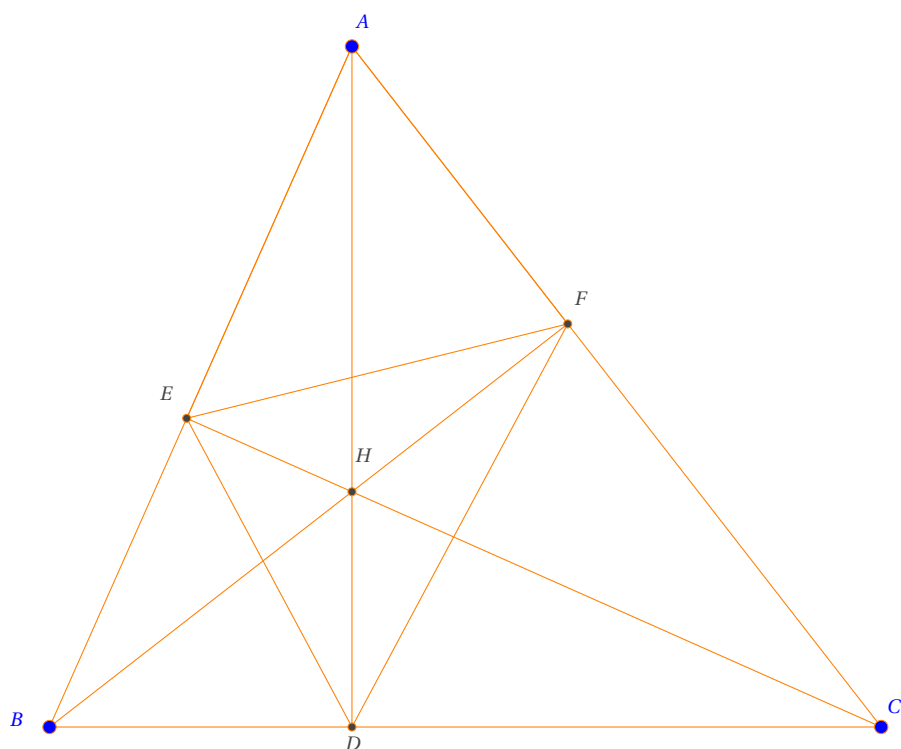
(Bình Minh-Ninh Bình lần 1)

Tính chất 116.

Bài tập 132. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD. E, F là trung điểm của CD, BH. Biết $A(1;1)$, $EF: 3x - y - 10 = 0$, $y_E < 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D

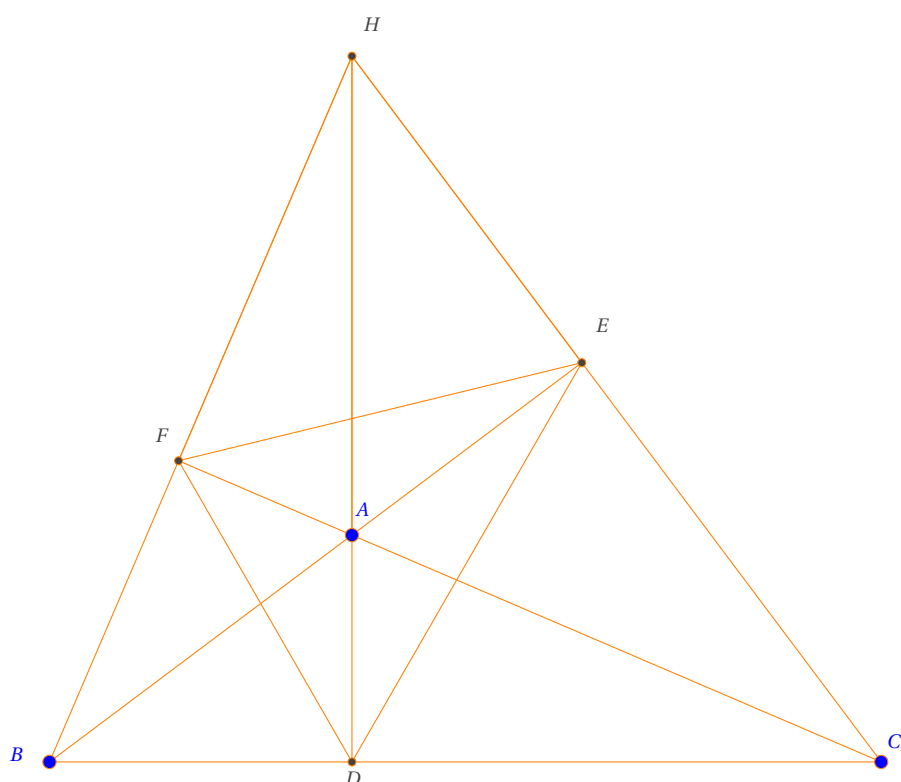
(Chuyên Vĩnh Phúc, khảo sát lớp 11 lần 3)

Bài tập 133. Cho tam giác ABC có $D(8;-2)$, $E(6;0)$; $F(\frac{19}{2}; -\frac{1}{2})$ tương ứng là chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

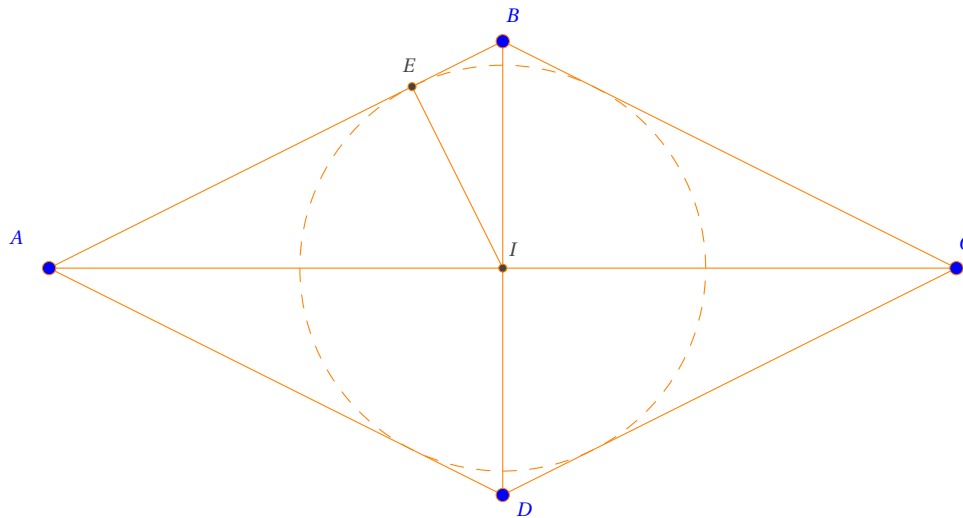


Sai lầm chết người đầu tiên là gọi H là trực tâm tam giác ABC , khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Xin thưa điều này chỉ đúng khi tam giác ABC nhọn. Còn khi tam giác ABC tù, chẳng hạn $\angle A$ tù thì khi đó A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và H là tâm bàng tiếp $\angle D$ của tam giác DEF (xem hình).

Vậy gọi H là trực tâm tam giác ABC , khi đó H có thể là tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp của tam giác DEF . Do đó bài toán có 4 nghiệm hình.



Tính chất 117. 1. $EB = \frac{1}{2}EI = \frac{1}{4}EA$



Bài tập 134. Cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$. Biết $AC = 2BD$ và điểm $B \in 2x - y - 5 = 0$. Viết phương trình cạnh AB của hình thoi biết B có hoành độ dương.

Đường tròn có tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Chú ý $IB = \frac{\sqrt{5}}{2}IE = 5$. Suy ra $\begin{cases} B(4; 3) \\ B(-\frac{2}{5}; -\frac{29}{5}) \end{cases}$ loại.

Đường thẳng $IB: 4x - 3y - 7 = 0$.

Cách 1. Đường tròn tâm B bán kính $BE = \sqrt{5}$ có phương trình $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$. Đường tròn đường kính BI có phương trình (BI) : $(x-\frac{5}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ (x-\frac{5}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(5; 1) \\ E(\frac{9}{5}; \frac{17}{5}) \end{cases} . \text{ Do đó đường thẳng AB đi qua B, E có phương trình tương}$$

ứng là $\begin{cases} AB: 2x + y - 11 = 0 \\ AB: 2x + 11y - 41 = 0 \end{cases} .$

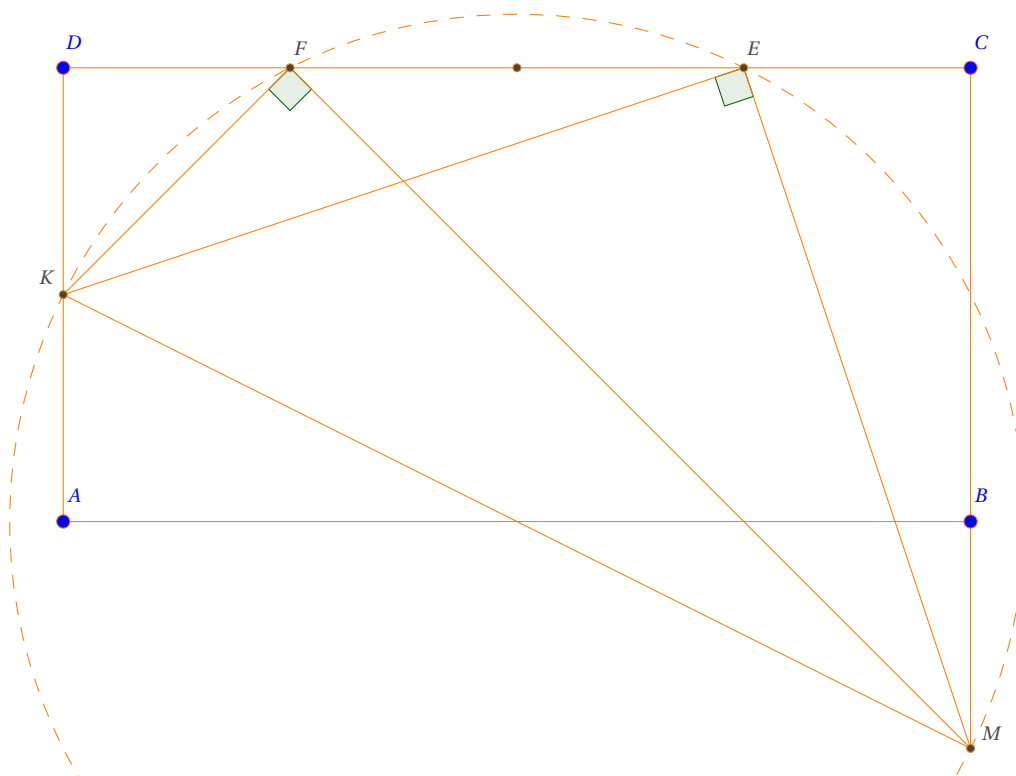
cách 2. Đường thẳng AB đi qua B và tạo đường thẳng BI một góc α thỏa $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$\begin{cases} AB: 2x + y - 11 = 0 \\ AB: 2x + 11y - 41 = 0 \end{cases} .$$

Tính chất 118. 1. K, F, E, M thuộc đường tròn đường kính KM .

2. $FM = 3FK$.

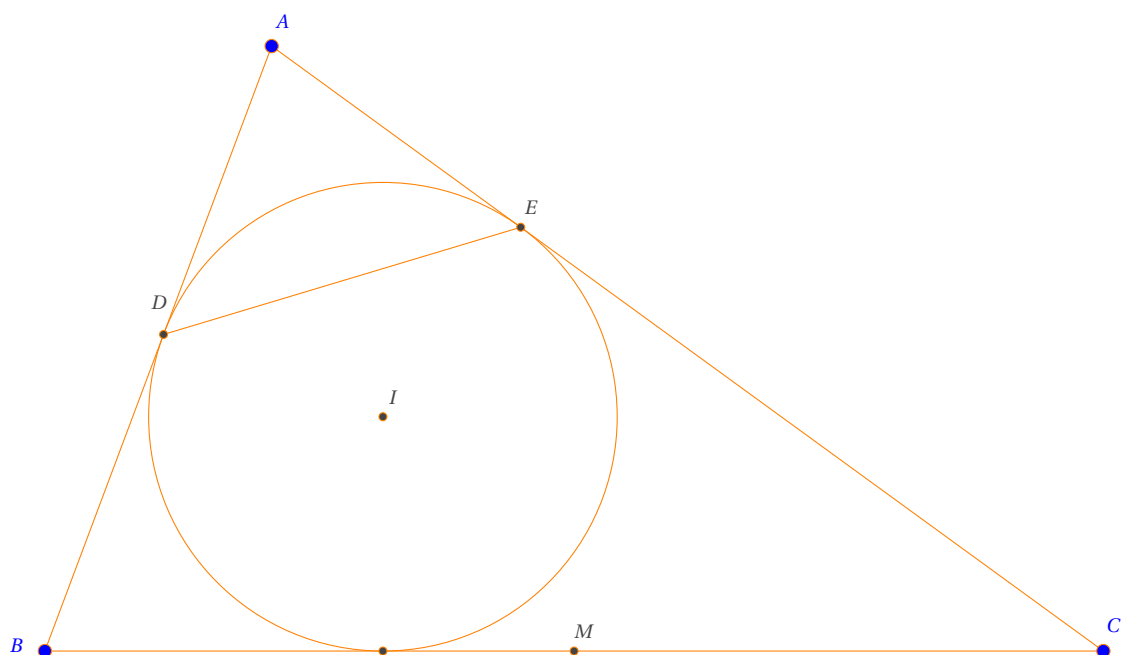
3. Tam giác KDF, KEM vuông cân.



Bài tập 135. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi $K(-\frac{5}{2}; -1)$ là trung điểm AD . Trên cạnh CD lấy hai điểm E, F sao cho $DF = CE = \frac{1}{4}CD$. Đường thẳng vuông góc với EK tại E cắt đường thẳng BC tại M , biết $MF: 10x - 6y - 15 = 0, x_D < -1$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật $ABCD$.

(Nguyễn Thị Minh Khai lần 1)

Tính chất 119.

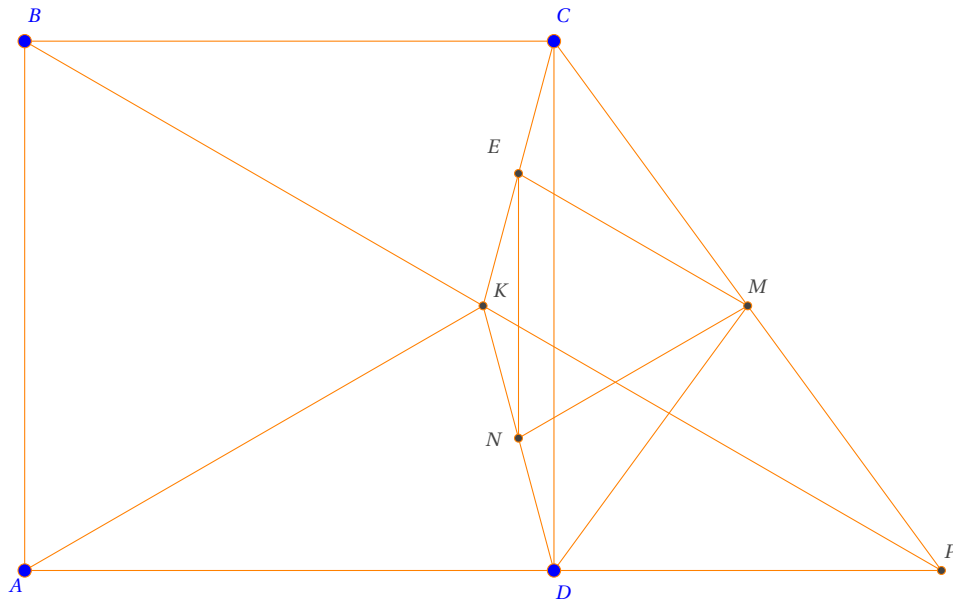


Bài tập 136. Cho tam giác ABC , đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại D, E . $M(1\frac{11}{2})$ là trung điểm BC . Các đường thẳng $DE: x - 7y - 35 = 0$, $AB: 4x - 3y - 65 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết $x_B > 12$.

Tính chất 120. 1. tam giác ABK, MNE đều.

2. tam giác KMN cân tại K và có $\angle KMN = 30^\circ$.

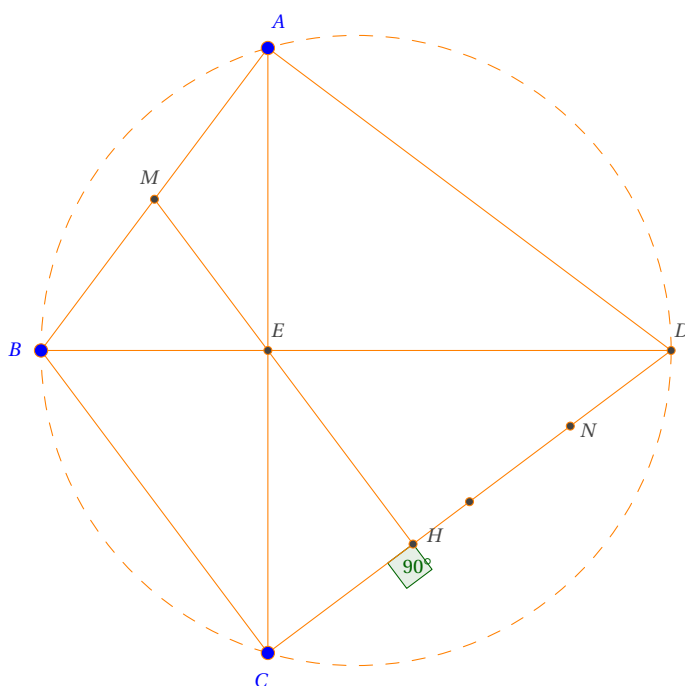
3. N là trung điểm KD .



Bài tập 137. Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối DA lấy điểm P sao cho $\angle ABP = 60^\circ$. Gọi $K, M(1;2), N(1;1), E$ lần lượt là trung điểm của BP, CP, DK, CK . Tìm tọa độ điểm D .

(Kim Sơn A lần 1)

Tính chất 121. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $AC \perp BD$ tại E . M là trung điểm của AB . Khi đó $ME \perp CD$.



Kéo dài ME cắt CD tại H. Ta có $\angle CEH = \angle MEA = \angle EAB$ và $\angle ECH = \angle ABE$. Mà $\angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$ nên $\angle CEH + \angle ECH = 90^\circ$ hay $ME \perp CD$.

Bài tập 138. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (T), biết $AC \perp BD$ tại $E(1; -1)$. Gọi $M(\frac{5}{2}; -3)$ là trung điểm của AB và $N(0; \frac{3}{4})$ là điểm thuộc cạnh DC sao cho $CN = 3DN$. Viết phương trình đường tròn (T), biết $x_C > 0$.

(Hocmai lần 8)

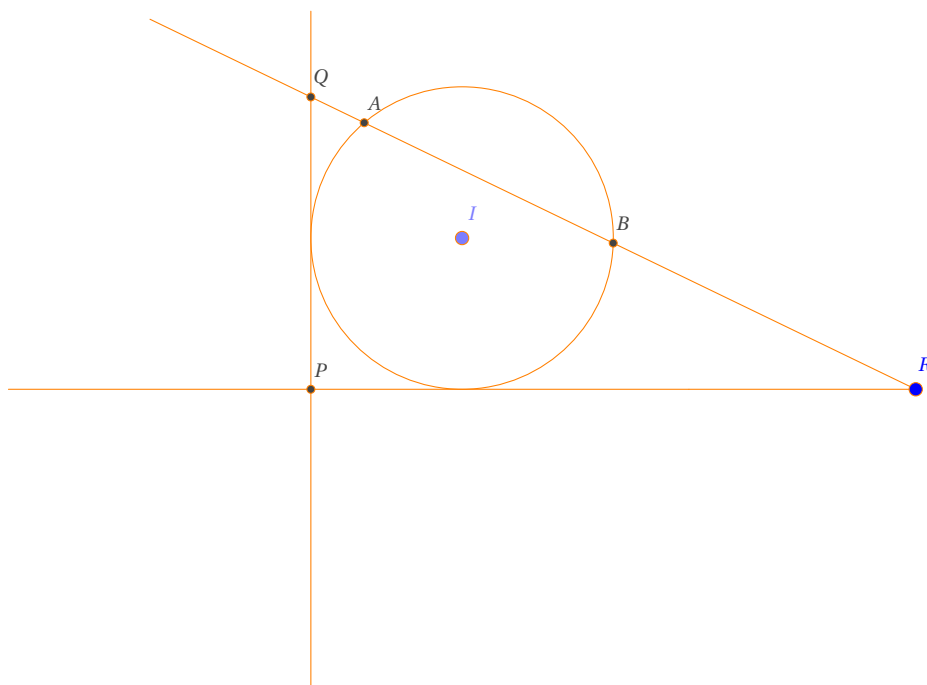
Đường thẳng CD đi qua N và vuông góc ME nên $CD: 3x - 4y + 3 = 0$.

Cách 1: Pha thêm đại số Gọi $C(c; \frac{3c+3}{4})$ vì $\overrightarrow{NC} = -3\overrightarrow{ND}$ nên $D(-\frac{c}{4}; \frac{-c+3}{4})$. Tam giác CED vuông tại E khi đó $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$ giải ra suy ra $C(3; 3), D(-1; 0)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB có tâm M, bán kính ME nên có phương trình (AEB): $(x - \frac{5}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{25}{4}$. Đường thẳng CE:

$2x - y - 3 = 0$, đường thẳng DE: $x + 2y + 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ (x - \frac{5}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$A(0; -3)$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ (x - \frac{5}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow B(5; -3)$.

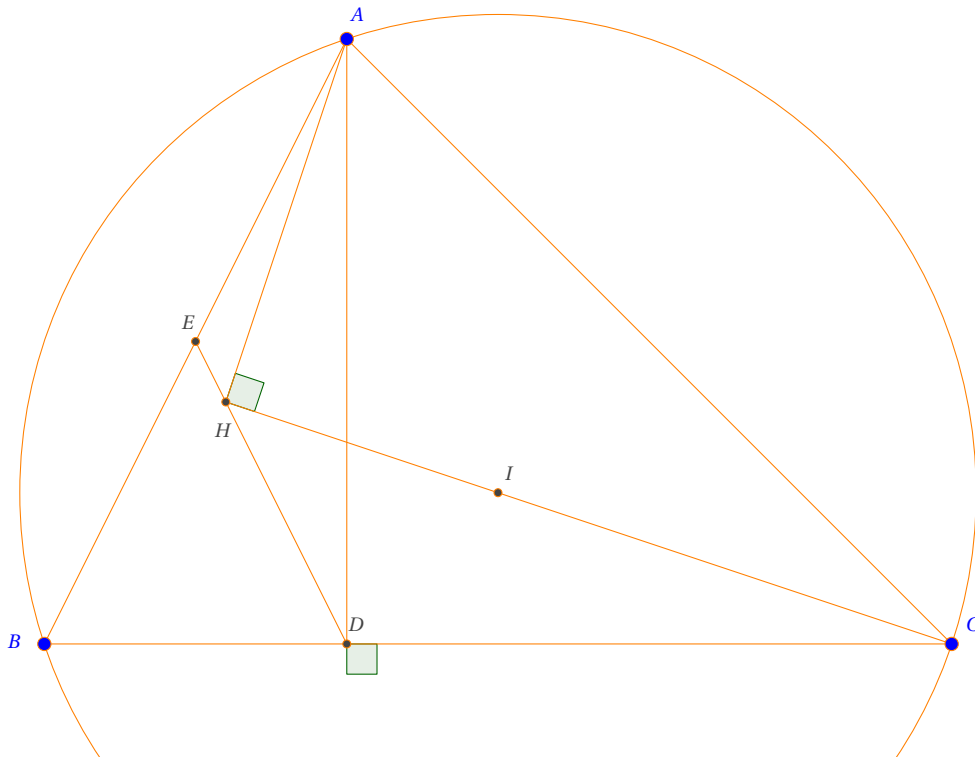
Tính chất 122.



Bài tập 139. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x - 4y - 8 = 0$, $d_2: 4x + 3y - 19 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng d_1, d_2 , đồng thời cắt đường thẳng $\Delta: 2x - y - 2 = 0$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$.

(Chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Tính chất 123. Kéo dài EH cắt BC tại D, khi đó $AD \perp BC$.



Xem lại tính chất 14 trong sách tập 1.

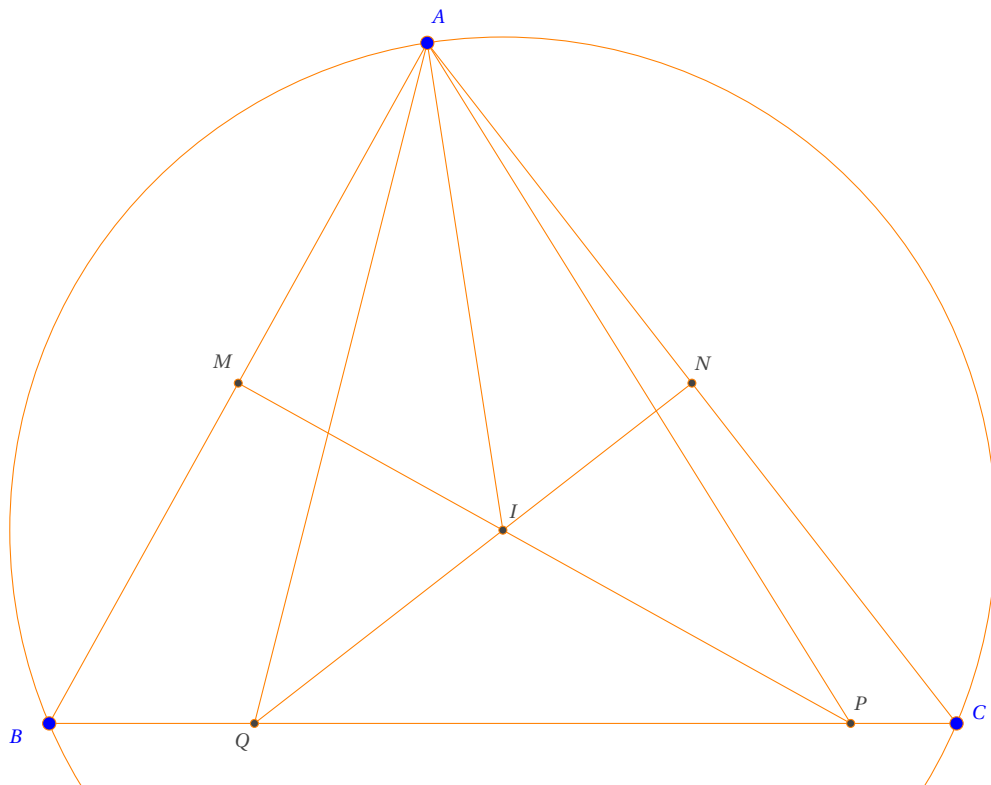
Bài tập 140. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Điểm $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm cạnh AB và $H\left(-\frac{4}{5}; \frac{22}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng CI, biết đường thẳng BC: $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Bảo Thắng lần 1)

Đường thẳng EH đi qua E, H nên có phương trình $EH: 3x + y - 2 = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 5)$. Đường thẳng AD đi qua D và vuông góc BC nên $AD: x - y + 6 = 0$.

Gọi $A(a; a + 6)$, tam giác ABD vuông tại D nên $ED = EA$ suy ra $\begin{cases} A(-4; 2) \\ A(-1; 5) \end{cases}$ loại. Ta có E là trung điểm AB suy ra $B(5; -1)$. Đường thẳng HC đi qua H vuông góc với AH nên có phương trình HC: $4x + 3y - 10 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-2; 6)$.

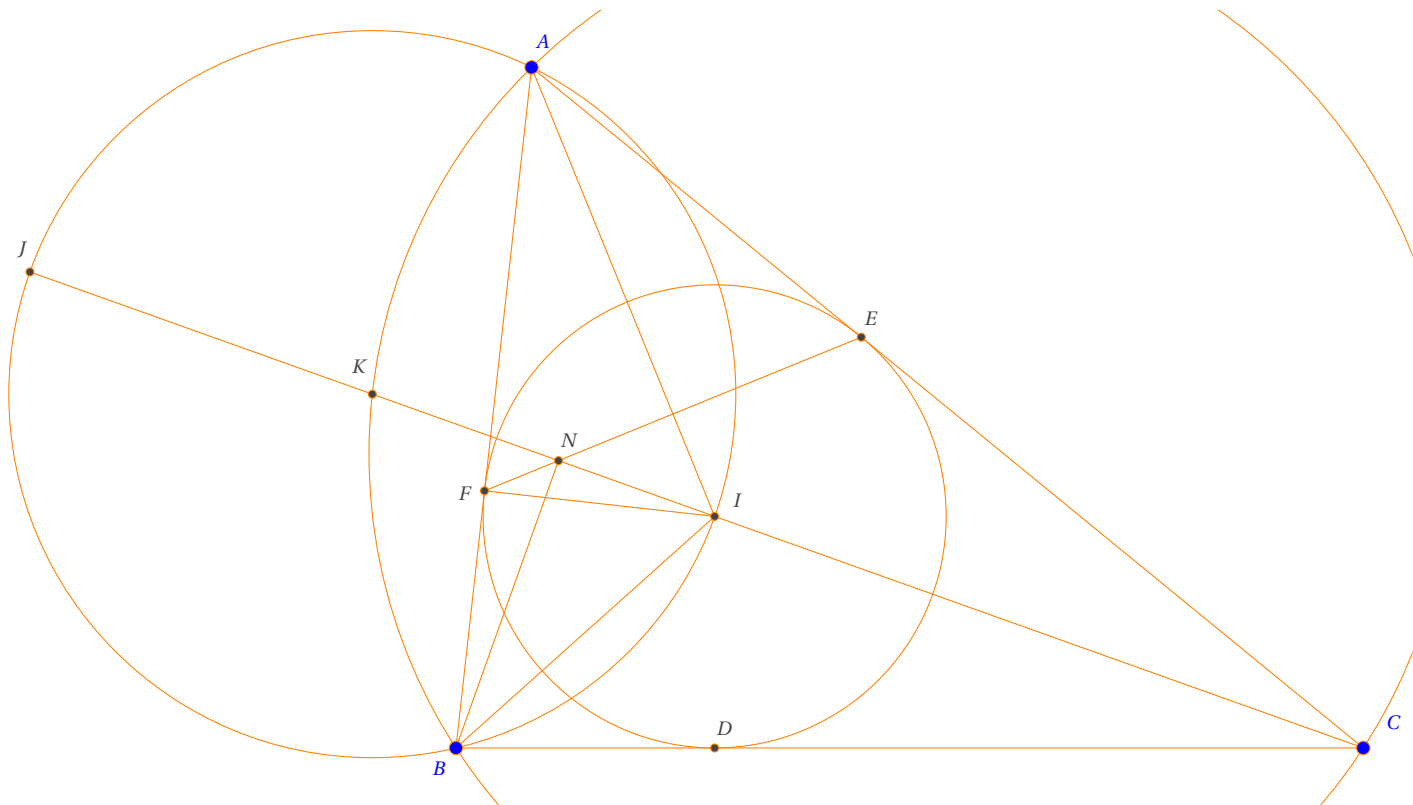
Tính chất 124. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M, N là trung điểm AB, AC. Đường thẳng IM, IN cắt đường thẳng BC tại P, Q. Khi đó AI là phân giác góc $\angle PAQ$.



Chú ý IP, IQ lần lượt là phân giác của $\angle APQ$ và $\angle AQP$, do đó I là tâm nội tiếp tam giác APQ . Suy ra AI là phân giác $\angle PAQ$.

Bài tập 141. Cho tam giác ABC có $A(6;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I \in x - y - 6 = 0$. Gọi M, N là trung điểm AB, AC . Đường thẳng IM, IN cắt đường thẳng BC tại $P(12;0), Q$. Tìm tọa độ điểm B, C biết đường thẳng AQ đi qua $H(8;4)$.

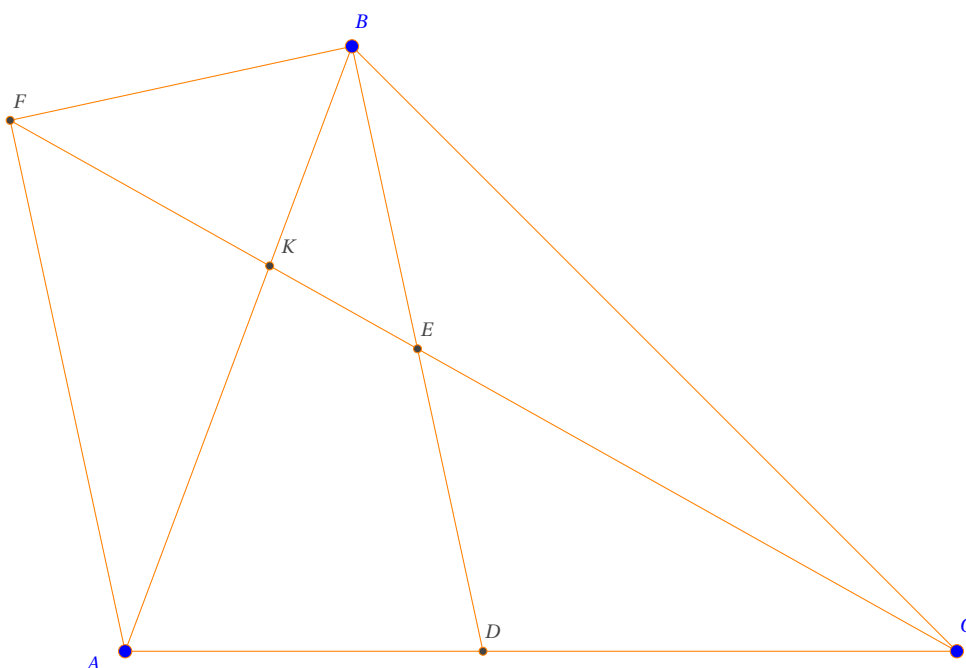
Tính chất 125.



Bài tập 142. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), $I(-2;6)$ có D, E, F là các tiếp điểm của các cạnh BC, CA, AB, biết $A(-2;14)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI có phương trình $x^2 + (y-10)^2 = 20$. Tìm tọa độ điểm B, C.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB có tâm K(0;10). Chú ý K nằm trên tia phân giác CI và K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, gọi J là điểm đối xứng của I qua K thì J là tâm đường tròn bàng tiếp góc C.

Tính chất 126. Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong $\angle ABC$, E là trung điểm BD. Đường thẳng CE cắt phân giác ngoài $\angle ABC$ tại F. Khi đó $AF \parallel BD$ hay $AF \perp BD$.

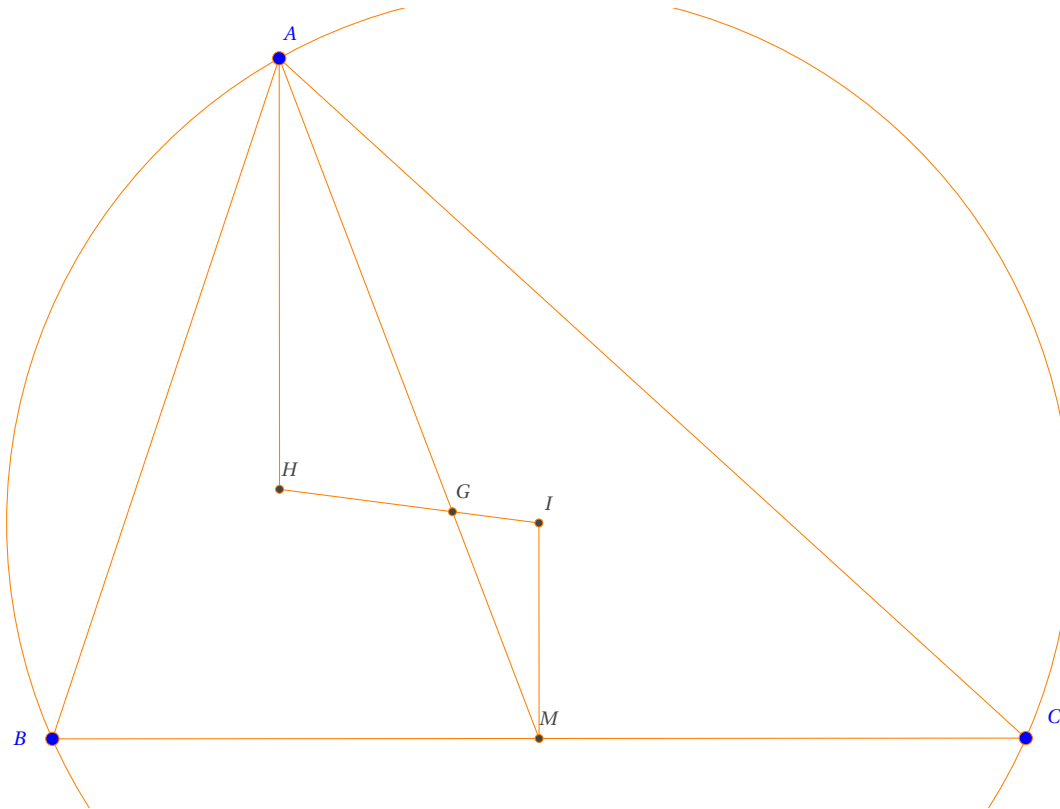


Bài tập 143. Trong Oxy cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong $\angle ABC$, E là trung điểm BD. Đường thẳng CE cắt phân giác ngoài $\angle ABC$ tại F. Biết $B(5;1)$, $F(4;3)$ và A thuộc $d: x+2y-18=0$. Viết phương trình BC.

Đường thẳng BF: $2x+y-11=0$. Đường thẳng AF đi qua F và vuông góc FB nên có phương trình $AF: x-2y+2=0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2y-18=0 \end{cases} \Rightarrow A(8;5)$. Gọi A' là đối xứng của A qua BF, vì $AF \perp FB$ nên A' là điểm đối xứng của A qua F do đó $A'(0;1)$. Khi đó đường thẳng BC là đường thẳng đi qua B, A' nên $BC: y=1$.

Tính chất 127. 1. $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$.

2. $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$.



Bài tập 144. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(\frac{5}{3}; -1)$ và nội tiếp đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 = 0$. Điểm $M(-1; -1)$ nằm trên đường cao kẻ từ A của tam giác ABC, $M \neq A$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC, biết hoành độ điểm C nhỏ hơn hoành độ điểm B.

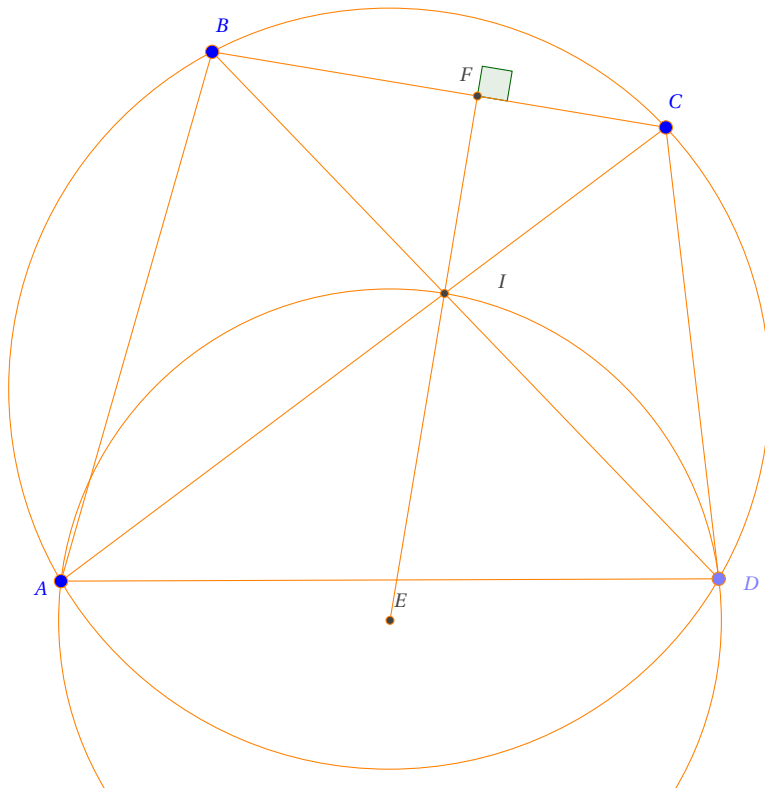
Đường tròn (C) có tâm $I(3; -3)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$ suy ra $H(-1; 3)$. Đường cao AH đi qua M, H nên có phương trình AH : $x + 1 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1; -5) \\ A(-1; -1) \text{ loại} \end{cases}.$$

Gọi M là trung điểm BC. Ta có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ suy ra $M(3; 1)$. Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc AH nên BC : $y - 1 = 0$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1; 1), B(5; 1).$$

Tính chất 128. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I. Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI. Khi đó $EI \perp BC$.



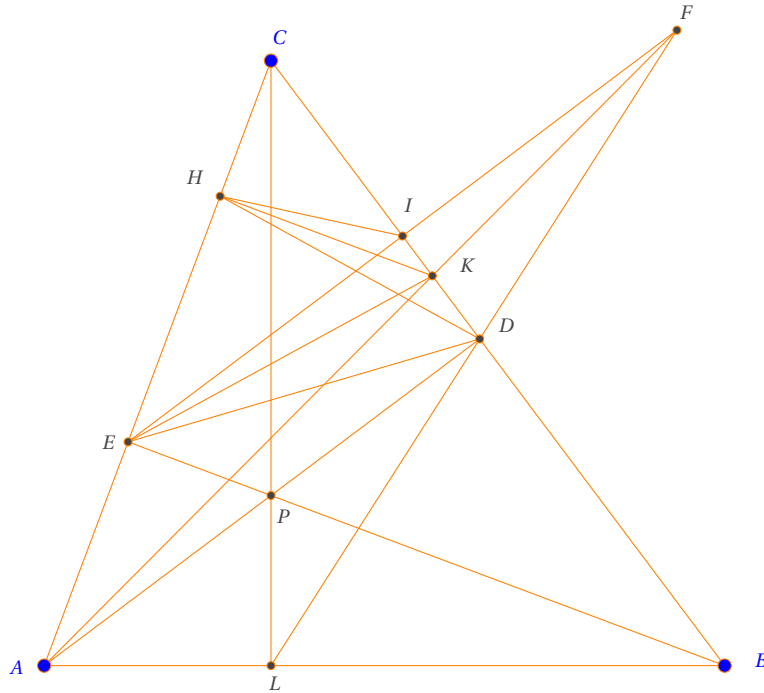
Ta có tam giác AEI cân tại E nên $\angle AIE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AED) = 90^\circ - \angle IDA = 90^\circ - \angle ICF$ do đó $EI \perp BC$.

Bài tập 145. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có đỉnh $A(2; -1)$. Giao điểm hai đường chéo AC và BD là điểm $I(1; 2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI có tâm là $E(-\frac{27}{8}; -\frac{9}{8})$. Biết đường thẳng BC đi qua điểm $M(9; -6)$. Tìm tọa độ đỉnh B, D biết điểm B có tung độ nhỏ hơn 3.

(Trần Phú - Hà Tĩnh lần 1)

Tính chất 129. 1. HK là phân giác $\angle DHI$.

2. F, D, L thẳng hàng.



1. Tứ giác KHAD, IHEK nội tiếp suy ra $\begin{cases} \angle DHK = \angle KAD \\ \angle IHK = \angle IEK \end{cases}$. Mặt khác $AD \parallel EF$ và tam giác EKF cân tại K nên ta có $\angle KAD = \angle KFE = \angle KEI$. Do đó $\angle IHK = \angle DHK$ hay HK là phân giác $\angle DHI$.
2. Ta có $\angle EDP = \angle ECP = \angle PBL = \angle PDL$, $\angle EDK = \angle FDK$ và $\angle PDE + \angle EDK = 180^\circ$ do đó F, D, L thẳng hàng.

Bài tập 146. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE. Gọi F là điểm đối xứng của E qua BC, đường thẳng BC cắt AF, EF tại K, I. Điểm $H(\frac{23}{7}; \frac{26}{7})$ là hình chiếu vuông góc của K lên AC. Biết $D(1;2)$, $E(2;5)$, $y_I < 3$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Phạm Tuấn Khải lần 1)

Đường thẳng EH : $x + y - 7 = 0$. Đường thẳng HK đi qua H và vuông góc với EH nên HK : $7x - 7y + 3 = 0$. Đường thẳng HI đối xứng với HD qua HK nên HI : $4x - 3y - 2 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EID có tâm là trung điểm ED và đường kính ED nên (EID) : $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2}$. Tọa

độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I(2;2)$. Điểm F đối xứng với E qua I nên $F(2;-1)$.

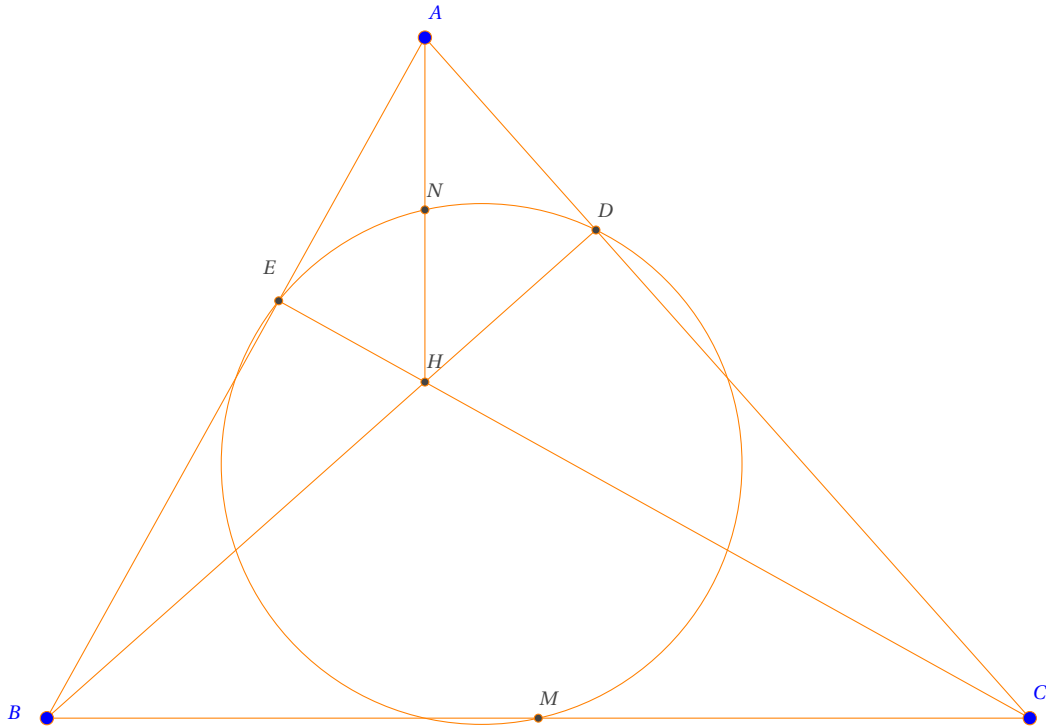
Đường thẳng ID : $y = 2$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 2 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;2)$. Đường thẳng EB đi

qua E và vuông góc EH nên EB : $x + y - 3 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-1;2)$.

Tọa độ K là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 2 \\ 7x - 7y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(\frac{11}{7})$. Đường thẳng AF đi qua K, F có phương

trình $AF: 7x + y - 13 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x + y - 13 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;6)$.

Tính chất 130.



Bài tập 147. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H , đường cao BD . Điểm $M(7;1)$ là trung điểm cạnh BC và điểm $N(4;6)$ là trung điểm cạnh AH . Biết $D \in x - y - 1 = 0, x_D > 5$ và đường thẳng AB đi qua $P(3;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(Quang Trung-Bình Phước lần 2)

Đường tròn đường kính MN có phương trình $(MN): (x - \frac{11}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{17}{2}$. Theo tính chất đường tròn Euler ta có D nằm trên đường tròn đường kính MN , do đó tọa độ D là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x - \frac{11}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{17}{2} \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(7;6)$. Gọi E là chân đường cao đỉnh C của tam giác ABC , ta có MN

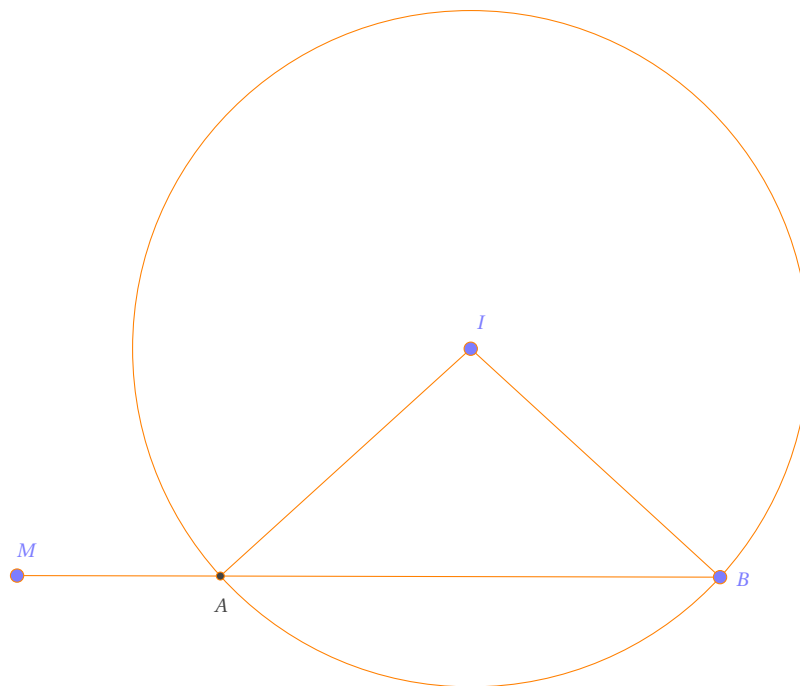
là trung trực ED suy ra $E(\frac{44}{17}; \frac{57}{17})$. Đường thẳng AB đi qua P, E có phương trình $AB: 4x - y - 7 = 0$. Đường cao CE đi qua E và vuông góc AB nên $CE: x + 4y - 16 = 0$. Gọi $B(b; 4b - 7)$ vì M là trung điểm BC suy ra $C(14 - b; 9 - 4b)$ do $C \in x + 4y - 16 = 0$ suy ra $b = 2, B(2; 1), C(12; 1)$. Đường thẳng AC đi qua D, C nên có phương trình $AC: x + y - 13 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 13 = 0 \\ 4x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;9)$.

Nhận xét:

- Bài toán cho tam giác ABC nhọn là một dữ kiện thừa.
- Điểm P thuộc đường tròn đường kính MN nên thí sinh có thể làm nhiều cách, chẳng hạn lý luận được P là trung điểm AB .

Nên nhớ đường tròn Euler vẫn còn đúng khi tam giác ABC tù. Do đó việc tác giả cho điều kiện tam giác ABC nhọn là một điều khó hiểu!

Tính chất 131.

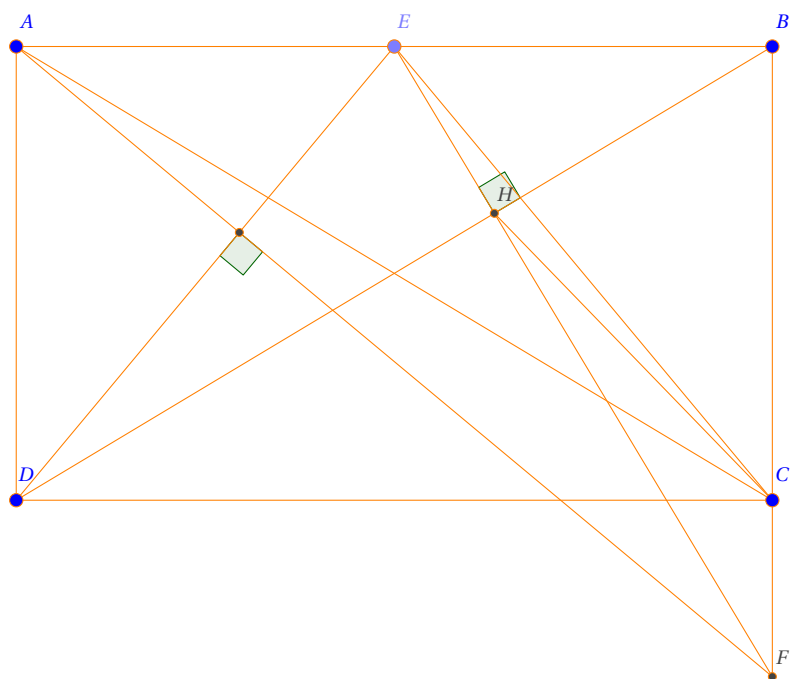


Bài tập 148. Cho $M(-1; -3)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ có tâm I . Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

(HSG Đà Nẵng)

$$S_{IAB} = IA \cdot IB \cdot \sin \angle AIB = R^2 \cdot \sin \angle AIB \text{ do đó } S_{IAB} \text{ lớn nhất khi } IA \perp IB \text{ hay } d(I; d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1.$$

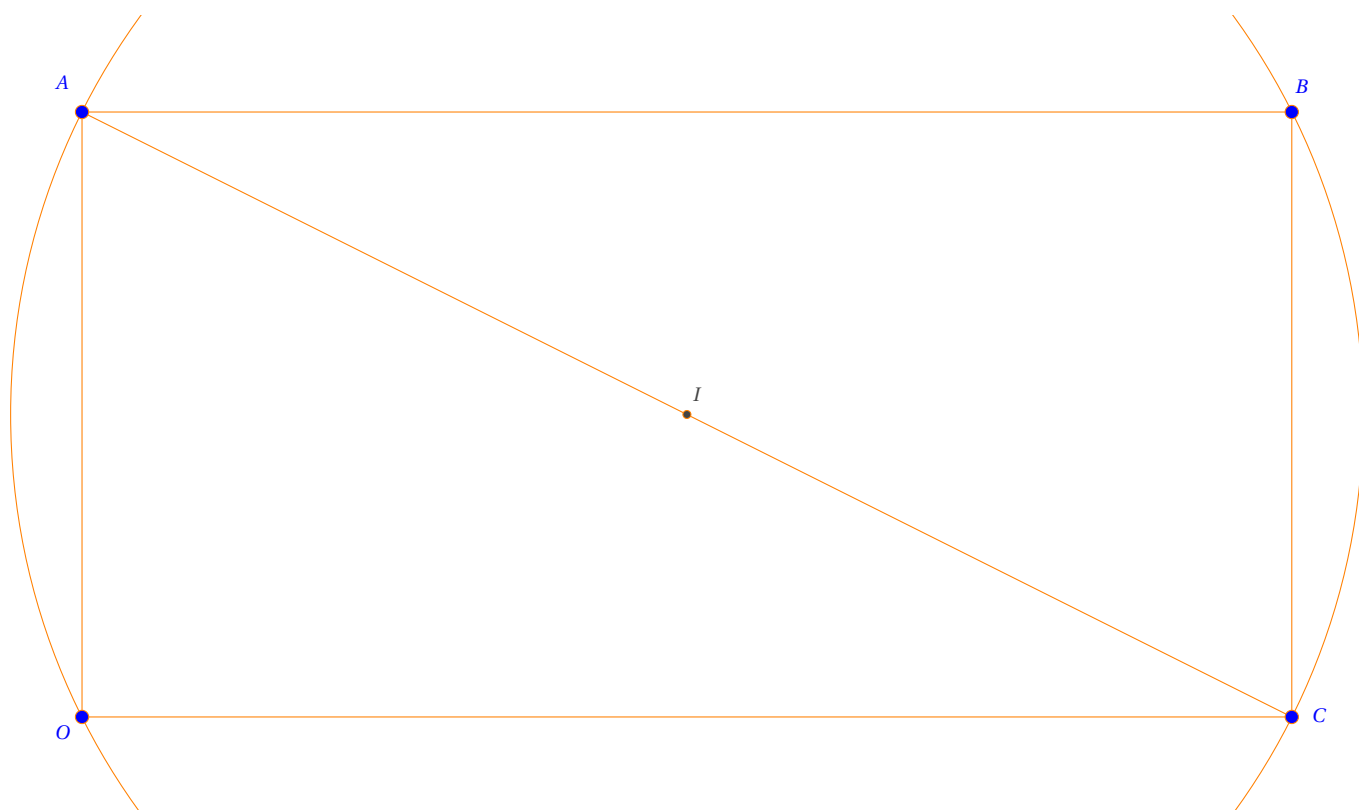
Tính chất 132. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có E là trung điểm AB . Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt đường thẳng BC tại F . Khi đó $DE \perp AF$.



Ta có tứ giác DHCF nội tiếp suy ra $\angle EFC = \angle BDC = \angle CAE$ do đó tứ giác AECF nội tiếp. Suy ra $\angle FAE = \angle BCE = \angle ADE$ (vì $\triangle ECB = \triangle EDA$) hay $DE \perp AF$.

Bài tập 149.

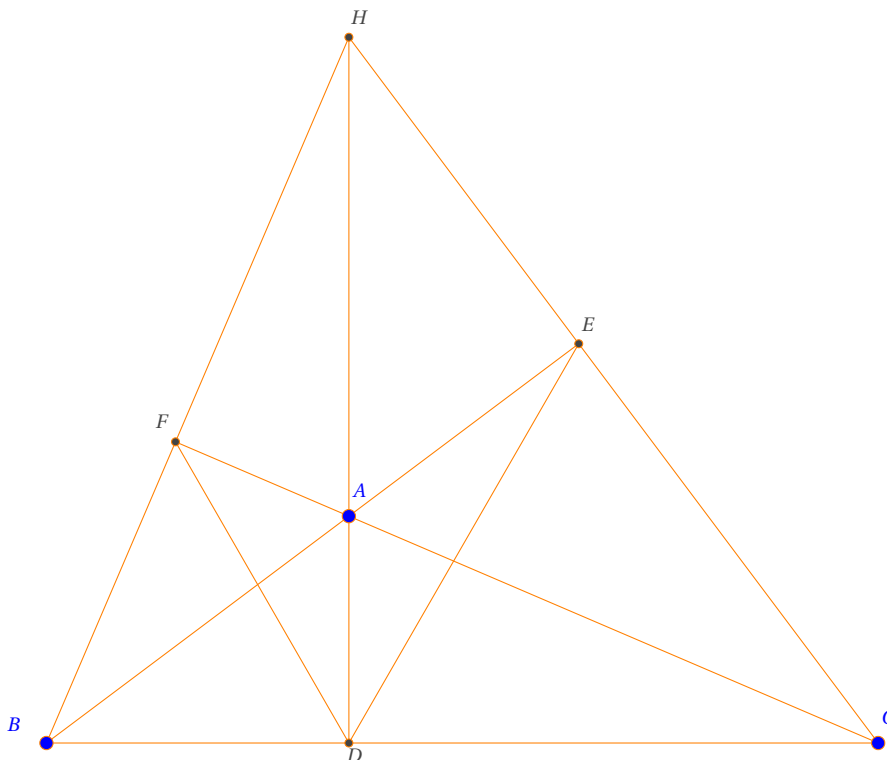
Tính chất 133.



Bài tập 150. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C nằm trên đường tròn sao cho $OABC$ là hình chữ nhật có $AB = 2BC$.

(THTT số 6)

Tính chất 134. H là trực tâm tam giác ABC , khi đó H hoặc là tâm nội tiếp hoặc là tâm bàng tiếp của tam giác DEF .



Bài tập 151. Cho tam giác ABC có $M(0;3)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉnh A . Gọi D, E, F là chân đường cao hạ từ A, B, C . Biết $D(2; -1)$, $E(2;2)$ và $F \in 5x - y + 12 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C .

Chú ý tính chất, nhiều em hay mắc sai lầm trong việc giải bài này.

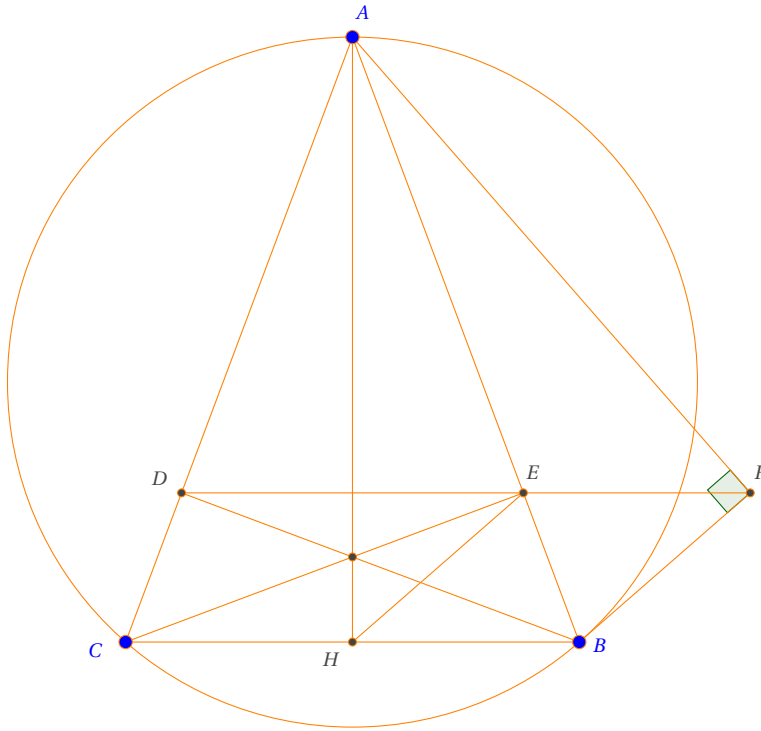
Ở đây ta sử dụng tính chất không đổi cho dù tam giác ABC như thế nào đó là đường cao AH là phân giác $\angle EDF$ hay DE, DF đối xứng nhau qua đường cao AH .

Đường thẳng AH đi qua A, M nên $AH: 2x + y - 3 = 0$. Đường thẳng $DE: x - 2 = 0$. Đường thẳng DF đối xứng đường thẳng DE qua AH nên $DF: 3x + 4y - 2 = 0$. Tọa độ F là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ 5x - y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(-2; 2)$. Tối đây ta quy về bài toán cho ba chân đường cao mà mình đã

biên rất lâu rồi. Bài toán có 4 nghiệm hình. Trước hết các em tìm tọa độ 4 đỉnh H như nêu ở trên tính chất. Các tọa độ A, B, C là lựa chọn hợp lý ba điểm trong 4 điểm H mà đã tìm ra.

Tính chất 135. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao BD, CE, AH. Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại F. Khi đó

1. $AF \perp BF$.
2. $BF = BH$.
3. BFEH là hình thoi.



1. Ta có $\angle ABF = \angle ACB = \angle ADF$ suy ra tứ giác ADBF nội tiếp suy ra $AF \perp BF$.
2. Ta có $\angle BAF = \angle BDF = \angle DBH = \angle DAH = \angle HAB$ suy ra $\triangle AHB = \triangle AFB$ hay $BH = BF$.
3. Ta có $\angle EFB = \angle DAB = \angle BHE = \angle DEH$ suy ra $HE \parallel BF$ hay BFEH là hình thoi.

Bài tập 152. Cho tam giác ABC cân tại A, có đường cao BD, CE. Gọi F là giao điểm của DE với tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng DE đi qua $M(0; -\frac{6}{5})$. Biết $B(5; -3)$, $F(\frac{37}{5}; -\frac{6}{5})$, tìm tọa độ điểm A, C.

(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng DF đi qua M, F nên $DF: y + \frac{6}{5} = 0$. Gọi $E(a; -\frac{6}{5})$, ta có BFEH là hình thoi suy ra

$$\begin{cases} E(\frac{22}{5}; -\frac{6}{5}), H(2; -3) \\ E(\frac{52}{5}; -\frac{6}{5}), H(8; -3) \end{cases}$$

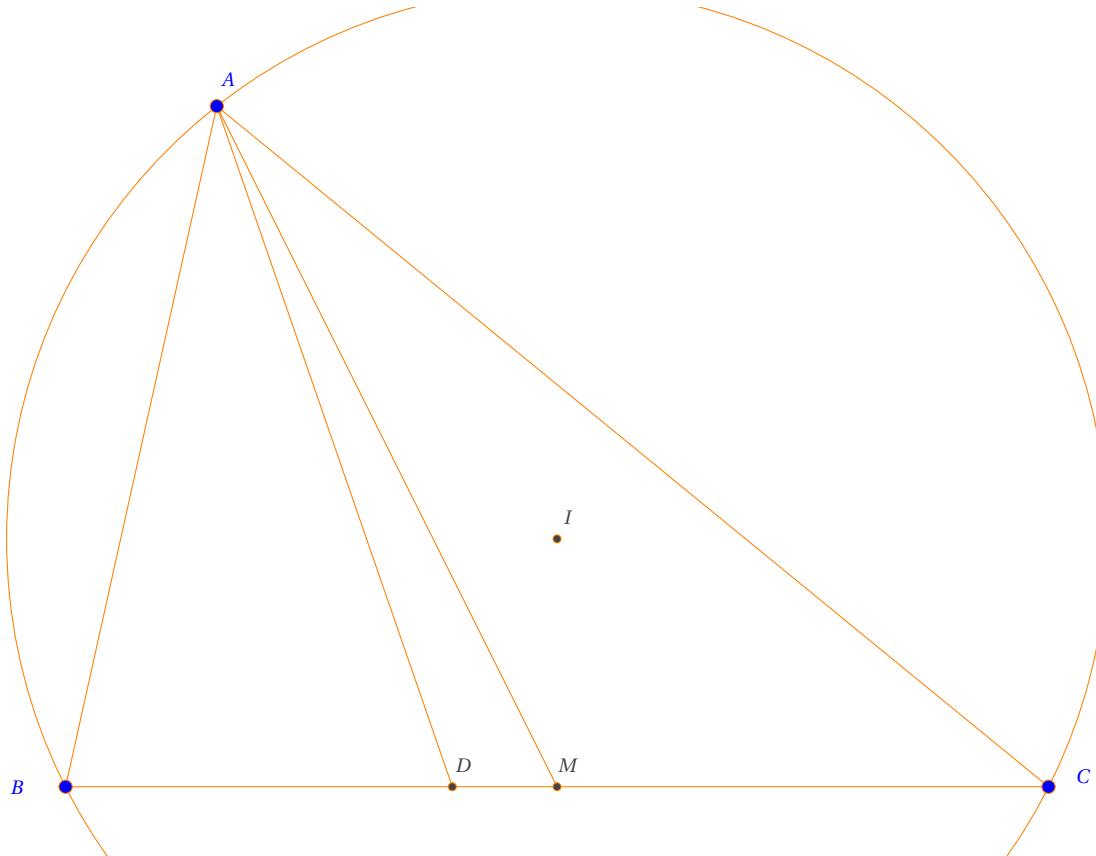
• $E(\frac{52}{5}; -\frac{6}{5}), H(8; -3)$

Đường thẳng AB đi qua B, E nên $AB: x - 3y - 14 = 0$. Đường cao AH đi qua H và vuông góc với DF nên $AH: x - 8 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - 14 = 0 \\ x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8; -2)$. Điểm C đối xứng với B qua H nên $C(11; -3)$.

• $E(\frac{22}{5}; -\frac{6}{5}), H(2; -3)$

Hoàn toàn tương tự như trên ta có $A(2; 6), B(-1; -3)$ thỏa bài toán.

Tính chất 136.



Bài tập 153. Cho tam giác ABC có phân giác trong góc A là $AD: x + y - 2 = 0$, trung tuyến $AM: 4x + 5y - 9 = 0$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $R = \frac{15}{6}$, biết điểm $K(\frac{3}{2}; 0)$ nằm trên đường thẳng AC, $x_C > 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

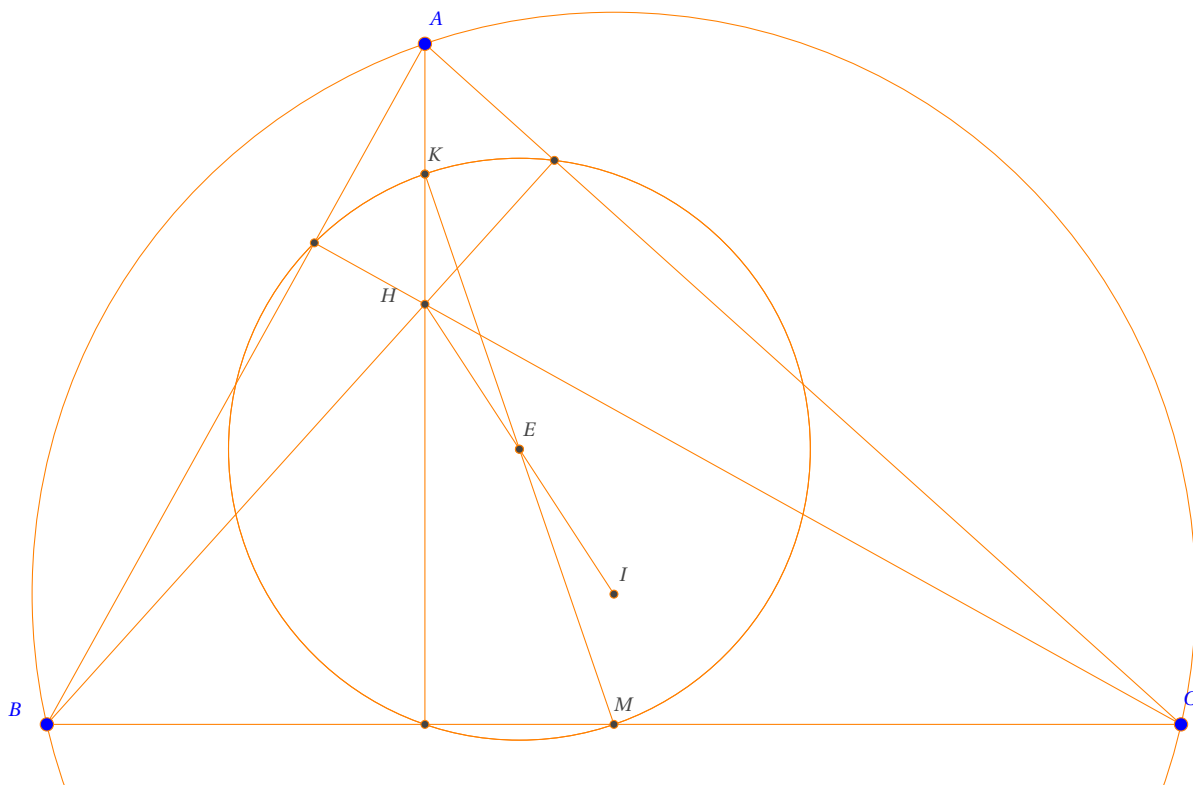
(Lương Thế Vinh-Hà Nội lần 1)

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4x + 5y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$. Đường thẳng AC đi qua A, K nên có

phương trình $AC: 2x + y - 3 = 0$. Đường thẳng AB đối xứng với AC qua phân giác AD nên $AB: x + 2y - 3 = 0$. Ta có $\cos(AB; AC) = |\cos(n_{AB}; n_{AC})| = \frac{4}{5}$ suy ra $\sin \angle A = \frac{3}{5}$. Áp dụng định lý hàm sin, ta có $BC = 2R \sin \angle A = 3(1)$. Gọi $B(3 - 2b; b), C(c; 3 - 2c)$, trung điểm $BC \in 4x + 5y - 9 = 0$ suy ra $b + 2c - 3 = 0(2)$.

Từ (1), (2) giải ra $\begin{cases} b = -1, c = 2 \\ b = 3, c = 0 \end{cases}$ loại vì $x_C > 0 \Rightarrow B(5; -1), C(2; -1)$.

Tính chất 137.



Bài tập 154. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC , trực tâm H . Gọi K là trung điểm của AH . Biết rằng tọa độ các điểm $C(2; -1)$, $K\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}\right)$ và điểm $E\left(\frac{11}{12}; \frac{1}{12}\right)$ là tâm đường tròn đi qua 3 chân đường cao của tam giác ABC . Xác định tọa độ đỉnh A .

Chú ý đường tròn Euler. Gọi M là trung điểm BC , khi đó E là trung điểm MK suy ra $M(1; -\frac{1}{2})$. Điểm B đối xứng C qua M suy ra $B(0; 0)$. Đường tròn Euler có bán kính $R_E = \frac{5\sqrt{2}}{12}$ suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 2R_E = \frac{5\sqrt{2}}{6}$. Đường trung trực cạnh BC có phương trình $d: 4x - y - 5 = 0$. Gọi $I(a; 4a - 5)$, ta có $IB = R$ suy ra

$$\begin{cases} I(\frac{7}{6}; -\frac{5}{30}) \\ I(\frac{5}{6}; -\frac{5}{6}) \end{cases}$$

• $\frac{7}{6}; -\frac{5}{30}$

E là trung điểm HI suy ra $H(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$. Điểm K là trung điểm AH suy ra $A(1; 1)$.

• $I(\frac{5}{6}; -\frac{5}{6})$

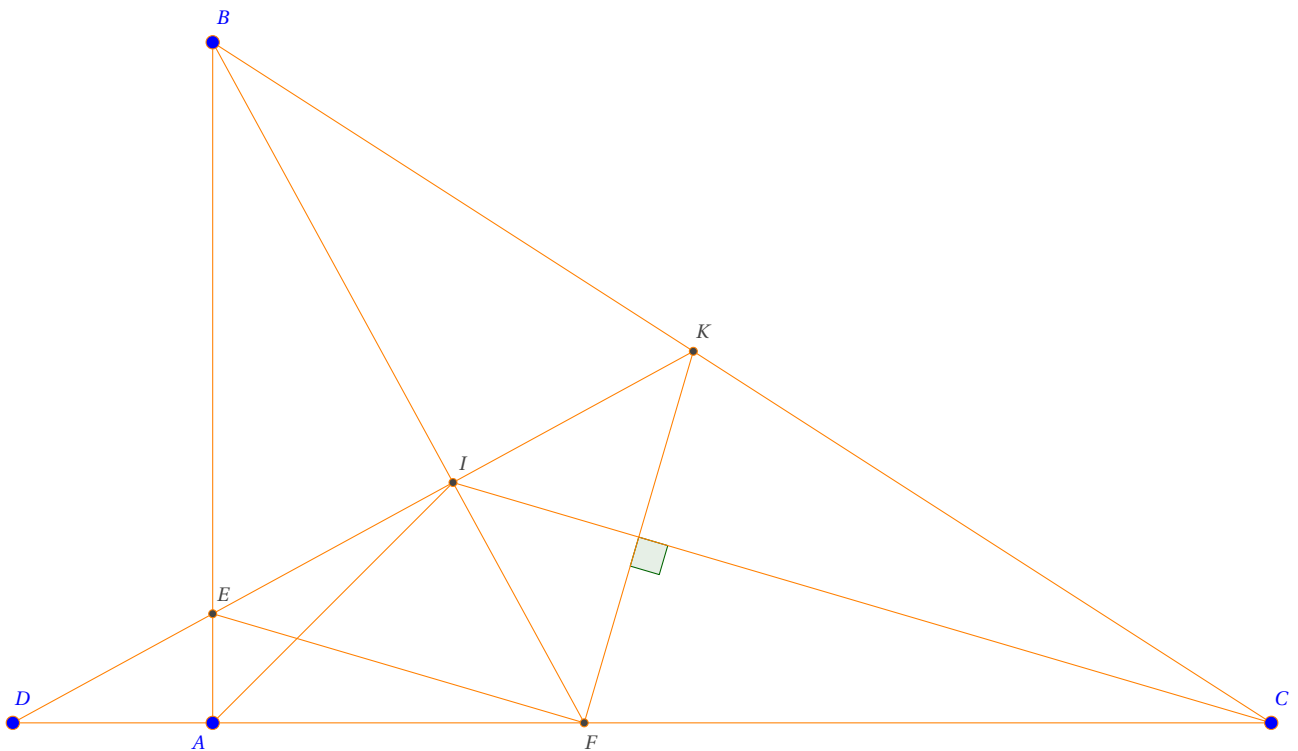
Làm tương tự $6a$ có $A(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

Tính chất 138. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I . D là điểm đối xứng của B qua CI . Đường thẳng DI cắt AB tại E và F là chân đường phân giác góc B của tam giác ABC . Đường thẳng ID cắt BC tại K . Khi đó

1. Tam giác EIF vuông cân tại I .

2. Tam giác EBK , FCK cân tại B, C .

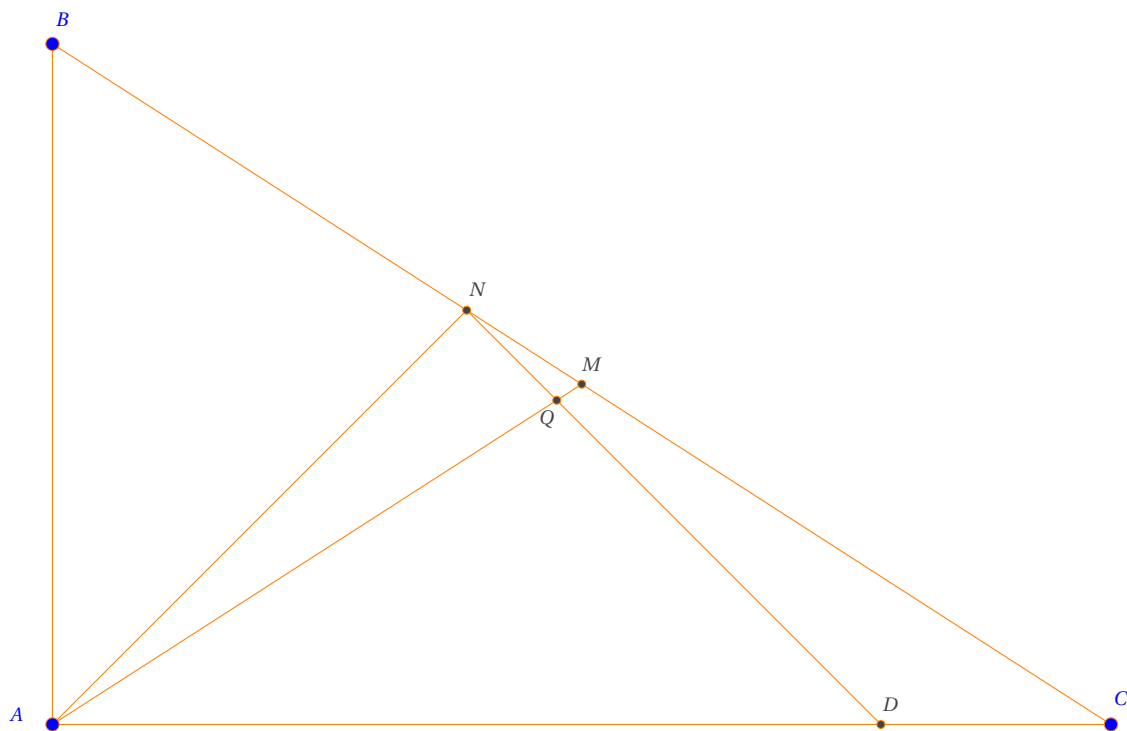
Tam giác EIF vuông cân tại I .



Bài tập 155. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I . D là điểm đối xứng của B qua CI . Đường thẳng DI cắt AB tại $E(0; \frac{3}{2})$ và $F(\frac{3}{2}; 2)$ là chân đường phân giác góc B của tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm C biết $C \in x - 2y = 0, y_I < 2$.

(Siêng học lần 3)

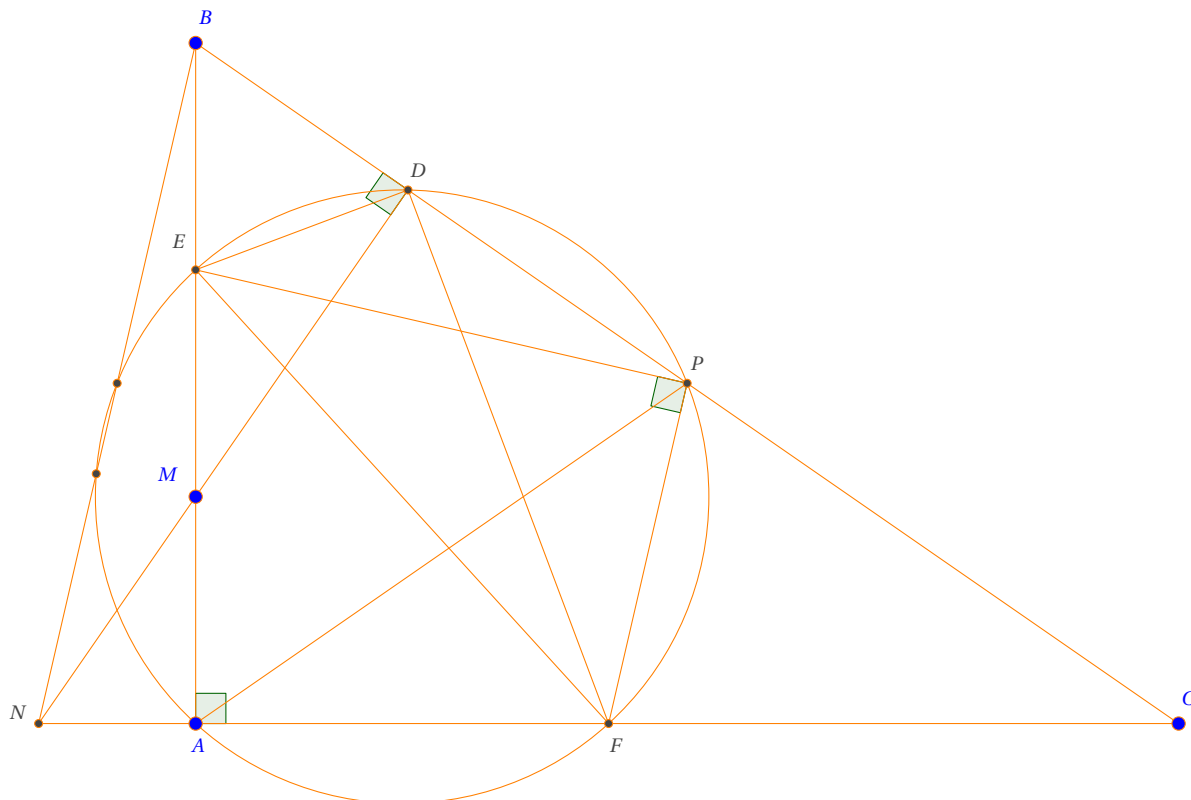
Tính chất 139. $(AN, AQ) = (BC, NQ)$



Bài tập 156. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và chân đường phân giác trong góc A, qua N kẻ đường vuông góc với AN cắt trung tuyến AM tại điểm $Q(-\frac{19}{9}; \frac{13}{9})$. Biết AN và BC lần lượt có phương trình $x+2y-3=0$ và $x-y+4=0$, đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng $x-3y-1=0$. Tìm tọa độ của ba đỉnh tam giác ABC.

(Đề thi thử Trần Quốc Việt lần 1)

Tính chất 140.



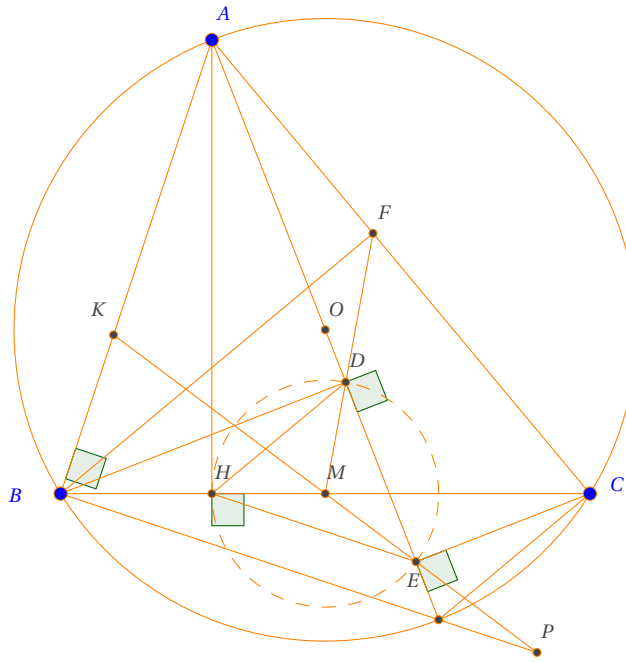
Bài tập 157. Cho tam giác ABC vuông tại A, M thuộc đoạn AB. Đường thẳng qua M vuông góc với BC tại D cắt AC tại N. Gọi $E(6;0), F(\frac{25}{2}; -\frac{1}{2})$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BM, CN. Trung điểm cạnh BC có hoành độ nguyên và thuộc đường thẳng $2x - 3y - 31 = 0$. Biết $BC = 4\sqrt{10}, x_A > 8$ tìm tọa độ A, B, C.

(Nhomtoan lần 7)

Gọi P là trung điểm BC. Chú ý đường tròn ngoại tiếp tam giác EFP chính là đường tròn Euler của tam giác NBC. Do đó tam giác EFP vuông tại P, đường tròn đường kính (EF) : $(x - \frac{37}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = 1$. Tọa độ P là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x - \frac{37}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = 1 \\ 2x - 3y - 31 = 0 \end{cases}$ và $p \in \mathbb{Z}$ nên giải ra được $P(11; -3)$. Ta có $PA = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{10}$, $A \in (x - \frac{37}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = 1$ và $x_A > 8$ suy ra $A(9;3)$. Đường thẳng AE đi qua A, E nên có phương trình AE : $x - y - 6 = 0$. Gọi $C(c; c-6)$ ta có $PC = PA$ suy ra $(17; -5)$. Tương tự giải ra $B(5; -1)$.

Tính chất 141. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, chân đường cao AH. Hạ BD, CE vuông góc với AO. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó

1. $HD \perp AC, HE \perp AB$.
2. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE.



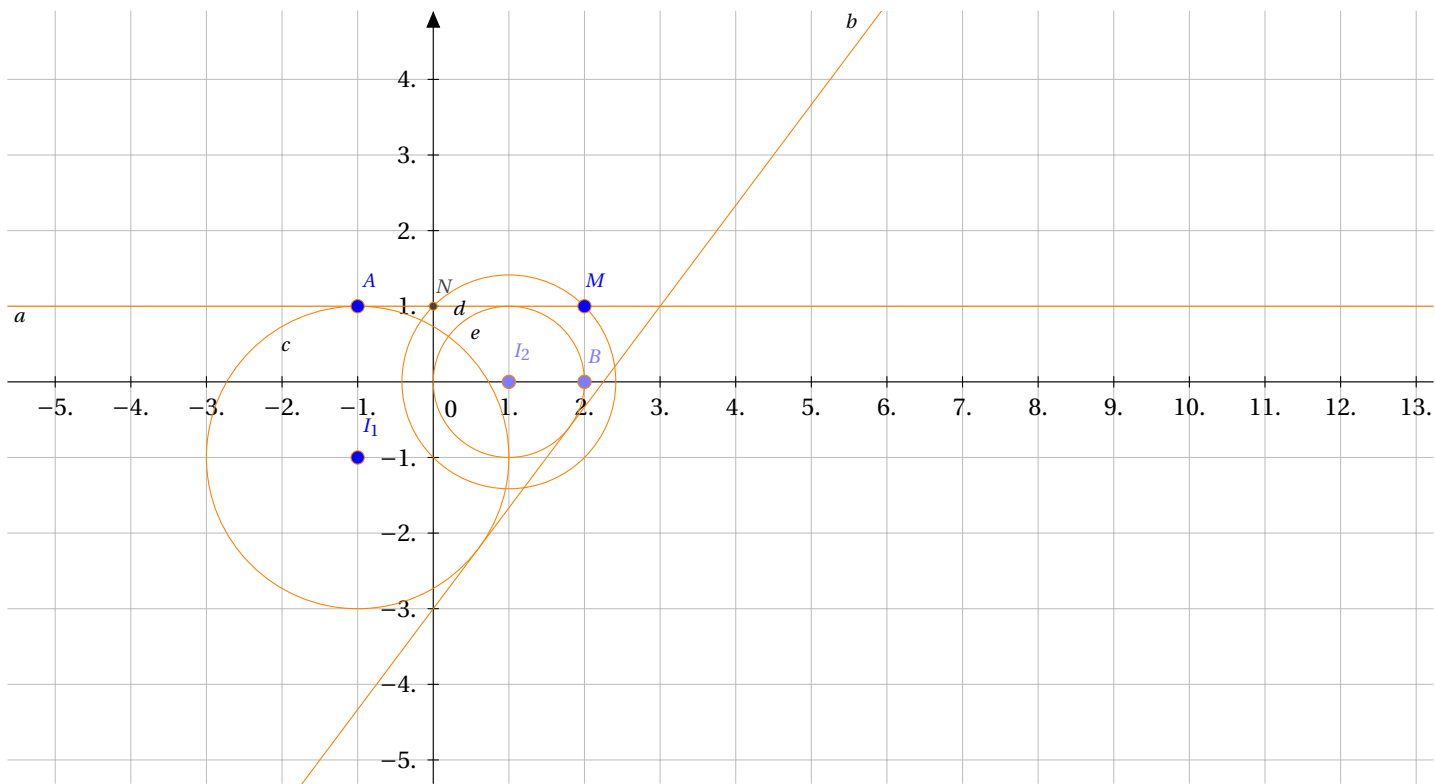
1. tứ giác $BADH$ nội tiếp suy ra $\angle DMC = \angle BAO = 90^\circ - \angle C$ do đó $HD \perp AC$. Tương tự $HE \perp AB$.
2. **Cách 1:** Gọi I là trung điểm AB ta có $IH = ID = \frac{AB}{2}$, $IM \parallel AC$ và $HD \perp AC$ do đó IM là trung trực của HD suy ra $MD = MH$. Tương tự $ME = MH$, vậy M là tâm ngoại tiếp của tam giác HDE .

Cách 2: Theo tính chất kinh điển ở phần trước MD đi qua F , chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC . Theo (1) ta có $DH \perp AC$ suy ra $DH \parallel BF$ mà tam giác BMF cân tại M hay tam giác HMD cân tại M do đó $MH = MD$. Lý luận tương tự ME đi qua K , chân đường cao hạ từ C của tam giác ABC . Chú ý tam giác KMB cân tại M và tam giác KBP vuông tại B suy ra tam giác BMP cân tại M . Hơn nữa $HE \parallel BP$ do đó tam giác HME cân tại M . Vậy M là tâm ngoại tiếp của tam giác HDE .

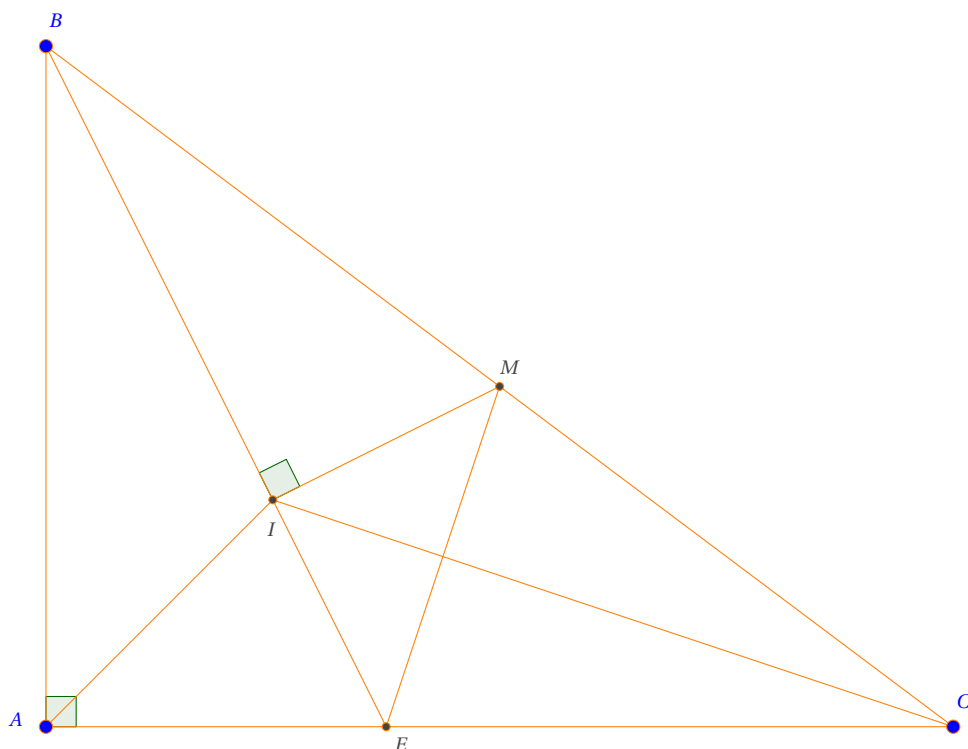
Bài tập 158. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I) . D là chân đường cao hạ từ A xuống BC , và E, F là hình chiếu của B, C lên AI . Biết $ADx - 5 = 0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là $K(7; -2)$ và $I \in 4x - 3y - 31 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài tập 159. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với $(C_1) : x^2 + (y + 1)^2 = 4$ và cắt $(C_2) : (x - 1)^2 + y^2 = 2$ tại M, N sao cho $MN = 2$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(1; 0)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{2}$. Suy ra $d(I_2; MN) = 1$. Gọi (C_3) là đường tròn tâm I_2 bán kính là 1. Khi đó d là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_3) .



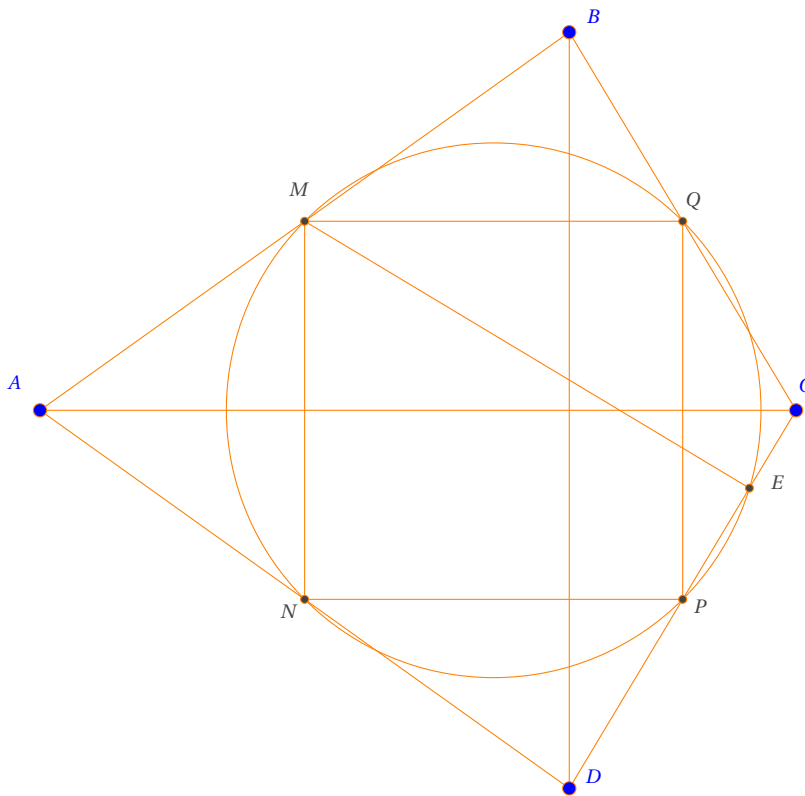
Tính chất 142. Cho tam giác ABC vuông tại A có I là tâm nội tiếp và $AC > AB$. Gọi M là trung điểm BC thỏa $\angle BIM = 90^\circ$. Khi đó $AB : AC = 3 : 4$.



Kéo dài BI cắt AC tại E. Chú ý $\angle BIC = 135^\circ$ suy ra $\angle MIC = 45^\circ$ và $\angle EIC = 45^\circ$ do đó $\triangle MIC = \triangle EIC$ hay $CE = CM$. Theo tính chất phân giác ta có $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE} = 2$ hay $\tan \angle ABE = \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra $\frac{AC}{AB} = \tan(2\angle ABE) = \frac{4}{3}$.

Bài tập 160. Cho tam giác ABC vuông tại $A(2;3)$ có I là tâm nội tiếp và $AC > AB$. Gọi M là trung điểm BC thỏa $\angle BIM = 90^\circ$, phương trình cạnh $BC : x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ B, C

Tính chất 143. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, AD, CD, CB . Kẻ ME vuông góc CD . Khi đó năm điểm M, N, P, Q, E nằm trên một đường tròn.



Ta có MN, PQ là đường trung bình của tam giác BAD, BCD nên suy ra $MN = PQ$ và $MN \parallel PQ \parallel BD$. Tương tự $MQ = NP$, $MQ \parallel PN \parallel AC$ và do $AC \perp BD$ nên $MNPQ$ là hình chữ nhật hay năm điểm M, N, P, Q, E nằm trên một đường tròn đường kính MP .

Bài tập 161. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Gọi $M(-5;3), N(2;4)$ là trung điểm của AB, AD . Kẻ ME vuông góc CD . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE biết $BC : 3x + 4y + 12 = 0$.

(HSG Quảng Trị)

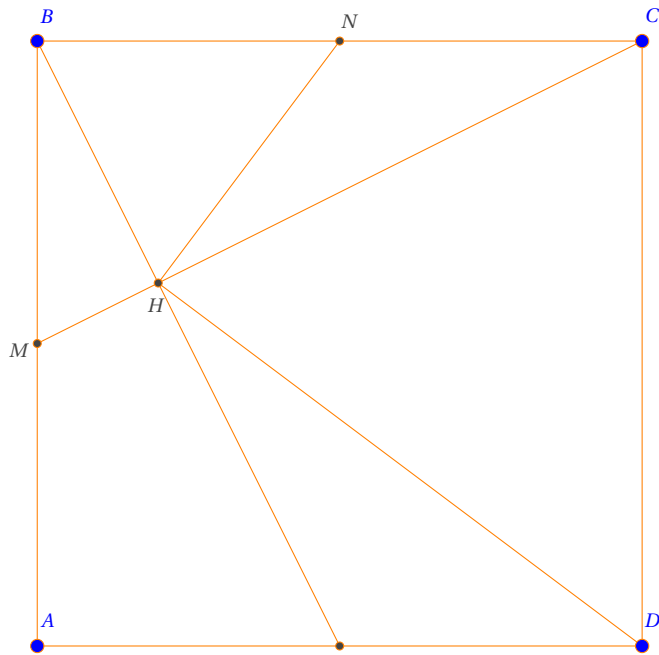
Viết phương trình đường thẳng MQ .

Tìm tọa độ điểm Q .

Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE chính là đường tròn đường kính NQ .

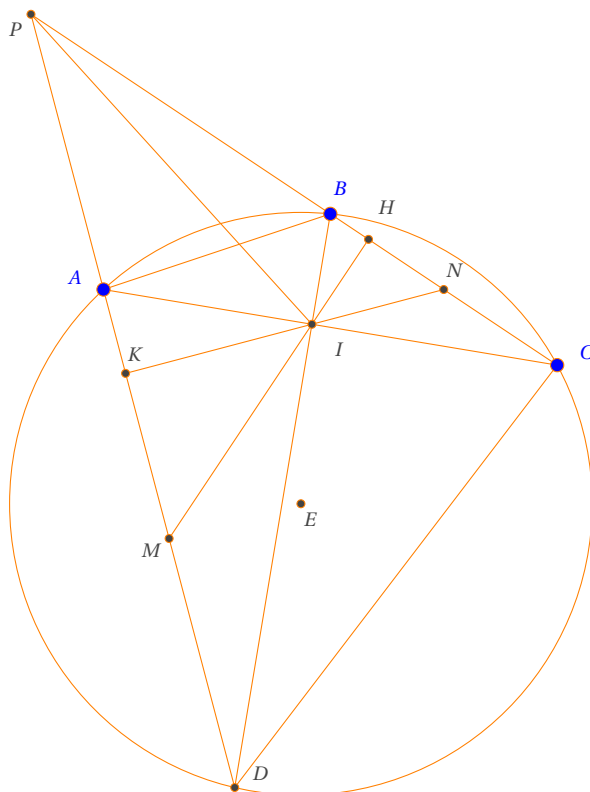
Tính chất 144. 1. $HN \perp HD$.

2. $HD = 2HN$.



Bài tập 162. Cho hình vuông $ABCD$ có M, N là trung điểm AB, BC . H là hình chiếu của B lên CM . Biết $N(-1; -\frac{5}{2})$, $H(-1; 0)$ và $D \in x - y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông.

Tính chất 145. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo $AC \perp BD$ và cắt nhau tại I . Gọi M, N là trung điểm AD, BC . MI, NI cắt BC, AD tại H, K . Khi đó $MH \perp BC, NK \perp AD$.



Ta có $\angle HBI = \angle IAD$ và $\angle BIH = \angle MID = \angle MDI$ do đó $\angle HBI + \angle BIH = \angle IAD + \angle ADI = 90^\circ$ hay

$MH \perp BC$. Tương tự $NK \perp AD$.

Bài tập 163. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo $AC \perp BD$ và cắt nhau tại $I(3;3)$. Biết $BC: x + 7y - 48 = 0$, $AD: x - 7y - 6 = 0$, $x_B > 0$. Tìm tọa độ A, B, C, D .

(Vted lần 13)

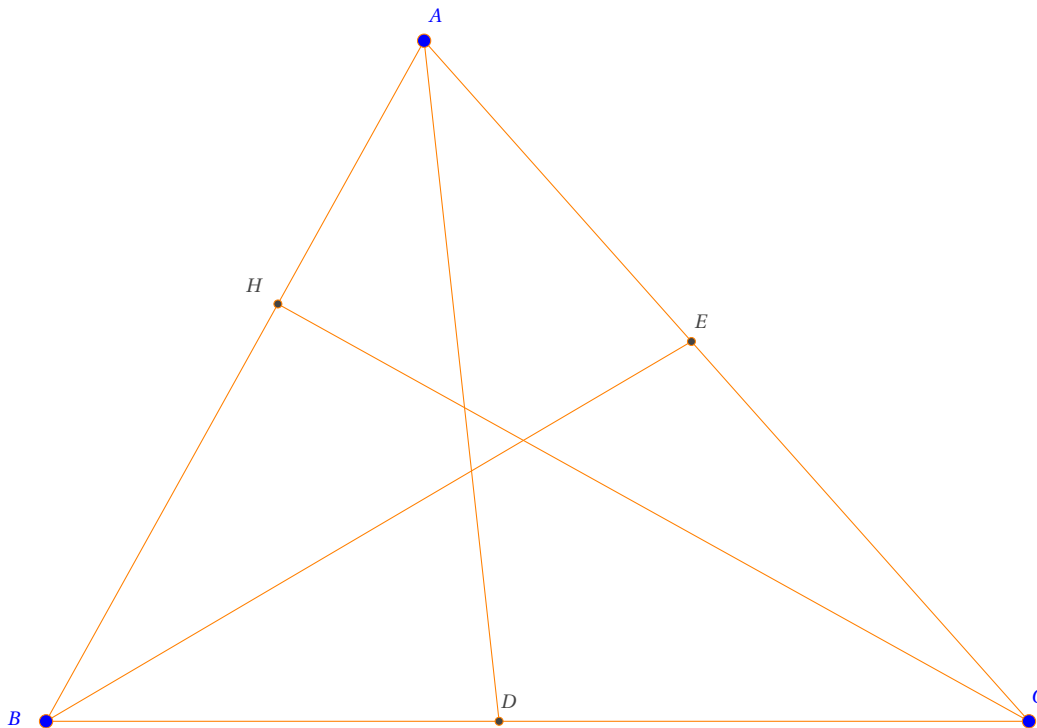
Đường thẳng NI đi qua I và vuông góc AD nên $NI: 7x + y - 24 = 0$. Tọa độ N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x + y - 24 = 0 \\ x + 7y - 48 = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{2}\right). \text{ Gọi } B(48 - 7b; b) \text{ ta có } NB = NC = NI \text{ suy ra } \begin{cases} B(6; 6) \\ B(-1; 7) \end{cases} \text{ loại. Suy ra } C(-1; 7).$$

Đường thẳng BI đi qua B, I nên có phương trình $BI: x - y = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 7y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -1). \text{ Tương tự giải ra } A(6; 0).$$

Tính chất 146.



Bài tập 164. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC , phân giác AD có $D(0; -\frac{7}{2})$. Đường cao $CH: x + 2y + 1 = 0$ và phân giác $BE: x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

(Võ Quang Mẫn)

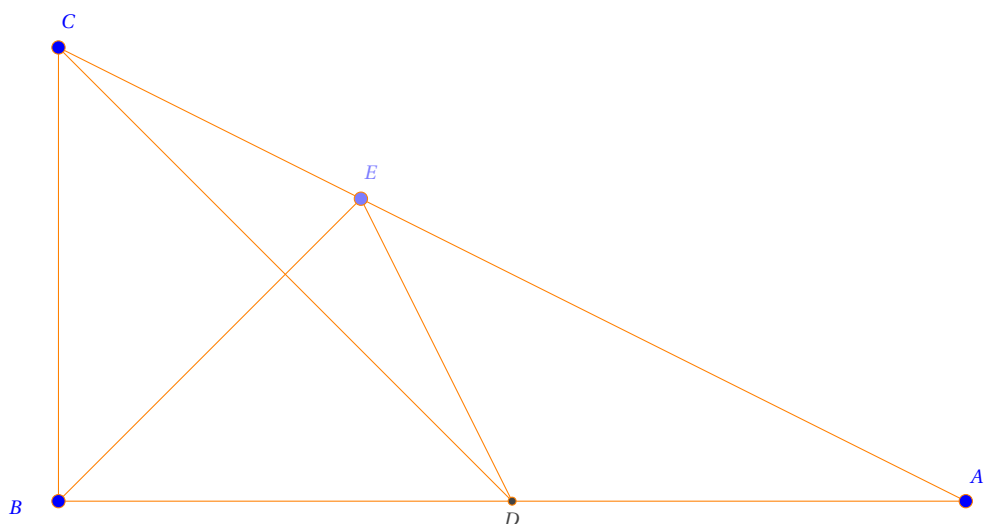
Tính chất 147.

(Quỳnh Lưu lần 2)

2. M là trục tâm tam giác EGK .

(Chuyên DHSP lần 2)

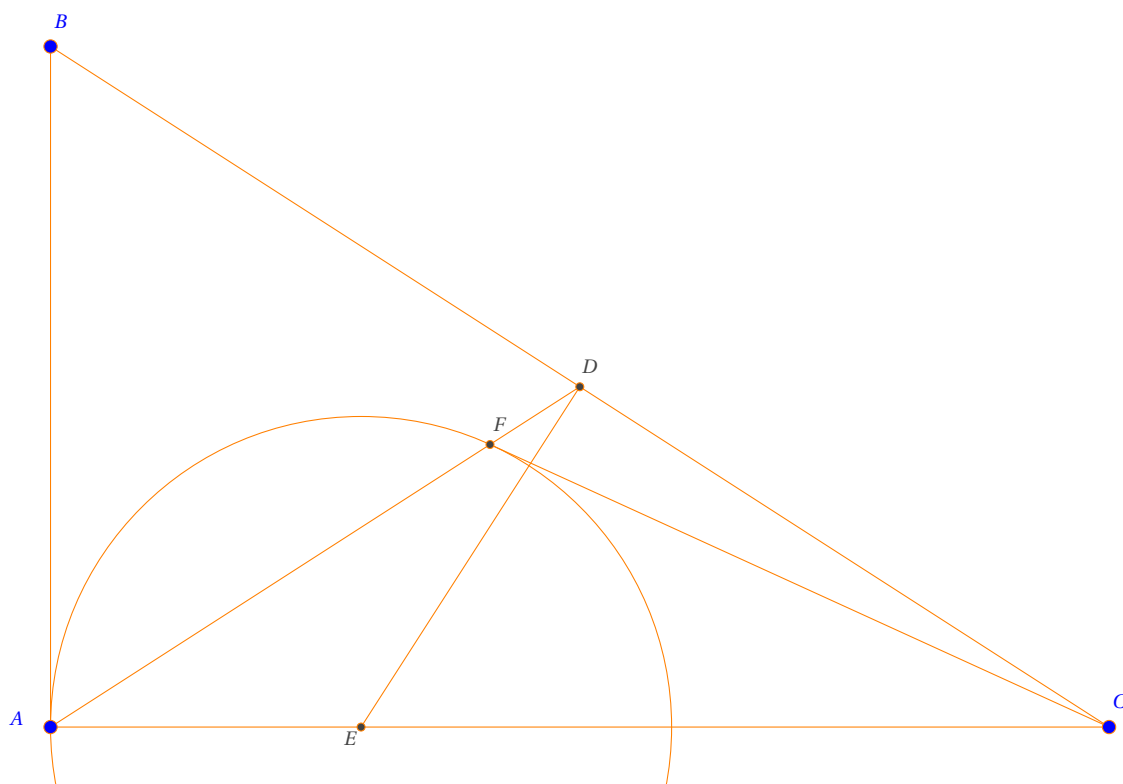
6



Bài tập 167. Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 2BC$. Gọi D là trung điểm AB, và E trên cạnh AC sao cho $AC = 3EC$. Biết $CD: x - 3y + 1 = 0$ và $E(\frac{16}{3}; 1)$ tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Nguyễn Bình Khiêm-Hải Dương lần 1)

Tính chất 150. Cho tam giác ABC vuông tại A. $E \neq A$, E không trùng trung điểm AC là một điểm trên đường thẳng AC. Hạ ED vuông góc xuống BC, kẻ tiếp tuyến CF từ C đến đường tròn đường kính EA sao cho B, F không khác phía với AC. Khi đó AD đi qua F khi hoặc BE là phân giác $\angle B$ hoặc ED là trung trực BC.



• Nếu $F \equiv D$

khi đó $EA = EF = ED$ hay BE là trung trực của AD do đó BE là phân giác $\angle B$.

- Nếu $F \neq D$

Ta có tứ giác $ABDE, EFDC$ nội tiếp suy ra $\angle DAC + \angle DCA = \angle BDF = \angle FEC = \angle = 2\angle DAE$ do đó tam giác ADC cân tại D hay D là trung điểm của BC .

Bài tập 168. Cho tam giác ABC có $AB: 2x + y - 3 = 0$, $AC: x - 2y + 1 = 0$. E là một điểm trên cạnh AC . Hạ ED vuông góc xuống BC , kẻ tiếp tuyến CF từ C đến đường tròn đường kính EA sao cho B, F không khác phía với AC . Biết $D(\frac{5}{2}; 3)$ tìm tọa độ điểm F .

(Đoàn Trí Dũng off 9)

ÁP dụng tính chất ta có

- Trường hợp 1: $F \equiv D(\frac{5}{2}; 3)$.

- Trường hợp 2: $D \neq A$ khi đó D là trung điểm BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn tâm D bán kính DA nên có phương trình $(ABC): (x - \frac{5}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$. Tọa

độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-\frac{5}{2})^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4} \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;3). \text{ Tương tự ta giải ra } C(5;3). \text{ Đường}$

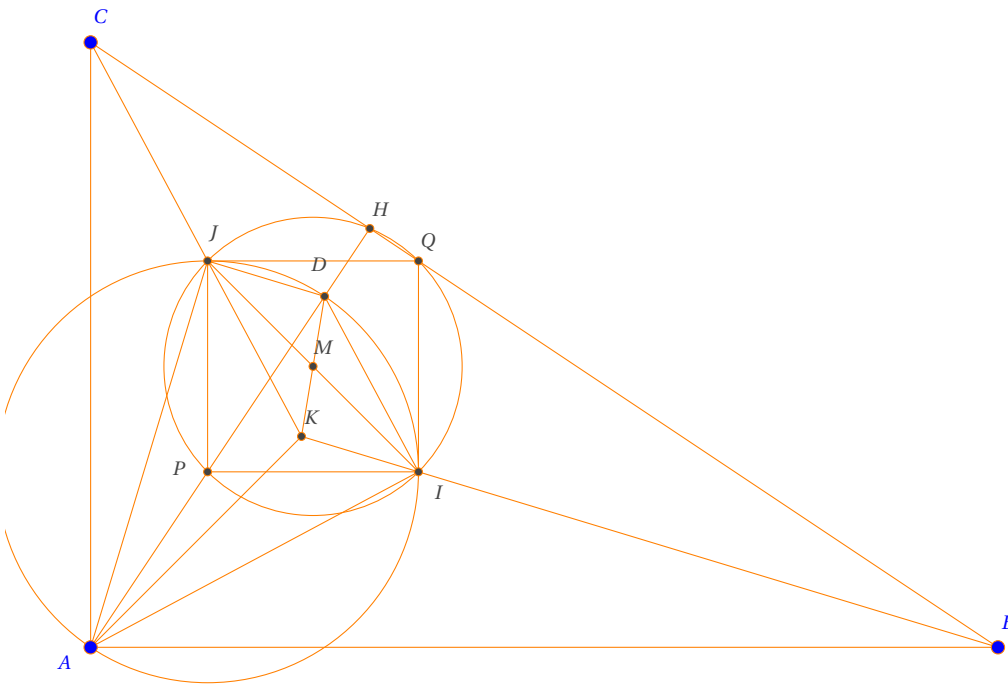
thẳng DE qua D vuông góc BC nên $DE: x - \frac{5}{2} = 0$. suy ra tọa độ E(). Tọa độ điểm F là giao của đường tròn đường kính EC và AD.

Tính chất 151.

Bài tập 169. Cho tam giác ABC có $\angle C = 45^\circ$, điểm A thuộc Oy . Các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF có tâm $I(7;0)$, $DE: 7x - y - 24 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C .

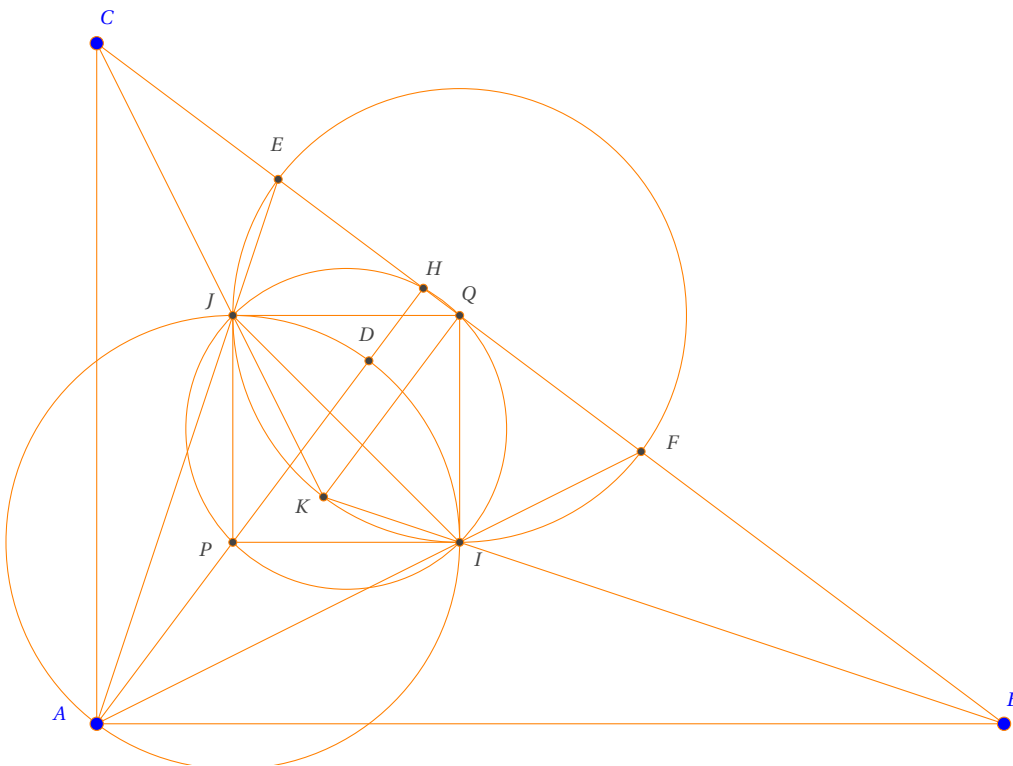
Tính chất 152. Cho tam giác ABC vuông tại A , có AH là đường cao. Gọi I, J, K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC, ABC .

1. K là trực tâm tam giác AIJ , $\angle IAJ = 45^\circ$, $\angle IKJ = 135^\circ$.
2. AK, AH đẳng giác qua $\angle IAJ$ hay giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt AH tại D , khi đó AD là đường kính. Từ đó suy ra $IDJK$ là hình bình hành.
3. Gọi P là trung điểm AD , khi đó P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ .
4. Đường tròn đường kính IJ cắt BC tại H, Q , khi đó $PJQI$ là hình vuông.
5. Q chính là hình chiếu của K lên BC .
6. Giả sử AI, AJ cắt BC tại E, F , khi đó $QE = QJ = QK = QI = QF$.



Tính chất 153. Cho tam giác ABC vuông tại A , có AH là đường cao. Gọi I, J, K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC, ABC .

1. K là trực tâm tam giác AIJ , $\angle IAJ = 45^\circ$, $\angle IKJ = 135^\circ$.
2. AK, AH đẳng giác qua $\angle IAJ$ hay giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt AH tại D , khi đó AD là đường kính. Từ đó suy ra $IDJK$ là hình bình hành.
3. Gọi P là trung điểm AD , khi đó P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ .
4. Đường tròn đường kính IJ cắt BC tại H, Q , khi đó $PJQI$ là hình vuông.
5. Q chính là hình chiếu của K lên BC .
6. Giả sử AI, AJ cắt BC tại E, F , khi đó $QE = QJ = QK = QI = QF$.
7. D là trực tâm tam giác AEF .

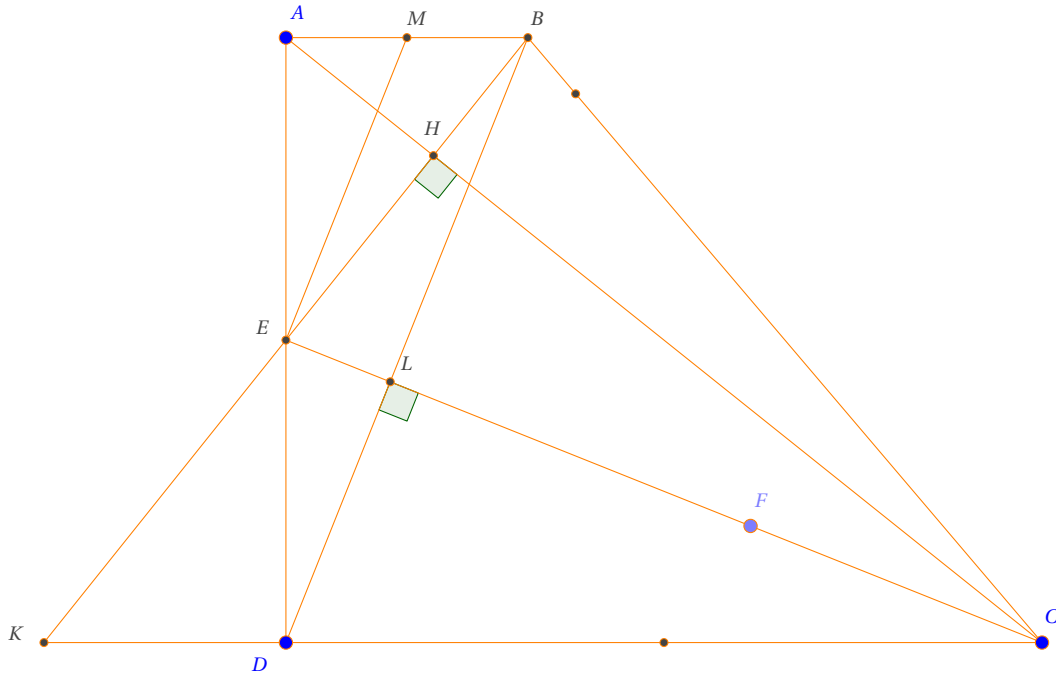


Bài tập 170. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$, đường cao AH . Gọi $K(1;3)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(Võ Quang Mẫn)

Tính chất 154. Cho hình thang $ABCD$ có $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ và E là trung điểm AC biết $EC \perp BD$. Gọi M là trung điểm AB . Khi đó

1. $BE \perp AC$.
2. $EM \perp EC$.



1. **Cách 1:** Gọi K là điểm đối xứng của B qua E . Ta có $AK \parallel BD$ nên $CE \perp AK$ hay E là trực tâm tam giác AKC hay $BE \perp AC$.

Cách 2: dùng tích vô hướng. Kiểm tra $\vec{BE} \cdot \vec{AC} = 0$ thông qua $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$ và $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. Chú ý $BD \perp AC$ nên $\triangle ABD \sim \triangle DEC$ hay $AB \cdot DC = AD \cdot ED = AE \cdot AD$ do đó suy ra $\vec{BE} \cdot \vec{AC} = AE \cdot AD - AB \cdot DC = 0$.

Cách 3 dùng phương tích Hạ $AH \perp BE$, nối BD cắt EC tại L . Ta có $EH \cdot EB = EA^2 = ED^2 = EL \cdot EC$ suy ra tứ giác $BCLH$ nội tiếp hay $\angle CHB = \angle CLB = 90^\circ$ hay A, H, C thẳng hàng do đó $AC \perp EB$.

2. Ta có EM là đường trung bình của tam giác ABD nên $EM \parallel BD$ suy ra $EM \perp EC$.

Bài tập 171. Cho hình thang $ABCD$ có $B(2;4)$, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ và A, C thuộc trục hoành. Gọi E là trung điểm AD , đường thẳng EC đi qua $F(-4;1)$. Tìm tọa độ A, C, D biết $EC \perp BD$ và E có tọa độ nguyên.

(HSG Thanh Hóa)

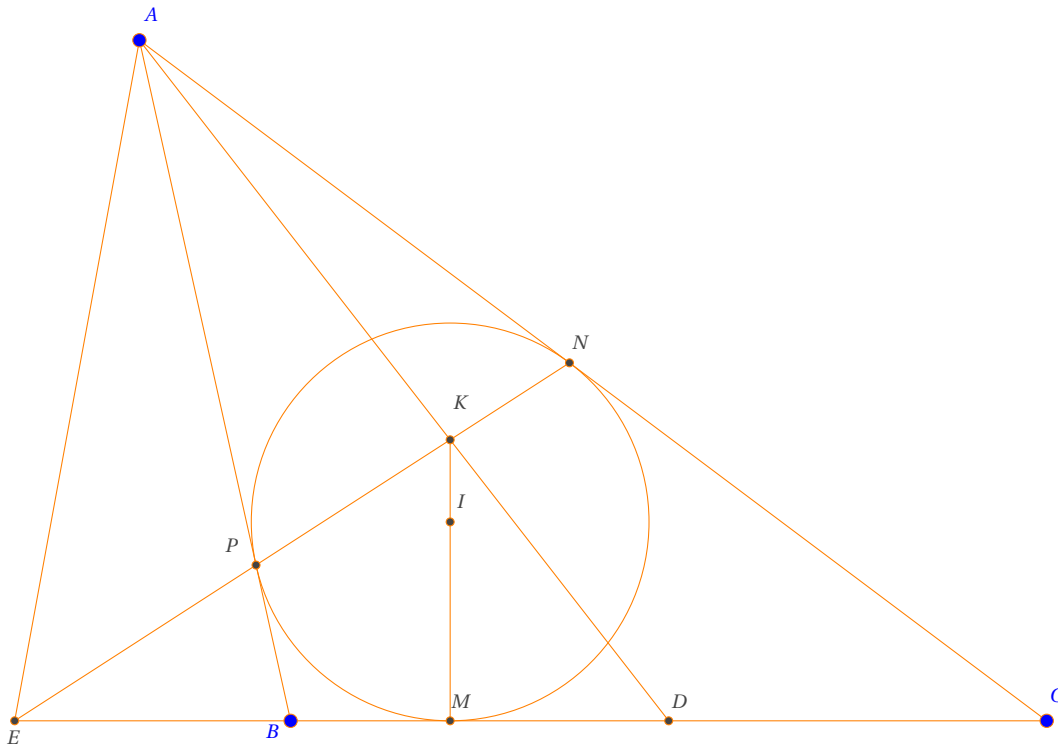
Đường thẳng $BE: x - 2 = 0$. Gọi $A(a;0), E(2;e)$. Suy ra trung điểm M của AB có tọa độ $M(\frac{a+2}{2}; 2)$.

Ta có hệ sau $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)^2 + 4e = 0 \\ -3(a-2) + (2-e)(1-e) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(a-2) + (2-e)(1-e) = 0 \\ e = -1 \\ e^3 - 7e^2 + 20e + 4 = 0 \quad (*) \end{cases} \text{ . Chú}$

ý các ước của 4 không là nghiệm của (*) nên phương trình (*) không có nghiệm nguyên. Do đó $\begin{cases} e = -1 \\ a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow E(2; -1), A(4; 0), D(0; -2), C(-1; 0).$

Tính chất 155. 1. PN, AD, MI đồng quy tại K .

2. Giả sử PN cắt BC tại E , khi đó $DM \cdot DE = DB^2 = DC^2$. (Tính chất hàng điểm điều hòa)



Hai tính chất này đã được mình chứng minh trong sách "Các tính chất hay dùng trong hình học phẳng Oxy-Võ Quang Mẫn", các em có thể xem lại ở tính chất 18 và tính chất 69.

Bài tập 172. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm tại các cạnh BC, CA, AB lần lượt là M, N, P . Gọi D là trung điểm BC . Biết $M(-1; 1)$, $NP: x + y - 4 = 0$, $AD: 14x - 13y + 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(HSG Nghệ An)

Tọa độ K là nghiệm của hệ $\begin{cases} 14x - 13y + 7 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(\frac{5}{3}; \frac{7}{3})$. Đường thẳng BC đi qua M và vuông

góc MK nên $BC: 8x + 4y + 3 = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ $\begin{cases} 14x - 13y + 7 = 0 \\ 8x + 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-\frac{1}{2}; 0)$. Tọa độ

E là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 8x + 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(-5; 9)$. Sử dụng tính chất $DM \cdot DE = DB^2 = DC^2$ suy ra

$$\begin{cases} B(-2;3), C(1;-3) \\ C(-2;3), B(1;-3). \end{cases}$$

- $B(-2;3), C(1;-3)$

Sử dụng $\overline{EPEN} = EM^2$ suy ra $P(0;4), N(3;1)$ do đó đường thẳng AB đi qua B, P nên có phương trình AB: $x-2y+8=0$, tương tự AC: $2x-y-5=0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Rightarrow A(6;7).$$

- $C(-2;3), B(1;-3)$

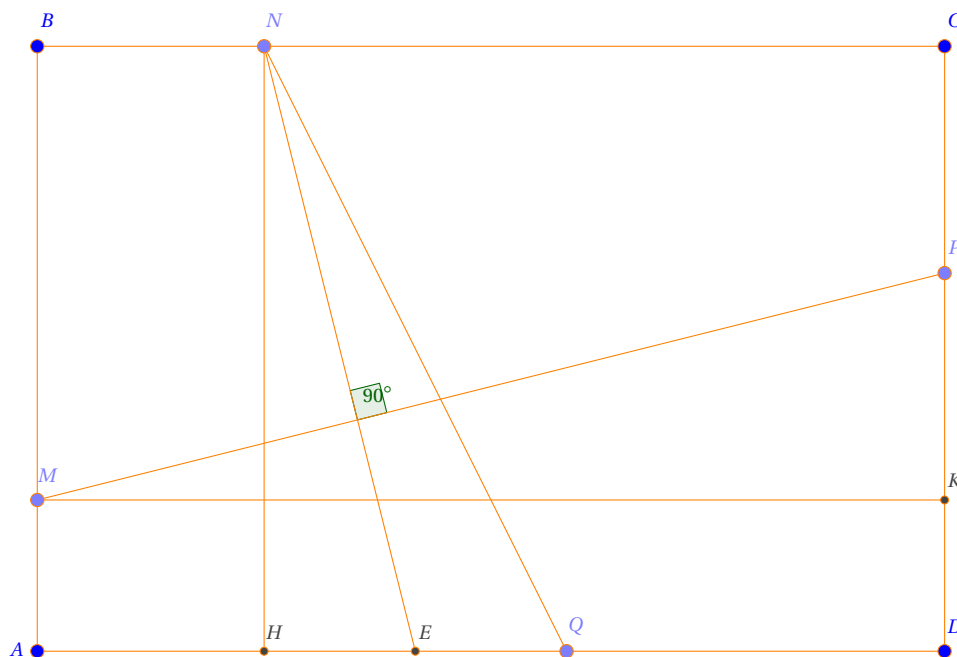
Giải tương tự ta cũng có $A(6;7)$.

Tính chất 156.

Bài tập 173. Cho tam giác ABC cân tại A có D là trung điểm AB. Biết $I(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}), J(\frac{13}{3}; \frac{5}{3})$ lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và trọng tâm tam giác ADC. Đường thẳng CD đi qua $M(3;-1)$ và đường thẳng AB đi qua $N(-3;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $y_A > 0$.

(Hùng Vương-Phú Thọ)

Tính chất 157. Cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm M, N, P, Q. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với MP cắt AD tại E. Khi đó $\frac{NE}{MP} = \frac{AB}{BC}$.



Hạ NH, MK vuông góc với AD, DC. Ta có $\triangle NHE \sim \triangle MKP$ do đó $\frac{NE}{MP} = \frac{AB}{BC}$. Đây là tính chất tương tự như mình đã bình trong sách Oxy về cách dựng các đỉnh của hình vuông, khi biết 4 điểm trên các cạnh

Bài tập 174. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 16. Các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm M(4;5), N(6;5), P(5;2), Q(2;1). Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Cách 1 dùng đại số

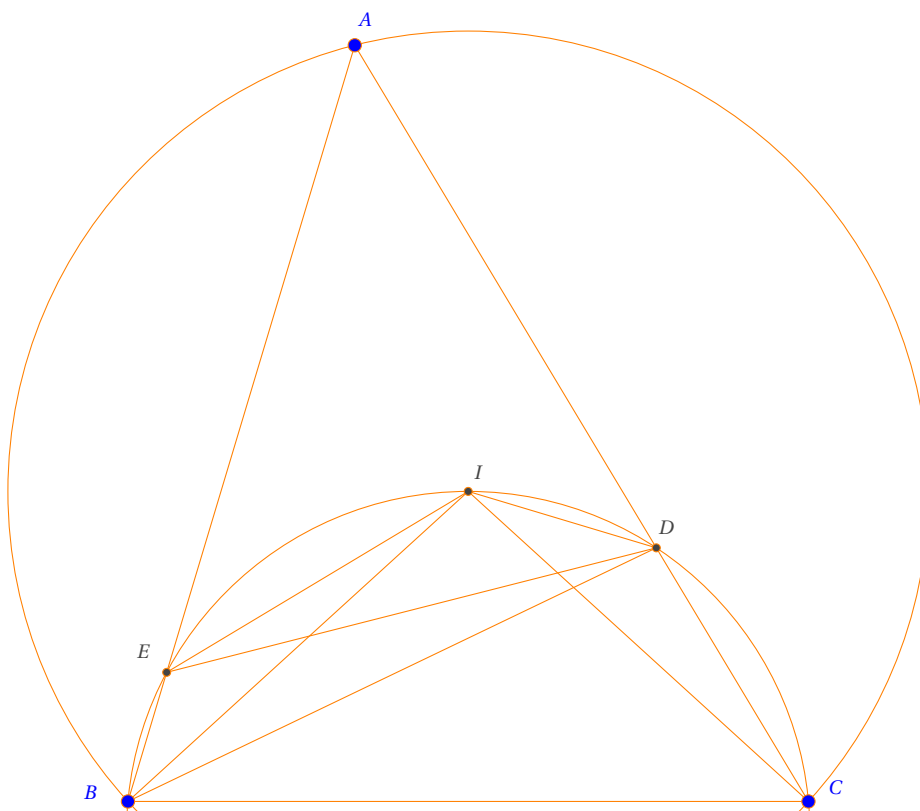
Đặt $AB = m, BC = n$. Gọi đường thẳng đi qua AD có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AD} = (a; b)$. Viết phương trình cạnh CD sau đó dùng khoảng cách $d(N, AD) = m, d(M, CD) = n$ rồi sử dụng $m.n = 16$.

Cách 2 dùng hình học

Đường thẳng NE đi qua MP có phương trình $NE: x - 3y + 9 = 0$. Gọi $E(3a - 9; a)$, ta có $\frac{NE}{MP} = \frac{AB}{BC} =$

Tính chất 158. 1. ID, IE lần lượt là trung trực của AB, AC

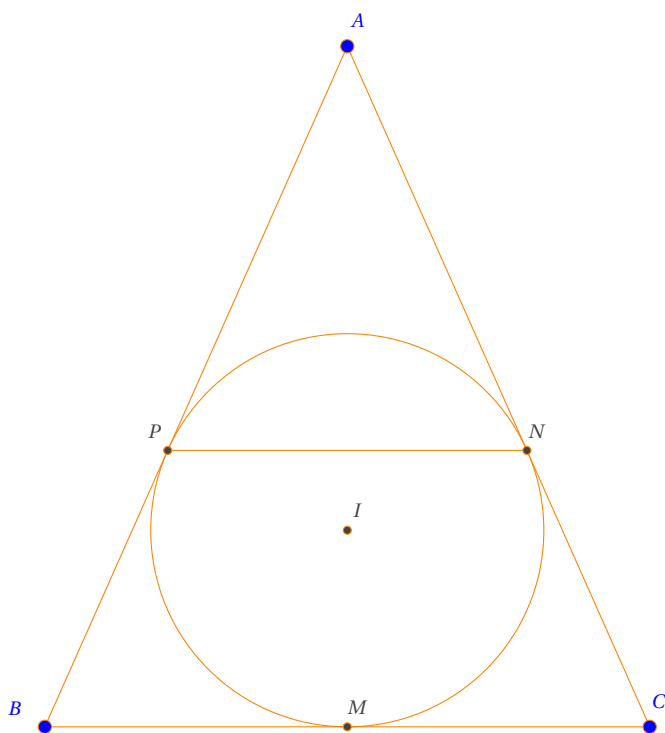
2. I là trực tâm tam giác ADE.



Xem chứng minh tính chất trong sách " Các tính chất hay dùng trong hình học phẳng Oxy-Võ Quang Mẫn , mục các tính chất kinh điển

Bài tập 175. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(0; \frac{29}{8})$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại $D(\frac{21}{10}; 1), E(0; \frac{13}{5})$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Tính chất 159.



Bài tập 176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(\frac{1}{2}; 3)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Cho biết $M(3; 3)$ và đường thẳng đi qua hai điểm N, P có phương trình $y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng A có tung độ âm.

(Chuyên Hùng Vương- Giai Lai lần 1)

Nhận xét: Đề cho dữ kiện A có tung độ âm là một dữ kiện thừa.

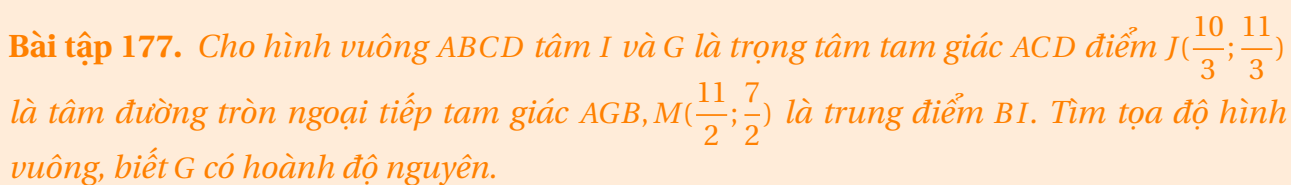
Đường thẳng BC đi qua M, B có phương trình BC: $y - 3 = 0$. BC song song PN do đó tam giác ABC cân tại A. Đường cao AM: $x - 3 = 0$. Gọi $P(a; 1)$, ta có $BM = BP$ suy ra $\begin{cases} P(2; 1) \\ P(-1; 1) \end{cases}$ loại vì $\angle PBM$ tù.

Đường thẳng AB đi qua B, P có phương trình AB: $4x + 3y - 11 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 4x + 3y - 11 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3; -\frac{1}{3}).$$

Bài toán tổng quát dạng này xem tính chất 18 trang 49 tập 1 sách " Các tính chất hay dùng trong hình học phẳng Oxy-Võ Quang Mẫn

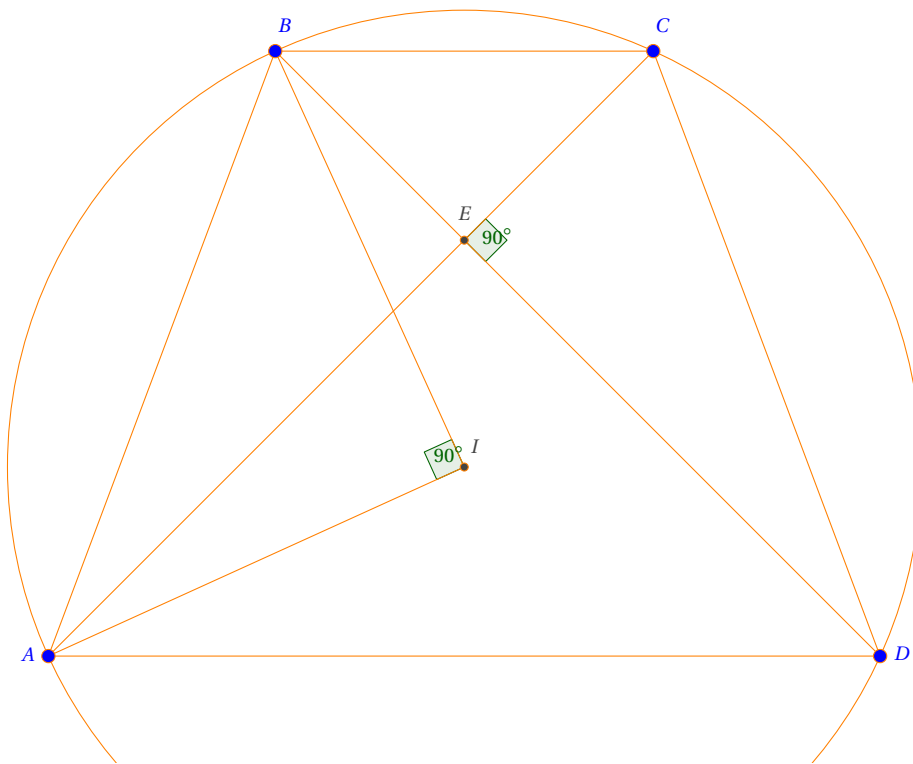
Tính chất 160. 1.

2. J là trọng tâm tam giác ABI.



Tính chất 161. $BE \perp CE$.





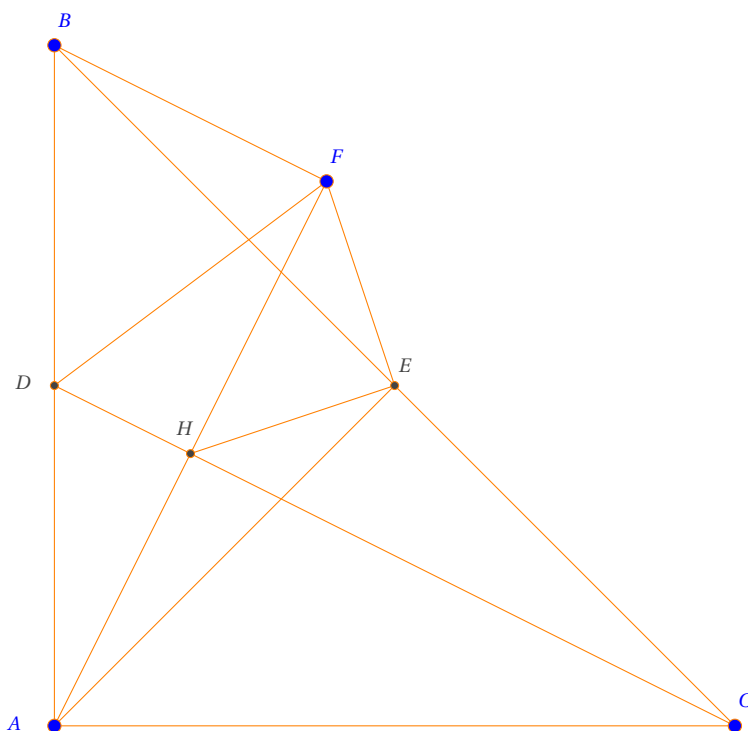
Ta có tam giác AED cân tại E suy ra $\angle EDA = 45^\circ$ do đó $\angle AIB = 2\angle ADB = 90^\circ$ hay $AI \perp BI$. Tôi đây bài toán hoàn toàn đơn giản. Suy ra $IA \parallel d$ và $IA = d(A; d)$. Để dàng giải ra được $I(2;1)$. Đường tròn tâm (I) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x-2y-5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3; -1).$$

Tọa độ C,D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x-3y+6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0;2) \\ D(3;3) \end{cases}.$$

Tính chất 164. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D, E là trung điểm các cạnh AB, BC. F là điểm đối xứng của A qua CD. Gọi H là giao điểm của AF và CD. Khi đó tam giác HEF vuông cân tại E.



Ta có $DF = DA = DB$ suy ra tam giác AFB vuông tại F do đó tứ giác $BFEA$ nội tiếp hay $\angle AFE = \angle ABE = 45^\circ$. Ta lại có tứ giác $AHEC$ nội tiếp suy ra $\angle FHE = \angle ACE = 45^\circ$. Do đó tam giác HEF vuông cân tại E .

Bài tập 181. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D, E là trung điểm các cạnh AB, BC . F là điểm đối xứng của A qua CD . Biết $E(5;5), F(2;6), y_A < 0$, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

(DHKK Huế lần 1)

Đường thẳng HE đi qua E và vuông góc FE nên có phương trình $HE : 3x - y - 10 = 0$. Gọi $H(h; 3h - 10)$, ta có $EH = EF$ suy ra $\begin{cases} H(4;2) \\ H(6;8) \end{cases}$.

- Trường hợp $H(4;2)$. Ta có H là trung điểm AF suy ra $A(6; -2)$ (thỏa mãn). Đường thẳng BC đi qua E và vuông góc AE nên có phương trình $BC : x - 7y + 30 = 0$. Đường thẳng BF đi qua F và vuông góc AH nên có phương trình $BF : x - 2y + 10 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x - 7y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2; 4).$$

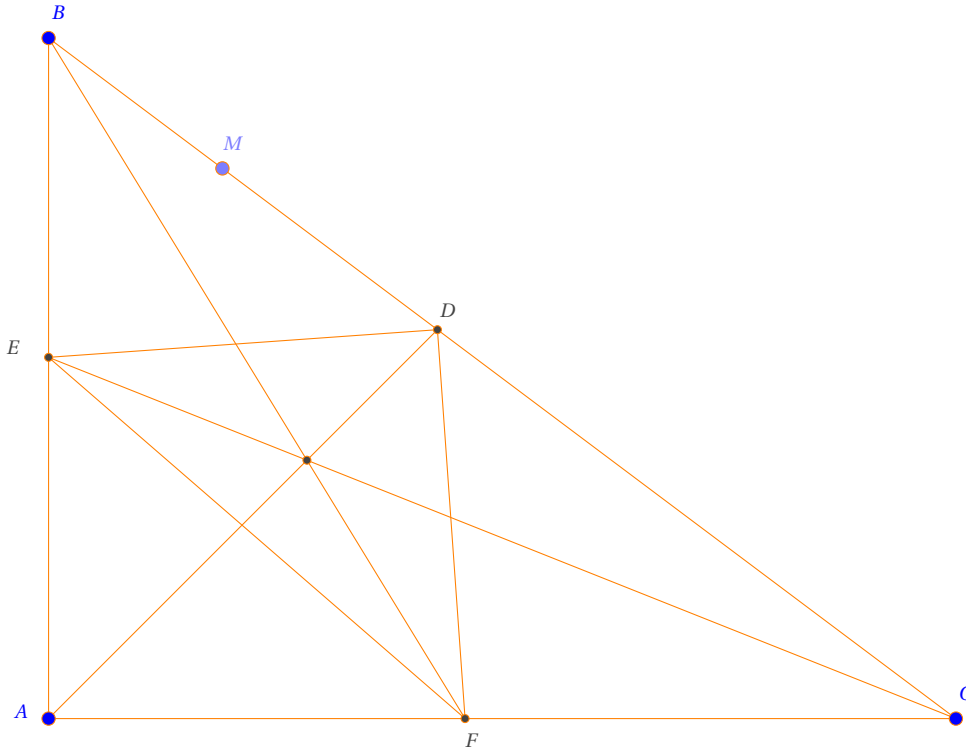
Điểm E là trung điểm BC suy ra $C(12; 6)$.

- Trường hợp $H(6;8)$. Lý luận tương tự suy ra $A(10; 10)$ loại.

Tính chất 165. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác trong AD. Các phân giác trong $\angle ADB, \angle ADC$ cắt AB, AC tại E, F.

1. Tam giác EDF vuông cân tại D.

2. AD, BF, CE đồng quy.



1. Ta có $\angle EAF = \angle EDF = 90^\circ$ do đó tứ giác AEDF nội tiếp. Suy ra $\angle DEF = \angle DAF = 45^\circ = \angle DAE = \angle DFE$ hay tam giác EDF vuông cân tại D.

2. Dùng định lý Ceva đảo ta có $\frac{AF}{FC} \frac{CD}{DB} \frac{BE}{EA} = \frac{AD}{DC} \frac{DC}{DB} \frac{BD}{DA} = 1$ do đó AD, BF, CE đồng quy.

Nhận xét: tính chất 2. vẫn còn đúng khi D bất kỳ trên cạnh BC.

Bài tập 182. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác trong AD. Các phân giác trong $\angle ADB, \angle ADC$ cắt AB, AC tại E(0;1), F(1;4). Tìm tọa độ đỉnh A, biết M(5;6) thuộc cạnh BC.

(Sienghoc lần 4)

Tam giác EDF vuông cân tại D suy ra $\begin{cases} D(2;2) \\ D(-1;3) \end{cases}$ loại vì D khác phía đối với M.

Đường thẳng BC đi qua M, D nên có phương trình BC: $4x - 3y - 2 = 0$. Đường thẳng DA đối xứng BC qua ED nên có phương trình $y - 2 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDF có phương trình (EDF): $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2} \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;2).$$

Bài tập 183. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác trong AD. Các phân giác trong $\angle ADB, \angle ADC$ cắt AB, AC tại E(0;1), F(1;4). Giả sử CE, BF cắt nhau tại $K(\frac{11}{13}; 2)$. Tìm tọa độ đỉnh A.

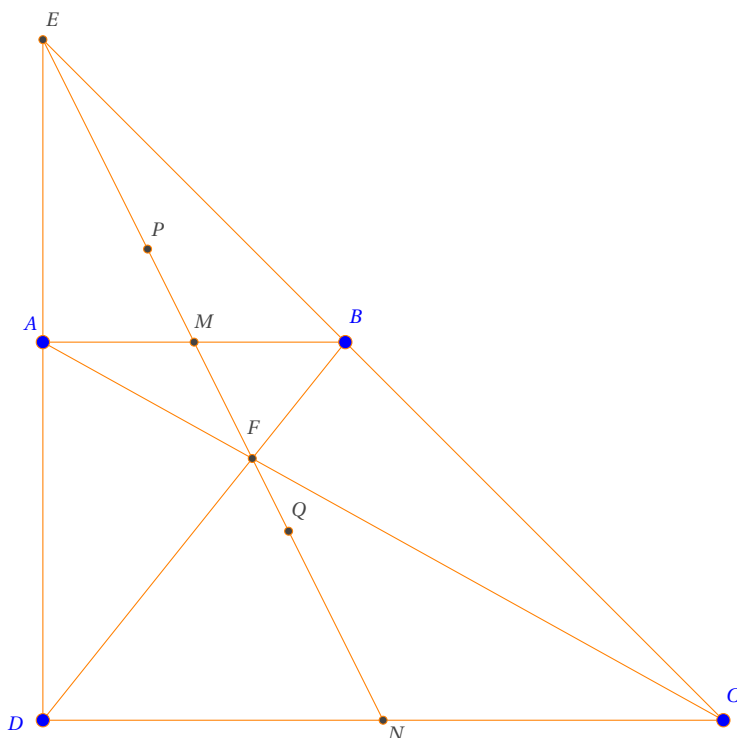
(Võ Quang Mẫn)

Tam giác EDF vuông cân tại D suy ra $\begin{cases} D(2;2) \\ D(-1;3) \end{cases}$ loại vì D khác phía đối với M.

Đường thẳng DK đi qua K, D nên có phương trình DK: $y - 2 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDF có phương trình (EDF): $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$. Chú ý A, K, D thẳng hàng nên tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2} \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 2).$$

Tính chất 166.



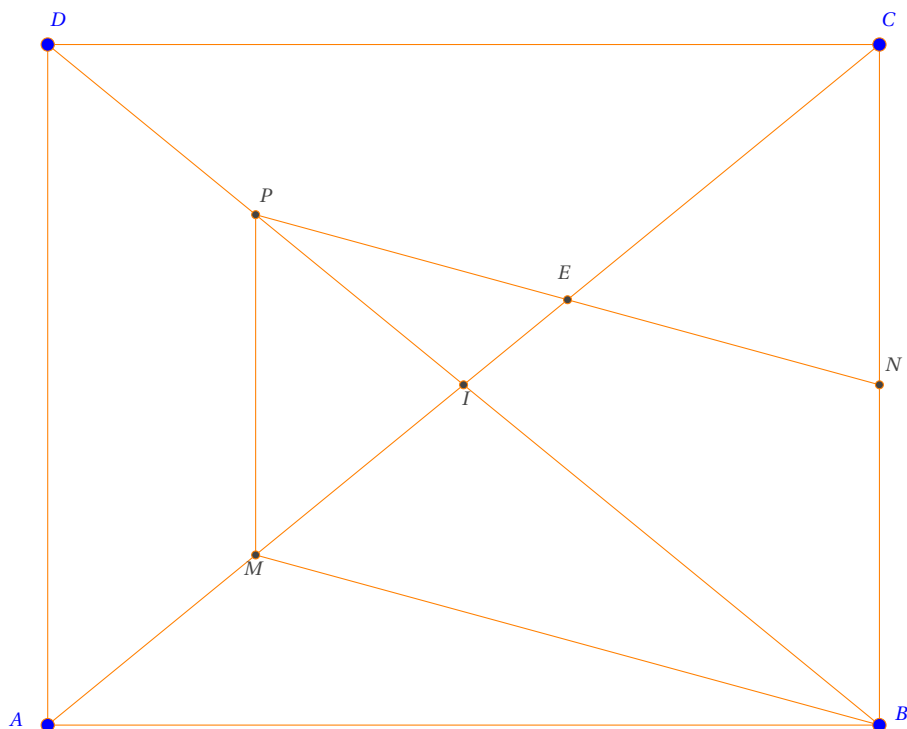
Ta có $(E, F, M, N) = -1$. Theo công thức Maclaurin ta có $PM \cdot PN = PF^2 = PE^2$.

Bài tập 184. Cho hình thang vuông tại A, D có đáy nhỏ AB. Các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại E, hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại F. Gọi P, Q là trung điểm của EF, MN. Biết $A(1; 2), P(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}), Q(3; 1)$.

(Trần Hưng)

Tính chất 167. 1. MPNB là hình bình hành.

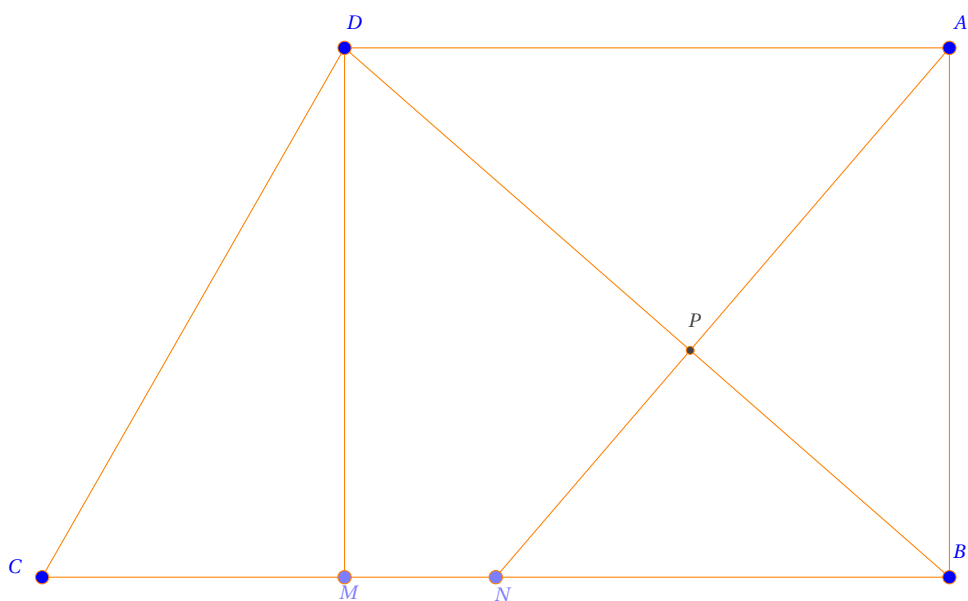
2. E là trung điểm MC.



Bài tập 185. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I, trung điểm AI là $M(-1;4)$. Gọi trung điểm của BC, ID lần lượt là N, P. Biết NP: $3x - 4y + 4 = 0$, $x_B = 3$ và N có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

(Chuyên Lê Hồng Phong - HCM lần 1)

Tính chất 168.



Bài tập 186. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B có $2BC = 3AD$. Gọi M là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật BADM, P là giao điểm của AN với BD và N là điểm trên cạnh BM sao cho $BM = 4MN$. Biết $N(-1; -2)$, $P(\frac{11}{7}; \frac{1}{7})$, $\sin \angle MAD = \frac{5}{\sqrt{89}}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

(Nguyễn Khuyển-HCM lần 3)

Tính chất 169.

Bài tập 187. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta : mx + 4y = 0$. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

(Lê Thủy -Quảng Bình lần 3)

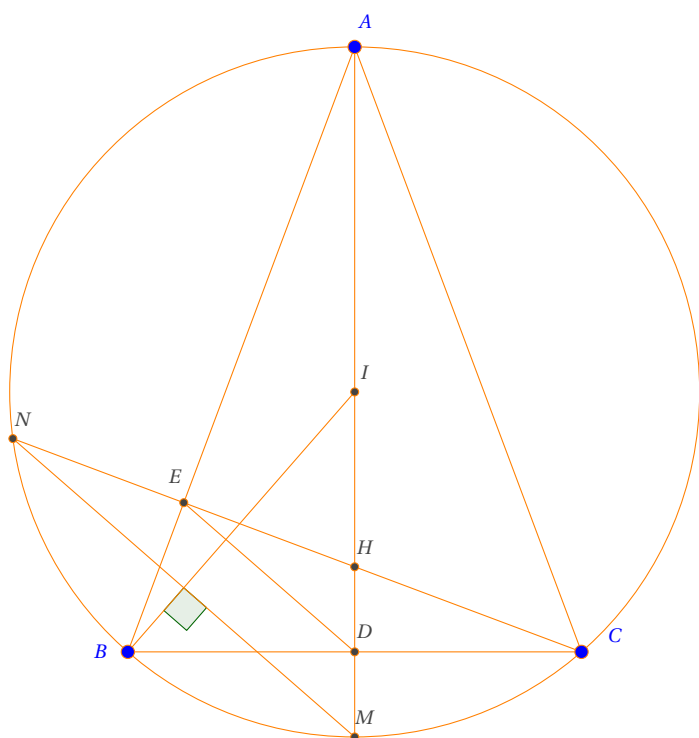
Tính chất 170.

Bài tập 188. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CD và BH. Biết điểm $A(1; 1)$, phương trình đường thẳng EF : $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D của hình chữ nhật.

(Ngô Sỹ Liên-Bắc Giang lần 3)

Tính chất 171. 1. $BI \perp ED$

2. $MN \perp BI$



Bài tập 189. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (C) có tâm $I(0;5)$. Đường thẳng AI cắt đường tròn (C) tại điểm $M(5;0)$, $M \neq A$. Đường cao đi qua C cắt (C) tại $N(-\frac{17}{5}; -\frac{6}{5})$, $N \neq C$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $x_B > 0$.

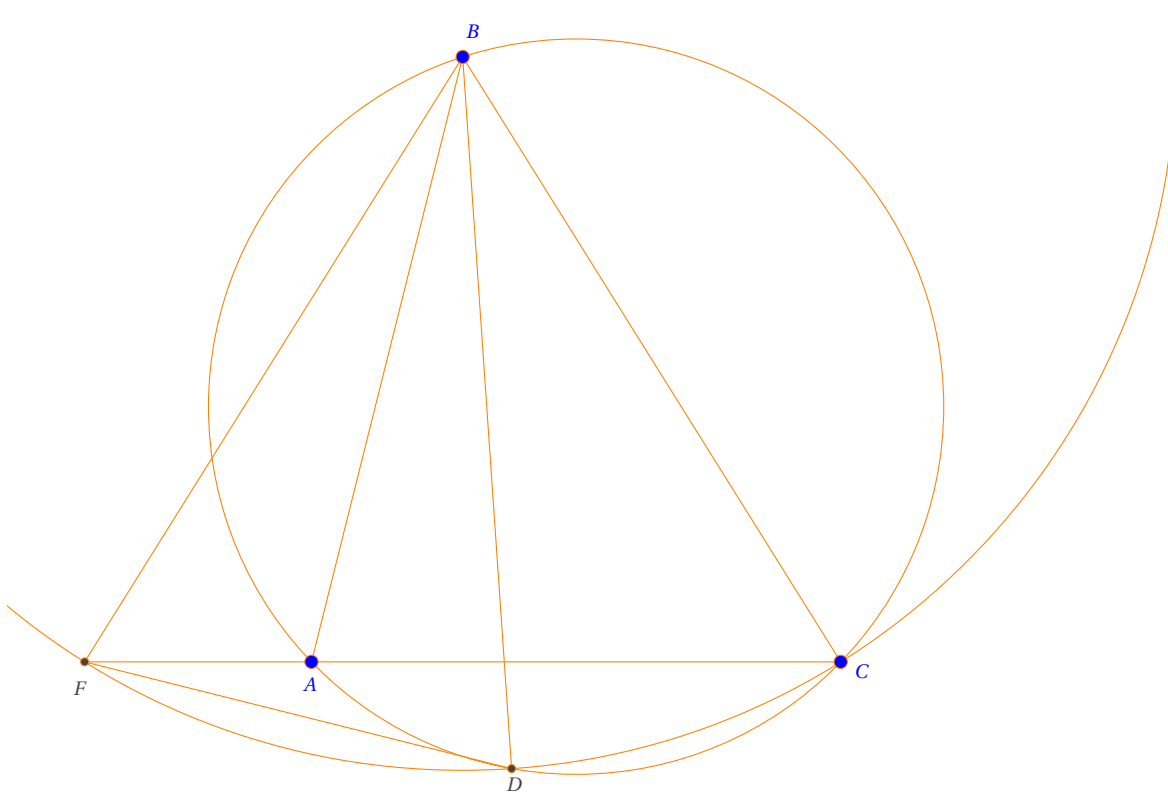
(Chuyên Tiền Giang lần 1)

Tính chất 172.

Bài tập 190. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng chứa trung tuyến và đường cao kẻ từ C lần lượt là $y + 2 = 0$ và $3x - 2y + 8 = 0$. Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A đi qua $K(-18;3)$. Tính $\angle ABC$ biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 2 = 0$.

(Chuyên Vinh lần 1)

Tính chất 173. $AB \perp DF$.



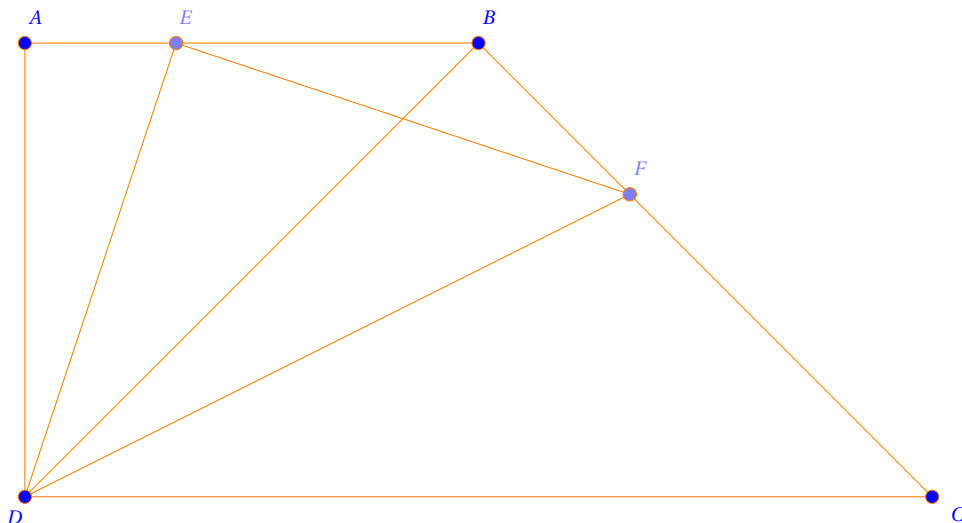
Ta có $\angle FBD = 2\angle ACD = \angle ABD$ suy ra BA là phân giác của $\angle DBF$. Mặt khác tam giác FBD cân tại B do đó $AB \perp DF$.

Bài tập 191. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (T) : $x^2 + y^2 = 9$, $AB < BC$. Đường tròn tâm B bán kính BC cắt (T) tại $D \neq C$ và cắt đường thẳng AC tại F. Biết $DF : x + y + 4 = 0$, $y_B > 0$, $M(-2; 1)$ thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ A, B.

(Hà Huy Tập- Nghệ An lần 1)

Tính chất 174. 1. Tam giác DEF vuông cân tại E

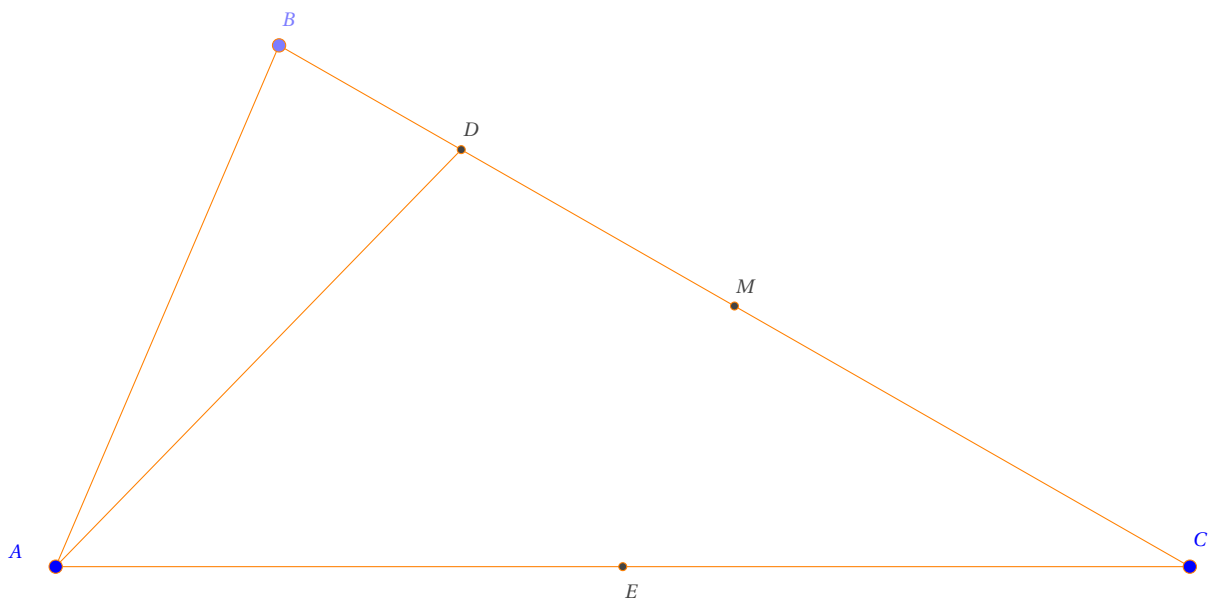
2. $BF = \frac{1}{3}BC$.



Bài tập 192. Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD$. Gọi E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $AB = 3AE$. Điểm F thuộc BC sao cho tam giác DEF cân tại E. Biết $E(2;4)$, phương trình của EF: $2x + y - 8 = 0$, $D \in d: x + y = 0$ và điểm A có hoành độ nguyên thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

(Quốc Oai - Hà Nội lần 1)

Tính chất 175. AD là đường đối trung khi và chỉ khi $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

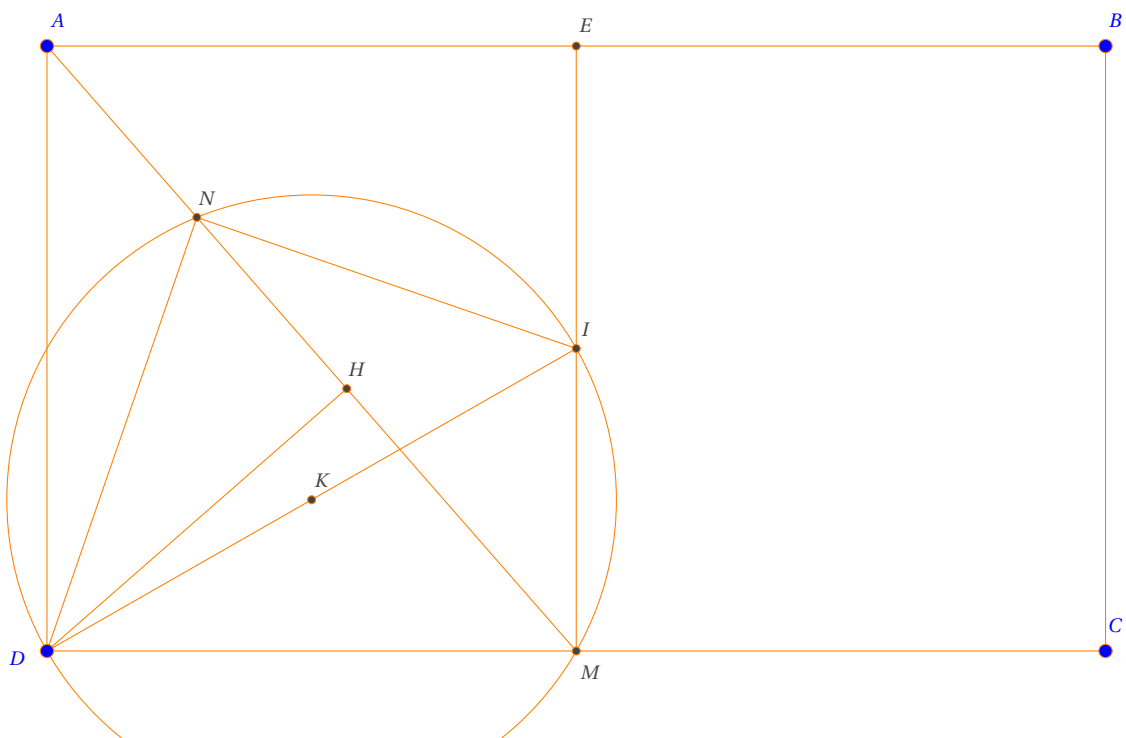


Bài tập 193. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$, điểm $M(1; \frac{9}{2})$ là trung điểm BC, D là điểm thuộc cạnh BC sao cho $\angle BAD = \angle CAM$. Gọi E là trung điểm của AC đường thẳng DE: $2x + 11y - 44 = 0$, $B \in d: x + y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết hoành độ A nguyên.

(Chuyên Biên Hòa lần 1)

Ta có AD là đường đối trung suy ra $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ hay $\frac{MD}{MB} = \frac{3}{5}$.

Tính chất 176.



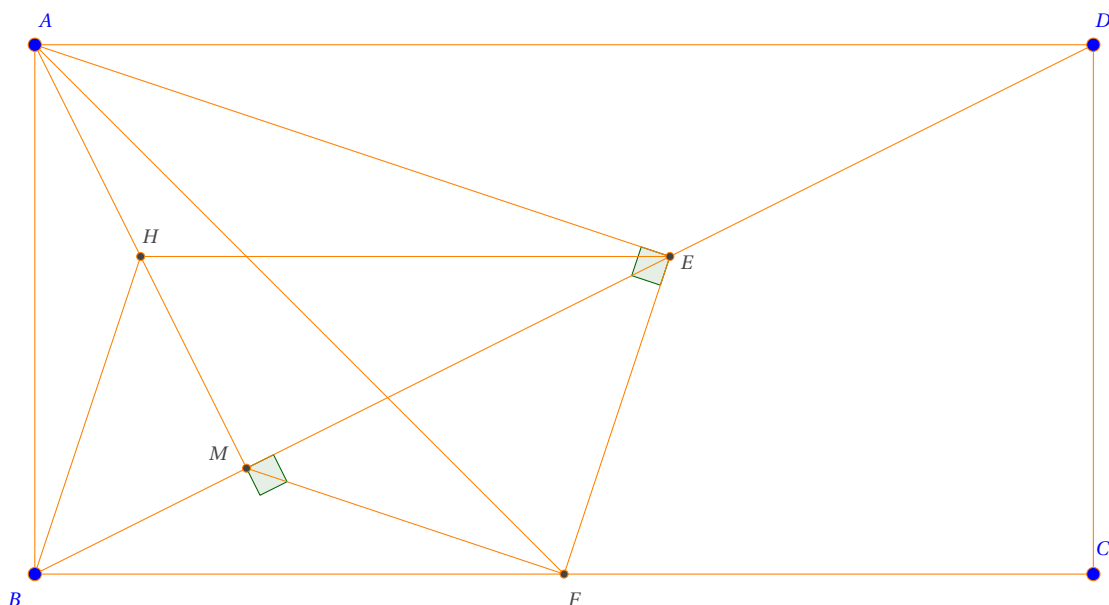
Gọi E là trung điểm AB suy ra AEMD là hình chữ nhật. Áp dụng tính chất hình chữ nhật cơ sở, ta có $DN \perp NI$ hay bốn điểm D, N, I, M nội tiếp.

Bài tập 194. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I, M là trung điểm CD. Gọi H là hình chiếu của D lên đường thẳng AM và N là trung điểm AH. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác IMN có phương trình (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. Xác định tọa độ B, D biết $D \in x - y - 1 = 0, y_D > 0$.

(Quảng Xương I lần 1)

Tính chất 177. Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $DM = 4MB$ và gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DM và BC. Khi đó

1. $AM \perp BD$.
2. $AE \perp EF$.
3. $\triangle AEF \sim \triangle AMB$ hay $\frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MB} = 2$.
4. Tam giác MFE vuông cân tại F.



1. Ta có $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{5BA} = \frac{BA}{BD}$ do đó $\triangle ABM \sim \triangle DBA$ hay $AM \perp BD$.
2. Gọi H là trung điểm AM. Ta có $HE \parallel AD, HE = \frac{1}{2}AD$ hay HEFB là hình bình hành, suy ra $HE \perp AB$. Mà $AM \perp BE$ do đó H là trực tâm ABE suy ra $BH \perp AE \Rightarrow AE \perp EF$.
3. Tứ giác AEFB nội tiếp suy ra $\angle AFE = \angle ABM$ do đó $\triangle AEF \sim \triangle AMB$ hay $\frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MB} = 2$.
4. Ta có $\angle MEF \angle BAF = 45^\circ$ và $\frac{AE}{ME} = \sqrt{2} = \frac{ME}{EF}$ do đó $\triangle AEM \sim \triangle MEF$ hay tam giác MFE vuông cân tại F.

Bài tập 195. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $DM = 4MB$ và gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DM và BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $E(1;6), F(2;3)$, D có hoành độ lớn hơn 1 và A có hoành độ âm.

(Lương Thế Vinh-Đồng Nai lần 1)

Đường thẳng AE đi qua E và vuông góc EF nên có phương trình AE: $x - 3y + 17 = 0$. Gọi $A(3a - 17; a)$, ta có $AE = 2EF$ suy ra $A(-5;4)$. Chú ý tam giác AFB vuông cân tại B nên

$$\begin{cases} B(-2;0) \\ B(-1;7) \end{cases} \text{ loại do cùng phía với E đối với AF}$$

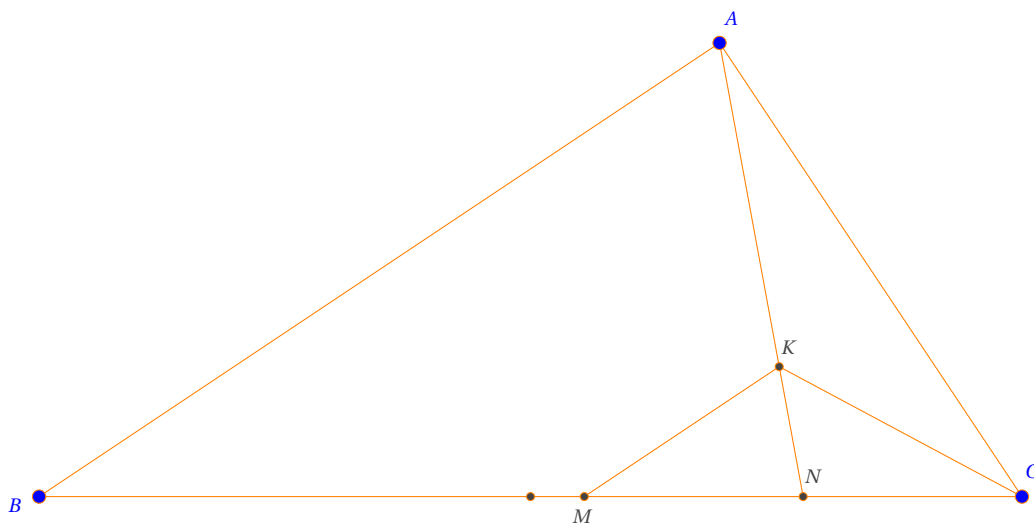
Điểm C đối xứng với B qua F nên $C(6;6)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $D(3;10)$.

Nhận xét: Đề cho D có hoành độ lớn hơn 1 là dư thừa. Chắc tác giả chỉ giải theo đại số nên quên mất tính chất duy nhất chỉ có 1 điểm D.

Bài tập 196. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $DM = 4MB$ và gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DM và BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $M(-1; 2)$, $F(2; 3)$, D có tung độ dương.

(Võ Quang Mẫn)

Tính chất 178. N là trung điểm của MC.



Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{NC}{AC} = \frac{NK}{KA} = \frac{NM}{MB} = \frac{NM}{AC}$ hay $NM = NC$ do đó N là trung điểm MC.

Bài tập 197. Cho tam giác ABC vuông ở A, trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = AC$. Đường thẳng qua M song song với AB cắt phân giác trong góc C tại I. Đường thẳng AI cắt BC tại N. Biết $B(3; 2)$, $M(3 - 2\sqrt{5}; 2)$, $N(-2 - \sqrt{5}; 2)$. Tìm tọa độ đỉnh A, C.

N là trung điểm của MC suy ra $C(-7; 2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác (ABC) : $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Đường tròn tâm C bán kính $CA = BM$ có phương trình $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ (x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-5; 6) \\ A(-5; -2) \end{cases}.$$

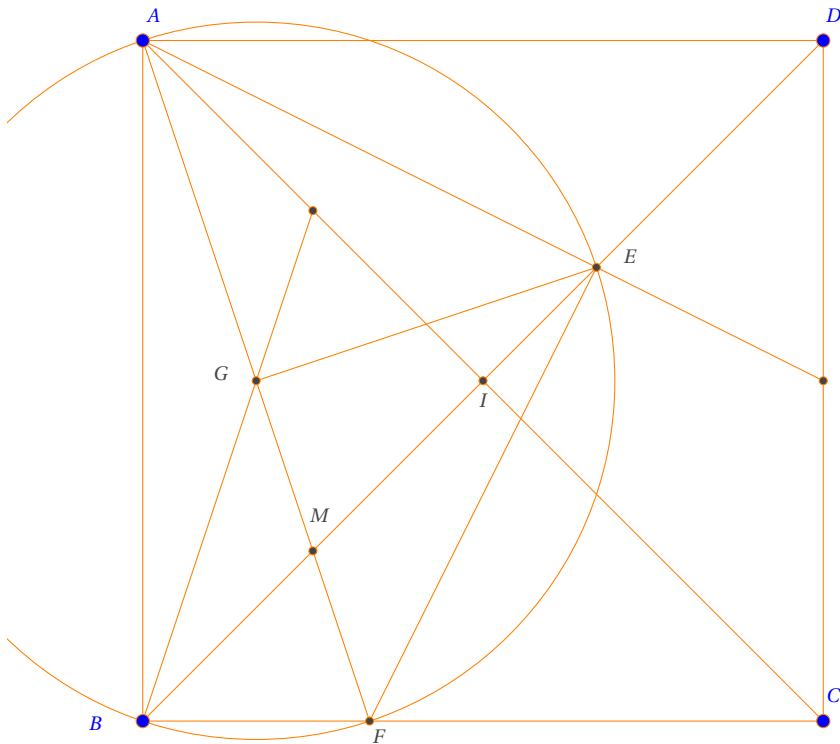
Tính chất 179.

Bài tập 198. Trong Oxy, cho hình thang vuông ABCD tại A và B, $BC = 2AD$. Hình chiếu của B lên CD là điểm $H(\frac{13}{5}; \frac{9}{5})$, trung điểm M của BC thuộc đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$, điểm $A(-3; 1)$. Xác định tọa độ B, C.

(Hai Bà Trưng - Huế lần 1)

Tính chất 180. Cho hình vuông ABCD có tâm I. Gọi G, E là trọng tâm tam giác ABI, ACD, Đường thẳng AG cắt BC tại F. Khi đó

1. $\frac{BF}{BC} = \frac{IE}{ID} = \frac{1}{3}$.
2. Tam giác AEF vuông cân tại E.
3. G là trung điểm AF.



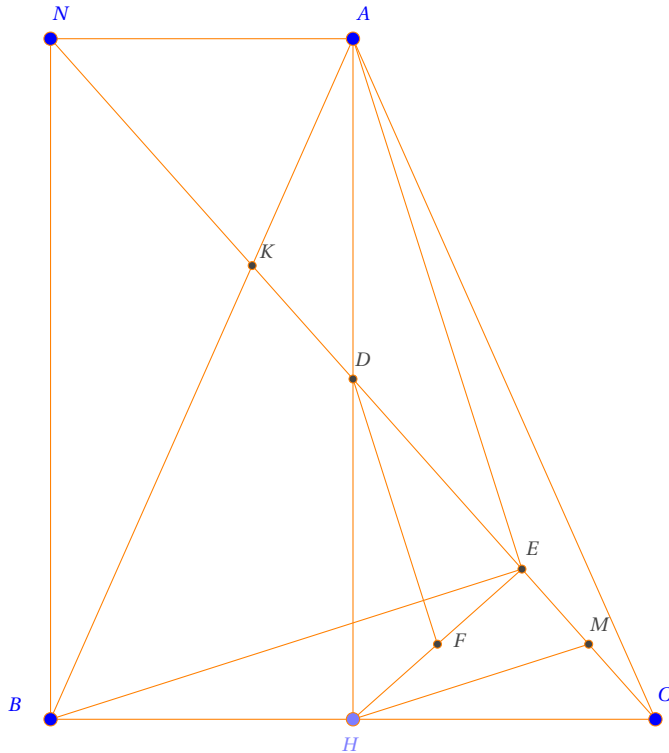
1. Ta có $\frac{BF}{BC} = \frac{BF}{AD} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{3} = \frac{IE}{ID}$.
2. Chú ý $AI \perp BD$ và $\frac{BF}{BC} = \frac{IE}{ID}$ nên theo tính chất của hình chữ nhật cơ sở ta có $EA \perp EF$ do đó tứ giác ABFE nội tiếp suy ra $\angle EAF = \angle EBF = 45^\circ$, Vậy tam giác AEF vuông cân tại E.
3. Ta có $FM = \frac{1}{3}MA$ và $MG = \frac{1}{3}AM$ do đó $GF = \frac{1}{2}AF$ hay G là trung điểm AF.

Bài tập 199. Cho hình vuông ABCD có tâm I. Gọi G, E là trọng tâm tam giác ABI, ACD, Đường thẳng AG cắt BC tại $F(4; \frac{4}{3})$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết $E(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3})$ và điểm A có tung độ nguyên.

(Nguyễn Minh Tiến lần 1)

Tính chất 181. 1. $BE \perp AE$.

2. Giả sử CD cắt AB tại K , ta có $AK = \frac{1}{3}AB$.



1. **Cách 1:** Gọi F, M là trung điểm của HE, CE . Ta có DF, MH là các đường trung bình của tam giác AHE, BCE do đó $DF \parallel AE, HM \parallel BE$. Mặt khác $\triangle DHE \sim \triangle HCE \Rightarrow \triangle DHF \sim \triangle HCM \Rightarrow \angle HDF = \angle CHM \Rightarrow DF \perp HM$. Do đó $BE \perp AE$.

Cách 2: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt CD kéo dài tại N , khi đó $AN = HC$ hay $ANBH$ là hình chữ nhật do đó năm điểm A, N, B, H, E nội tiếp. Suy ra $\angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$ hay $BE \perp AE$.

2. Ta có $AN = HC = \frac{1}{2}BC$ nên theo Thales suy ra $AK = \frac{1}{2}KB$ hay $AK = \frac{1}{3}AB$.

Bài tập 200. Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH . Gọi D là trung điểm AH . Giả sử $B(-1; 1), A \in 2x - y + 1 = 0$ và $E(2; 0)$ là hình chiếu vuông góc của H lên CD . Tìm tọa độ các đỉnh A, C .

(Đặng Thúc Hứa lần 1)

Đường thẳng AE đi qua E vuông góc BE nên $AE: 3x - y - 6 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(7; 15).$$

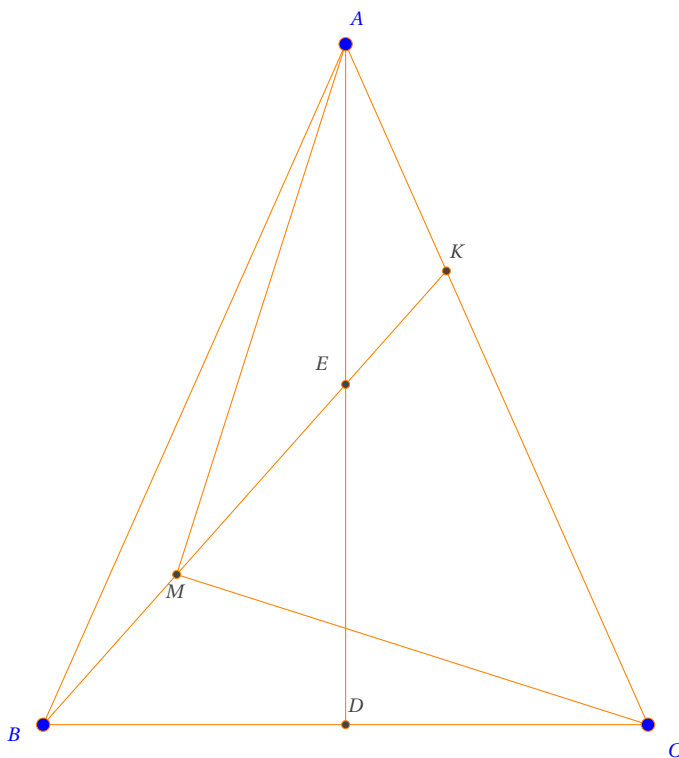
Điểm K thuộc đoạn AB sao cho $AK = \frac{1}{3}AB$ suy ra $K(\frac{13}{3}; \frac{31}{3})$. Đường thẳng $KE: 31x - 7y - 62 = 0$.

Cách 1 Gọi $N(n; \frac{31n-62}{7})$ ta có $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$ suy ra $N(\frac{559}{101}; \frac{1581}{101})$. Ta có $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BH}$ suy ra tọa độ $H(\frac{47}{101}; \frac{35}{101})$. Vì H là trung điểm BC suy ra $C(\frac{195}{101}; -\frac{31}{101})$.

Cách 2 Gọi $N(c; \frac{31c-62}{7})$. Sử dụng $AC = AB$ và C, E cùng phía đối với AB ta cũng giải ra $C(\frac{195}{101}; -\frac{31}{101})$.

Tính chất 182. 1. $AM \perp CM$

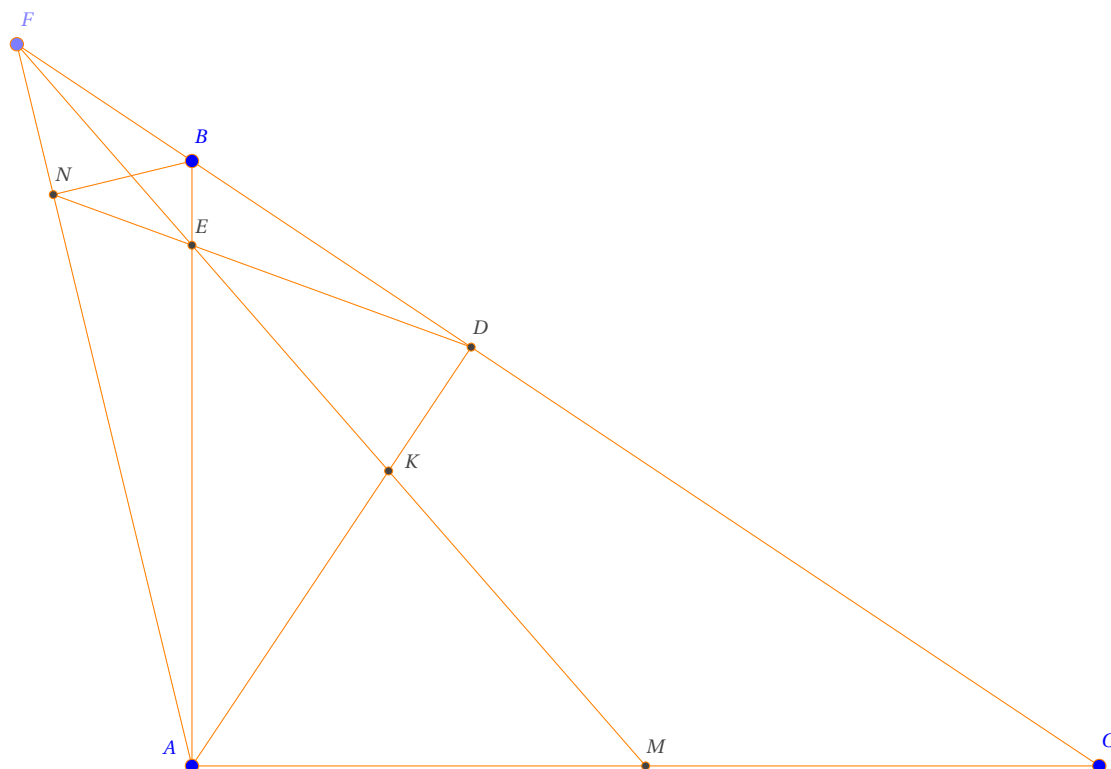
2. $AC = 3AK$



Bài tập 201. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB: 5x - y - 2 = 0$, $AC: x - 5y + 14 = 0$. D là trung điểm BC . E là trung điểm AD . $M(\frac{9}{5}; \frac{8}{5})$ là hình chiếu của D lên BE . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(HSG Bắc Ninh)

Tính chất 183. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AD . M là trung điểm AC . E là điểm bất kỳ trên cạnh AB . Đường thẳng ME cắt đường thẳng BC tại F . Đường thẳng DE cắt AF tại N . Khi đó $AF \perp BN$.

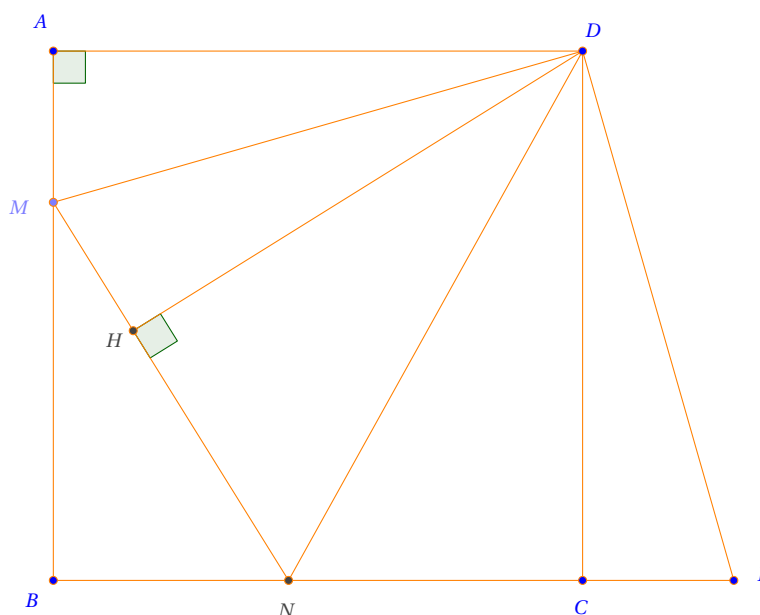


Áp dụng định lý Menelaus đối với tam giác ABC ta có $\frac{MC}{MA} \cdot \frac{EA}{EB} \cdot \frac{FB}{FC} = 1$ hay $\frac{EA}{EB} = \frac{FC}{FB}$ (1).
 Tương tự đối với tam giác FBA ta có $\frac{FN}{NA} \cdot \frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DF} = 1$ (2). Thế (1) vào (2) ta được $\frac{FN}{NA} \cdot \frac{FC}{FB} \cdot \frac{DB}{DF} = 1$.

Bài tập 202.

Tính chất 184. Cho hình vuông ABCD. M, N lần lượt trên hai cạnh AB và AC. Khi đó

$$AM + CN = MN \Leftrightarrow \angle MDN = 45^\circ \Leftrightarrow DH = AD \Leftrightarrow MD \text{ là phân giác của } \angle NMA$$



1. Giả sử $AM + CN = MN$.

Trên tia đối CB lấy điểm điểm I sao cho $CI = AM$. Khi đó
$$\begin{cases} \triangle DAM = \triangle DCI \\ \angle MDI = 90^\circ \\ MN = NI \end{cases} \Rightarrow \triangle DMN =$$

$\triangle DIN$ hay $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle MDI = 45^\circ$

2. Giả sử $\angle MDN = 45^\circ$.

Đựng I trên tia đối CB sao cho $\angle MDI = 90^\circ$. Khi đó ta có $\angle ADM = \angle CDI$ suy ra $\triangle MAD = \triangle CDI$ suy ra $MD = ID$ suy ra $\triangle MDN = \triangle IDN$ do đó $DH = DC = AD$.

3. Giả sử $DH = AD$.

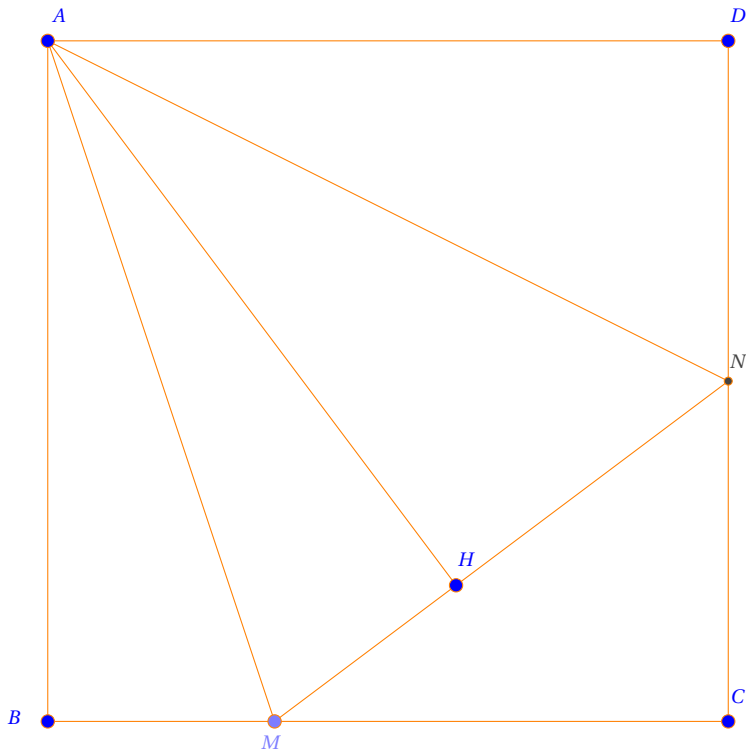
Để dàng thấy $\triangle MAD = \triangle MHD$ hay MD là phân giác $\angle AMN$

4. Giả sử MD là phân giác $\angle AMN$.

Dựng I trên tia đối CB sao cho $\angle MDI = 90^\circ$. Khi đó ta có $\begin{cases} \triangle MAD = \triangle ICD = \triangle MHD \\ \triangle MDN = \triangle IDN \end{cases}$ suy ra $AM + CN = MN$

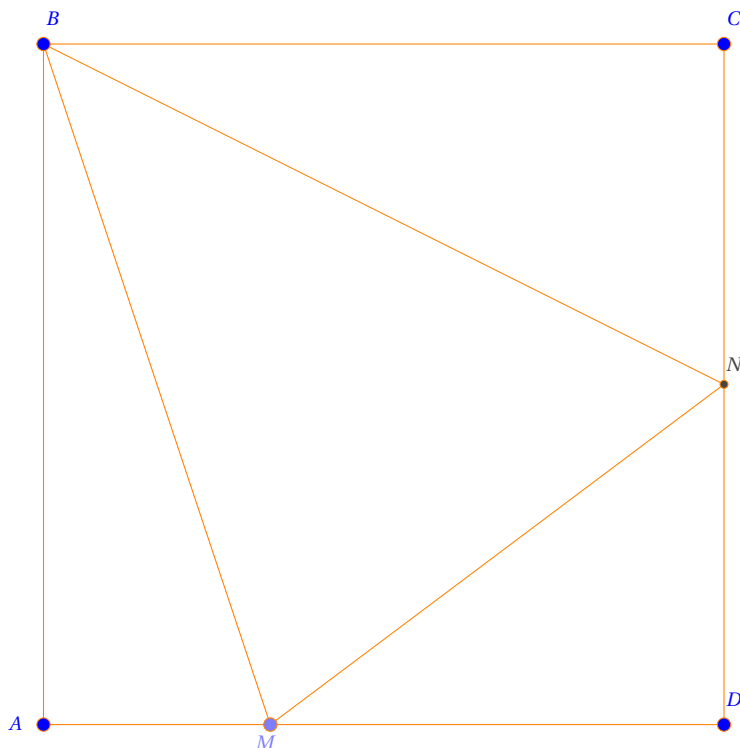
Bài tập 203. Cho hình vuông $ABCD$ có $A(4;6)$. Gọi $M(-4;0)$ và N là các điểm trên các cạnh BC, CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Biết $MN: 11x + 2y + 44 = 0$, tìm tọa độ hình vuông.

(Chuyên Hà Long lần 1)

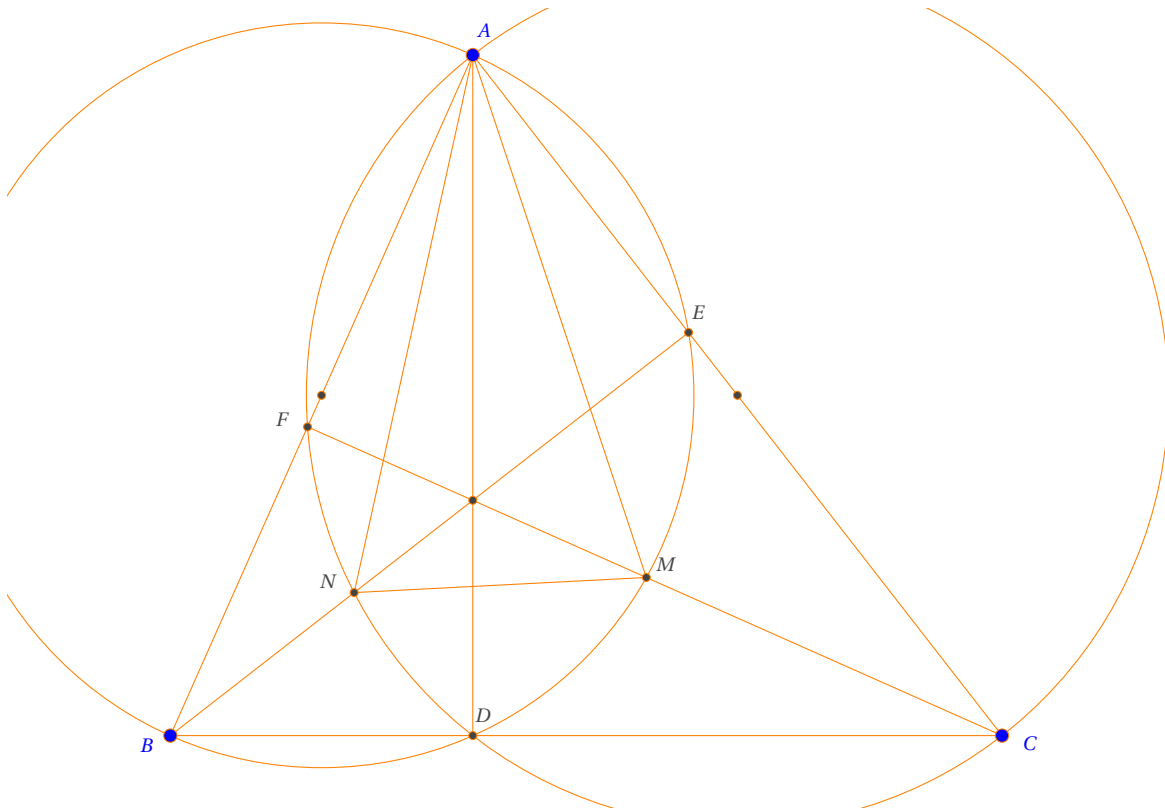


Bài tập 204. Cho hình vuông ABCD có $M(-2; -4)$ nằm trên cạnh AD và điểm N trên cạnh CD sao cho $\angle AMB = \angle BMN$. Biết $MN: 11x + 3y - 31 = 0, A \in Ox, y_B > 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(Thanh Chương III lần 1)



Tính chất 185. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE, CF. Đường tròn đường kính AB, AC lần lượt cắt các cạnh CF, BE tại M, N. Khi đó $AM = AN$.



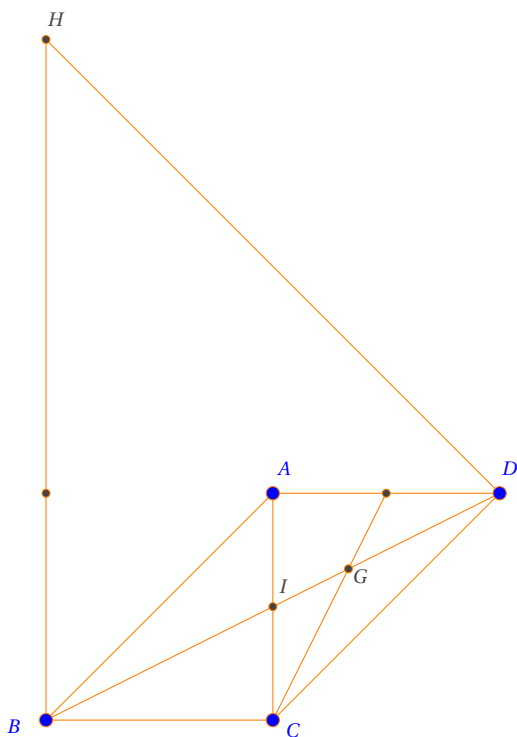
Áp dụng tính chất của tam giác vuông và phương tích ta có $AM^2 = AF \cdot AB = AE \cdot AC = AN^2$ do đó $A = AN$.

Bài tập 205. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE, CF . Đường tròn đường kính AB, AC lần lượt cắt CF, BE tại $M(3; -1), N(-1; -1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết $AB : 9x - 8y + 23 = 0$.

(Nguyễn Minh Tiến lần 5)

Gọi $A(a; \frac{9a+23}{8})$, từ $AM = AN$ suy ra $A(1; 4)$. Đường thẳng CF đi qua M và vuông góc AB nên $CF : 8x + 9y - 15 = 0$. Đường thẳng BM đi qua M vuông góc AM nên $BM : 2x - 5y - 11 = 0$ Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 5y - 11 = 0 \\ 9x - 8y + 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-7; -5)$. Đường thẳng AC đi qua A vuông góc BN nên $AC : 3x + 2y - 11 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 8x + 9y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{69}{11}; -\frac{43}{11})$.

Tính chất 186. $\angle BHD = 45^\circ$.



Bài tập 206. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\angle BAD = 135^\circ$, trực tâm tam giác ABD là $H(-1;0)$. Đường thẳng đi qua D, H có phương trình $x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành, biết $G(\frac{5}{3}; 2)$ là trọng tâm tam giác ACD .

(Chuyên Nguyễn Huệ lần 2)

Tính chất 187.

Bài tập 207. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, B sao cho $2AB^2 = 9BC \cdot AD$. Biết $C(4;0), D(1;4)$, trục tung cắt AB tại điểm M thỏa $MB = 2MA$. Tìm tọa độ A, B .

(Nguyễn Siêu - Hưng Yên lần 2)

Bài tập 208. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D sao cho $AB = 2AD, CD = 3AD$. Đường thẳng $BD: x - 2y + 1 = 0$. Đường thẳng AC đi qua $M(4;2)$. Tìm tọa độ điểm A , biết $S_{ABCD} = 10, x_A < 2$.

(Hoàng Hóa 4 lần 2)

Bài tập 209. Cho tam giác ABC có $A(1;4)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại D . Phân giác trong $\angle ADB$ có phương trình $x - y + 2 = 0$. Đường thẳng AC đi qua $M(-4;1)$. Viết phương trình đường thẳng AB .

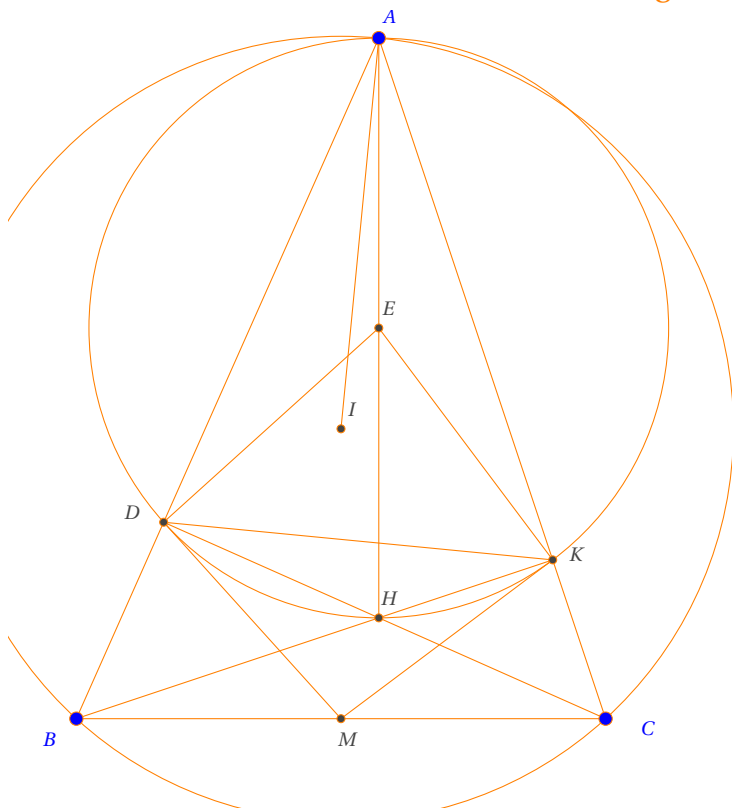
(Chuyên Hùng Vương lần 2)

Tính chất 188.

Bài tập 210. Cho tam giác ABC. $M(0; -2)$ là trung điểm BC. $K(2; 2)$ là hình chiếu của B lên AC. Đường thẳng đi qua A và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $\Delta: x + 1 = 0$. Tìm tọa độ B, C, biết $x_B < 0$.

(Đô Lương I-Nghệ An lần 1)

Lời bình và phân tích Để làm câu này yêu cầu các em cần nhớ lại các tính chất kinh điển đã học rồi vận dụng vào. Đề cho K, M và đường thẳng AI nên đầu tiên ta liên tưởng đến D là chân đường cao hạ từ C xuống AB và có tính chất kinh điển đã học là $AI \perp DK$ và $DM = DK$. Sau đó ta đi tìm điểm A dựa vào giả thiết $A \in x + 1 = 0$ bằng cách sử dụng tính bất biến đó là trung điểm E của AH thỏa $ED \perp MD$, $EK \perp MK$ và E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK.



Gọi D là chân đường cao hạ từ C xuống AB ta có tính chất kinh điển đã học là $DK \perp AI$ và tứ giác BDKC nội tiếp đường tròn tâm M bán kính MK. Đường thẳng KD đi qua K và vuông góc AI nên có phương trình $DK: y - 2 = 0$. Đường tròn tâm M bán kính MK có phương trình $x^2 + (y + 2)^2 = 20$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x^2 + (y + 2)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(-2; 2) \\ D(2; 2) \end{cases} \text{ loại vì trùng K}$$

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, E là trung điểm AH. Đường thẳng ED đi qua D và vuông góc với MD nên $ED: x - 2y + 6 = 0$. Đường thẳng EK đi qua K vuông góc MK nên $EK: x + 2y - 6 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(0; 3).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK chính là đường tròn tâm E bán kính ED nên có phương

trình (ADK) : $x^2 + (y-3)^2 = 5$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x^2 + (y-3)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1;5) \\ A(-1;1) \end{cases}.$$

- A(-1;5)

Đường thẳng AB đi qua A, D nên có phương trình AB : $3x - y + 8 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -4).$$

Đường thẳng AC đi qua A, K nên có phương trình AC : $x + y - 4 = 0 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

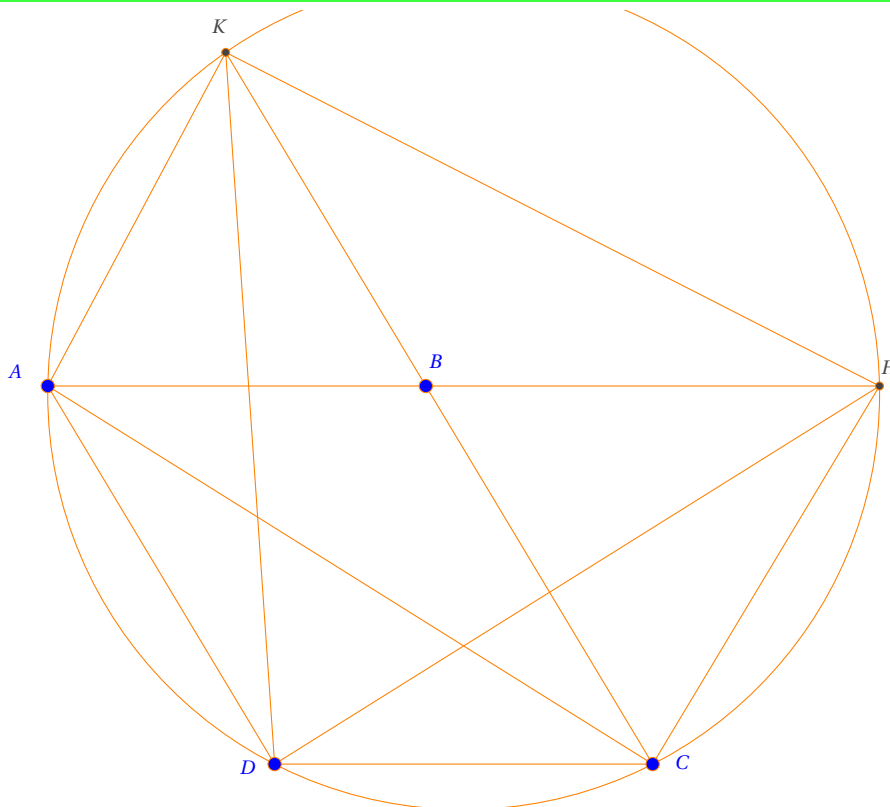
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0).$$

- A(-1;1)

Làm tương tự ta được B(4; -4) và C(-4;0) loại.

Tính chất 189. Vẽ hình bình hành ABCD với góc ở đỉnh A nhọn. Trên các tia AB và CB lấy các điểm H và K tương ứng sao cho $CH = BC$; $AK = AB$. Khi đó

1. A, K, H, C, D nội tiếp đường tròn.
2. $DK = DH = AC$.



1. Ta có $\angle AKB = \angle ABK = \angle CBH = \angle CHA$ do đó tứ giác AKBC nội tiếp. Mặt khác AKCD là hình thang có $\angle AKC = \angle ABK = \angle DCK$ nên là hình thang cân, do đó nội tiếp. Vậy A, K, H, C, D nội tiếp đường tròn.

2. Tương tự như trên ta cũng có $ADCH$ là hình thang cân. Do đó $\triangle KAD = \triangle DCH$ hay $DK = DH$.

Bài tập 211. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ với góc ở đỉnh A nhọn. Trên các tia AB và CB lấy các điểm $H(11;5)$ và $K(6;6)$ tương ứng sao cho $CH = BC$; $AK = AB$. Điểm $M(-3;3)$ thuộc AD và khoảng cách từ A xuống đường thẳng BC bằng $3\sqrt{5}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng D có tung độ là một số âm.

(Nhomtoan lần 6)

Trung trực HK có phương trình $5x - y - 37 = 0$. Đường thẳng KC đi qua K và $d(M; KC) = 3\sqrt{5}$ nên

$$\begin{cases} KC: 2x - y - 6 = 0 \\ KC: x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

Do đó đường thẳng AD đi qua M song song với KC nên

$$\begin{cases} AD: 2x - y + 9 = 0 \\ AD: x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

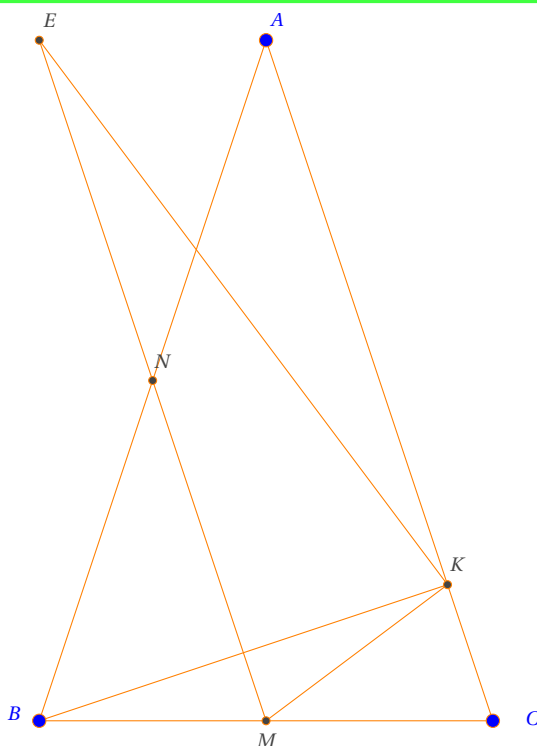
Suy ra tọa độ

$$\begin{cases} D(7; -2) \\ D(0) \end{cases}$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác (KHD) : cắt đường thẳng KC, AD ra tọa độ $C(12;3), A(5;-1)$. do đó $B(10;4)$.

Tính chất 190. 1. $KE \perp EM$.

2. ME là trung trực BK .



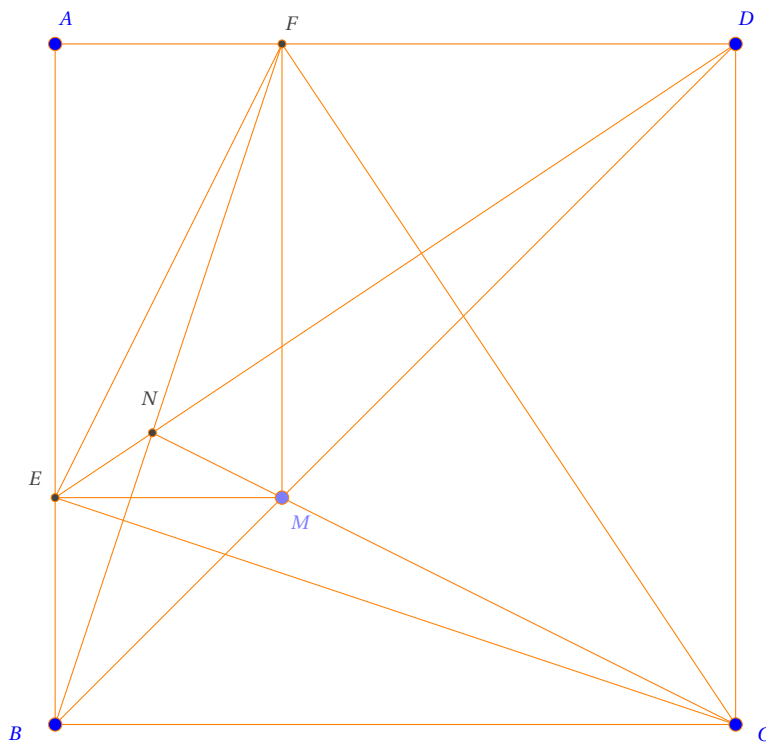
Bài tập 212. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi $M, K(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5})$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC . Điểm $E(3; 0)$ là đối xứng của M qua trung điểm N của AB . Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C biết $M \in 4x + y - 2 = 0$.

(Lê Hồng Phong-Phú Yên lần 1)

Tính chất 191. 1. N, M, C thẳng hàng.

2. $MN \perp EF$.

3.

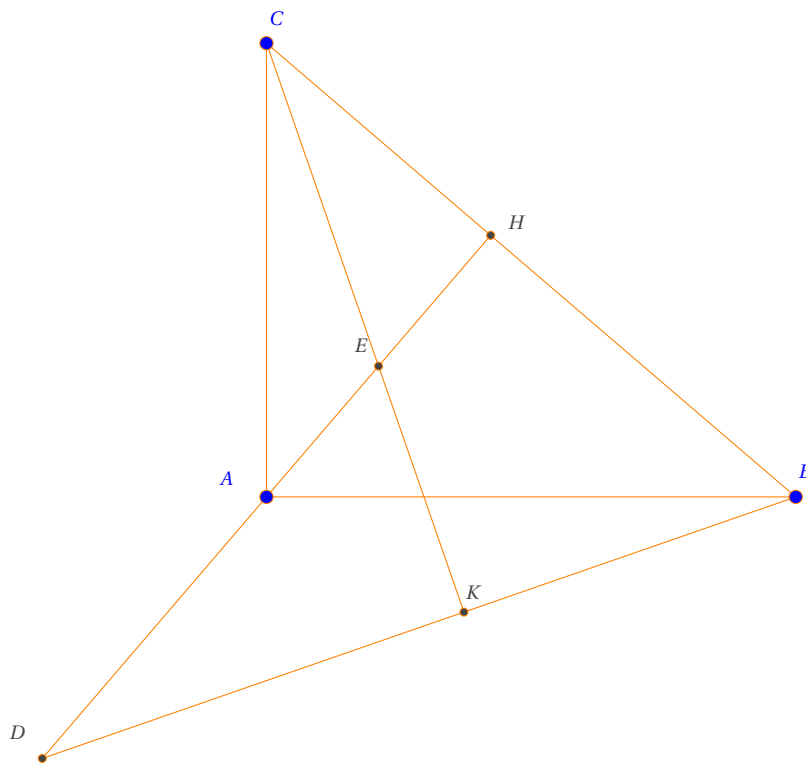


Để thấy $\triangle DAE = \triangle CDF$ suy ra $BD \perp CF$. Tương tự $FB \perp EC$ do đó N là trực tâm tam giác CEF . Hay $CN \perp EF$. Mặt khác dễ thấy $CM \perp EF$ do đó N, M, C thẳng hàng và $MN \perp EF$.

Bài tập 213. Cho hình vuông $ABCD$. M là điểm trên đường chéo BD . Gọi E, F là hình chiếu của M lên AB, AD . N là giao điểm của DE và BF . Giả sử $E(-2; 2)$ và $BF : 3x + y - 3 = 0$ và $MN : x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A, B, C, D .

(Chuyên ĐHSP lần 3)

Tính chất 192. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng của H qua A và E là trung điểm AH . $CE \perp BD$.



Ta có $HE \cdot HD = HA^2 = HC \cdot HB$ suy ra $\triangle CHE \sim \triangle DHB$ do đó $\angle CFH = \angle FDK$ hay tứ giác $CHKD$ nội tiếp, tức $CE \perp BD$.

Cách 2 Gọi M là trung điểm CH , áp dụng tính chất hình chữ nhật cơ sở ta có $AM \perp EB$. Mà $CD \parallel AM$ nên $CD \perp EB$ hay E là trực tâm tam giác BCD do đó $CE \perp BD$.

Cách 3 Gọi K là điểm đối xứng của B qua C . Làm tương tự A là trực tâm tam giác BKD hay $AK \perp BD$. Mà $AK \parallel CE$ nên $EC \perp BD$.

Bài tập 214. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng của H qua A và E là trung điểm AH . Biết $C(7; -2), E(4; -1)$ và BD đi qua $F(0; 2)$. Tìm tọa độ đỉnh A .

(Sienghoc lần 5)

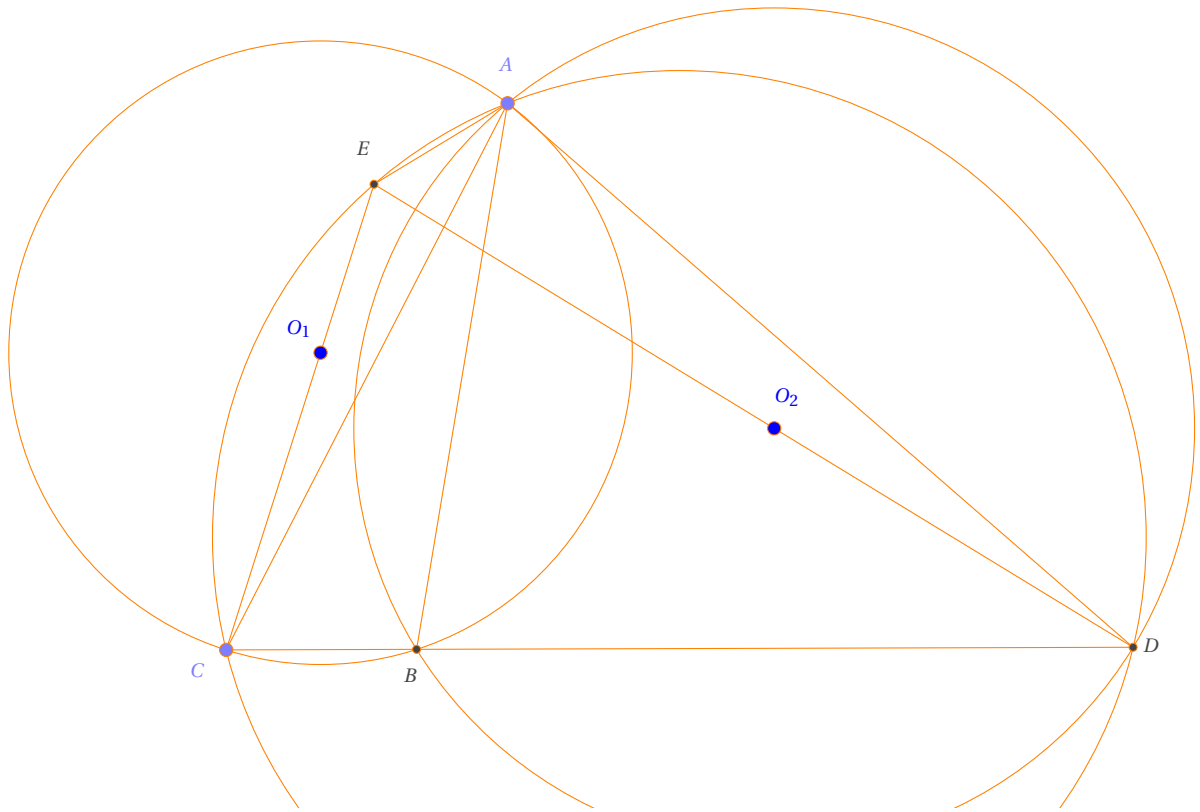
Đường thẳng $CE: x+3y-1=0$ Đường thẳng BD đi qua F vuông góc với CE nên $BD: 3x-y+2=0$. Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y-1=0 \\ 3x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow K(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}).$$

Tứ giác $CBKD$ nội tiếp suy ra $EC \cdot EK = EH \cdot ED = 3EH^2$ do đó $EH = \sqrt{5}$. Đường tròn tâm E bán kính EH có phương trình $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$. Đường tròn đường kính CE có phương trình $(CE): (x-\frac{11}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ (x-\frac{11}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(6; 0) \\ H(5; -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; -2) \\ A(3; 1) \end{cases}.$$

Tính chất 193. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B . Một đường thẳng qua B cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại C, D khác B . Các đường thẳng CO_1, DO_2 cắt nhau tại E . Khi đó C, E, A, D nằm trên đường tròn.



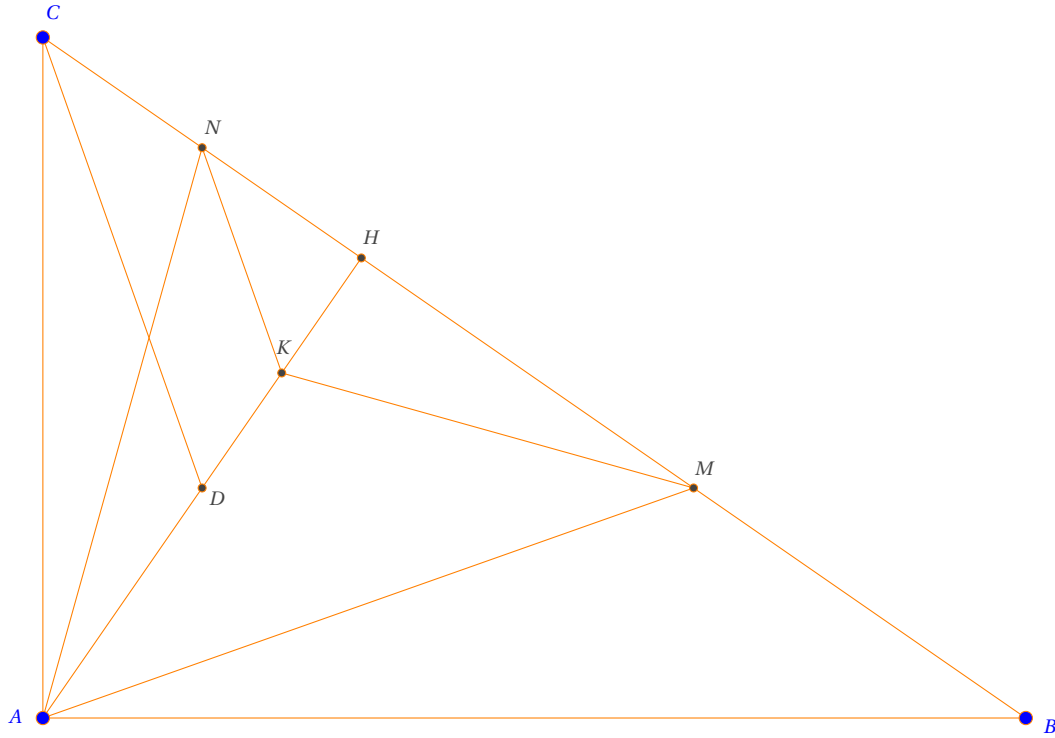
Ta có $\angle ECD + \angle EDC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CO_1B) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BO_2D) = 90^\circ - \angle CAB + 90^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle CAD$ do đó $\angle CED = \angle CAD$ hay C, E, A, D nằm trên đường tròn.

Bài tập 215. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B . Một đường thẳng qua B cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại C, D khác B . Các đường thẳng CO_1, DO_2 cắt nhau tại E . Biết $\angle ACD = \angle EDC, E(1;2), C(1;-3), D(5;2)$. Tìm tọa độ đỉnh A .

(Định Công Diệu lần 1)

Ta có C, E, A, D nội tiếp và $\angle ACD = \angle EDC$ nên $CEAD$ là hình thang cân.

Tính chất 194. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , các điểm M, N lần lượt là trung điểm của HB và HC . D là trung điểm AH . Khi đó trực tâm K của tam giác AMN là trung điểm DH .



Theo tính chất hình chữ nhật cơ sở ta có $CD \perp AM$. Mặt khác $NK \perp AM$ nên $AD \parallel NK$ hay K là trung điểm DN.

Bài tập 216. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, các điểm $M(2; -1)$, N lần lượt là trung điểm của HB và HC. Điểm $K(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ là trực tâm tam giác AMN. Tìm tọa độ điểm C, biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $x + 2y + 4 = 0$.

(Chuyên Nguyễn Quang Diêu lần 1)

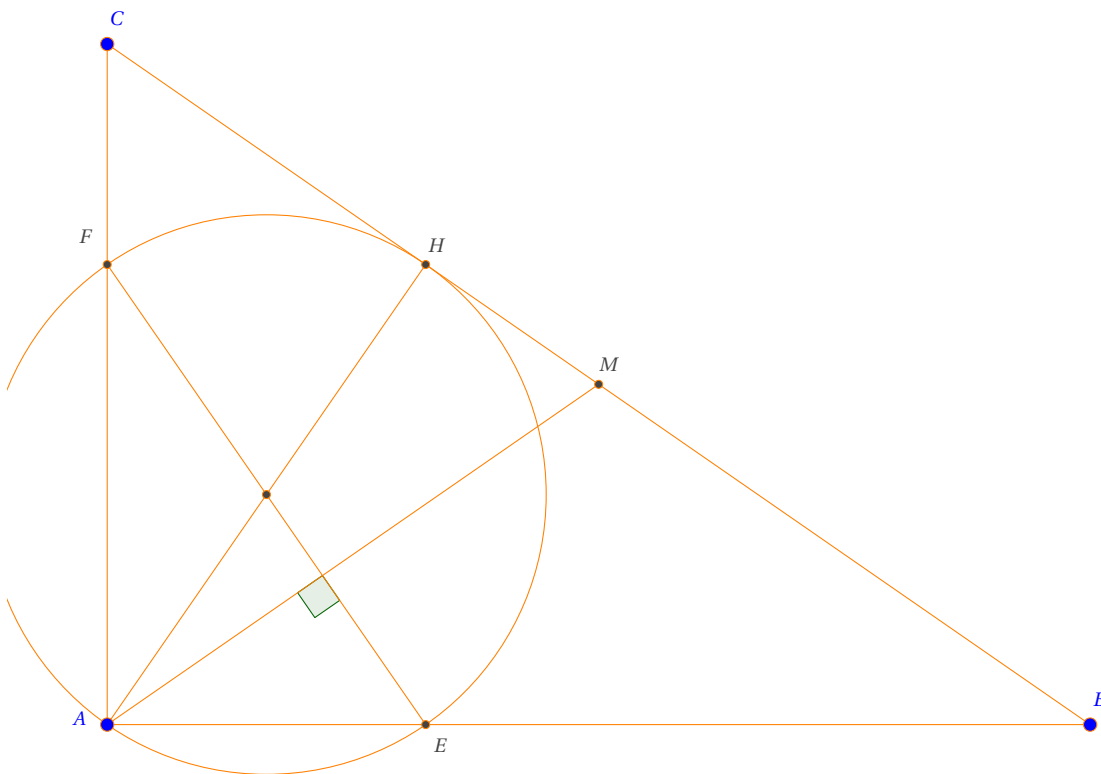
Gọi $A(-2a - 4; a)$, $a < 0$ suy ra $H(\frac{2a+2}{3}; \frac{2-a}{3})$. Sử dụng $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ suy ra

$$\begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{23}{10} \end{cases} \text{ loại } \Rightarrow \begin{cases} A(-2; -1) \\ H(0; 1) \end{cases}.$$

Đường thẳng BC đi qua M, H nên $BC: x + y - 1 = 0$. Đường thẳng AN đi qua A và vuông góc với MK nên $AN: 5x - 3y + 7 = 0$. Tọa độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 5x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$. Vì N là trung điểm của CH nên $C(-1; 2)$.

Tính chất 195. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tại E, F. Khi đó

1. AFHE là hình chữ nhật
2. EF đi qua trung điểm AH.
3. $AM \perp EF$.



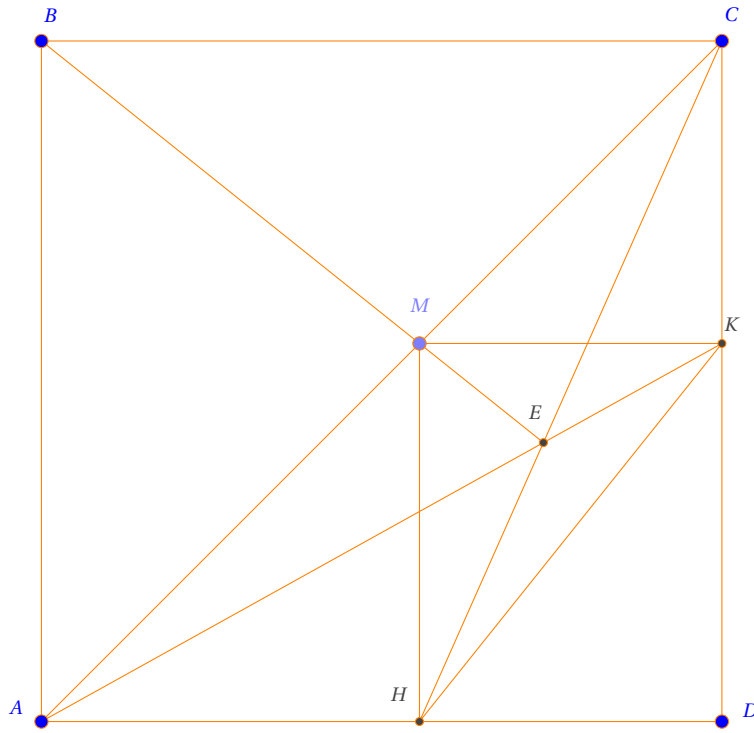
Bài tập 217. Cho tam giác ABC vuông tại A có $M(-\frac{3}{2}; -3)$ là trung điểm BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tại $E(-3; 2), F(1; 0)$. Tìm tọa độ C, biết A có hoành độ dương.

(Thăng Long-Hà Nội lần 2)

Đường tròn đường kính EF có phương trình (EF) : $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$. Đường thẳng BC đi qua M và tiếp xúc với đường tròn đường kính EF nên $\begin{cases} BC: 2x+y+6=0 \\ BC: \end{cases}$. Giải ra $\begin{cases} H(-3; 0) \\ H(0) \end{cases} \Rightarrow$
 $A(1; 2)$. Suy ra AC : $x-1=0$ suy ra tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-1=0 \\ 2x+y+6=0 \end{cases} \Rightarrow C(1; -8)$.

Bài tập 218. Cho tam giác ABC vuông tại A có $M(3; 1)$ là trung điểm BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tại E, F. Đường thẳng EF : $20x - 10y - 9 = 0, A \in x + y - 3 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

Tính chất 196.

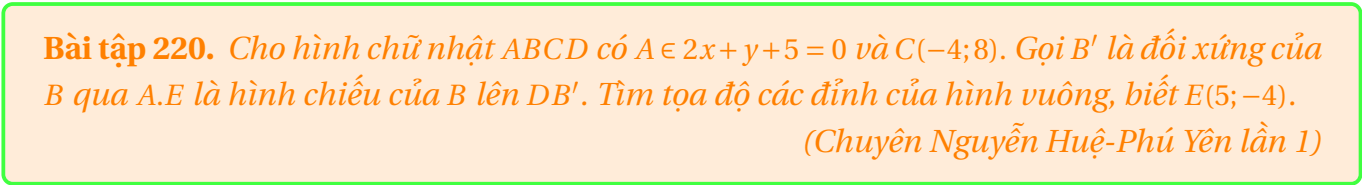


Bài tập 219. Cho hình vuông $ABCD$. M là điểm trên đường chéo AC . $H(-2;0)$, $K(5;-2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AD , CD . $E(-\frac{4}{7}; \frac{2}{7})$ là giao điểm của AK và CH . Biết $B \in x + 2y - 18 = 0$ tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D .

(Chuyên ĐHKHTN lần 4)

Tính chất 197. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi B' là đối xứng của B qua A . E là hình chiếu của B lên DB' . Khi đó

1. B, C, D, E, A nằm trên một đường tròn suy ra $CE \perp AE$.
2. AC là trung trực của BE .



Tính chất 198. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I có AD là phân giác trong góc A . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $M \neq A$. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD . Khi đó $JC \perp CM$.



Bài tập 221. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;2)$ có AD là phân giác trong góc A. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $M \neq A$. Biết $J(-2;2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và $CM: x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

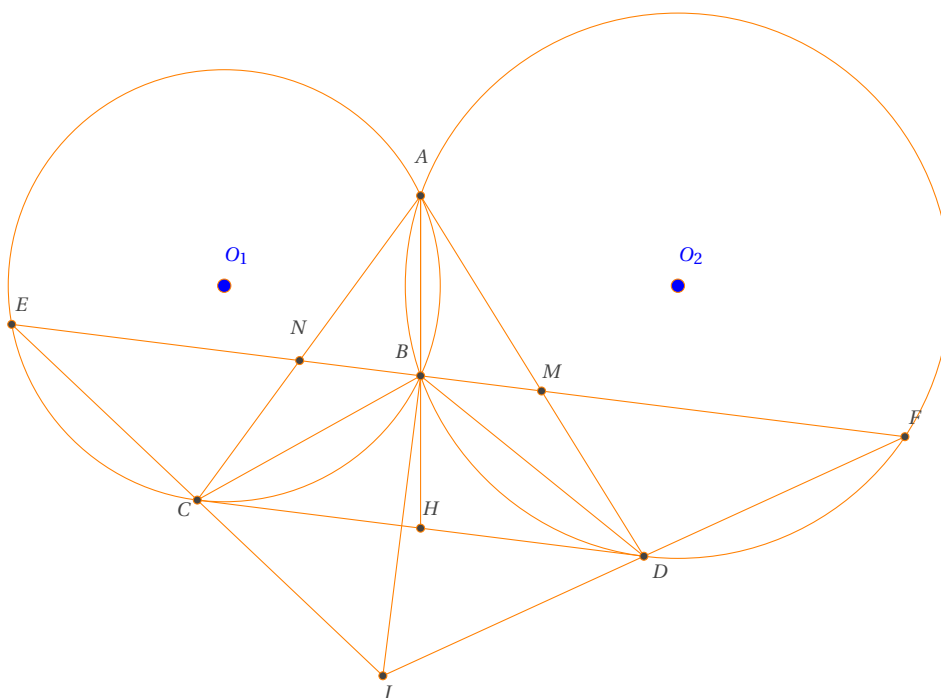
(Gia Lộc- Hải Dương lần 1)

Bài tập 222. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I có AD là phân giác trong góc A. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $E(-4;4) \neq A$. Biết $K(1;1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và đường thẳng AB: $x - y + 3 = 0, x_B > 0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

(Hương Khê-Hà Tĩnh lần 1)

Tính chất 199. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung CD, $C \in (O_1), D \in (O_2)$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD cắt $(O_1), (O_2)$ tại E, F. Các đường thẳng EC, FD cắt nhau tại I. Khi đó

1. AB đi qua trung điểm của CD.
2. B là trung điểm MN.
3. $CE = CI = CB$ và $DB = DI = DF$. Từ đó suy ra $IB \perp EF$ và CD là trung trực của IB.



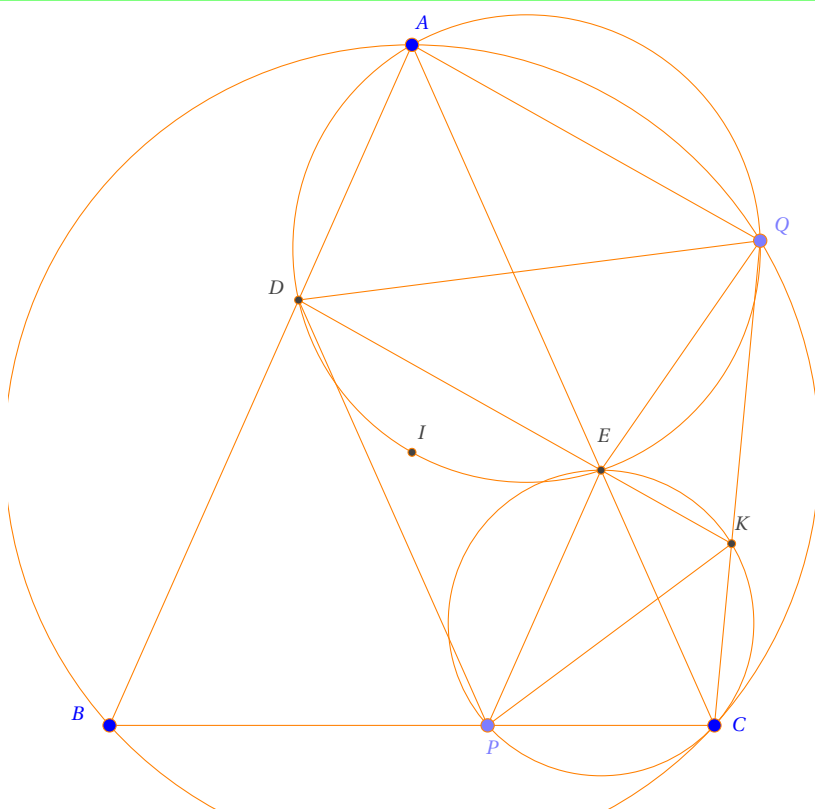
1. Giả sử đường thẳng AB cắt CD tại H. Khi đó $HC^2 = HB \cdot HA = HD^2$ hay H là trung điểm CD.
2. Vì $MN \parallel CD$ nên theo Thales ta có AB cũng đi qua trung điểm MN hay B là trung điểm MN.
3. Ta có $\angle EBC = \angle BCD = \angle CEB = \angle ICD$ suy ra tam giác ECB cân tại C. Tương tự tam giác BDF

cân tại D do đó $\triangle CBD = \triangle CID$ suy ra $\begin{cases} CI = CB = CE \\ DI = DB = DF \\ CD \text{ là trung trực của } IB. \end{cases} \Rightarrow \triangle EBI, \triangle IBF \text{ vuông tại } F \text{ hay } IB \perp EF.$

Bài tập 223. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B . Tiếp tuyến chung $CD, C \in (O_1), D \in (O_2)$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD cắt $(O_1), (O_2)$ tại E, F . Các đường thẳng EC, FD cắt nhau tại I . Biết $I \in x + y + 3 = 0, CD \perp d : 2x - y + 10, S_{IMN} = 20$, tìm tọa độ I, M, N .

Tính chất 200. Cho tam giác ABC cân tại A . D là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Đường thẳng qua P song song với AC, AB lần lượt cắt AB, AC tại D, E . Gọi Q là điểm đối xứng của P qua DE . Gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó

1. Bốn điểm A, Q, E, D nằm trên một đường tròn.
2. Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
3. Năm điểm A, Q, E, D, I nằm trên một đường tròn.



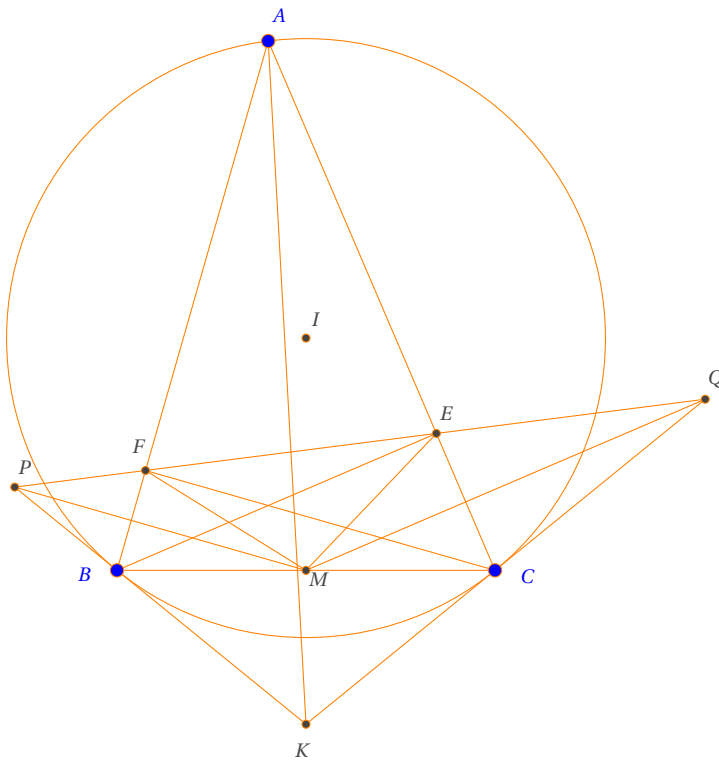
1. Ta có $\triangle DAE = \triangle EPD = \triangle EQD$ do đó $ADEQ$ là hình thang cân hay A, Q, E, D nằm trên một đường tròn.
2. Gọi K là giao điểm của đường thẳng DE với CQ . Chú ý tam giác PEC cân tại E nên $EP = EC = ED$ do đó $\angle EPK = \angle EQK = \angle ECK$ hay $EPCK$ nội tiếp. Suy ra $\angle BAQ + \angle BCQ = \angle PEK + \angle PCK = 180^\circ$ do đó tứ giác $ABCQ$ nội tiếp hay Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài tập 224. Cho tam giác ABC cân tại A . P là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Đường thẳng qua P song song với AC , AB lần lượt cắt AB , AC tại D , E . Gọi Q là điểm đối xứng của P qua DE . Biết $B(-2; 1)$, $C(2; -1)$, $Q(-2; -1)$. Tìm tọa độ A .

(Anh Sơn II lần 1)

Tính chất 201. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) , đường cao BE và CF và M là trung điểm của BC . Tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (C) cắt nhau tại K và cắt đường thẳng EF lần lượt tại P , Q . Khi đó M hoặc là tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp của tam giác KPQ .

(Tự phát hiện Võ Quang Mẫn)



Ta có $\angle PBF = \angle BCE = \angle AFE = \angle PEB$ do đó tam giác BPF cân tại P hay $PB = PF$. Mặt khác tam giác BMF cân tại M do đó $MB = MF$, Suy ra PM là phân giác của hai đường thẳng PK, PQ . Tương tự QM là phân giác của hai đường thẳng QK, PQ . Vậy M hoặc là tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp của tam giác KPQ .

Bài tập 225. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) , đường cao BE và CF . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết phương trình $EF: x - 2y + 5 = 0$, tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (C) lần lượt có phương trình là $2x + y - 4 = 0$, $2x - y - 8 = 0$.

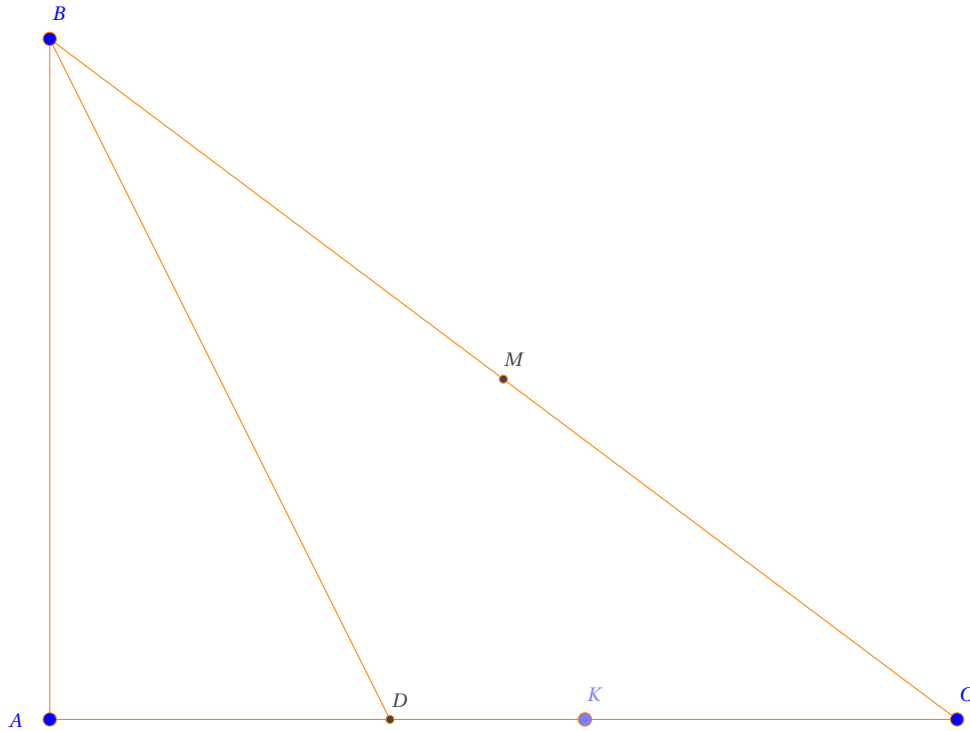
(Trần Quốc Thịnh)

Phân tích và bình luận Ở đây cho 3 đường thẳng EF, BK, QK do đó ta nghĩ đến tam giác tạo bởi 3 đường thẳng, đó là tam giác KPQ .

Áp dụng tính chất trên ta đi tìm điểm M . Sau đó viết phương trình cạnh BC . Giải ra tọa độ B, C , rồi ra điểm A .

Kết luận bài toán có bốn nghiệm hình.

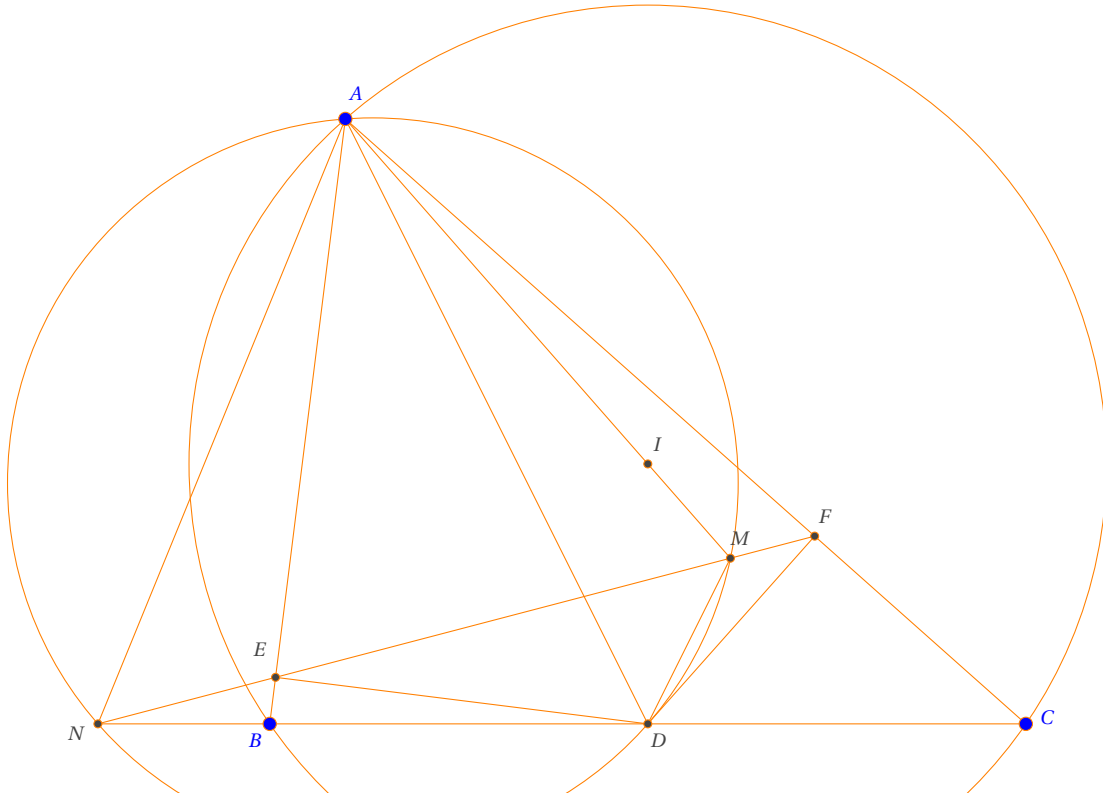
Tính chất 202.



Bài tập 226. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết B, C đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Đường phân giác trong góc B có phương trình $x + 2y - 5 = 0$ và đường thẳng AC đi qua $K(6; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

(Đồng Xoài-Bình Phước lần 1)

Tính chất 203. Cho tam giác ABC, có D là trung điểm BC. E, F là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AI, BC tại M, N. Khi đó D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.



Ta có $\angle EDB = 90^\circ - \angle B$ và $\angle IAF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AIC) = 90^\circ - \angle B$ do đó $\angle EDB = \angle IAF$. Mặt khác $\angle END + \angle EDN = \angle DEF = \angle DAF = \angle DAM + \angle MAF$ suy ra $\angle DNM = \angle DAM$ hay tứ giác ANDM nội tiếp.

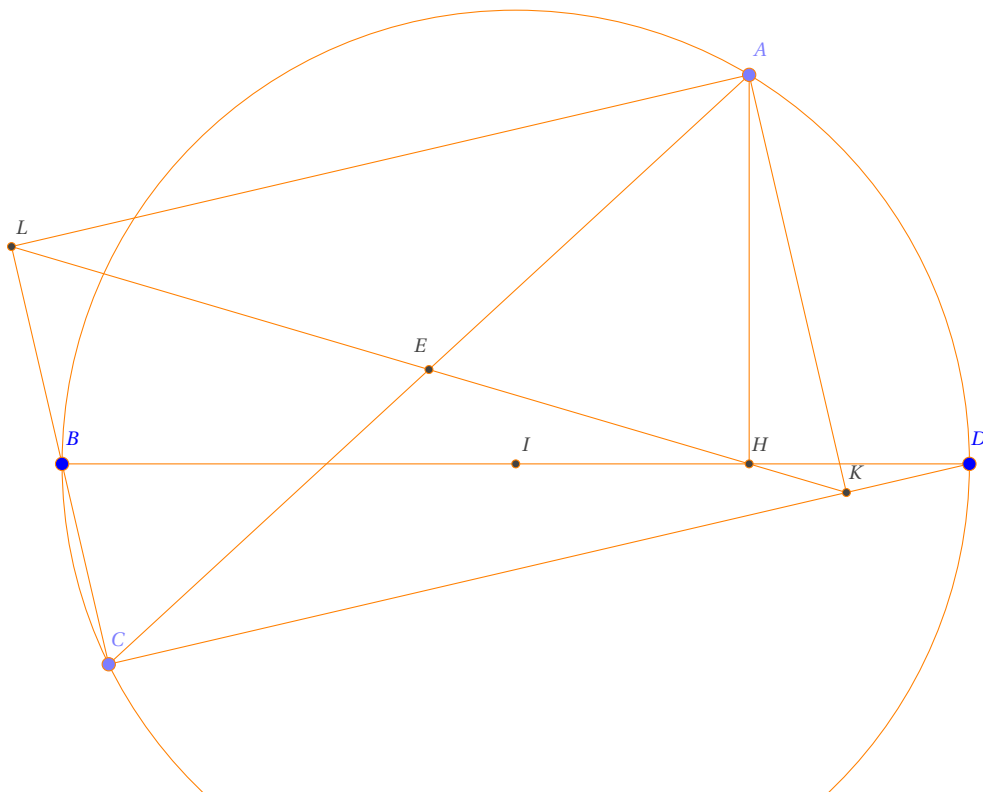
Bài tập 227. Cho tam giác ABC, có D là trung điểm BC. E, F là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AI, BC tại M, N. Biết BC : $x + 3y + 3 = 0$, $A(0; 4)$, $M(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3})$, $N(6; -3)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và tìm tọa độ B, C.

(Chuyên Bắc Ninh lần 3)

Hướng dẫn: viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Tọa độ D là giao của (AMN) và BC. Viết đường thẳng AM, DI.

Tính chất 204. Hạ AL vuông góc xuống BC

1. K, H, L thẳng hàng.
2. AKCL là hình chữ nhật.



Theo định lý đường thẳng Simson ta có K, H, L thẳng hàng. Vì $\angle LCK = 90^\circ$ nên $AKCL$ là hình chữ nhật.

Bài tập 228. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BD, CD . Biết $A(4;6)$, $HK : 3x - 4y - 4 = 0$, $C \in d_1 : x + y - 2 = 0$, $B \in d_2 : x - 2y - 2 = 0$, $x_K < 1$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D

(HSG Nam Định)

Chú ý E , tâm hình chữ nhật $ALCK$ là trung điểm AC và E thuộc đường thẳng KH . Gọi $C(c; 2-c)$ suy ra $E(\frac{c+4}{2}; \frac{8-c}{2}) \in 3x - 4y - 4 = 0$ suy ra $C(4; -2)$. Đường tròn đường kính AC có phương trình $(AC) : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$. Tọa độ L, K là nghiệm của hệ

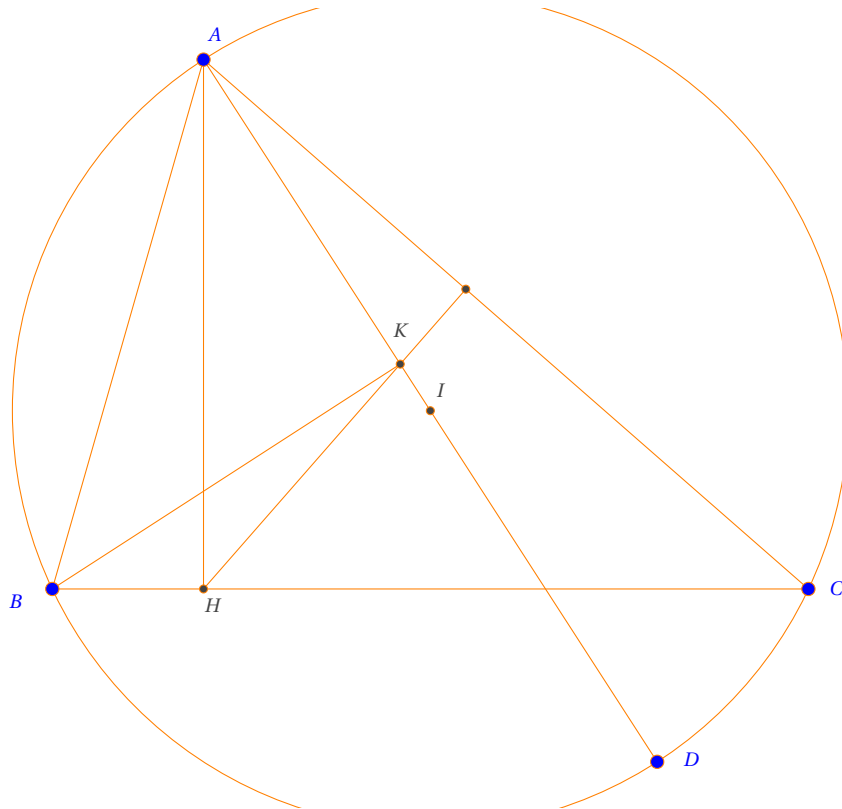
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ 3x - 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\frac{36}{5}; \frac{22}{5}) \\ K(\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}) \end{cases}.$$

Khi đó đường thẳng CL đi qua C, L nên có phương trình $CL : 2x - y - 10 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 10 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6; 2).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(ABC) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ do đó tâm $I(1; 2)$. Điểm D đối xứng với B qua I suy ra $D(-4; 2)$.

Tính chất 205. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn đường kính AD . Các điểm H, K là hình chiếu vuông góc của A, B lên BC, AD . Khi đó $HK \perp AC$.



Tứ giác ABHK nội tiếp suy ra $\angle BKH = \angle BAH = \angle KAC$, mà $BK \perp AK$ nên $HK \perp AC$.

Bài tập 229. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn đường kính AD. Các điểm $H(2;1), K(3;2)$ là hình chiếu vuông góc của A, B lên BC, AD. Biết $M(0;7)$ thuộc đường thẳng AC và $A \in x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

(Hưng Yên lần 2)

Đường thẳng AC đi qua M và vuông góc HK nên $AC: x + y - 7 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;5).$$

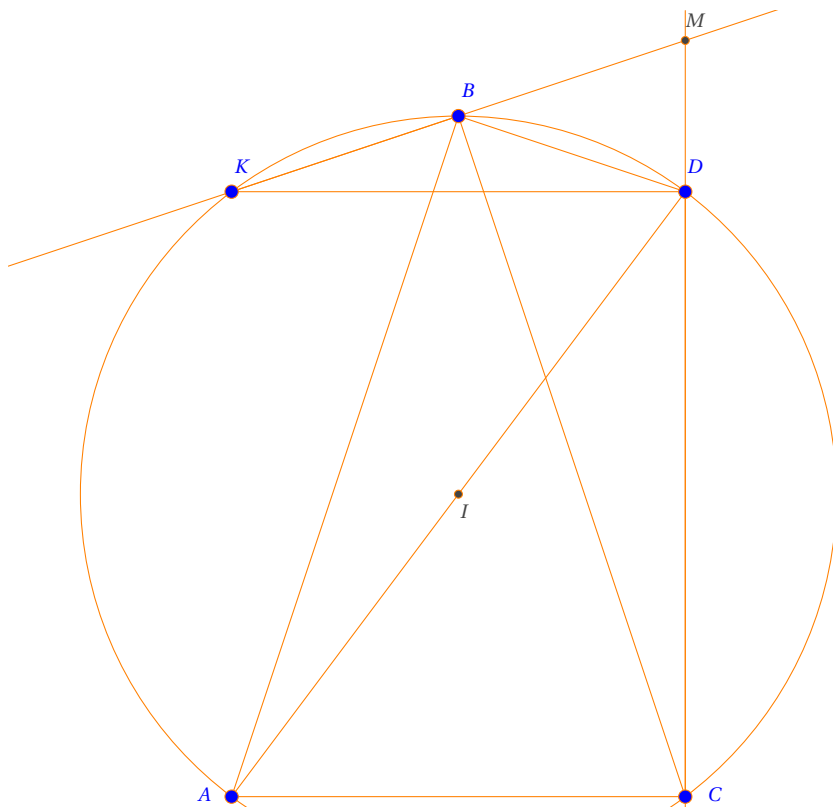
Đường thẳng BC đi qua H vuông góc AH nên có phương trình $BC: y - 1 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6;1).$$

Đường thẳng BK đi qua K và vuông góc AK nên $BK: x - 3y + 3 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;1).$$

Tính chất 206. Cho tam giác ABC cân tại B và nội tiếp đường tròn đường kính AD, CK. Khi đó $KD \perp CD$ và $BK = BD$.



Ta có $KDCA$ là hình chữ nhật suy ra $KD \parallel AC$ do đó $KD \perp CD$. Do hai tam giác vuông $\triangle ABD = \triangle CBK$ suy ra $BK = BD$.

Bài tập 230. Cho tam giác ABC cân tại $B(1;2)$ và nội tiếp đường tròn đường kính AD . Biết $BC : 2x + y - 4 = 0, D \in 4x - 2y - 15 = 0$ và đường thẳng CD đi qua $M(4; \frac{7}{2})$. Tìm tọa độ A, C .
(K2pi ngày cá tháng 4)

Phân tích Đề cho điểm B và phương trình đường thẳng BC và điểm M . Yếu tố không đổi là đường thẳng đi qua B và vuông góc BC và ta phải tính ý nhận xét điểm M lại nằm trên đường đó. Đây là yếu tố phát hiện để làm bài này.

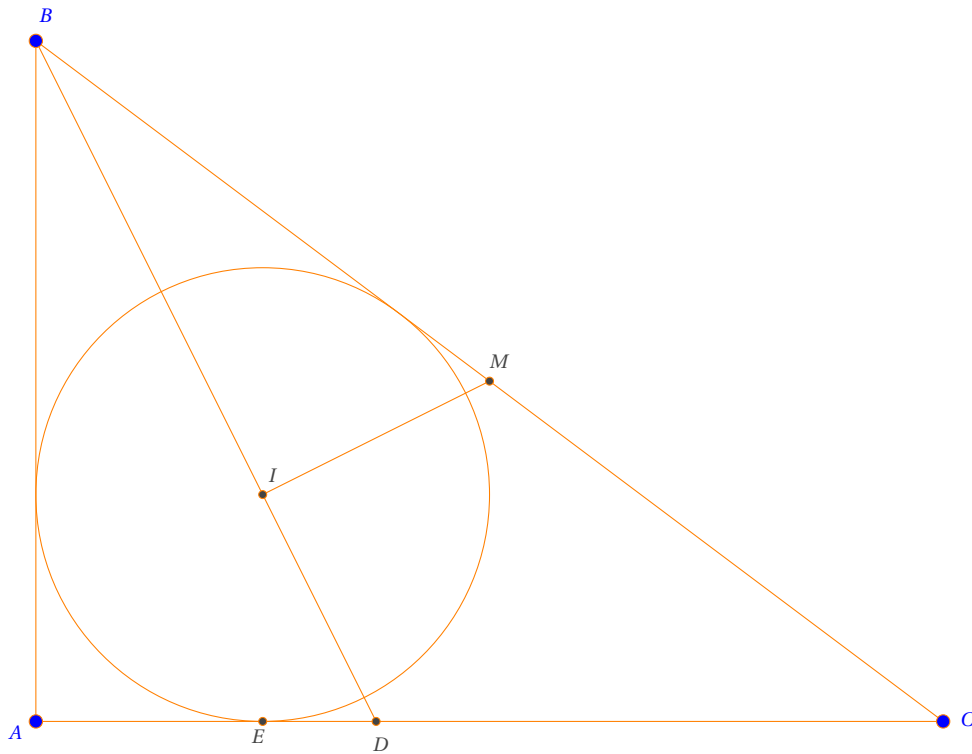
Gọi CK là đường kính. Đường thẳng BK đi qua B vuông góc BC nên $BK : x - 2y + 3 = 0$. Ta có nhận xét M thuộc đường thẳng BK . Gọi $D(a; \frac{4a-15}{2})$. Tam giác KDM vuông tại D mà $BD = BK$

nên B là trung điểm KM và $BD = BM$ suy ra $\begin{cases} K(-2; \frac{1}{2}) \\ D(4; \frac{1}{2}) \end{cases}$. Đường thẳng DC đi qua M, D nên có

phương trình $DC : x - 4 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; -4)$. Điểm I là trung

điểm KC suy ra $I(1; -\frac{7}{4})$. Điểm A đối xứng D qua I suy ra $A(-2; -4)$.

Tính chất 207. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \frac{3}{4}AC$ và ngoại tiếp đường tròn tâm I . Khi đó $\angle BIM = 90^\circ$.



Giả sử đường thẳng BI cắt AC tại D. Ta có $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$ suy ra $DC = MC$ hay $\triangle IDC = \triangle IMC$. Mà $\angle BIC = 135^\circ$ suy ra $\angle DIC = 45^\circ$ suy ra $\angle DIM = 90^\circ$ hay $\angle BIM = 90^\circ$.

Bài tập 231. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \frac{3}{4}AC$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $I(-1;5)$. Biết rằng $M(-\frac{1}{2};6)$ là trung điểm cạnh BC và đỉnh B nằm trên đường thẳng $d: x + y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

(Vted lần 17)

Đường thẳng IB đi qua I và vuông góc IM nên $IB: 2x + y - 9 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

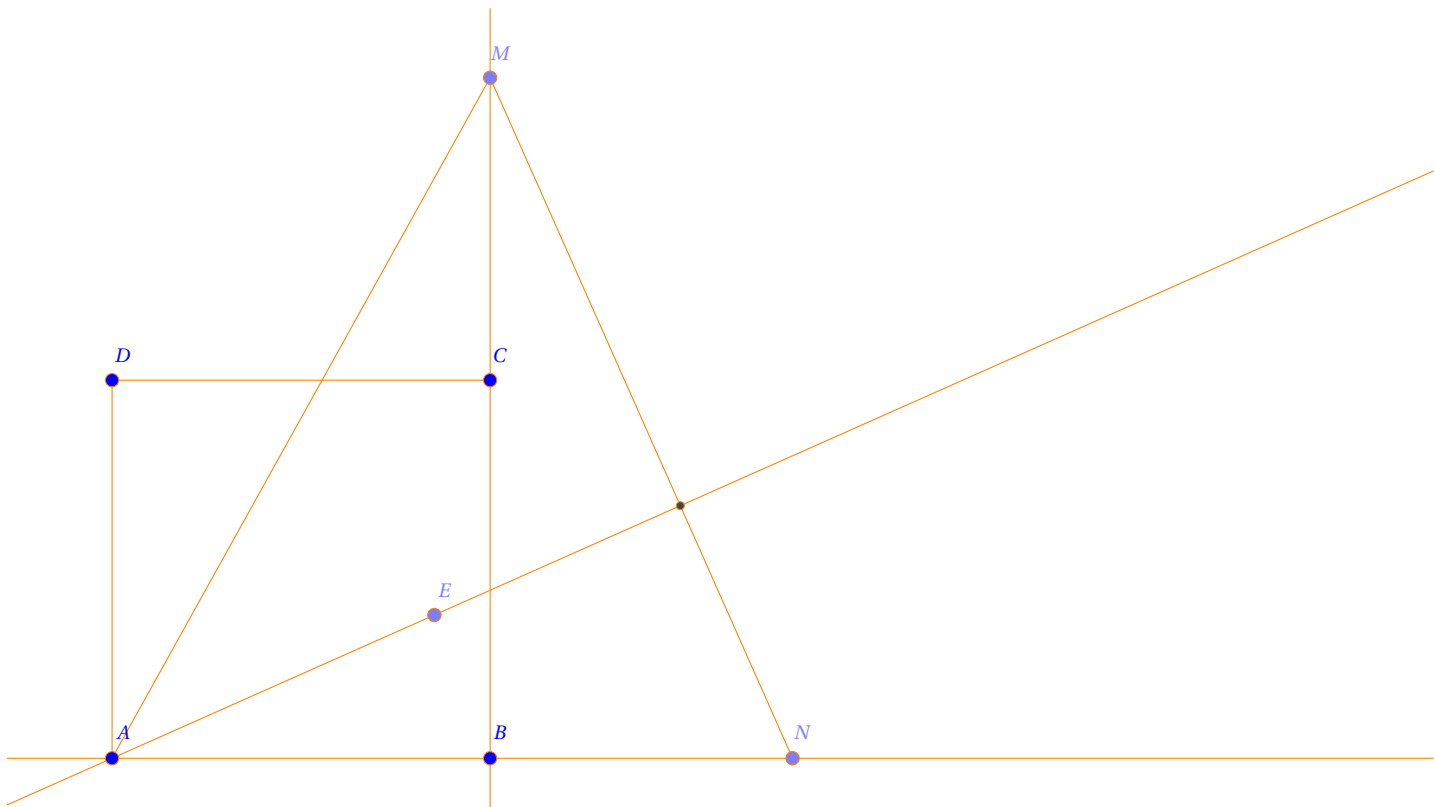
$$\begin{cases} 2x + y - 9 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1;4).$$

Điểm C đối xứng với B qua M suy ra $C(-2;8)$. Đường thẳng BA đối xứng với đường thẳng BC qua BI nên $BA: y - 4 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C và vuông góc AB nên $AC: x + 2 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 4 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2;4).$$

Bài tập 232. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm O. Gọi M, N(5;3) lần lượt là các điểm thuộc tia đối của CB và tia đối của tia BA sao cho $BN = CM$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng điểm E(9;0) nằm trên đường cao kẻ từ A của tam giác AMN và M có hoành độ dương.

(Vted lần 18)

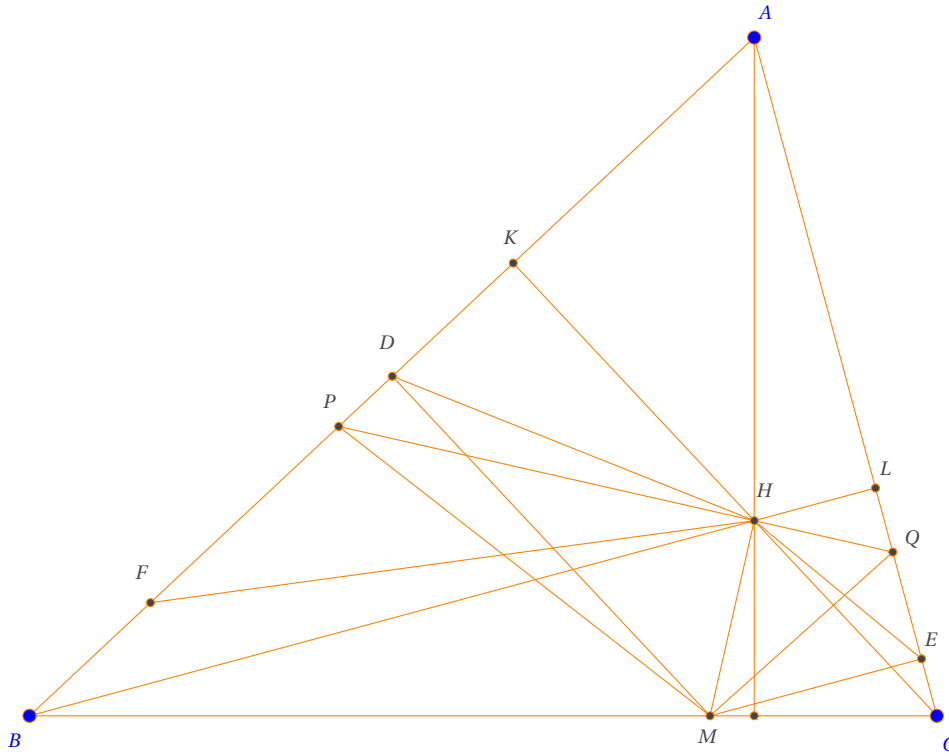


Tính chất 208.

Bài tập 233. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại $H(3; -1)$. Biết đường thẳng $d: 7x + y + 15 = 0$ đi qua trung điểm M của BC. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm D, E, F là $x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm M, D.

(Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa)

Tính chất 209. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Điểm M trên đoạn BC thỏa $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$. Gọi d là đường thẳng qua H vuông góc với HM và cắt đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Khi đó $\overrightarrow{HP} = -3\overrightarrow{HQ}$.



Giả sử các đường cao BL, CK và $\begin{cases} \overrightarrow{FK} = -3\overrightarrow{FB} \\ \overrightarrow{EL} = -3\overrightarrow{EC} \end{cases}$. Hạ MD, ME vuông góc xuống AB, AC. Khi đó theo Thales ta có $\frac{KD}{KF} = \frac{1}{3}$. Tứ giác PDHM, HQEM nội tiếp suy ra

$$\begin{cases} \angle HPM = \angle HDM; \angle PMH = \angle KDH \\ \angle HQM = \angle HEM; \angle HMQ = \angle HEQ \end{cases}.$$

Mặt khác

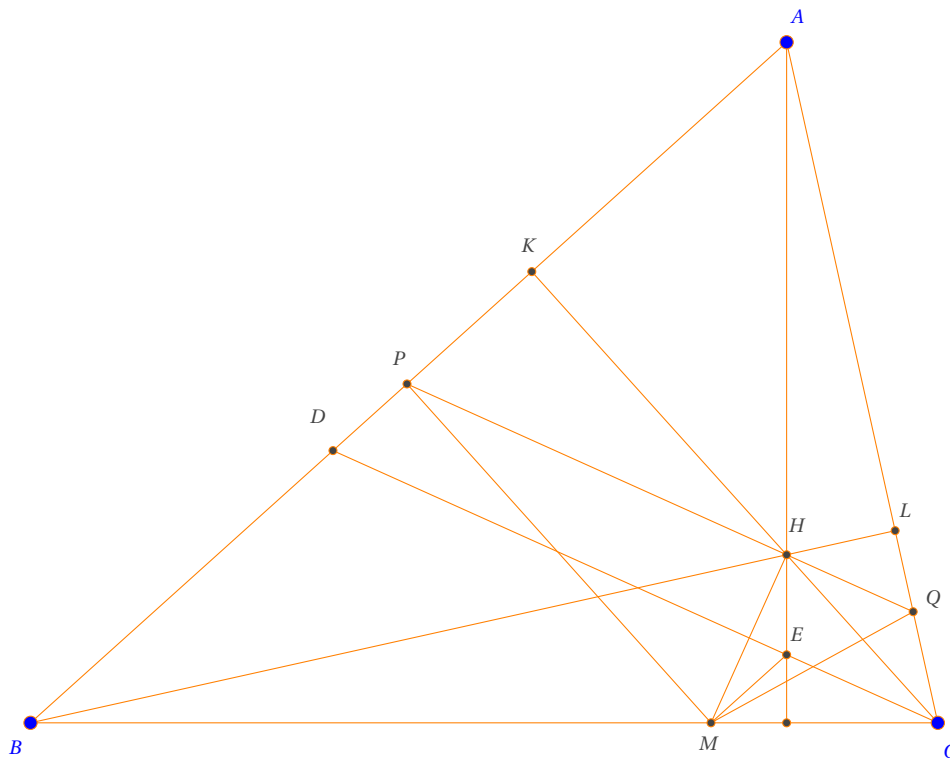
$$HP = HM \frac{\sin \angle PMH}{\sin \angle MPH} = HM \frac{\sin \angle KDH}{\sin \angle HDM} = HM \tan \angle KDH = \frac{HM \cdot KH}{KD} \quad (1).$$

Tương tự $HQ = HM \cot \angle HEL$. Ta có $\triangle CHL \sim BHK$ suy ra $\angle HEL = \angle KFH$. Do đó

$$HQ = HM \tan \angle HEL = HM \tan \angle KFH = \frac{HM \cdot KH}{KF} \quad (2).$$

Mà $KF = 3KD$ nên từ (1), (2) nên $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{HP} = -3\overrightarrow{HQ}$.

Nhận xét: Bài toán vẫn còn đúng khi P, Q chạy trên các tia AB, AC.



Cách 2 Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ cắt đường thẳng AB, AH tại D, E. Ta có

$$\begin{cases} EC \perp MH \\ HE \perp MC \end{cases} \text{ do đó E là trực tâm tam giác MHC suy ra } ME \perp HC \text{ suy ra } ME \parallel AB. \text{ Do đó } \frac{MB}{MC} = \frac{DE}{EC} = \frac{PH}{HQ} = 3.$$

Bài tập 234. Cho tam giác ABC nhọn có $C(1;0)$ và trực tâm H. Gọi d là đường thẳng qua H và cắt đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q $\neq A$ thỏa $\overrightarrow{HP} = -3\overrightarrow{HQ}$, Δ là đường thẳng qua H vuông góc với d và cắt đoạn thẳng BC tại M. Biết $d: x + y - 4 = 0$, $AH: 2x - y + 1 = 0$. Chứng minh $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$ và tìm tọa độ A, B.

(Chuyên Lê Quý Đôn- Đà Nẵng)

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1;3).$$

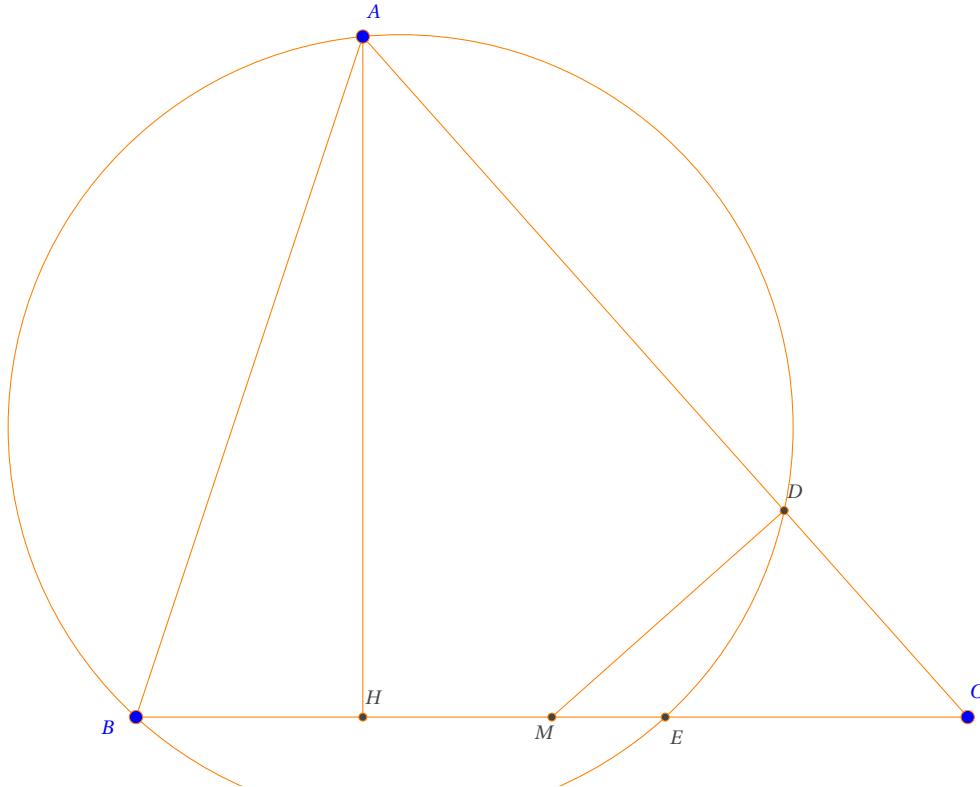
Đường thẳng HM đi qua H vuông góc với d nên $HM: x - y + 2 = 0$. Đường thẳng BC đi qua C vuông góc với đường thẳng AH nên $BC: x + 2y - 1 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1;1).$$

Ta có $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$ suy ra $B(-7;4)$. Đường thẳng AB đi qua B vuông góc CH nên $AB: y - 4 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C vuông góc với BH nên $AC: 8x - y - 8 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 4 = 0 \\ 8x - y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2};4\right).$$

Tính chất 210. Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AH có M là trung điểm BC. D là hình chiếu của M lên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E. Khi đó E là trung điểm HC



Áp dụng tính chất phương tích ta có $CE.CB = CD.CA = CM.CH$ và do $CB = 2CM$ nên $CH = 2CE$, Vậy E là trung điểm HC.

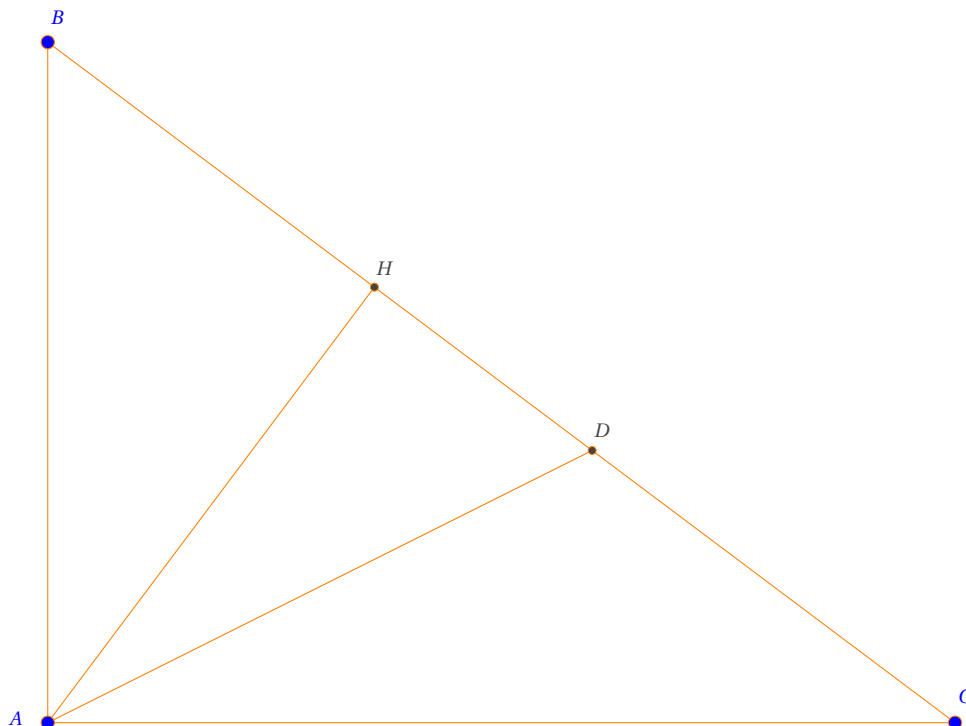
Bài tập 235. Cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $C(7; -4)$. M là trung điểm BC. D là hình chiếu của M lên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại $E(4; -3)$. Biết A cách gốc tọa độ một khoảng bằng 5 và nằm bên phải trục tung. Tìm tọa độ điểm A.
(Chuyên Bến Tre lần 1)

Áp dụng tính chất ta có E là trung điểm HC suy ra $H(1; -2)$. Đường thẳng AH đi qua H và vuông góc EC nên có phương trình $3x - y - 5 = 0$. Gọi $A(a; 3a - 5)$ ta có $OA = 5$ suy ra $\begin{cases} A(3; 4) \\ A(0; -5) \text{ loại} \end{cases}$.

Tính chất 211.

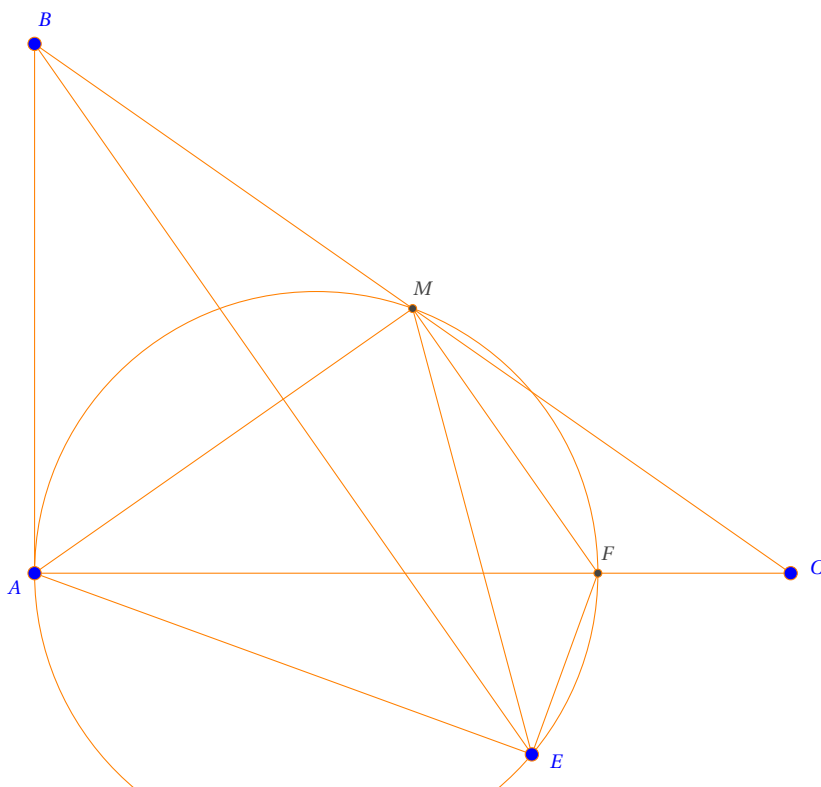
Bài tập 236. Cho tam giác ABC nhọn, M là trung điểm BC và K là hình chiếu của A lên BC. Đường thẳng AK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $D(-2; -6) \neq A$. Biết đường thẳng $BC: x + y + 6 = 0$, $AM: 11x - 13y - 42 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C.
(Hong Quang-Hải Dương lần 2)

Tính chất 212. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Phân giác trong $\angle HAC$ cắt BC tại D. Khi đó tam giác ABD cân tại B.



Bài tập 237. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Phân giác trong $\angle HAC$ có phương trình $x - 2y = 0$. Điểm $M(-3;6)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $P(0;5)$ thuộc đường thẳng BC và điểm $B \in 5x + 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm A .

Tính chất 213. $EA \perp EF$.



Ta có $\angle AEM = \angle ABM = 90^\circ - \angle MCA = 90^\circ - \angle MAF = \angle MFA$ do đó tứ giác $AMFE$ nội tiếp hay $\angle AEF = 90^\circ$ suy ra $EA \perp EF$.

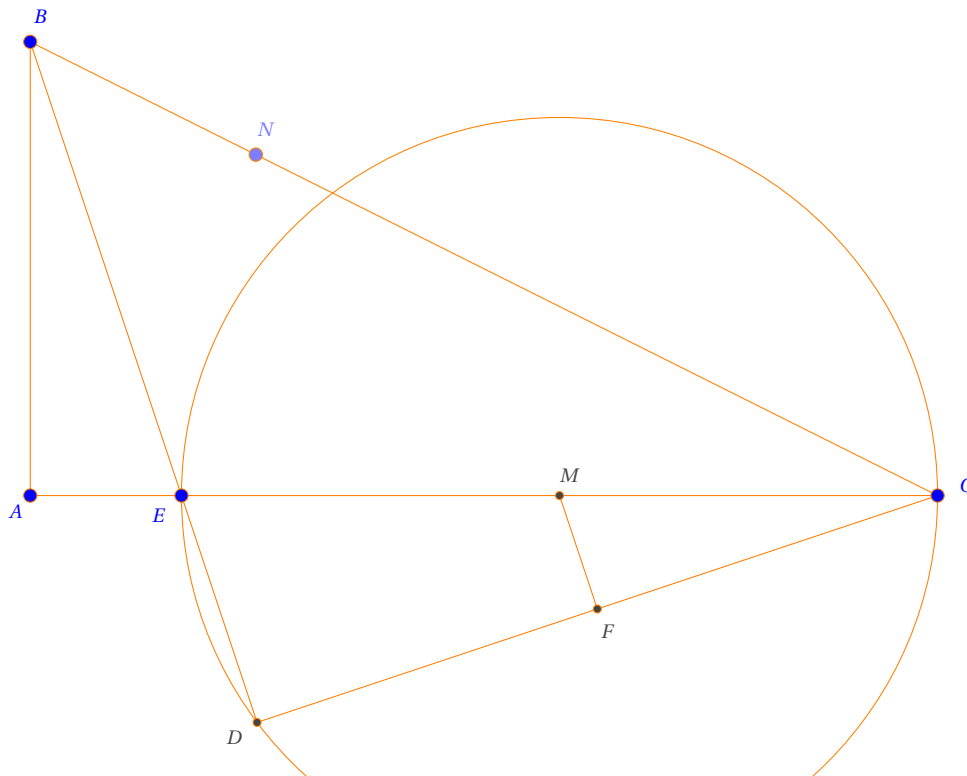
Bài tập 238. Cho tam giác ABC vuông tại A . M là trung điểm BC , điểm $E(\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ là đối xứng của B qua AM . $F(-1; 3)$ thuộc cạnh AC thỏa $\angle AMF = 90^\circ$. Biết $A \in x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

(Nguyễn Đại Dương lần 6)

Hướng dẫn Viết đường thẳng AE , tìm tọa độ A . Viết đường thẳng AB , Gọi B tham số, từ $AB = AE$ suy ra B . Viết trung trực BE giao với đường tròn đường kính AF suy ra tọa độ M suy ra tọa độ C . Kiểm tra F nằm giữa A và C .

Đáp số $A(4, 3), B(4, 7), C(-4, 3)$.

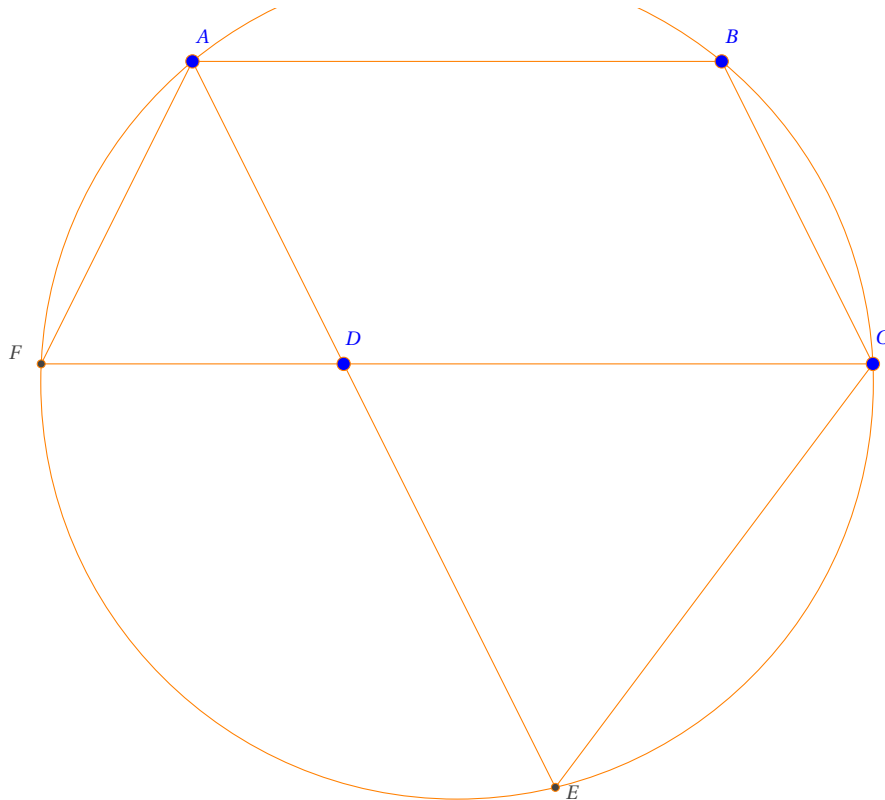
Tính chất 214. Hạ $MF \perp CD$. Khi đó $FC = FD = MF$.



Bài tập 239. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi E là điểm trên cạnh AC sao cho $AB = 3AE$. Đường tròn tâm $M(1; -1)$ đường kính CE cắt BE tại D . Phương trình đường thẳng CD : $x - 3y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết $N(\frac{4}{3}; 0)$ thuộc đường thẳng BC và C có hoành độ dương.

(Chuyên Long An lần 2)

Tính chất 215. Cho hình bình hành $ABCD$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng AD, CD tại điểm thứ hai E, F . Khi đó tam giác DCE, FAD cân tại C, A .



Ta có $ABCE$ là hình thang mà nội tiếp nên là hình thang cân, do đó $CE = BA = CD$ hay tam giác DCE cân tại C . Tương tự tam giác FAD cân tại A .

Bài tập 240. Cho hình bình hành $ABCD$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng AD, CD tại điểm thứ hai $E(4; 8), F(-\frac{4}{5}; \frac{8}{5})$. Đường thẳng qua C vuông góc AD có phương trình $d: x + 3y - 18 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

Điểm D đối xứng với E qua d suy ra $D(2; 2)$. Đường thẳng CD đi qua D, F suy ra $CD: x - 7y + 12 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 7y + 12 = 0 \\ x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(9; 3).$$

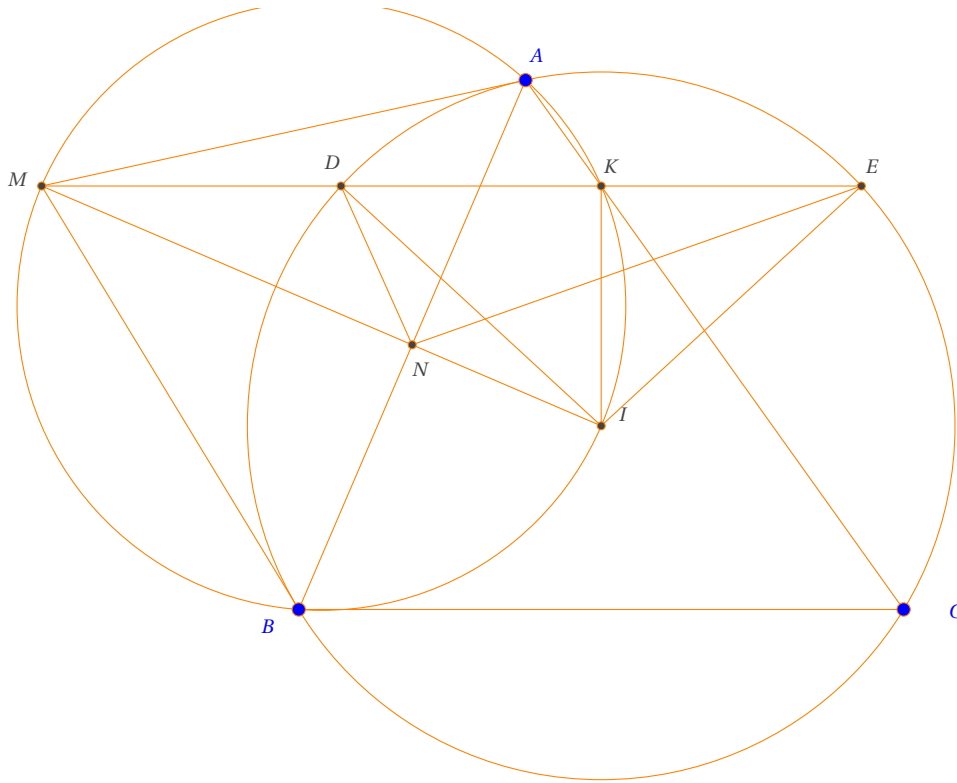
Đường thẳng CB qua C song song với DE nên $CB: 3x - y - 24 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF có phương trình $(CEF): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 24 = 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow B(8; 0).$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $A(1; -1)$.

Tính chất 216. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I) . Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại A và B cắt nhau tại M , đường thẳng qua M song song với BC cắt đường tròn tại D và E sao cho D nằm giữa M và E , cắt cạnh AC tại K . Khi đó

1. M, A, K, I, B nằm trên một đường tròn.
2. K là trung điểm DE .
3. Gọi N là trung điểm AB . Ta có tứ giác $DNIE$ nội tiếp suy ra NA là phân giác của $\angle DNE$.

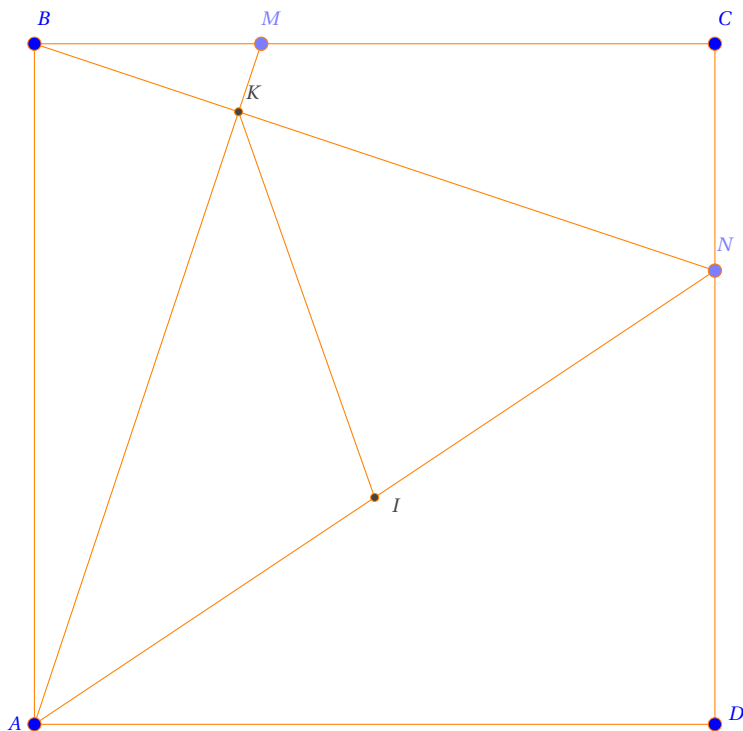


Bài tập 241. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I) có phương trình đường thẳng $AB: 3x - y - 3 = 0$. Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại A và B cắt nhau tại M , đường thẳng qua M song song với BC cắt đường tròn tại $D(0; 1)$ và E sao cho D nằm giữa M và E , cắt cạnh AC tại $K(4; 1)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh A có tung độ dương.

Tính chất 217. 1. $IA = IK$.

2. $\overrightarrow{KA} = -10\overrightarrow{KM}$.

3.



Bài tập 242. Cho hình vuông $ABCD$ có $A \in x - y = 0$. Gọi M, N là điểm thuộc cạnh BC, CD sao cho $BM = CN = \frac{1}{3}BC$. Giả sử $I(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ là trung điểm AN , $K(-\frac{13}{5}; -\frac{4}{5})$ là giao điểm của hai đường thẳng AM, BN . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$, biết A có hoành độ dương.
(Trần Phú - Đà Nẵng)

Tính chất 218.

Bài tập 243. 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, hình chiếu vuông góc của A lên BD là $H(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$. Điểm $M(0; -1)$ là trung điểm của cạnh BC và $N(\frac{7}{5}; -\frac{4}{5})$ là trung điểm HD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

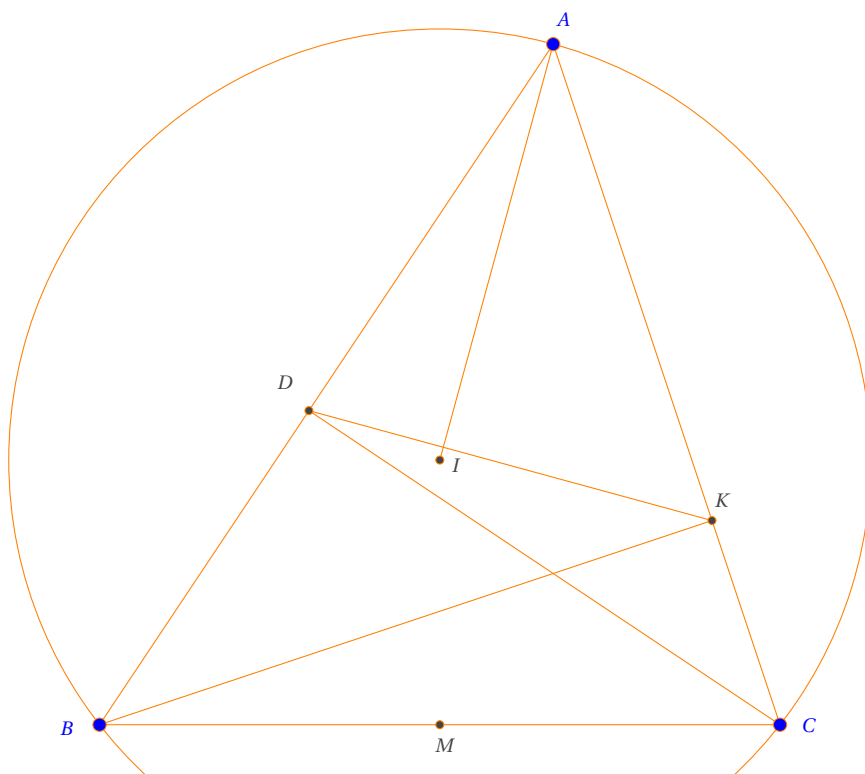
2. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $AD = 7$, $AC : x - 3y - 3 = 0$, $B(1; 1)$. Biết $M(-2; 5)$ thuộc đường thẳng AD . Tìm tọa độ điểm D .

(HSG Bà Rịa-Vũng Tàu)

Tính chất 219. Hạ $CD \perp AB$. Khi đó

1. $MD = MK$.

2. $DK \perp AI$.

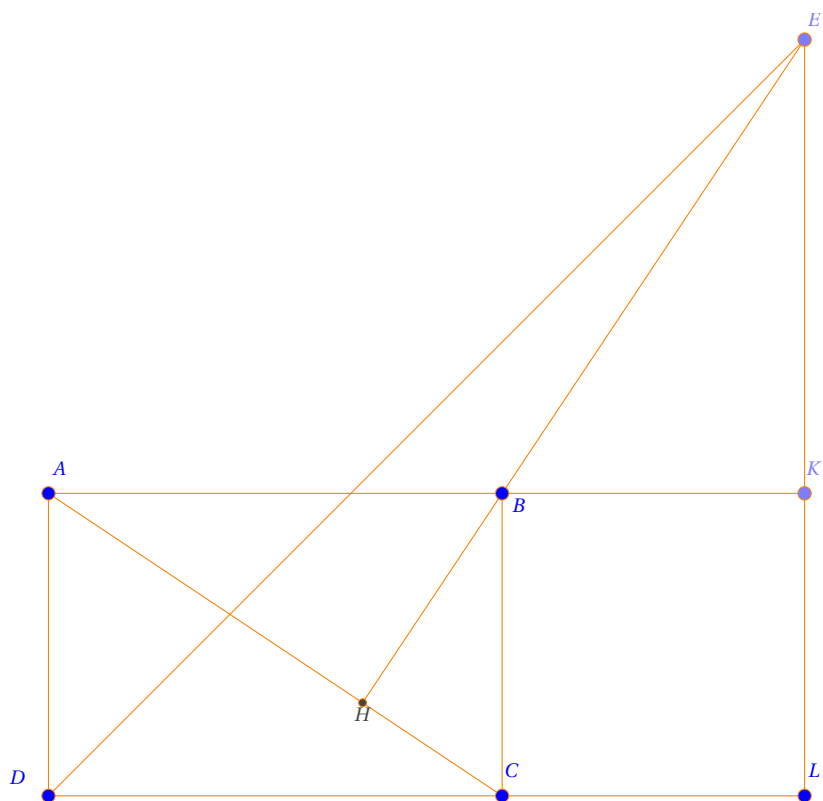


Bài tập 244. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I , có $M(0; -2)$ là trung điểm BC . $K(2; 2)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC . Biết $AI : x + 1 = 0, x_B < 0$ tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Hạ CD vuông góc với AB . Tính chất quen thuộc hay dùng là $DK \perp AI$.

Tính chất 220. Hạ EF vuông góc CD . Khi đó

1. tam giác DLE vuông cân tại L hay $\angle ADE = 45^\circ$.
2. $AB = EK$.

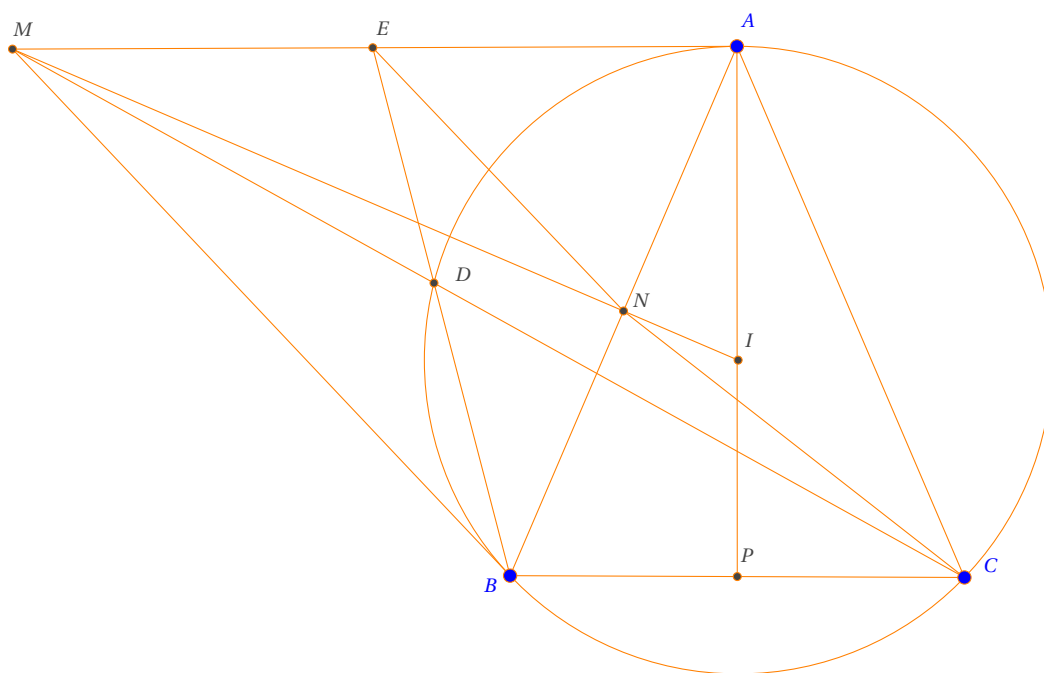


Bài tập 245. Cho hình chữ nhật ABCD có $AD: x - 2y + 3 = 0$. Trên đường thẳng qua B và vuông góc AC lấy điểm E sao cho $BE = AC$ (D, E khác phía AC). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết $E(2; -5)$, đường thẳng AB đi qua $F(4; -4)$ và điểm B có hoành độ dương.

(Sở Bắc Giang)

Tính chất 221. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I). Tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng BC và cắt tiếp tuyến tại B ở điểm M. Đường thẳng CM cắt đường tròn (I) tại D và đường thẳng BD cắt AM tại E. Khi đó

1. Tam giác ABC cân tại A.
2. E là trung điểm MA.



1. Ta có $MA \perp AI$ suy ra $AI \perp BC$ suy ra tam giác ABC cân tại A .
2. Gọi N là trung điểm AC . Tam giác AMB cân tại M có $\angle MAB = \angle ACB$ do đó $\triangle AMB \sim \triangle BAC$. Mặt khác CM là đường đối trung của tam giác ACB suy ra $\angle MBD = \angle BCD = \angle NCD$. Suy ra BD là trung tuyến của tam giác MBA . Hay E là trung điểm MA .

Nhận xét: Các em xem lại bài đường đối trung để chứng minh lại $\angle BCD = \angle NCA$.

Bài tập 246. Cho tam giác ABC có $B(-6; -4)$ nội tiếp đường tròn (I) . Tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng BC và cắt tiếp tuyến tại B ở điểm $M(12; 2)$. Đường thẳng CM cắt đường tròn (I) tại D và đường thẳng BD cắt AM tại $E(3; 5)$. Tìm tọa độ A, C .

Điểm A đối xứng M qua E suy ra $A(-6; 8)$. Đường thẳng MI là trung trực AB suy ra $MI: y - 2 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB có phương trình $(MAB): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 100$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow I(-8; 2).$$

Đường thẳng BC đi qua B song song với MA nên $BC: x + 3y + 18 = 0$. Đường thẳng $AI: 3x - y + 26 = 0$. Tọa độ P trung điểm BC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y + 18 = 0 \\ 3x - y + 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{48}{5}; -\frac{14}{5}\right).$$

Điểm C đối xứng với B qua P nên $C\left(-\frac{66}{5}; -\frac{8}{5}\right)$.

Nhận xét: Bài này ta có thể không dùng tính chất E là trung điểm MA , chỉ cần sử dụng $MA = MB$ là được. Thật vậy đường thẳng MA đi qua E và M nên $MA: x + 3y - 18 = 0$. Gọi $A(18 - 3a; a)$ ta có $MA = MB$ suy ra

$$\begin{cases} A(-6; 8) \\ A(30; -4) \end{cases} \text{ loại do } M \text{ nằm giữa } A \text{ và } E$$

Vận dụng tính chất trên ta có bài như sau

Bài tập 247. Cho tam giác ABC có $B(-6; -4)$ nội tiếp đường tròn (I) . Tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng BC và cắt tiếp tuyến tại B ở điểm $M(12; 2)$. Đường thẳng CM cắt đường tròn (I) tại $D(-2; 0)$. Tìm tọa độ A, C .

(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng $BD: x - y + 2 = 0$. Gọi $E(a; a + 2)$, theo tính chất trên ta có E là trung điểm AM suy ra $A(2a - 12; 2a + 2)$, ta có $MA = MB$ suy ra

$$\begin{cases} A(-6; 8) \\ A(6; 20) \end{cases}$$

- $A(6; 20)$

Đường thẳng AI đi qua A và vuông góc AM nên $AI: x - 3y + 54 = 0$. Đường thẳng BI đi qua B và vuông góc BM nên $BI: 3x + y + 22 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + 54 = 0 \\ 3x + y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-12; 14).$$

Kiểm tra $IA \neq ID$ nên loại.

- $A(-6; 8)$

Đường thẳng AI đi qua A và vuông góc AM nên $AI: 3x - y + 26 = 0$. Đường thẳng BI đi qua B và vuông góc BM nên $BI: 3x + y + 22 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

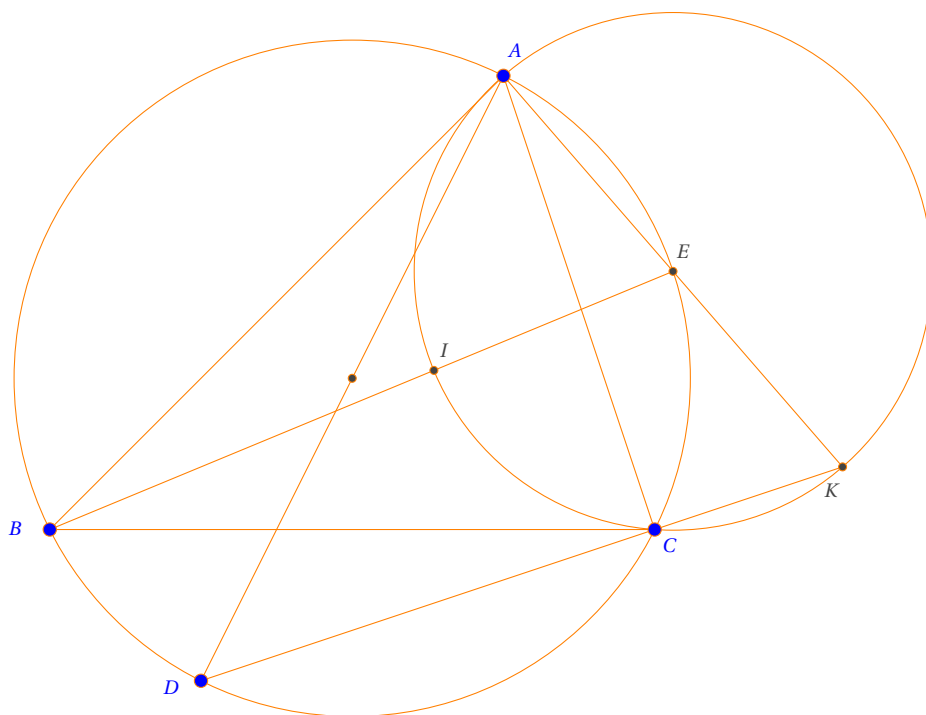
$$\begin{cases} 3x - y + 26 = 0 \\ 3x + y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-8; 2).$$

Kiểm tra $IA = ID$ nên thỏa. Đường thẳng BC đi qua B song song với MA nên $BC: x + 3y + 18 = 0$. Đường thẳng $AI: 3x - y + 26 = 0$. Tọa độ P trung điểm BC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y + 18 = 0 \\ 3x - y + 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{48}{5}; -\frac{14}{5}\right).$$

Điểm C đối xứng với B qua P nên $C\left(-\frac{66}{5}; -\frac{8}{5}\right)$.

Tính chất 222. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I . Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Kẻ BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E . Đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại K . Khi đó tứ giác $AICK$ ngoại tiếp đường tròn tâm E .



Ta có tam giác ACK vuông tại C mà $EA = EC$ suy ra $EA = EC = EK$. mặt khác ta có $EA = EI = EC$ do đó tứ giác AICK ngoại tiếp đường tròn tâm E.

Bài tập 248. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E. Đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại K. Biết $I(30; -5), C(40; -15), K(60; -5)$ tìm tọa độ các đỉnh A, B.

(Võ Quang Mẫn)

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ICK có phương trình (ICK) : $(x - 45)^2 + y^2 = 250$ suy ra tâm $E(45; 0)$. Điểm A đối xứng với K qua E suy ra $A(30; 5)$. Đường thẳng IE : $x - 3y - 45 = 0$. Đường thẳng AC : $2x + y - 65 = 0$. Đường thẳng AB đối xứng với AC qua AI nên AB : $2x - y - 55 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y - 45 = 0 \\ 2x - y - 55 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(24; -7).$$

Bài tập 249. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E. Đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại K. Biết $I(60; -30), C(70; -40), K(150; 0)$ tìm tọa độ các đỉnh A, B.

(Võ Quang Mẫn)

Đáp số $A(50; 0), B(56; -33)$.

Bài tập 250. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E. Đường thẳng AE cắt đường thẳng DC tại K. Biết $I(40;0), C(30;10), K(-50;-30)$ tìm tọa độ các đỉnh A, B.

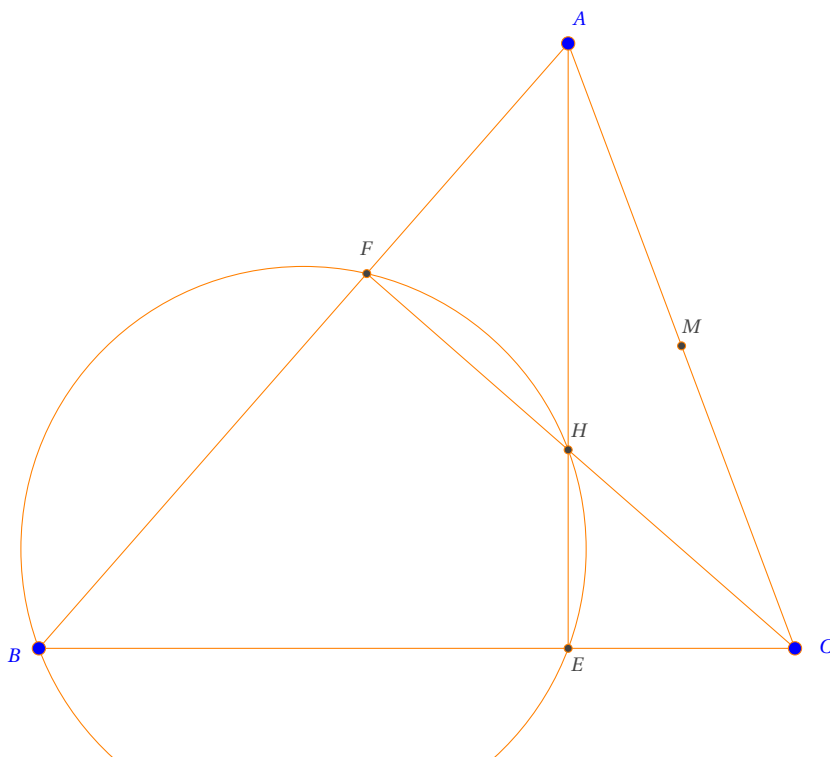
(Võ Quang Mẫn)

Đáp số $A(120;-240), B(41;30)$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ICK có phương trình (ICK) : $(x-35)^2 + (y+135)^2 = 18250$. Do đó tâm E(35;-135). Điểm A đối xứng với K qua E suy ra $A(120;-240)$. Đường thẳng IE : $27x - y - 1080 = 0$. Đường thẳng AC : $8x + 3y - 240 = 0$. Đường thẳng AB đối xứng với AC qua AI nên $AB : 41x + 12y - 2040 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 27x - y - 1080 \\ 41x + 12y - 2040 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(41;30).$$

Tính chất 223.

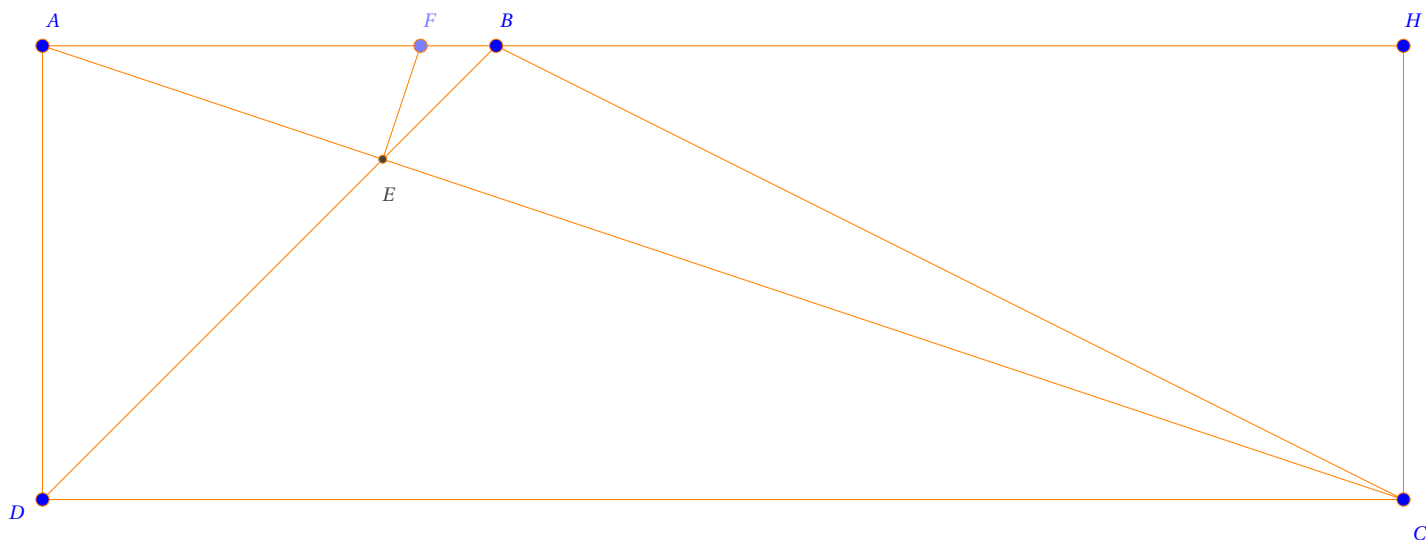


Bài tập 251. Cho tam giác ABC nhọn có AE, CF là đường cao. M là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF có phương trình (BEF) : $(x-2)^2 + y^2 = 5$, $AC = 4\sqrt{5}$, $M \in x+3=0$, $A \in x+2y-7=0$. Tìm tọa độ điểm A.

(Chuyên Nguyễn Trãi- Hải Dương lần 3)

Tính chất 224. 1. $EF \perp AC$.

2. $AE = 3EF$.



Cách 1 dùng vectơ Ta có $EB = \frac{1}{3}ED$, phân tích $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}$ thông qua hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ rồi kiểm tra lại $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ suy ra $EF \perp AC$.

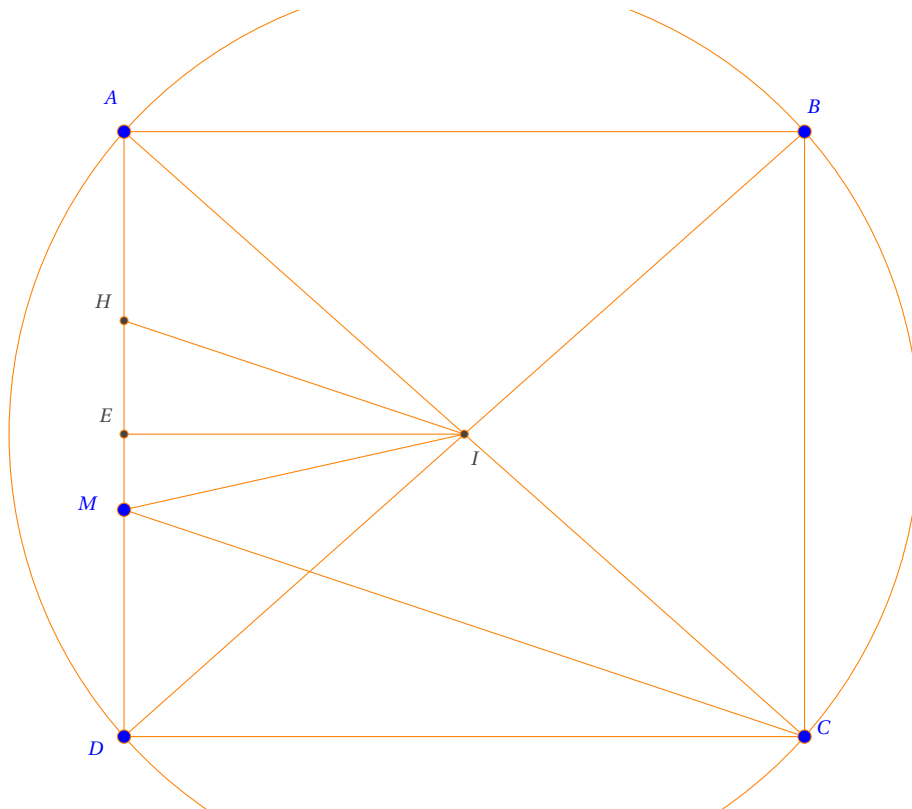
Cách 2 dùng đồng dạng Hạ $CH \perp AB$, đặt $CH = a$ suy ra $AH = 3a, AC = a\sqrt{10}, AF = \frac{5}{6}a, AE = \frac{1}{3}EC = \frac{1}{4}AC = a\frac{\sqrt{10}}{4}$ do đó $AF \cdot AH = AE \cdot AC$ hay $\triangle AEF \sim \triangle AHC$ suy ra $EF \perp AE$ và $\frac{AE}{EF} = \frac{AH}{HC} = 3$.

Bài tập 252. Cho hình thang vuông ABCD tại A, D thỏa $AB = AD = \frac{1}{3}CD$. Giao điểm của AC, BD là E(3; -3) điểm F(5; -9) thuộc cạnh AB sao cho $AF = 5FB$. Tìm tọa độ điểm D, biết A có tung độ âm.

(Chuyên Vinh lần 2)

Đường thẳng AE đi qua E vuông góc EF nên AE: $x - 3y - 12 = 0$. Gọi $A(3a + 12; a)$, ta có $AE = 3EF$ suy ra $\begin{cases} A(-15; -9) \\ A(21; 3) \end{cases}$ loại. Đường thẳng AD đi qua A vuông góc AF nên AD: $x + 15 = 0$. Gọi $D(-15; b)$, ta có $AD = \frac{6}{5}AF$ suy ra $\begin{cases} D(-15; 15) \\ D(-15; -33) \end{cases}$ loại do D, E khác phía AF.

Tính chất 225. Gọi E là trung điểm AD. Khi đó $IE = 3EH$.



Ta có IH là đường trung bình của tam giác AMC , mà $IE \perp HE$ và $CD \perp MD$ nên $\triangle HEI \sim \triangle MDC$
 suy ra $\frac{HE}{EI} = \frac{MD}{DC} = \frac{1}{3}$.

Bài tập 253. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB < 3AD$ nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 + y - 21 = 0$. Gọi M là điểm trên cạnh AD sao cho $DM = \frac{1}{3}AB$ và H là trung điểm AM . Biết $H(-\frac{13}{6}; -\frac{2}{3})$ và A có tọa độ nguyên, tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

(Chuyên Quốc Học lần 2)

Ta có $I(0; -\frac{1}{2})$, $HE = \frac{1}{\sqrt{10}}HI$, $EI = \frac{3}{\sqrt{10}}HI$ suy ra $\begin{cases} E(-2; 0) \\ E(-\frac{19}{10}; -\frac{13}{10}) \end{cases}$.

- $E(-\frac{19}{10}; -\frac{13}{10})$ khi đó đường thẳng AD đi qua H, E cắt đường tròn tại điểm không nguyên nên loại.
- $E(-2; 0)$ khi đó đường thẳng AD đi qua H, E nên có phương trình $AD: 4x - y + 8 = 0$. Tọa độ A, D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-3; -4), D(-1; 4) \\ A(-1; 4), D(-3; -4) \end{cases} \text{ loại do } E \text{ nằm giữa } A \text{ và } H$$

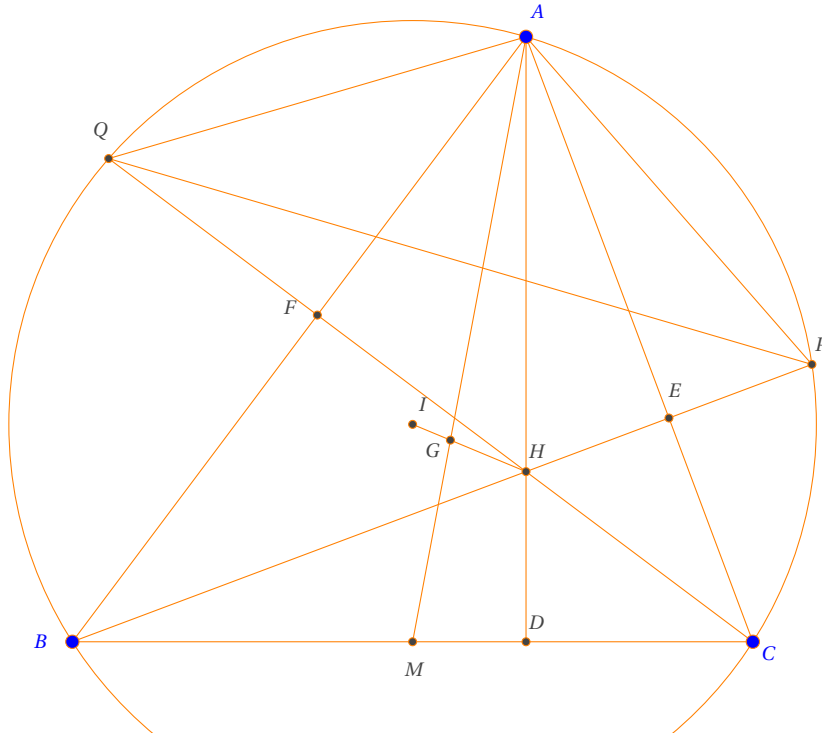
Đường thẳng AB đi qua A và vuông góc AD nên $AB: x + 4y + 19 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 4y + 19 = 0 \\ x^2 + y^2 + y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; -5).$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $C(3; 3)$.

Tính chất 226. 1. $AQ = AH = AP$.

2. $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IH}$.



Bài tập 254. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (I) , các đường cao BE, CF cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai $P(\frac{21}{5}; \frac{7}{5}), Q(1; 3)$. Trung tuyến $AM: 3x - y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Đường trung trực PQ có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3; 3).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ do đó $(ABC): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ do đó tọa độ tâm $I(2; 1)$. Mặt khác ta có $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IH}$ nên H nằm trên đường d là vị tự của đường trung tuyến AM tâm I do đó $d: 3x - y - 8 = 0$. Gọi $H(a; 3a-8)$, ta có $AH = AP$ suy ra

$$\begin{cases} H(3; 1) \\ H(\frac{21}{5}; \frac{23}{5}) \end{cases} \text{ loại vì } H \text{ nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC.$$

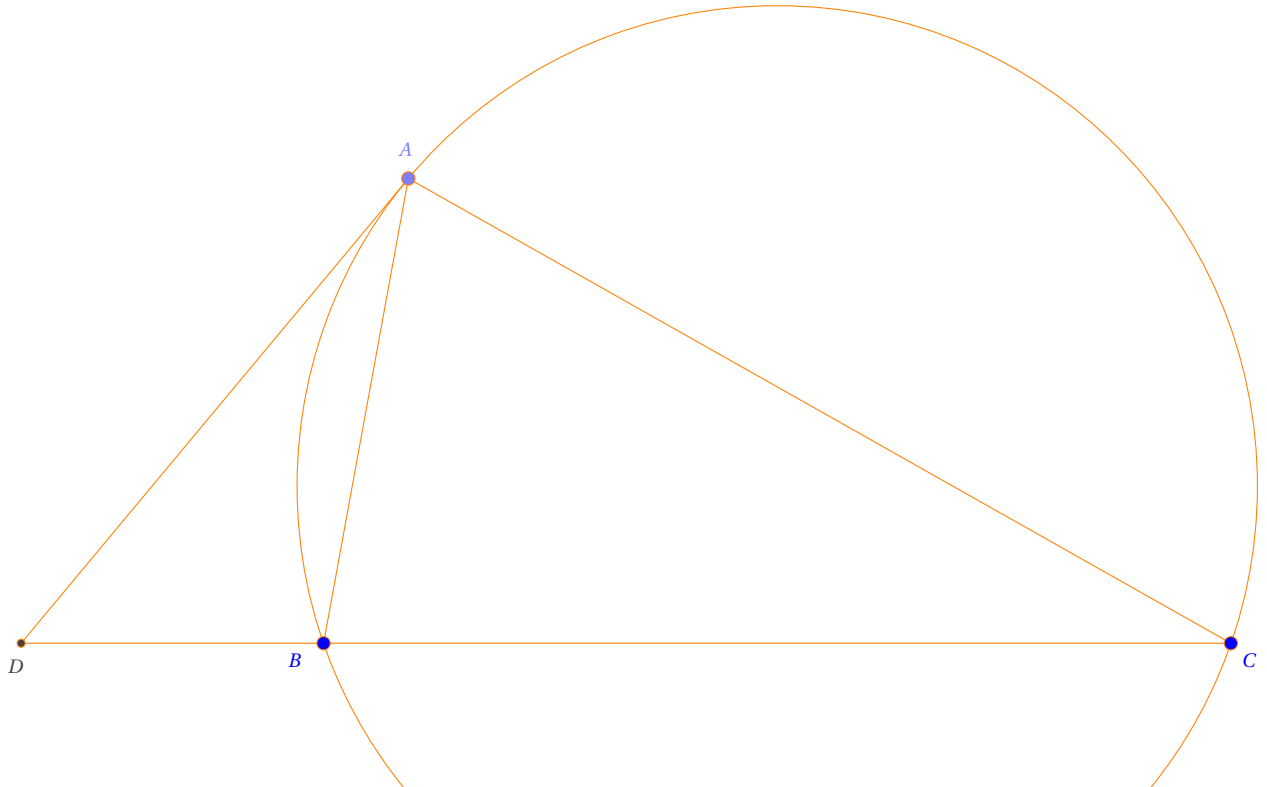
Đường thẳng $HP: x - 3y = 0$. Do đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow B(0; 0).$$

Đường thẳng HQ: $x + y - 4 = 0$. Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0).$$

Tính chất 227. Cho tam giác ABC, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại D. Khi đó $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.



Ta có $\triangle DBA \sim \triangle DAC$ suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Do đó $\frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DA} \cdot \frac{DA}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Nhận xét: đường thẳng AD được gọi là đường đối trung ngoài đỉnh A của tam giác ABC.

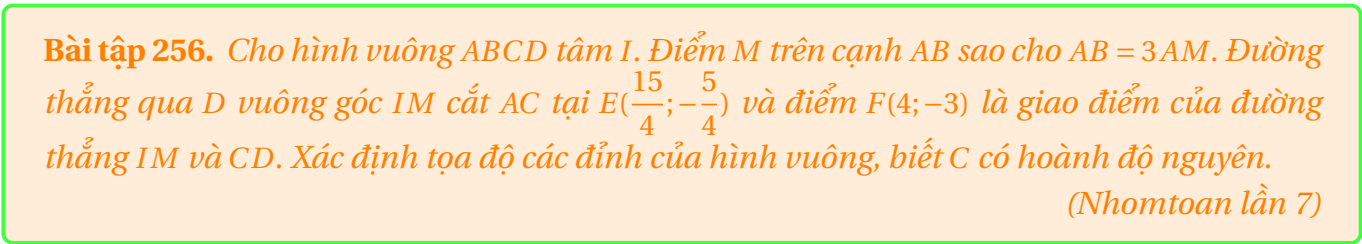
Bài tập 255. Cho tam giác ABC có $AB = 2AC$, $B(1; 2)$, $C(-2; 5)$. Biết tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua $M(3; 2)$, tìm tọa độ điểm A.

Ta có $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ suy ra $D(2; 1)$. Đường thẳng AM đi qua D, N nên có phương trình AM: $x - y - 1 = 0$. Gọi $A(a; a - 1)$ sử dụng $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ giải ra ta được $\begin{cases} A(0; -1) \\ A(4; 3) \end{cases}$.

Tính chất 228. 1. B, E, F thẳng hàng.

2. $EC = EI$.

3.

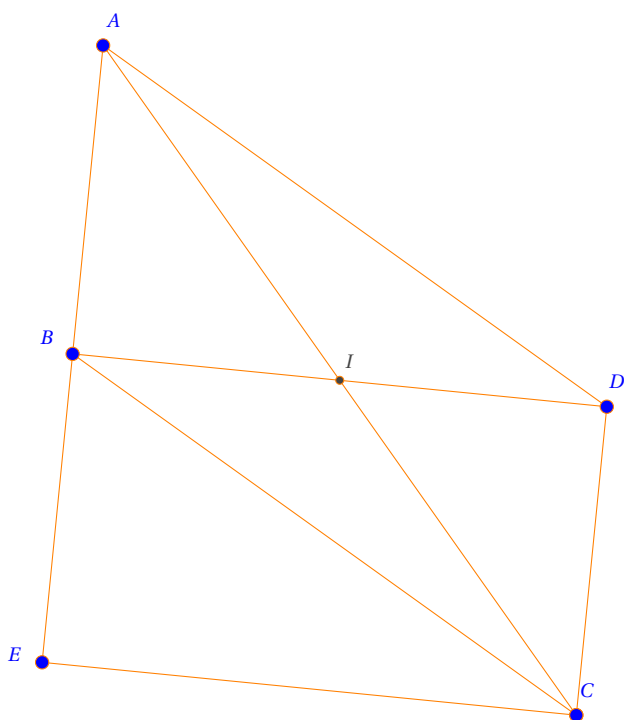


Tính chất 229.



Bài tập 257. Cho tam giác ABC biết $A(2; -14)$, $H(-26; -10)$; $J(-2; -6)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Tính chất 230. $\angle ABD = 90^\circ$.

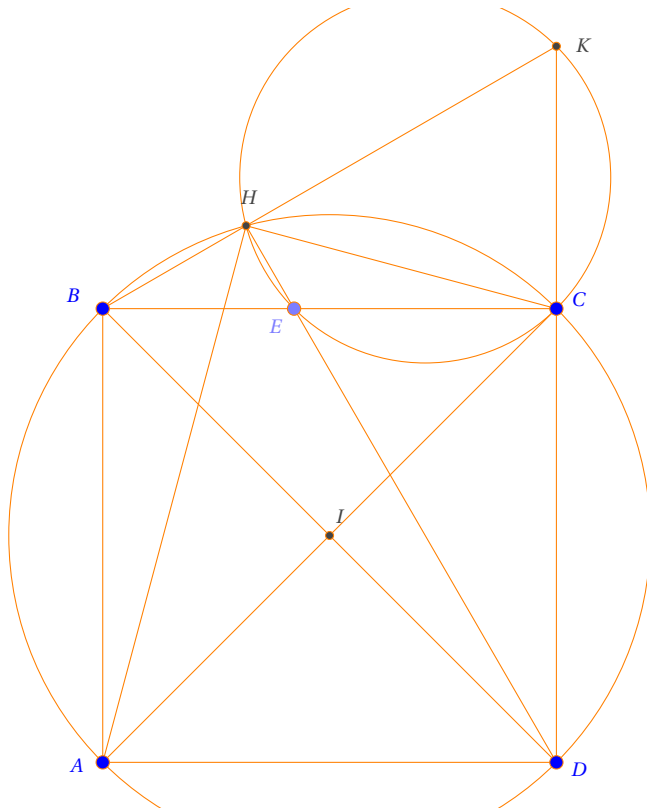


Bài tập 258. Cho hình bình hành ABCD có tâm $I(2\sqrt{3}-2; 5)$, $BC = 2AB$, $\angle BAD = 60^\circ$. $E(-2; 9)$ là điểm đối xứng của A qua B. Tìm tọa độ các đỉnh ABCD, biết A có hoành độ âm.

(Sở Thanh Hóa)

Tính chất 231. Cho hình vuông ABCD. E là điểm thuộc cạnh BC. Đường thẳng qua B vuông góc với DE cắt DE, DC tại H và K. Khi đó

1. tứ giác HECK nội tiếp.
2. A, B, H, C, D nội tiếp đường tròn tâm I.



Ta có $\angle EHK = \angle ECK = 90^\circ$ do đó tứ giác HECK nội tiếp đường tròn đường kính EK.

Bài tập 259. Cho hình vuông ABCD. $E(2; 1)$ là điểm thuộc cạnh BC. Đường thẳng qua B vuông góc với DE cắt DE, DC tại H và $K(5; -2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết $CH: 7x - y - 16 = 0$ và H có tung độ dương.

(Định Hóa lần 3)

Đường tròn đường kính HC có phương trình (HC): $(x - \frac{7}{2}) + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$. Tọa độ H, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x - y - 16 = 0 \\ (x - \frac{7}{2}) + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(2; -2) \\ H(\frac{62}{25}; \frac{34}{25}) \end{cases}.$$

Đường thẳng BC đi qua E, C nên BC: $x - 2 = 0$. Đường thẳng KH đi qua K, H nên KH: $4x + 3y - 14 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

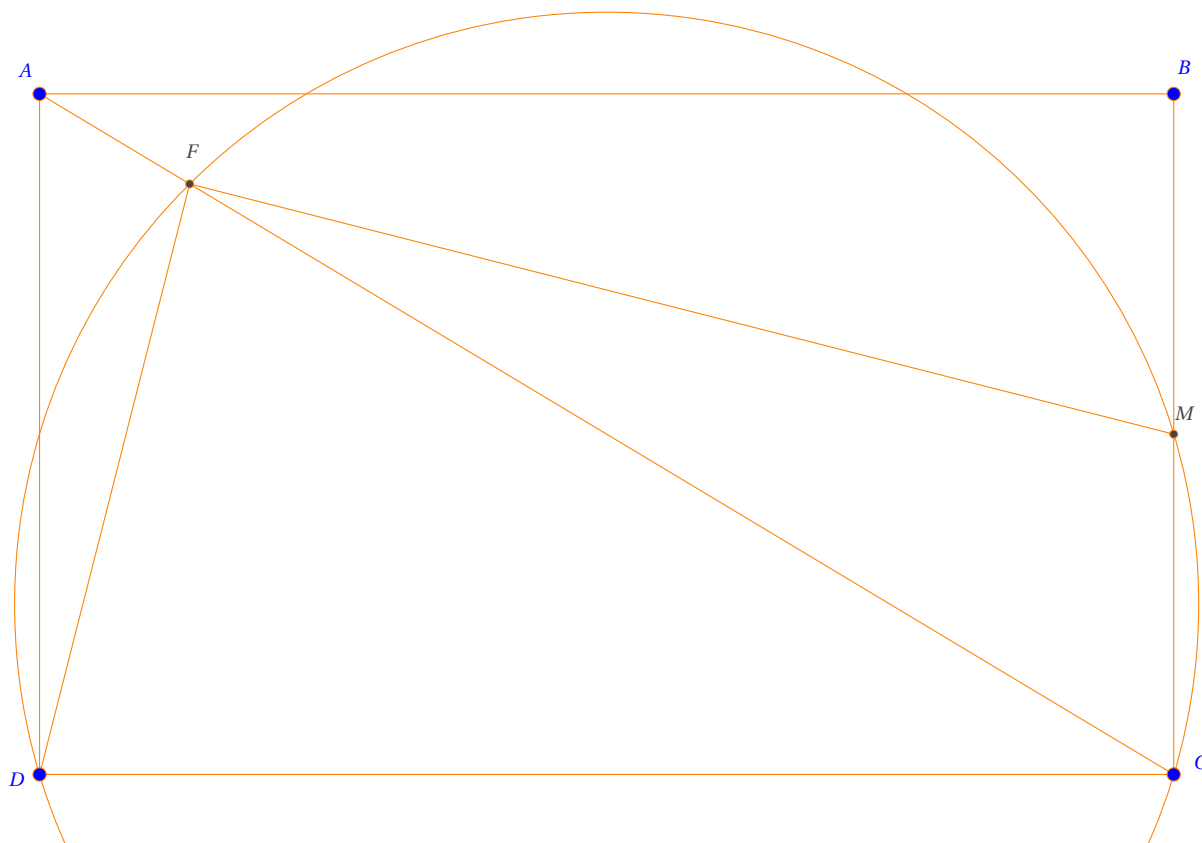
$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 4x + 3y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 2).$$

Đường thẳng BA đi qua B vuông góc với BC nên BA: $y - 2 = 0$. Gọi $A(a; 2)$. Ta có $AB = BC$ suy ra

$$\begin{cases} A(-2; 2) \\ A(6; 2) \end{cases} \text{ loại vì } A, K \text{ cùng phía } BC$$

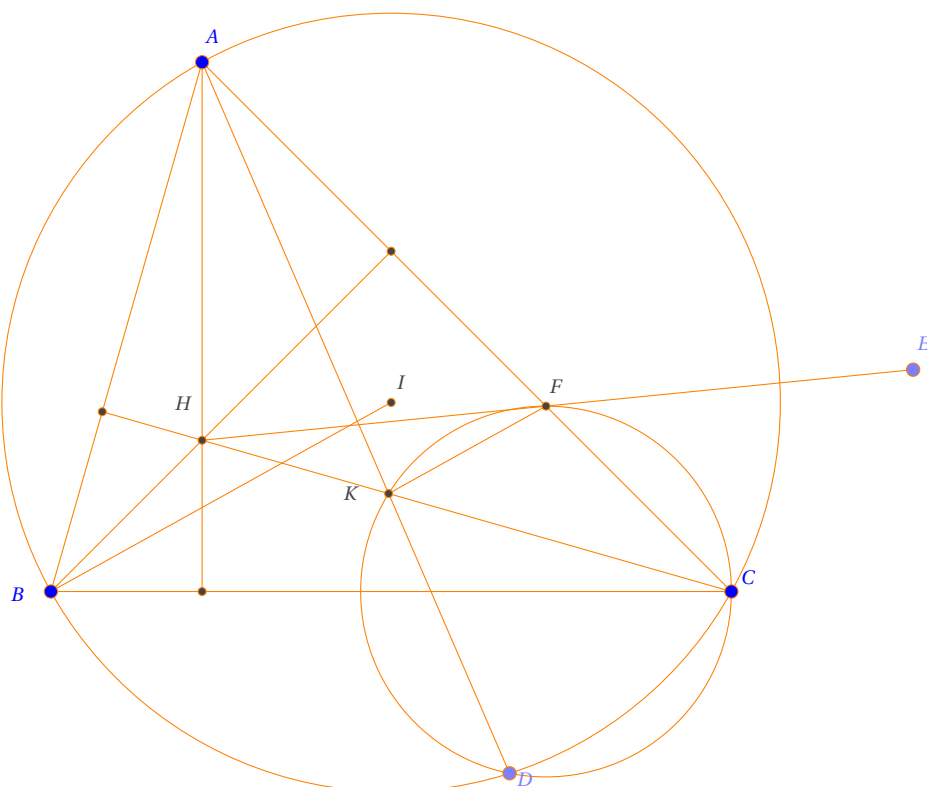
Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ suy ra $D(-2; -2)$.

Tính chất 232.



Bài tập 260. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 16 và điểm $M(4;7)$ là trung điểm của cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt đường chéo AC tại điểm $F\left(\frac{6}{5}; \frac{13}{5}\right)$, đỉnh D thuộc đường thẳng $(d): x + y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đỉnh C có hoành độ là số nguyên dương.

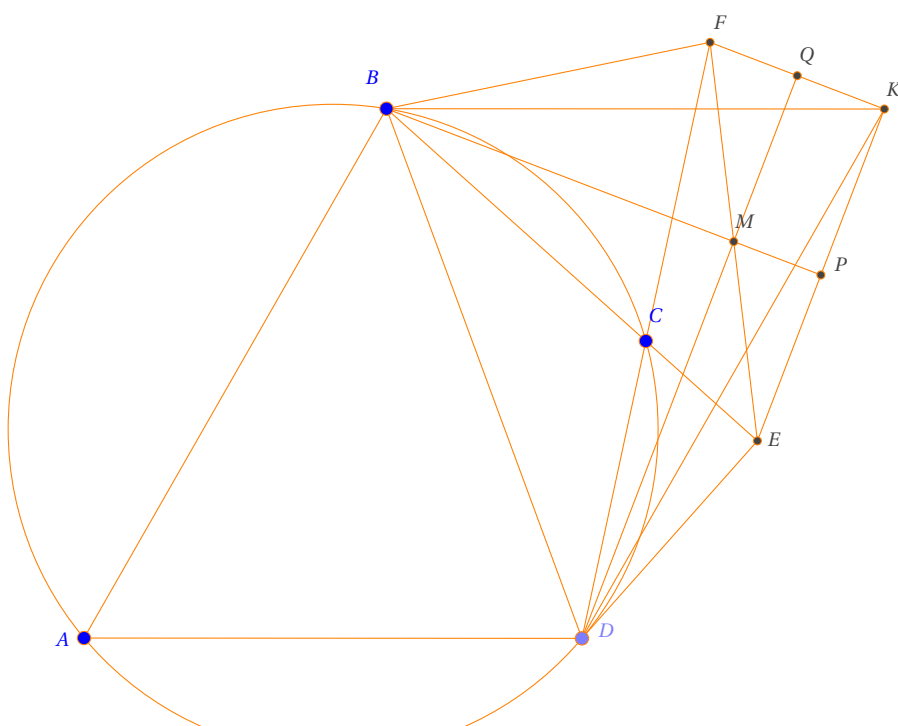
Tính chất 233.



Bài tập 261. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (I) và có trực tâm H. D là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. E là điểm đối xứng của D qua AC. Đường thẳng EH cắt AC tại F. Đường thẳng AD cắt CH tại K. Biết $AC: x + y - 1 = 0$, $FK: 6x - 8y - 13 = 0$, $y_A > 0$, $E \in x - 6y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Tính chất 234. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Trên các tia BC, DC lấy các điểm E, F sao cho $BE = AD$, $DF = AB$. Dựng hình bình hành BADK khi đó

1. $KE \perp KF$.
2. Gọi M là trung điểm EF ta có $MB \perp MD$.



1. Ta có $\angle KBE + \angle ABC + \angle ACD + \angle EDK = 360^\circ - 2\angle A$ suy ra $\angle KBE + \angle EDK = 180^\circ - 2\angle A$ do đó $\angle FKD + \angle BKE = 90^\circ + \angle A = \angle BKD$ hay $\angle FKE = 90^\circ$.
2. Gọi P, Q là trung điểm của KE, KF. Ta có các tam giác EBK, FDK cân tại B, D nên $BP \perp EK$, $DQ \perp FK$ do đó BP, DQ là đường trung bình của tam giác KEF nên BP, DQ đi qua trung điểm M của EF hay $BM \perp MD$.

Bài tập 262. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có $B(-7; -5)$. Trên các tia BC, DC lấy các điểm E, F sao cho $BE = AD$, $DF = AB$. Biết $E(-\frac{24}{5}; -\frac{23}{5})$, $F(\frac{14}{5}; -\frac{57}{5})$, $D \in x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ A, C, D.

(VTED off lần 6)

Trung điểm M của EF có tọa độ $M(-1; -8)$. Đường thẳng MD đi qua M vuông góc với BM nên

$MD: 2x - y - 6 = 0$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5; 4).$$

Đường thẳng $BE: 2x - 11y - 41 = 0, DF: 7x - y - 31 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

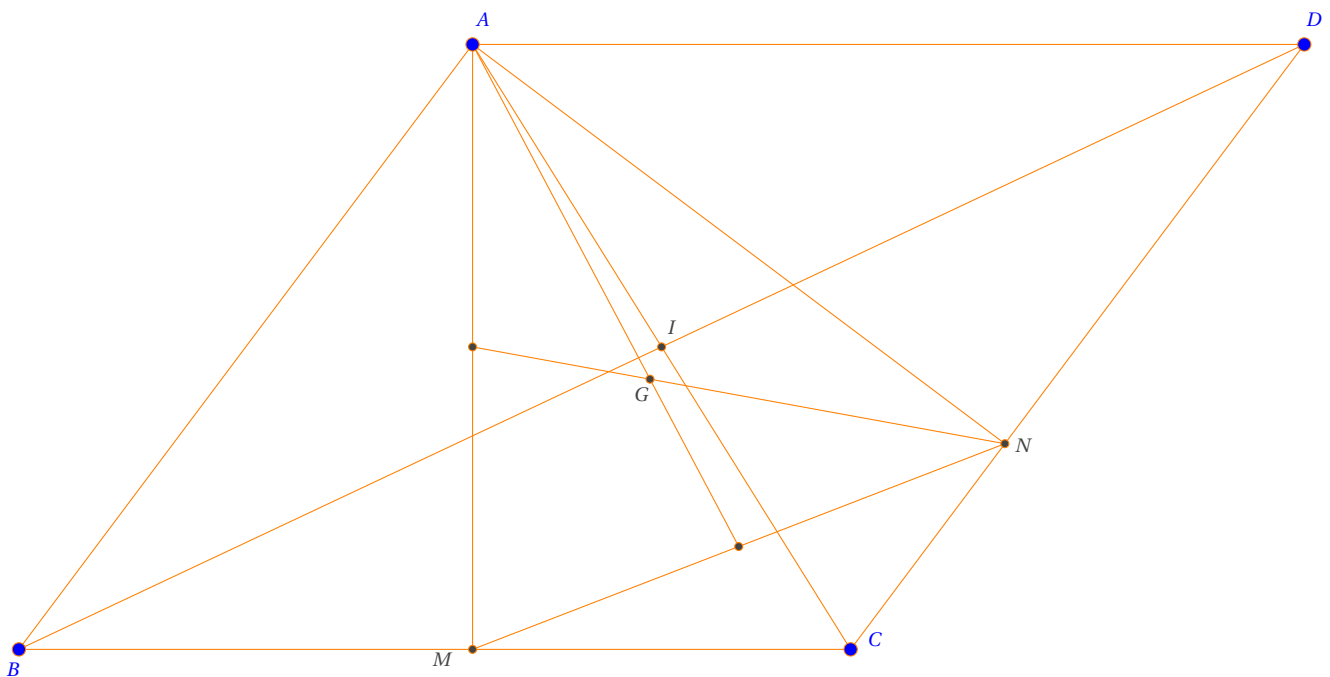
$$\begin{cases} 2x - 11y - 41 = 0 \\ 7x - y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; -3).$$

Đường thẳng FK đi qua F vuông góc DM nên $FK: x + 2y + 20 = 0$. Tương tự $EK: 2x - y + 5 = 0$. Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y + 20 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-6; -7).$$

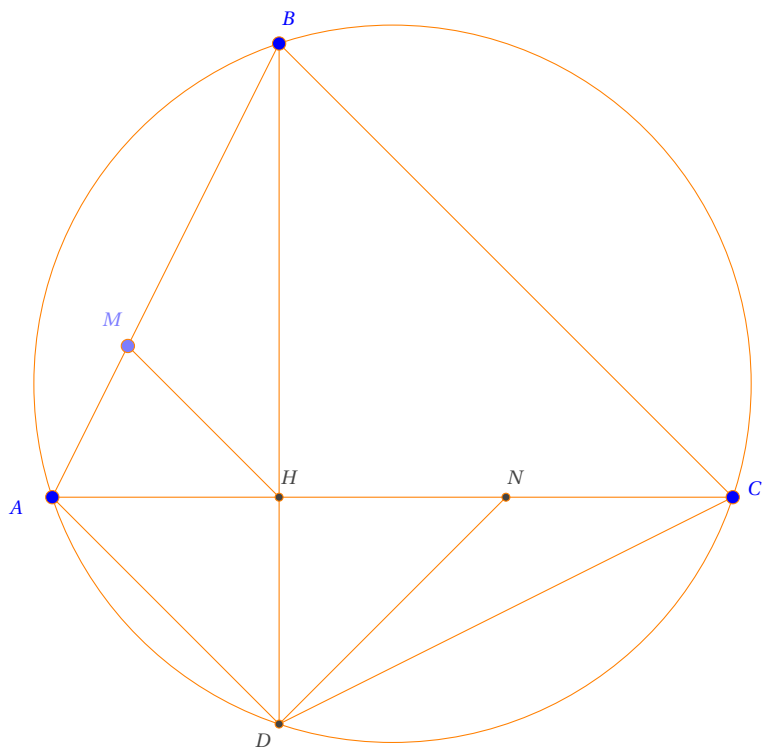
Ta có $BADK$ là hình bình hành suy ra $A(4; 6)$.

Tính chất 235.



Bài tập 263. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm $I(1; -2)$. Các điểm M, N là hình chiếu vuông góc của A lên $BC, CD, G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ là trọng tâm tam giác $AMN, E(10; 6)$ thuộc đường thẳng AG và $F(9; -1)$ thuộc đường thẳng MN . Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D biết M có tung độ bé hơn 2.
(VTED off lần 5)

Tính chất 236. $HM \perp DN$.



Tứ giác ABCD nội tiếp suy ra $HA \cdot HC = HB \cdot HD$ hay $HM \perp DN$. Ta có $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HD}$. Do đó $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{3}(-HA \cdot HC + HB \cdot HD) = 0$

Bài tập 264. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại $H(1; -1)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$ và $N(-\frac{1}{2}; -1)$ là trung điểm của HC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết rằng $D(1; 4)$ và điểm M nằm trên đường thẳng $d: 3x + y - 11 = 0$.

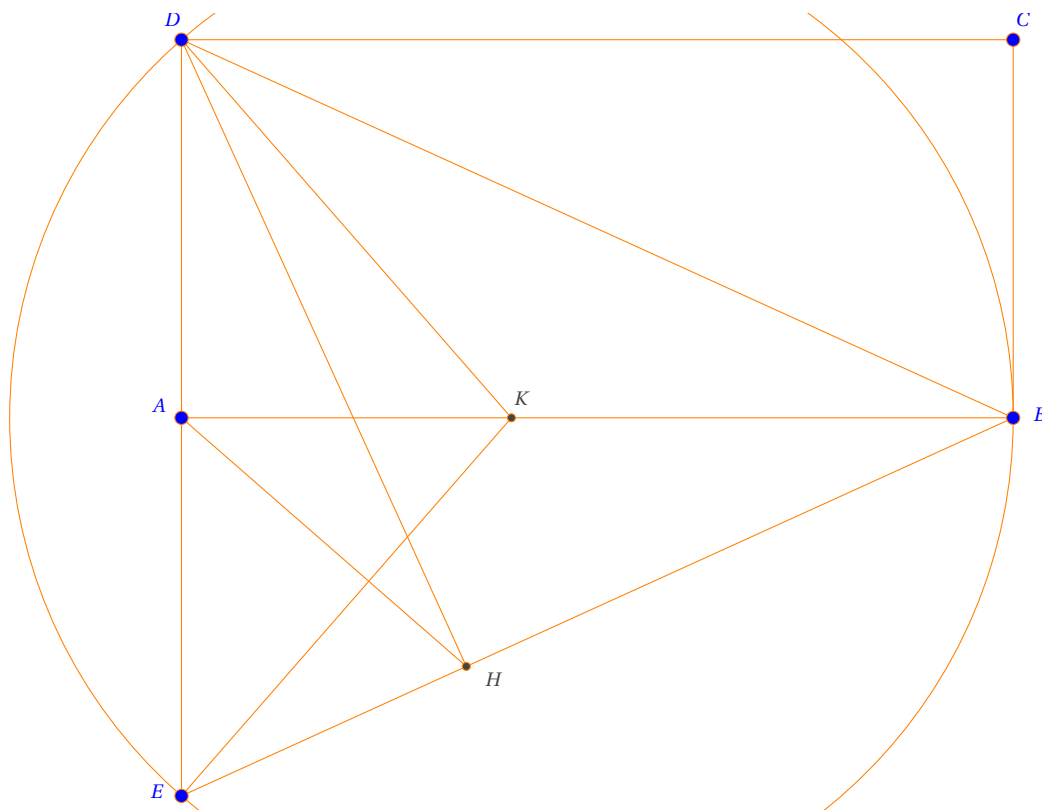
(Vted lần 21)

Đường thẳng HM đi qua H và vuông góc DN nên $HM: 3x + 10y + 7 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 10y + 7 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{13}{3}; -2\right).$$

Đường thẳng HN: $y + 1 = 0$, HD: $x - 1 = 0$. Gọi $A(a; -1)$, $B(1; b)$, điểm M chia đoạn AB theo tỷ số $k = -\frac{1}{2}$ suy ra tọa độ $M\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{b-2}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}; -2\right)$ do đó $\begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} A(6; -1) \\ B(1; -4) \end{cases}$. Ta có N là trung điểm HC suy ra $C(-2; -1)$.

Tính chất 237. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác DBE, khi đó $EK \perp AH$.



Tính chất kinh điển, xem lại trong tập 1.

Bài tập 265. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của D qua A và H là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$, đường thẳng AH có phương trình $3x - 4y - 17 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết E có tung độ âm và A có tung độ dương.

(Võ Quang Mẫn)

Tọa độ tâm K, đường tròn ngoại tiếp tam giác DBE là $K(4;1)$. Đường thẳng KE đi qua K vuông góc AH nên $KE: 4x + 3y - 19 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + 3y - 19 = 0 \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(7; -3) \\ E(1; 5) \text{ loại} \end{cases}.$$

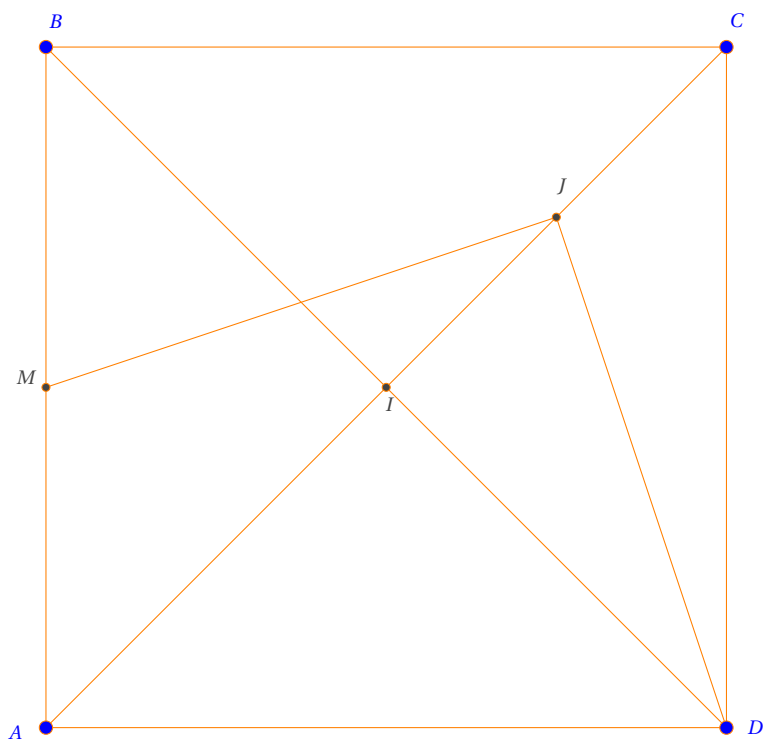
Gọi $A(a; \frac{3a-17}{4})$ do A là trung điểm DE suy ra $D(2a-14; \frac{3a-5}{2})$. Vì $D \in (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$ nên thế vào giải ra ta được

$$\begin{cases} a = 7 \\ a = \frac{79}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(7; 1) \\ A(\frac{79}{25}; -\frac{47}{25}) \end{cases} \text{ loại}.$$

Điểm D đối xứng với E qua A suy ra $D(7; 5)$. Đường thẳng AB đi qua A, K nên $AB: y - 1 = 0$. Tọa B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-1; 1) \\ B(9; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-1; 5) \\ C(9; 5) \end{cases}.$$

Tính chất 238.



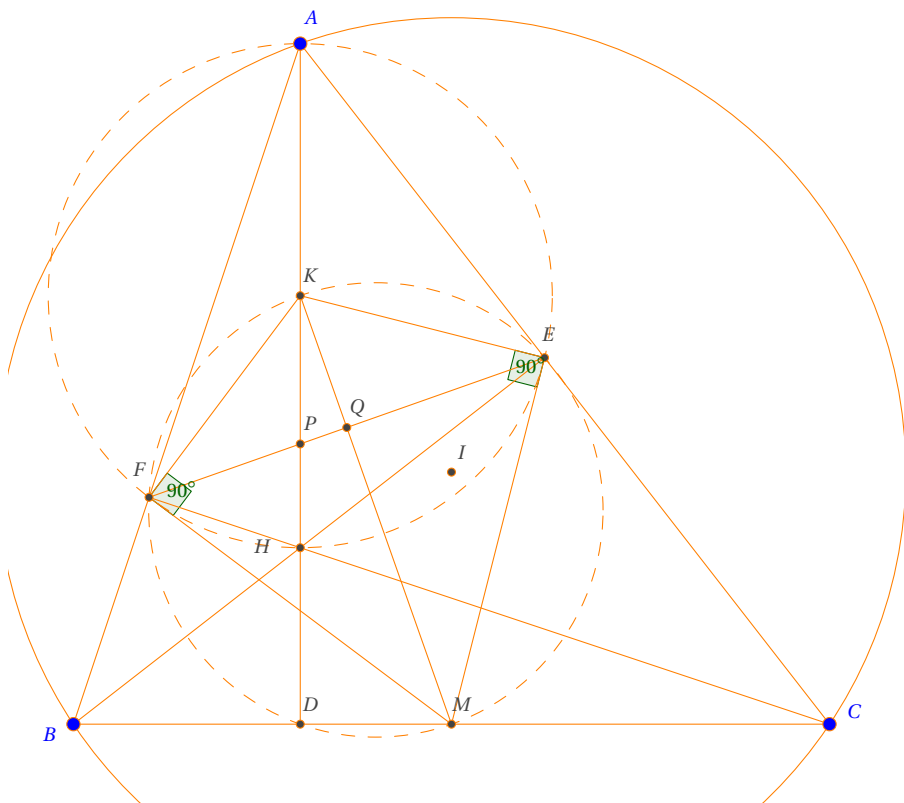
Bài tập 266. Cho hình vuông $ABCD$ tâm I . $M(0;3)$ là trung điểm AB . $J(1;0)$ là trung điểm CI .
 Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết $D \in x - y + 1 = 0$.

(Chuyên Thái Nguyên lần 2)

Tính chất 239. Gọi K là trung điểm AH . Khi đó

1. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IM}$.

2. $KE \perp EM, KF \perp FM$.



Bài tập 267. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(3;3)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại $P(2; \frac{7}{2})$. Gọi $M(3;2)$ là trung điểm của BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Trần Công Hưng)

Cách 1 dùng trực đẳng phương Đường thẳng AD đi qua P và song song với IM nên AD : $x - 2 = 0$. Gọi $K(2; a)$, ta có đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE là đường tròn tâm K bán kính IM nên có phương trình $(x - 2)^2 + (y - a)^2 = 1$. Đường tròn đường kính KM có phương trình (KM) : $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{a+2}{2})^2 = \frac{1 + (2-a)^2}{4}$. Do đó đường thẳng EF có phương trình EF : $x + (2-a)y + a^2 - 2a - 3 = 0$.

Đường thẳng EF đi qua P suy ra $a^2 - \frac{11}{2}a + 6 = 0$ suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} K(2;4) \\ K(2; \frac{3}{2}) \end{cases}$, vì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IM}$ nên

$$\begin{cases} A(2;5) \\ A(2; \frac{5}{2}) \end{cases}.$$

Cách 2 tuyệt chiêu, dùng cực và đối cực hay hàng điểm điều hòa

Tính chất 240. $KP \cdot KD = KH^2 = KA^2 = IM^2$.

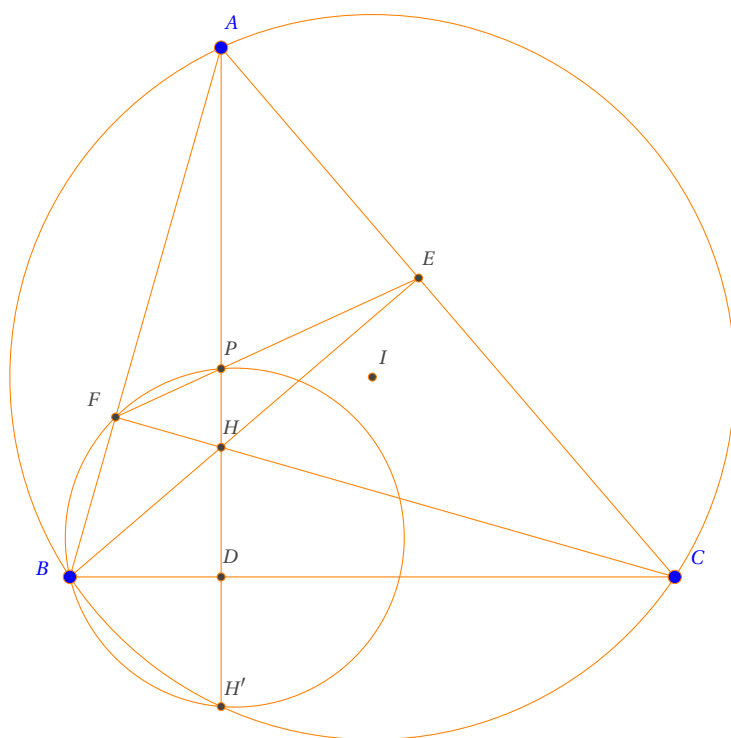
Đường thẳng AD đi qua P và song song với IM nên AD : $x - 2 = 0$, AD : $y = 2$. Suy ra tọa độ $D(2;2)$. Chú ý $KP \cdot KD = KQ \cdot KM = KE^2 = IM^2$ suy ra $\begin{cases} K(2;4) \\ K(2; \frac{3}{2}) \end{cases}$, vì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IM}$ nên $\begin{cases} A(2;5) \\ A(2; \frac{5}{2}) \end{cases}$.

Nhận xét:

- Tính chất trên là hệ quả của định lý Brocard. Ta có $(A, H, P, D) = -1$. suy ra $KP \cdot KD = KH^2 = KA^2$.
- Theo quan niệm cực và đối cực. Xét đường tròn tâm K bán kính KA. Vì đường đối cực của M

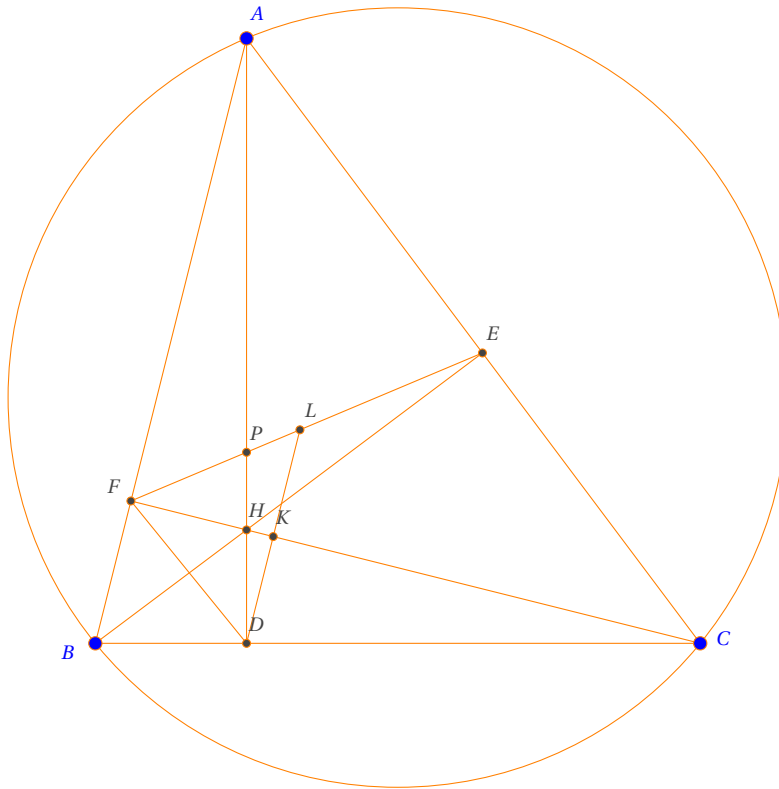
là EF đi qua P nên đường đối cực của P cũng đi qua M do đó đường đối cực của P là đường thẳng qua M vuông góc với KP , tức là đường thẳng BC .

Tính chất 241. $\frac{AH}{HD} = 2 \frac{AP}{PD}$.



Cách 1 Gọi H' là điểm đối xứng của H qua BC . Ta có $\angle FPH = \angle FAP + \angle AFP = \angle ACF + \angle FCB = \angle ACB = \angle AH'B$ do đó tứ giác $BEPH'$ nội tiếp do đó $AF \cdot AB = AP \cdot AH'$. Thật vậy $\frac{AH}{HD} = 2 \frac{AP}{PD} \Leftrightarrow \frac{AH}{HH'} = \frac{AP}{PD} \Leftrightarrow \frac{AH}{AH'} = \frac{AP}{AD} \Leftrightarrow AH \cdot AD = AP \cdot AH'$. điều này đúng do $AF \cdot AB = AH \cdot AD$.

Cách 2



Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt CF, EF tại K, L. Chú ý FC là phân giác $\angle DFE$ do đó $\frac{AH}{HD} = \frac{AF}{DK} = 2 \frac{AF}{DL} = 2 \frac{AP}{PD}$.

Bài tập 268. Cho tam giác ABC các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại $P(2; \frac{7}{2})$. Gọi $M(3; 2)$ là trung điểm của BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $A(2; 5)$.

(Võ Quang Mẫn)

Tính chất 242. Cho hình chữ nhật ABCD, trên các cạnh AB, BC lấy điểm E, F sao cho $AE = BF$. AF, DE cắt nhau tại K. Giả sử CK cắt AE tại H. Khi đó

1. $AF \perp DE$.

2. $\frac{EH}{EA} = \frac{AE}{AB}$.

3. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với CK cắt BF tại G, ta có $\frac{FG}{FB} = \frac{EH}{EA} = \frac{AE}{AB}$.



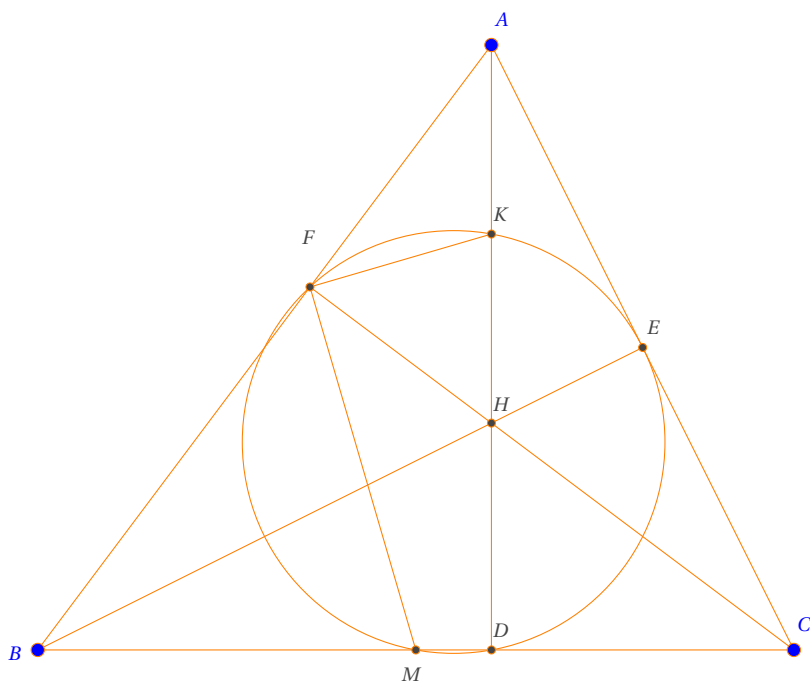
cắt CH tại P . Ta có $\triangle PAK \sim \triangle FCD$, suy ra $\begin{cases} \frac{EK}{AP} = \frac{BF}{FC} = \frac{AE}{AB} \\ \frac{AK}{AP} = \frac{CD}{CF} \end{cases}$. Do đó $\frac{EH}{HA} = \frac{EK}{AP} = \frac{BF}{CF}$ hay

$$\frac{EH}{EA} = \frac{AE}{AB}.$$

3. $\triangle GDC = \triangle HCB$ suy ra $CG = BH$ suy ra $\frac{FG}{FB} = \frac{EH}{EA} = \frac{AE}{AB}$.

Nhận xét: ý 3. ta có thể dùng vectơ, tức phân tích $\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{DG}$ theo các vectơ cơ sở $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$. Đây là ý tưởng cơ bản nhất mà ai cũng cần phải nghĩ đầu tiên để giải quyết những yếu tố vuông góc.

Facebook: Võ Quang Mẫn



Bài tập 269. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF và H là trực tâm tam giác ABC. Gọi K, M là trung điểm của AH, BC. Phương trình đường thẳng FK: $8x - 6y - 1 = 0$ và điểm M nằm trên đường thẳng d: $6x + 8y + 13 = 0$. Tìm tọa độ trực tâm H biết A(0;1).

(đề 3 của Đoàn Trí Dũng)

Ta có hai đường thẳng FK vuông góc với d nên $FM \equiv d$. Do đó tọa độ F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 8x - 6y - 1 = 0 \\ 6x + 8y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow F\left(-\frac{7}{10}; -\frac{11}{10}\right).$$

Đường thẳng FH đi qua F và vuông góc FA nên FH: $x + 3y + 4 = 0$. Gọi $H(-3a - 4; a)$ do đó trung điểm $K\left(-\frac{3a+4}{2}; \frac{a+1}{2}\right)$. Vì $K \in 8x - 6y - 1 = 0$ nên thế vào giải được $H\left(0; -\frac{4}{3}\right)$.

Tính chất 244. Gọi E giao điểm của MN và AH. Khi đó

1. M là trung điểm NE và $HE = \frac{1}{2}HA$.
2. $BE \perp EM$.

1. Gọi D là trung điểm HC suy ra M là trung điểm của HD và ND là đường trung bình tam giác AHC hay $ND \parallel HE$ do đó M là trung điểm NE và $HE = \frac{1}{2}HA$.
2. Ta có
$$\begin{cases} HA = 2DN \\ HD = 2DM \end{cases} \quad \text{suy ra } \triangle HAD \sim \triangle DNM \text{ do đó } \angle HAD = \angle MND \text{ hay tứ giác } AEDN \text{ mà}$$

tứ giác $BAND$ nội tiếp suy ra tứ giác $ABEN$ nội tiếp hay $BE \perp EM$.

Bài tập 270. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . $M(1; 1)$ là điểm thuộc cạnh HC sao cho $CM = 3HM$. $N(2; \frac{3}{2})$ là trung điểm AC . Biết $B \in 4x + 6y - 7 = 0$, tìm tọa độ các điểm A, B, C .

(Trần Hưng)

Điểm E đối xứng với M qua N suy ra $E(0; \frac{1}{2})$ Đường thẳng qua EB qua B và vuông góc EM nên $EB: 4x + 2y - 1 = 0$. Toa độ B là nghiệm của hệ

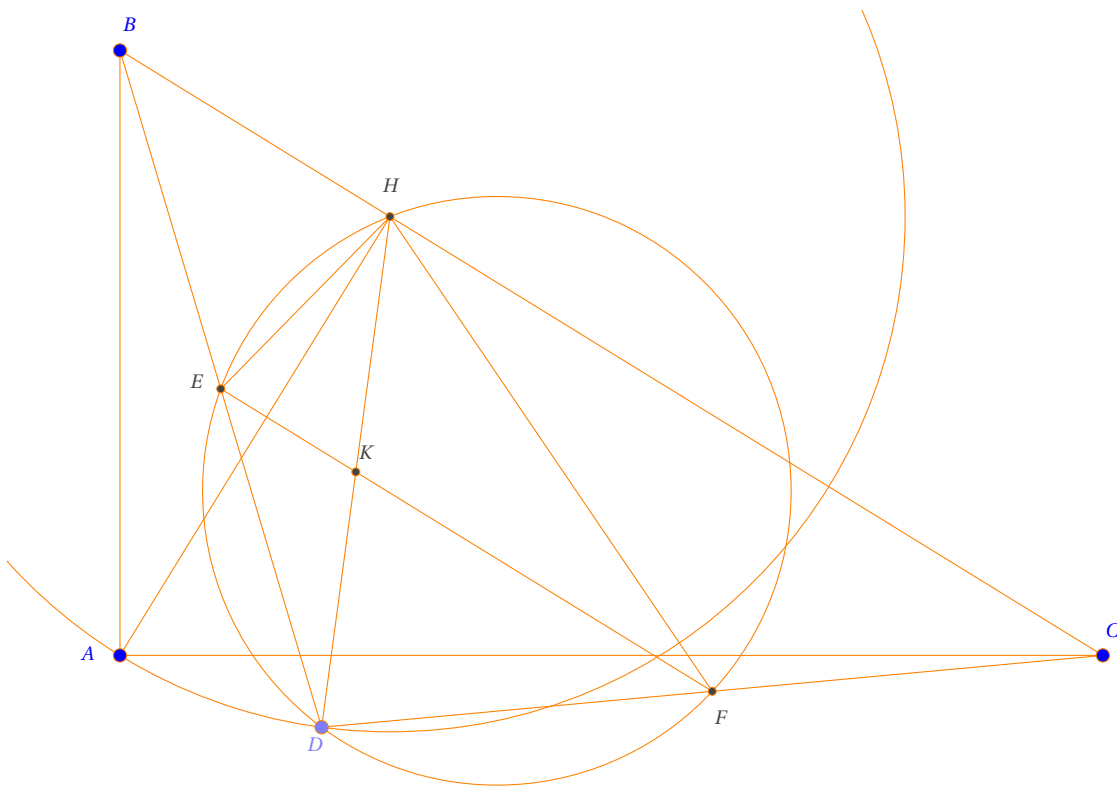
$$\begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 4x + 6y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}).$$

Đường thẳng $BM: x + 3y - 4 = 0$. Đường thẳng EH đi qua E vuông góc MB nên $EH: 6x - 2y + 1 = 0$.
Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 6x - 2y + 1 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}).$$

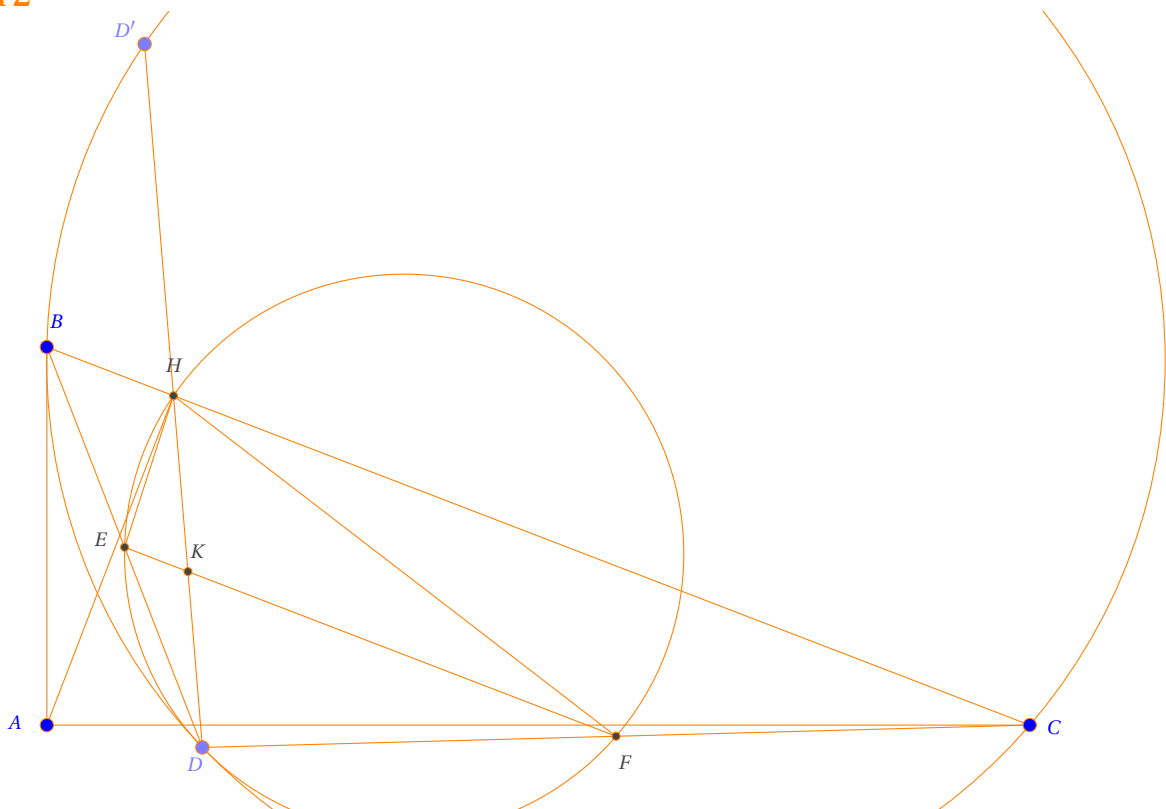
$$Vi \overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{EH} \text{ suy ra } A(\frac{3}{4}; \frac{11}{4}).$$

Tính chất 245. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. D là điểm bất kỳ sao cho $HA = HD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của DB, DC. Khi đó bốn điểm H, E, F, D nội tiếp.



Gọi K là giao điểm của EF và HD. Khi đó EF là đường trung bình của tam giác BDC nên K là trung điểm HD. Ta có $KH.KD = \frac{HD^2}{4} = \frac{HA^2}{4} = \frac{HB.HC}{4} = KE.KF$ do đó bốn điểm H, E, F, D nội tiếp.

Cách 2

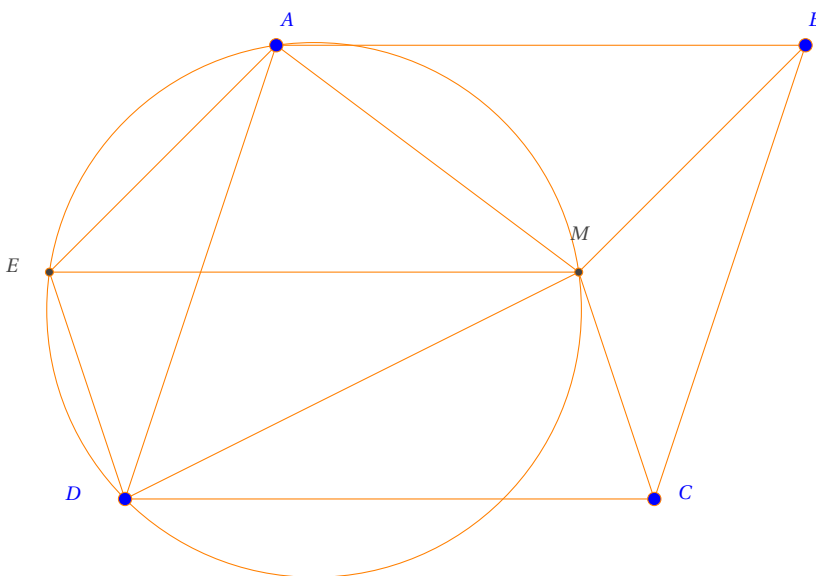


Gọi D' là điểm đối xứng của D qua H. Ta có $HB.HC = HA^2 = HD.HD'$ do đó bốn điểm D, B, D', C

nội tiếp đường tròn. Xét phép vị tự tâm D tỷ số $k = \frac{1}{2}$ suy ra biến ba điểm $\{B, D', C\}$ thành ba điểm $\{E, H, F\}$ do đó bốn điểm H, E, F, D nội tiếp.

Bài tập 271.

Tính chất 246. Cho hình bình hành $ABCD$ với điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\angle MAB = \angle MCB$. Dựng hình hành $DCME$. Khi đó tứ giác $DEAM$ nội tiếp.



Ta có $\angle MAB = \angle MCB \Leftrightarrow \angle DAM = \angle DCM$. Mà $DEMC$ là hình bình hành do đó $\angle DEM = \angle DAM$ hay tứ giác $DEAM$ nội tiếp.

Bài tập 272. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $D(-7;0)$ và điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\angle MAB = \angle MCB$. Biết rằng phương trình $MB: x+y-2=0$ và $MC: 2x-y-1=0$, điểm A có tung độ lớn hơn 2 và thuộc đường thẳng $d: y-3x=0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

(Vted lần 22)

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1).$$

Áp dụng tính chất tứ giác $DEAM$ nội tiếp nên $(MA; MD) = (MB; MC)$ Suy ra phương trình đường thẳng MA là

$$\begin{cases} AM: x - 5y + 4 = 0 \\ AM: 11x + 23y - 34 = 0 \end{cases}.$$

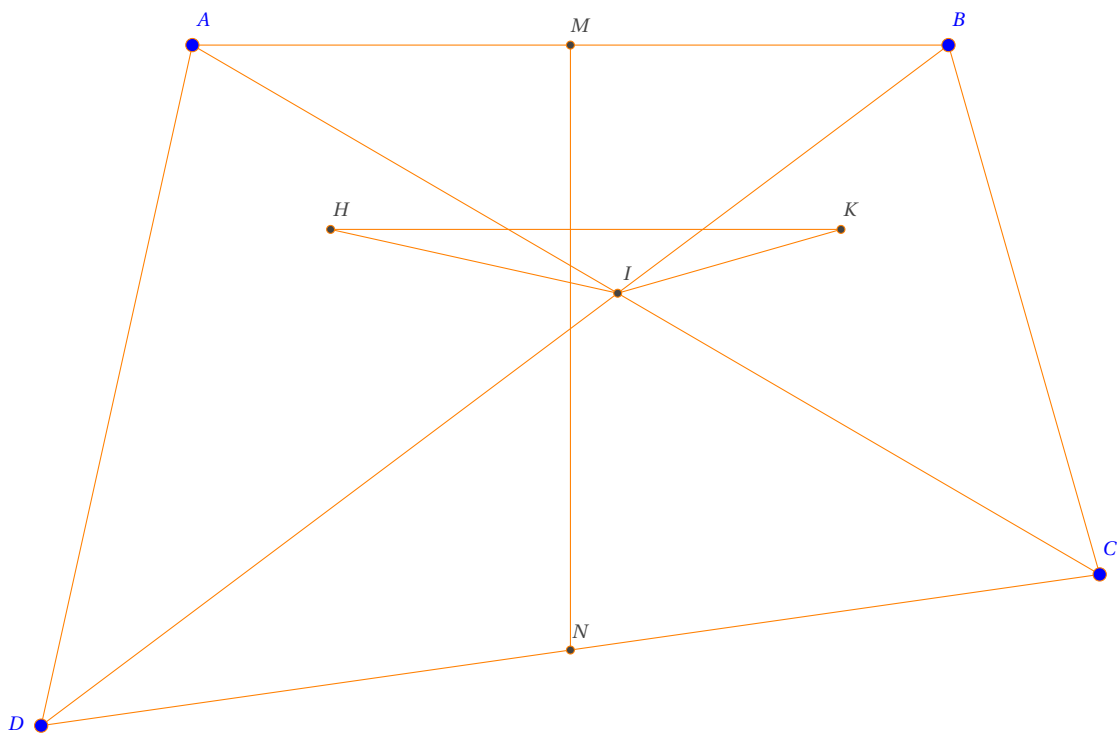
- $AM: x - 5y + 4 = 0$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 5y + 4 = 0 \\ y - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0).$

- $AM: 11x + 23y - 34 = 0.$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ y - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0).$

Tính chất 247. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I. Gọi H, K là trực tâm tam giác AID, BIC và M, N là trung điểm của AB, CD. Khi đó $MN \perp HK$.



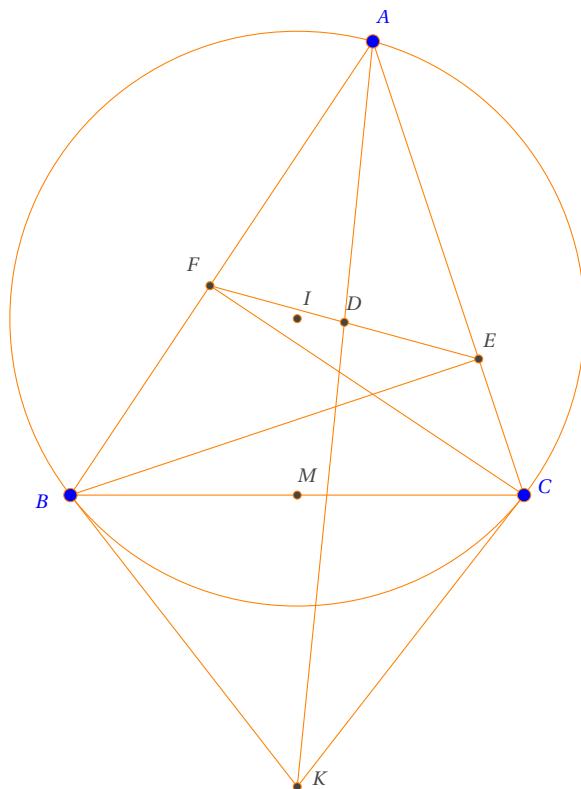
Cách 1 dùng trục đẳng phương

Cách 2 dùng vectơ cơ bản ai cũng nghĩ đến

Ta có $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IH}$ và $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Do đó $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{BC}$. Mặt khác ta có $IK = BC|\cot \angle BIC|$; $IH = AD|\cot \angle AID|$. Chú ý $(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{BC})$ do đó $IK \cdot AD = IH \cdot BC$ suy ra $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{MN}$ suy ra $MN \perp HK$.

Bài tập 273.

Tính chất 248. AK là đường đối trung mà tứ giác BFEC nội tiếp do đó AK đi qua trung điểm D của EF.



Bài tập 274. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I và $I \in 5x + 2y - 1 = 0$ có hai đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (I) cắt nhau tại K, biết $AK : 13x + 9y + 11 = 0$, $EF : 4x - 3y + 23 = 0$, $BC : x - 2y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 13x + 9y + 11 = 0 \\ 4x - 3y + 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{16}{5}; \frac{17}{5}\right).$$

Gọi M là trung điểm BC, khi đó MD là trung trực EF do đó MD đi qua D và vuông góc EF nên $MD : 3x + 4y - 4 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1).$$

Đường thẳng MI đi qua M vuông góc BC nên $MI : 2x + y - 1 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 3).$$

Đường thẳng IA đi qua I và vuông góc với EF nên $IA : 3x + 4y - 9 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 9 = 0 \\ 13x + 9y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-5; 6).$$

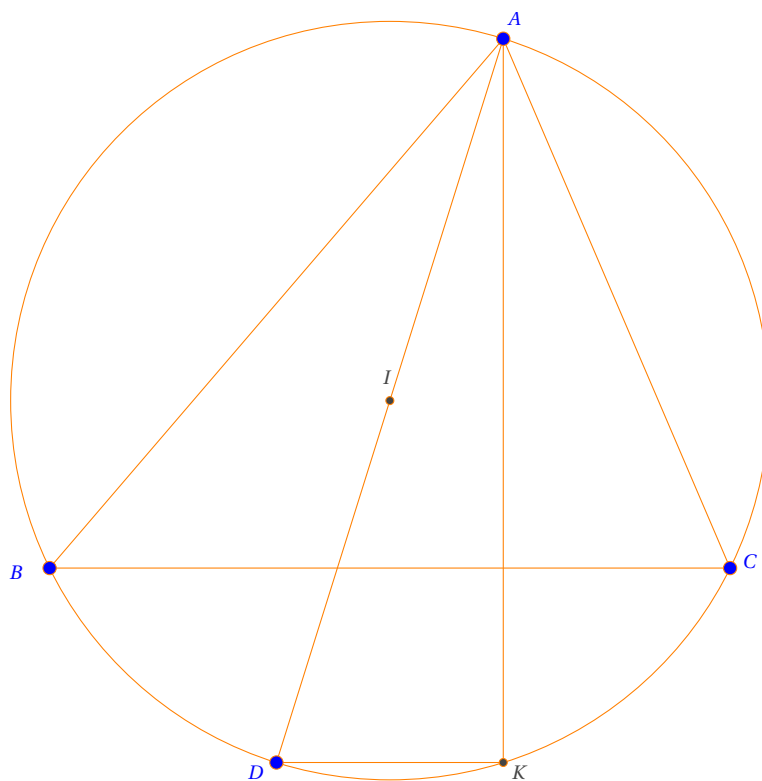
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tâm I, bán kính IA nên $(ABC) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-4; -1), C(4; 3) \\ B(4; 3), C(-4; -1) \end{cases}.$$

Tính chất 249. 1. $BC \parallel DK$.

2. $BA \perp BD, AK \perp DK$.

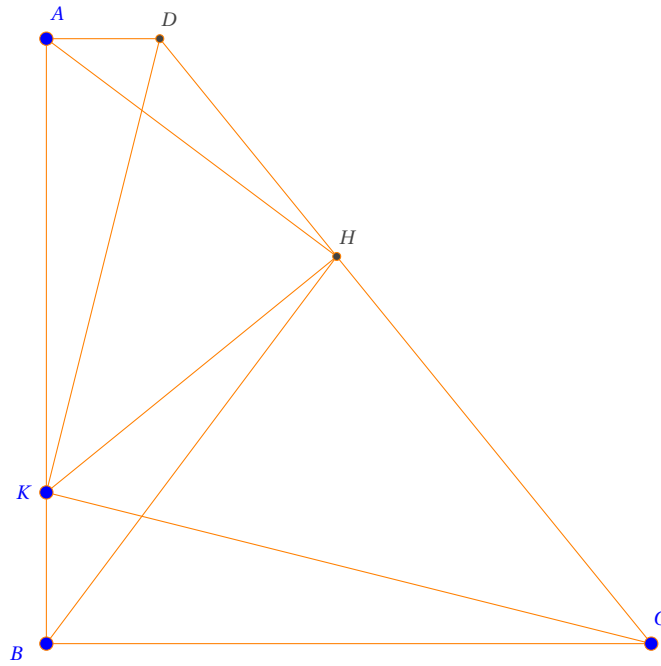
3.



Bài tập 275. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I . Đường cao từ A của tam giác ABC cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai $K(\frac{11}{5}; -\frac{18}{5})$. Gọi $D(4; -3)$ là điểm đối xứng với A qua I và $N(6; \frac{4}{3})$ thuộc đường thẳng BC , điểm $B \in x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C .

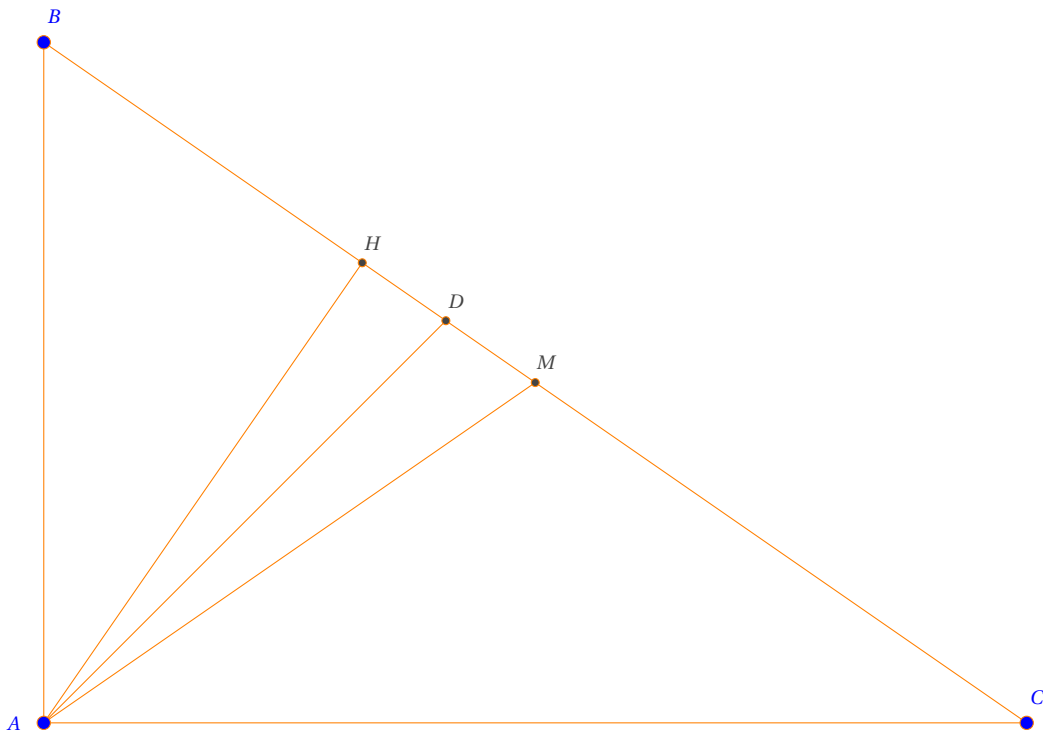
(Nguyễn Huệ - Huế lần 1)

Tính chất 250. Hai $KH \perp CD$, khi đó $HA \perp HB$.



Bài tập 276. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, B có $AB = 4\sqrt{2}$, $CD : 3x - y - 11 = 0$. K là điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 4KB$ và $KC \perp KD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang, biết B có tọa độ nguyên.

Tính chất 251. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao, AD là phân giác trong, AM là trung tuyến. Khi đó AH, AM đẳng giác, tức AD là phân giác của $\angle HAM$.



Ta có $\angle BAH = \angle ACM = \angle MAC$, mà AD là phân giác $\angle BAC$ nên AD cũng là phân giác $\angle HAM$.

Bài tập 277. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao, AD là phân giác trong, AM là trung tuyến. Biết $H(5;5)$, $AD: x - 7y + 20 = 0$, $y_B > 0$ và đường thẳng AM đi qua $K(-10;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Sở Hà Nội)

Gọi H' đối xứng của H qua đường thẳng AD suy ra $H'(\frac{27}{5}; \frac{11}{5})$. Đường thẳng AM đi qua K, H' nên $AM: 2x + 11y - 35 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 7y + 20 = 0 \\ 2x + 11y - 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3).$$

Đường thẳng BC đi qua H và vuông góc AH nên $BC: 2x + y - 15 = 0$. Tọa độ M là nghiệm của hệ

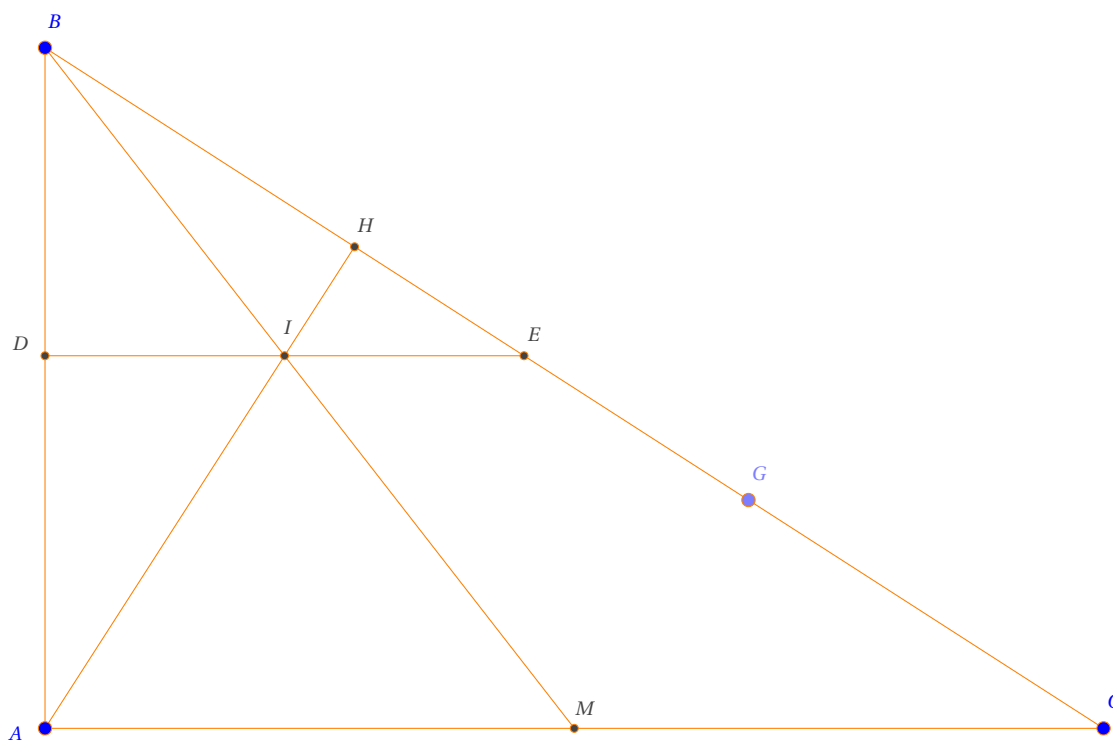
$$\begin{cases} 2x + y - 15 = 0 \\ 2x + 11y - 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{13}{2}; 2).$$

Gọi $B(b; 15 - 2b)$, ta có $MB = MA$ suy ra $\begin{cases} B(4;7) \\ B(9;-3) \end{cases}$ loại $\Rightarrow C(9;-3)$.

Tính chất 252.

Bài tập 278. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH và đường trung tuyến BM của tam giác ABC cắt nhau tại I. Biết $I(\frac{7}{3}; 2)$, $AC: x - 2y + 5 = 0$ và $G(-4;3)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Đề 4 thaytuan)

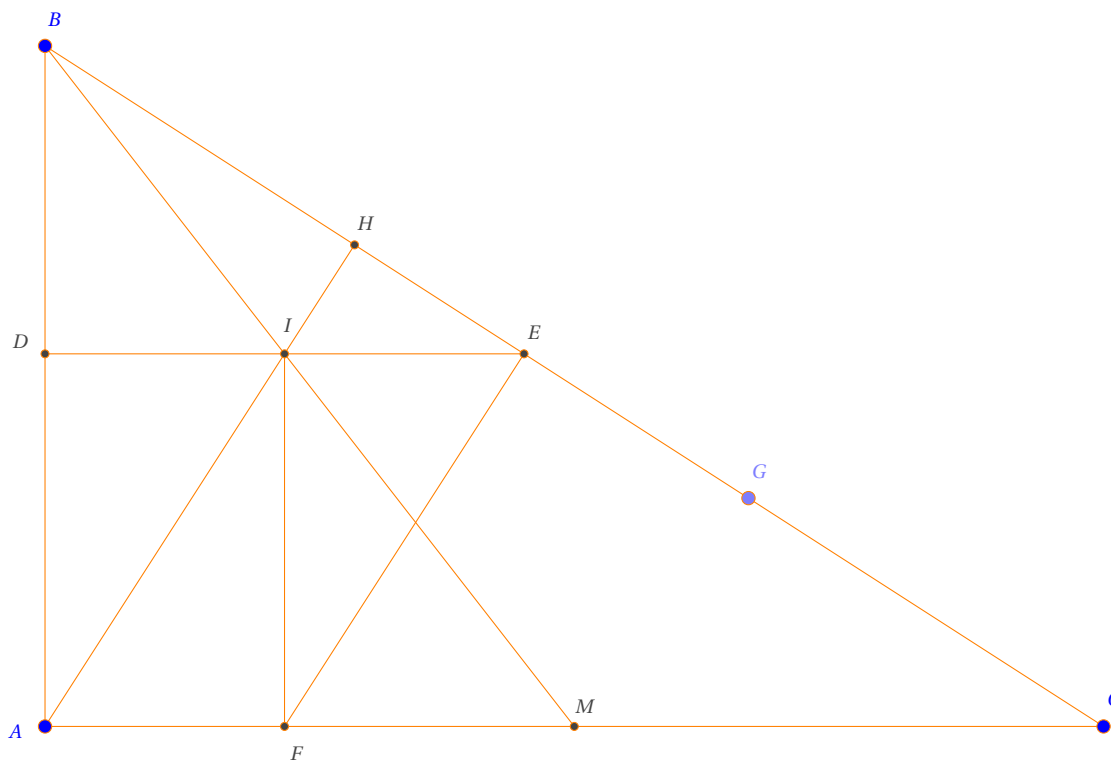


Phân tích Tính bất biến ở đây là gì? Chính là yếu tố trung điểm. Qua I ta kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB, BC tại D, E khi đó I cũng là trung điểm DE . Đến đây ta thấy rõ bài toán chưa?

Đường thẳng DE đi qua I song song với AC nên $DE: 3x - 6y + 5 = 0$. Gọi $D(a; \frac{3a+5}{6})$ suy ra $E(\frac{14}{3} - a; 4 - \frac{3a+5}{6})$, đường thẳng AD đi qua D vuông góc với AC nên $DA: 2x + y - \frac{15a+5}{6} = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 2x + y - \frac{15a+5}{6} = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{15a-10}{15}; \frac{15a+65}{30}).$$
 Vì $\vec{AI} \cdot \vec{GE} = 0$ nên giải ra ta

được $\begin{cases} A(5; 5) \\ A(3; 4) \end{cases}$.

Cách 2 dùng hình thuần túy



Đường thẳng DE đi qua I song song với AC nên $DE: 3x - 6y + 5 = 0$. Hạ IF vuông góc với AC . Ta có $ADIF$ là hình chữ nhật suy ra $AIEF$ là hình bình hành, mà $AI \perp GE$ nên $FE \perp GE$. Đường thẳng IF đi qua I vuông góc với AC nên $IF: 6x + 3y - 20 = 0$. Tọa độ F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 6x + 3y - 20 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác FEG là đường tròn đường kính FG nên $(FEG): (x + \frac{7}{6})^2 + (y - \frac{19}{6})^2 = \frac{145}{18}$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x + \frac{7}{6})^2 + (y - \frac{19}{6})^2 = \frac{145}{18} \\ 3x - 6y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(-1; \frac{1}{3}) \\ E(1; \frac{4}{3}) \end{cases}.$$

- $E(-1; \frac{1}{3})$

Ta có $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IA}$ suy ra $A(5;5)$. Đường thẳng AB đi qua A vuông góc AC nên $AB: 2x + y - 15 = 0$. Đường thẳng BC đi qua E, G nên $BC: 8x + 9y + 5 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 8x + 9y + 5 = 0 \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(14; -13).$$

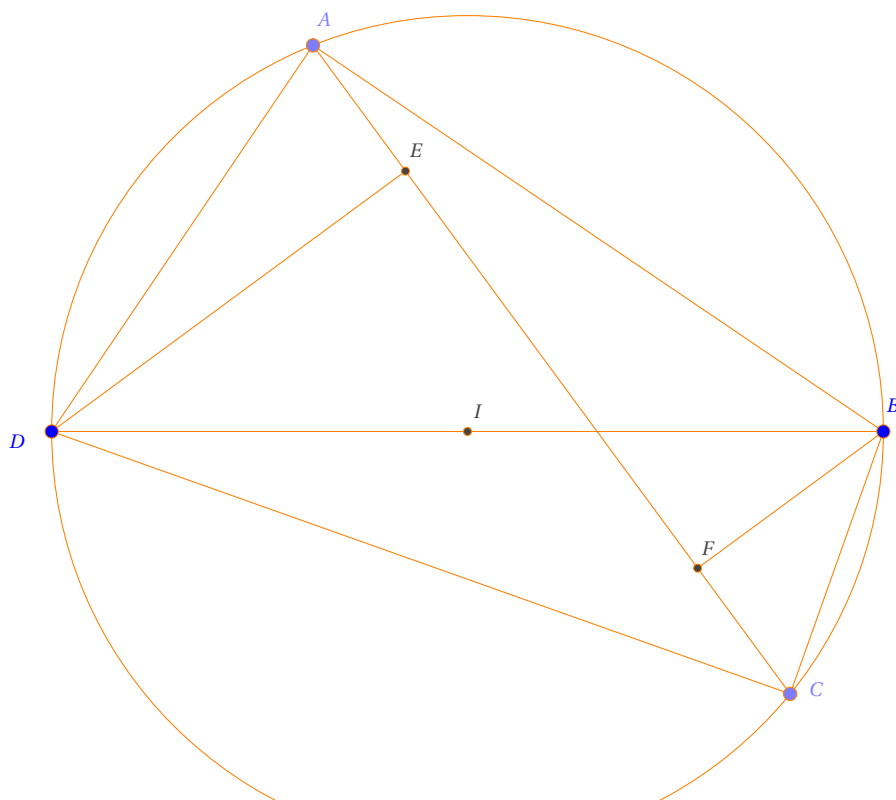
Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 8x + 9y + 5 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{11}{5}; \frac{7}{5}).$$

• $E(1; \frac{4}{3})$

Làm tương tự ta có $A(3;4), B(5;0), C(-1;2)$.

Tính chất 253. $AF = CE$.



Cách 1: Ta có $\triangle BAD \sim \triangle BFC$ suy ra $\frac{FC}{AD} = \frac{BC}{BD}$ hay $FC \cdot BD = AD \cdot BC$. Tương tự $\triangle DEA \sim \triangle DCB$ suy ra $AE \cdot BD = AD \cdot BC$ do đó $AE = CF$.

Cách Hạ IM vuông góc xuống AC , ta có $AM = MC$. Vì $DE \parallel BF$ và I là trung điểm BD nên theo Thales ta có M cũng là trung điểm EF hay $ME = MF$ do đó $AF = CE$.

Bài tập 279. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD . Điểm $B \in x + y - 5 = 0$. Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của D, B lên AC . Biết $CE = \sqrt{5}, A(4;3), C(0;-5)$ tìm tọa độ B, D .

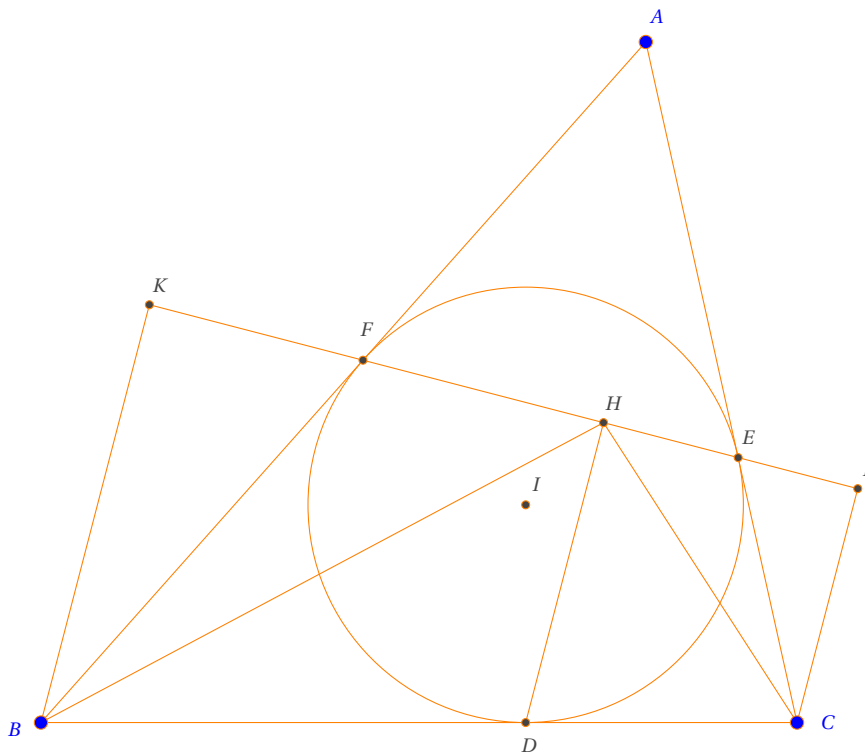
(Sở Vĩnh Phúc lần 2)

Đường thẳng AC đi qua A, C có phương trình AC : $2x - y - 5 = 0$. Gọi $E(e; 2e - 5)$ ta có $CE = \sqrt{5}$ suy ra $E(1; -3)$. Gọi $F(f; 2f - 5)$ áp dụng tính chất trên ta có $AF = CE$ suy ra $F(3; 1)$. Đường thẳng FB đi qua F và vuông góc với AC nên $FB : x + 2y - 5 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5; 0).$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình (ABC) : $x^2 + y^2 = 25$ do đó tâm $I(0; 0)$. Vì I là trung điểm BD nên $D(-5; 0)$.

Tính chất 254. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. Khi đó HD là phân giác $\angle BHC$.



Hạ BK, CL vuông góc với EF. Ta có $\angle KFB = \angle AFE = \angle AEF = \angle CEL$ do đó $\triangle BKF \sim \triangle CLE$ suy ra $\frac{BK}{CL} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD} = \frac{KH}{HL}$ do đó $\triangle BKH \sim \triangle CLH$ suy ra $\angle BHK = \angle CHL$ hay HD là phân giác $\angle BHC$.

Bài tập 280. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. Biết $B(-1; 5)$, $D(1; 5)$, $H(2; 6)$ tìm tọa độ các đỉnh C.

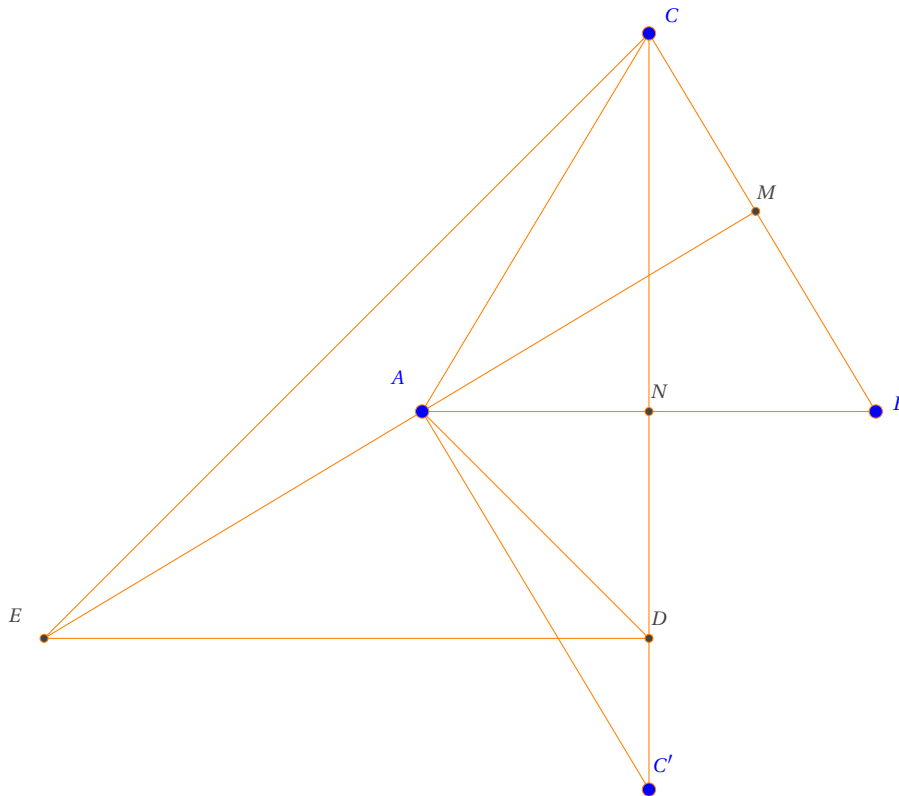
Đường thẳng BD đi qua B, D nên có phương trình BD : $y - 5 = 0$. Đường thẳng HD đi qua H, D nên có phương trình HD : $x - y + 4 = 0$. Điểm B' đối xứng với B qua đường thẳng HD nên $B'(1; 3)$. Đường thẳng HC đi qua H, B' nên $HC : 3x - y = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 5 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; 5\right) \quad \text{bài toán vô nghiệm.}$$

Đến đây các em kết luận điểm C có tọa độ là $C(\frac{5}{3}; 5)$ là một điều sai lầm chết người. Thiết nghĩ tác giả ra bài này "Chắc có lẽ lấy tính chất 18 trong sách Oxy tập 1" của mình. Nhưng tùy ý cho điểm, nhưng không biết rằng bài toán vô nghiệm. Phần vô nghiệm dành cho các em tự suy luận vì sao?

Tính chất 255. Cho tam giác ABC cân tại C có AM, CN là đường cao. Trên tia đối AM lấy điểm E sao cho AE = AC. Gọi C' là đối xứng của C qua AB. Khi đó

1. $AE = AC = AC'$.
2. $AE \perp AC'$.
3. $\angle ECN = 45^\circ$.
4. Hạ ED vuông góc CC', ta có $\angle ADN = 45^\circ$.



1. Để thấy $AE = AC = AC'$. Hay A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECC'.
2. Ta có CAC'B là hình thoi, do đó $AC' \parallel CB$ mà $AE \perp CB$ nên $AE \perp AC'$.
3. Vì A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECC' nên $\angle ECN = \frac{1}{2} \angle EAC' = 45^\circ$.
4. Ta có tứ giác EADC' nội tiếp suy ra $\angle ADN = \angle C'EA = 45^\circ$.

Bài tập 281. Cho tam giác ABC cân tại C có AM, CN là đường cao. Trên tia đối AM lấy điểm E sao cho AE = AC. Biết $S_{ABC} = 8$, $CN: y - 1 = 0$, $E(-1; 7)$, $x_C > 0$ và điểm A nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Sở Hà Tĩnh)

Gọi $C(a; 1)$ ta có $\angle ECN = 45^\circ$ suy ra $\begin{cases} C(5; -1) \\ C(-7; -1) \end{cases}$ loại.

Cách 1 dùng đại số

Cách 2 dùng hình học Hạ ED vuông góc xuống CN suy ra $D(-1; 1)$. Ta có tam giác ADN vuông cân tại N suy ra $AN = DN$ do đó $\begin{cases} DN \cdot NC = AN \cdot NA = 8 \\ DN + NC = DC = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DN = 2 \\ DN = 4 \end{cases}$.

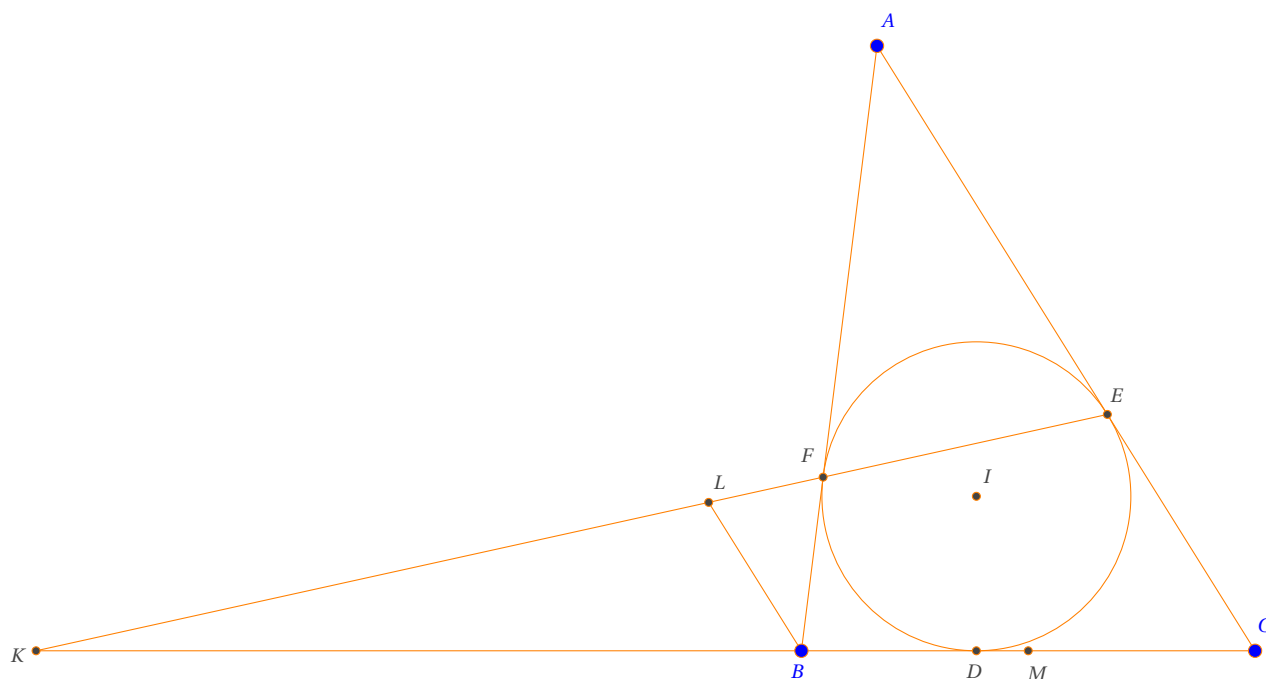
- $DN = 2$

Do N nằm giữa D và C nên suy ra $N(1; 1)$. Đường thẳng AN đi qua N vuông góc CN suy ra $AN: x = 1$, ta lại có $AN = ND = 2$ suy ra $\begin{cases} A(1; 3) \\ A(1; -1) \end{cases}$ loại. Điểm N là trung điểm AB suy ra $B(1; -1)$.

- $DN = 4$

Tương tự ta giải ra được $A(3; 5), B(3; -3)$.

Tính chất 256. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M là trung điểm BC , giả sử EF cắt BC tại K . Khi đó (K, D, B, C) là hàng điểm điều hòa hay $MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$.



Cách 1 dùng hàng điểm điều hòa Xem sách "Một số tính chất hay dùng trong hình học phẳng Oxy tập 1", tính chất 18.

Cách 2 dùng sơ cấp THCS

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt KE tại L . Không mất tổng quát giả sử B nằm giữa K, C . Chú ý tam giác LBF cân tại B . Ta có $\frac{KB}{KC} = \frac{BL}{CE} = \frac{BD}{DC}$ suy ra $KB \cdot DC = KC \cdot BD \Leftrightarrow (KM - BM)(KM + MC) = (KM + MC)(MB - MD) \Leftrightarrow MD \cdot MK = MB^2 = MC^2$.

Bài tập 282. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết D(3;1), trung điểm của BC là M(4;2), phương trình EF: $3x - y - 2 = 0$ và B có hoành độ bé hơn 4.

(Quỳnh Lưu 3 lần 1)

Đường thẳng BC đi qua M, D nên BC: $x - y - 2 = 0$. Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(0; -2).$$

Gọi B(b; b-2), b < 4, ta có MD.MK = MB² suy ra

$$\begin{cases} b = 2 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2; 0) \\ C(6; 4) \end{cases}.$$

Khi đó B nằm giữa K, C. Đường tròn tâm B, bán kính BD có phương trình $(x-2)^2 + y^2 = 2$. Tọa độ F, L là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(1; 1) \\ G(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}) \end{cases} \text{ vì L nằm giữa K, F.}$$

Đường thẳng AB đi qua B, F nên AB: $x + y - 2 = 0$, đường thẳng AC đi qua C song song BL nên AC: $x - 7y + 22 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 7y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3).$$

Tính chất 257.

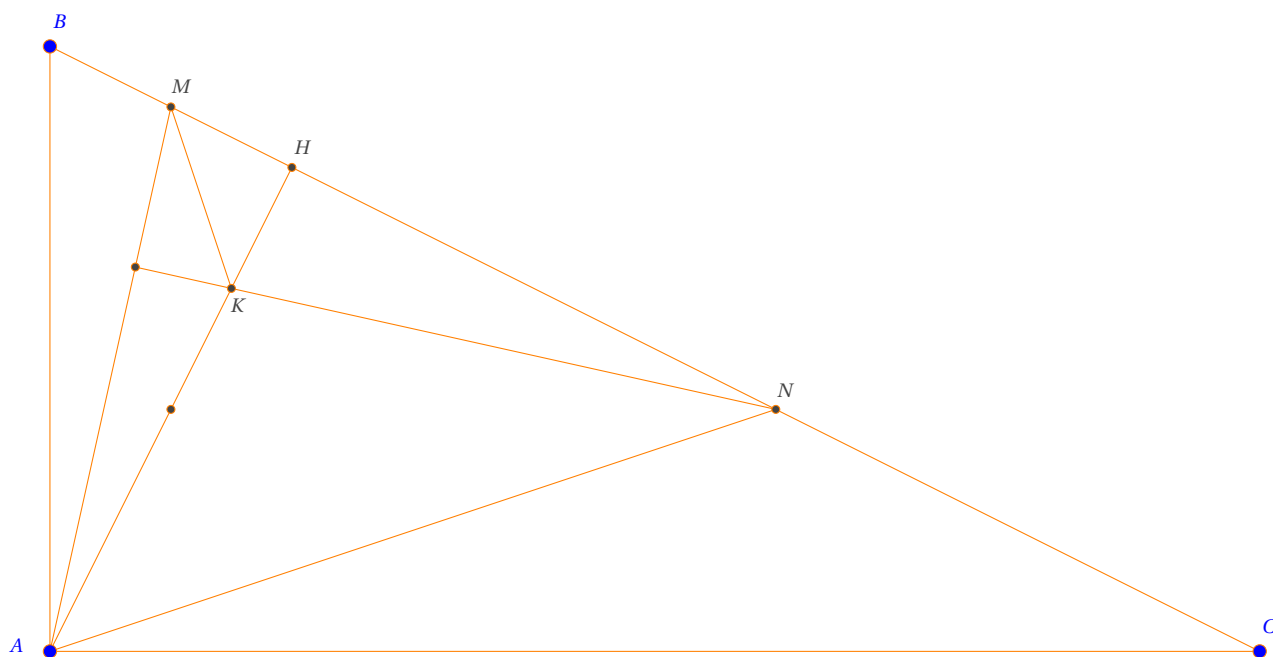
Bài tập 283. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh D(-3;1), đỉnh B thuộc đường thẳng d: $x - 2y - 5 = 0$. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm C bán kính CA với đường thẳng AB (E ≠ A). Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng CE là N(6; -2). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Sở Yên Bái)

Tính chất 258. 1. CH = 2AH = 4BH.

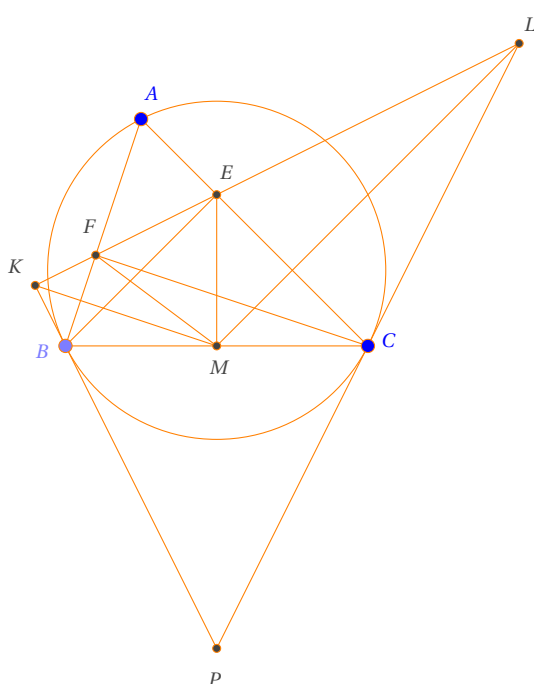
2. $HK = \frac{1}{4}HA$.

3.



Bài tập 284. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$ và AH là đường cao. Gọi M, N là trung điểm HB, HC . Biết $BC : x - y - 3 = 0, K(1;0)$ là tọa độ trực tâm tam giác AMN . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Tính chất 259. Cho tam giác ABC nhọn có BE, CF là đường cao. Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại P . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BP, CP tại K, L . Gọi M là trung điểm BC , khi đó M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PKL .



Ta có tứ giác BFEC nội tiếp suy ra $\angle KFB = \angle AFE = \angle ACB = \angle KBF$ do đó tam giác BKF cân tại B hay $KB = KF$. Mặt khác $MB = MF$ suy ra $\triangle KBM = \triangle KFM$ suy ra KM là phân giác trong $\angle PKL$. Tương tự LM là phân giác trong $\angle KLP$ suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KLM.

Bài tập 285. Cho tam giác ABC nhọn có BE, CF là đường cao. Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại P. Biết $EF: x - 2y + 4 = 0$, $BP: 2x + y - 1 = 0$, $CP: 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Võ Quang Mẫn)

Tọa độ P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(2; -3).$$

Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}).$$

Tọa độ L là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow L(6; 5).$$

M là tâm nội tiếp tam giác PKL suy ra $M(2; 1)$. Đường thẳng BC đi qua M vuông góc SM nên $BC: y - 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; 1).$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ

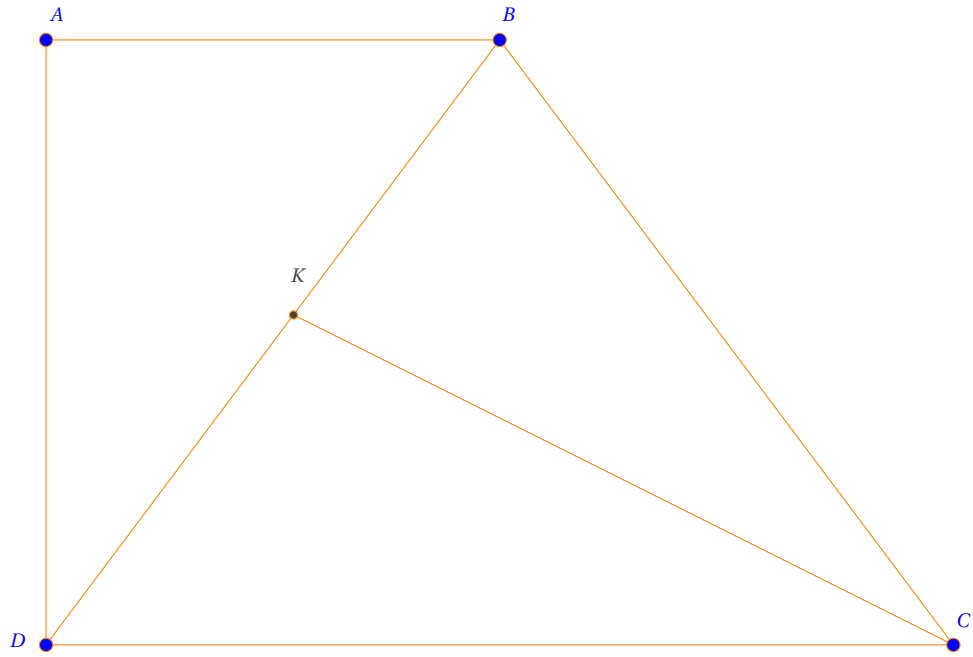
$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 1).$$

Đường thẳng AB đi qua B vuông góc MK nên $AB: 3x - y + 1 = 0$. Đường thẳng AC đi qua C vuông góc ML nên $AC: x + y - 5 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 4).$$

Bài tập 286. Cho hình thang ABCD vuông tại A, D có $CD = 2AB$. Phương trình AD: $3x - y + 2 = 0$, BD: $x - 2y - 1 = 0$, chân đường phân giác $\angle BCD$ xuống đường chéo BD là $K(3 - 2\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

Tính chất 260.



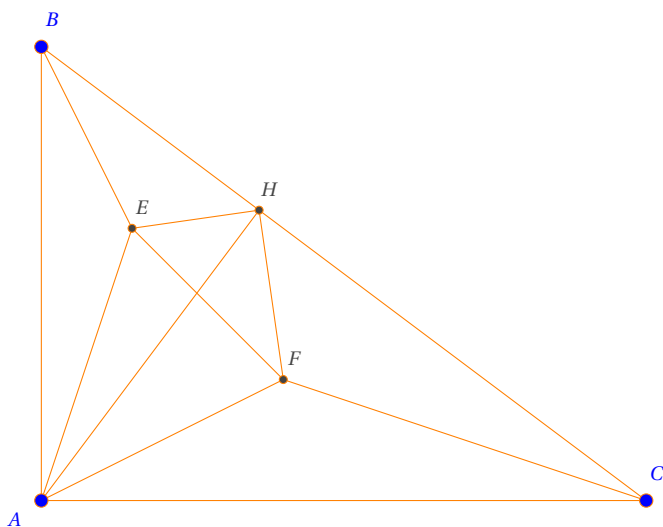
Bài tập 287. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D có $CD = 2AB$. Phương trình $AD : x + 1 = 0$, $BD : 4x - 3y - 8 = 0$, chân đường phân giác $\angle BCD$ xuống đường chéo BD là $K(\frac{25}{11}; \frac{4}{11})$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$.

(Võ Quang Mẫn)

Tính chất 261. 1. $\triangle EHF \sim \triangle BAC$.

2. HA là phân giác trong góc $\angle EHF$.

3. $\angle EAF = 45^\circ$.

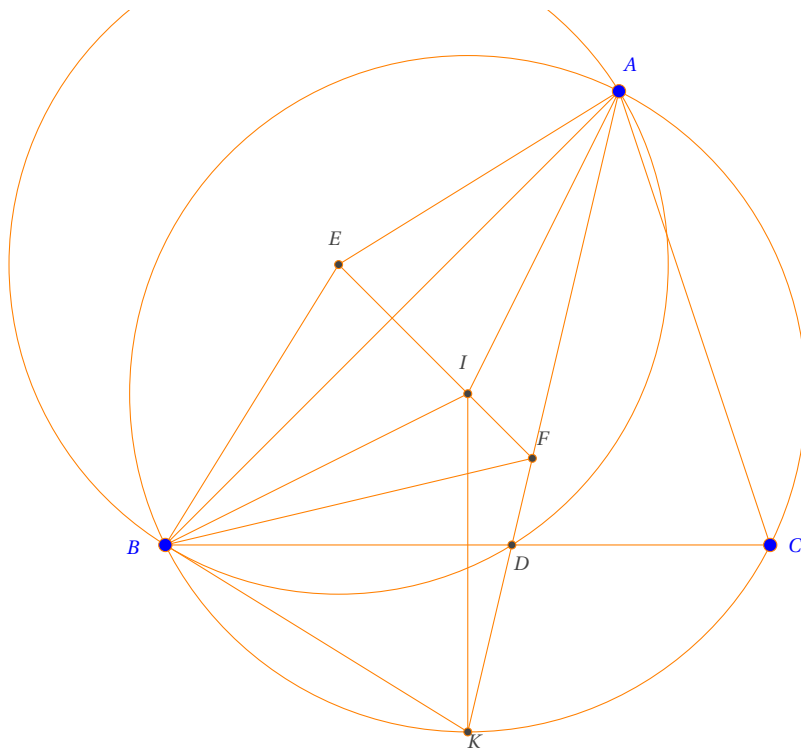


Bài tập 288. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \frac{3}{4}AC$ và AH là đường cao. $E(1;3), F(-2;2)$ là tâm nội tiếp tam giác ABH, ACH . Tìm tọa độ đỉnh A , biết $x_H > 0$.
(Chuyên ĐHKHTN-Hà Nội lần 5)

Tính chất 262. 1. $\triangle BEA \sim \triangle KIA$.

2. $\angle EAI = \angle BAD = 90^\circ - \angle EFA$

3. $BK \perp BE$.



1. Ta có $\angle AIK = 2\angle ABK = 2(\angle B + \frac{1}{2}\angle A)$ và $\angle BEA = 360^\circ - 2\angle ADB = 360^\circ - 2(\angle C + \frac{1}{2}\angle A) = 2(\angle B + \frac{1}{2}\angle A)$ do đó $\angle BEA = \angle KIA$ hay $\triangle BEA \sim \triangle KIA$.
2. Ta có EI là trung trực của AB , hơn nữa $\triangle BEA \sim \triangle KIA$ suy ra $\angle EAB = \angle IAK$ suy ra $\angle EAI = \angle BAD = 90^\circ - \angle EFA$.
3. tính chất này cần ôn lại, tuy không dùng. Chứng minh xem lại sách tập 1 nhé, nhất gồ lại.

Bài tập 289. Cho tam giác ABC có AD là phân giác trong. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ABD có tâm $I(2;1), E(\frac{5}{3};2)$. Biết $AD: x - y = 0, x_A > 2$. Tìm tọa độ A, B, C .

(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An lần 2)

Gọi $A(a; a)$, vì $\angle EAI = \angle BAD = 90^\circ - \angle EFA$ nên $\cos(\vec{AE}; \vec{AI}) = \sin(EI; AD)$. Giải ra ta được

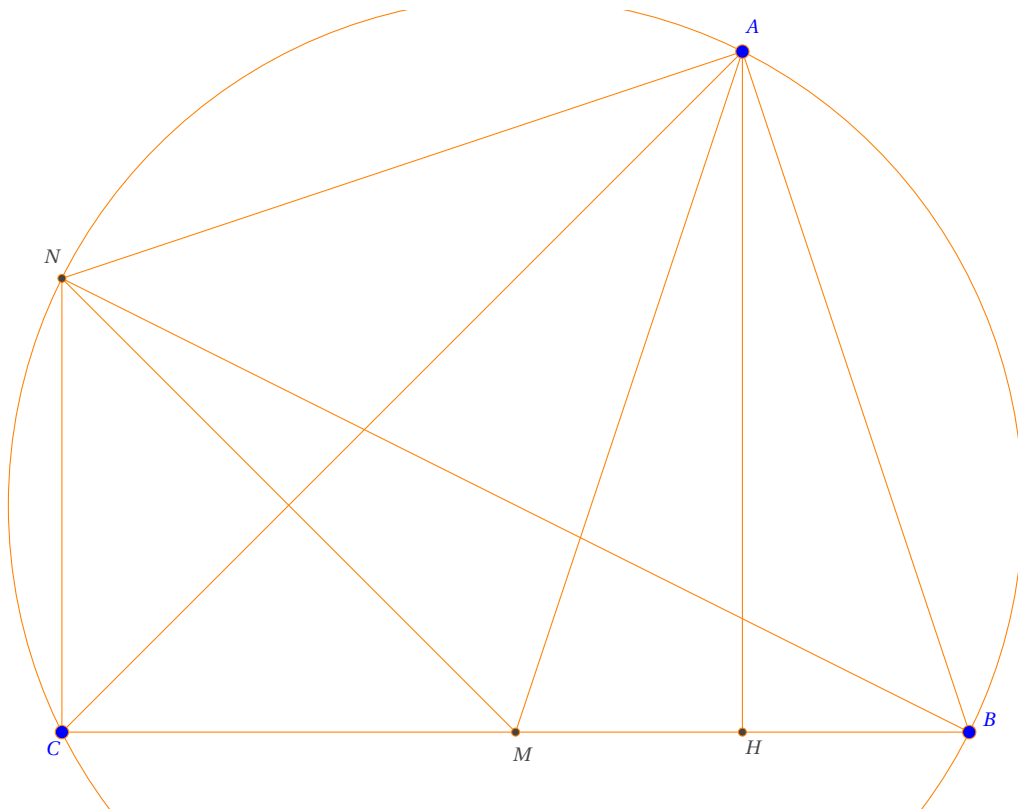
$$\begin{cases} A(3;3) \\ A(0; \frac{1}{3}) \quad \text{loại} \end{cases}$$

Điểm B đối xứng với A qua EI nên $B(0;2)$. Gọi $K(b;b)$, ta có $IA = IK$ suy ra $K(0;0)$. Đường thẳng BC đi qua B vuông góc IK nên $BC: 2x + y - 2 = 0$. Đường thẳng AC đối xứng AB qua AD nên $AC: 3x - y - 6 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5})$.

Tính chất 263. 1. $AN \perp AB$.

2. Tam giác NAB vuông cân tại A .

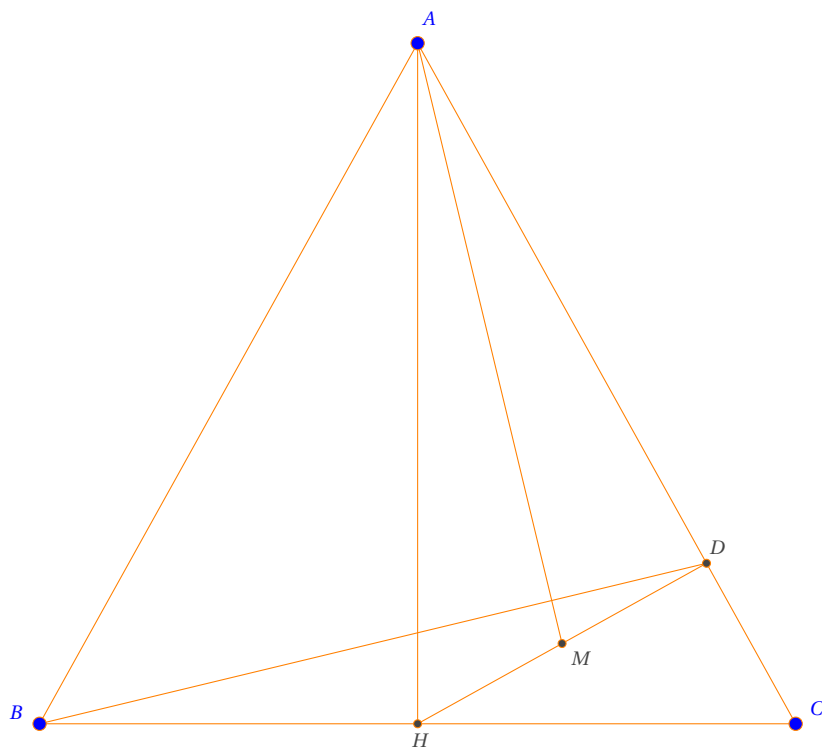
3. $AH = 3HB$.



Bài tập 290. Cho tam giác ABC có $\angle ACB = 45^\circ$. M là trung điểm BC , N là điểm đối xứng của M qua AC , đường thẳng $BN: 7x - y - 19 = 0$. Biết $A(-1; -1)$, tam giác BAM cân tại A và $y_B > 0$. Tìm tọa độ B, C .

(Nguyễn Khuyến-Bình Dương)

Tính chất 264.

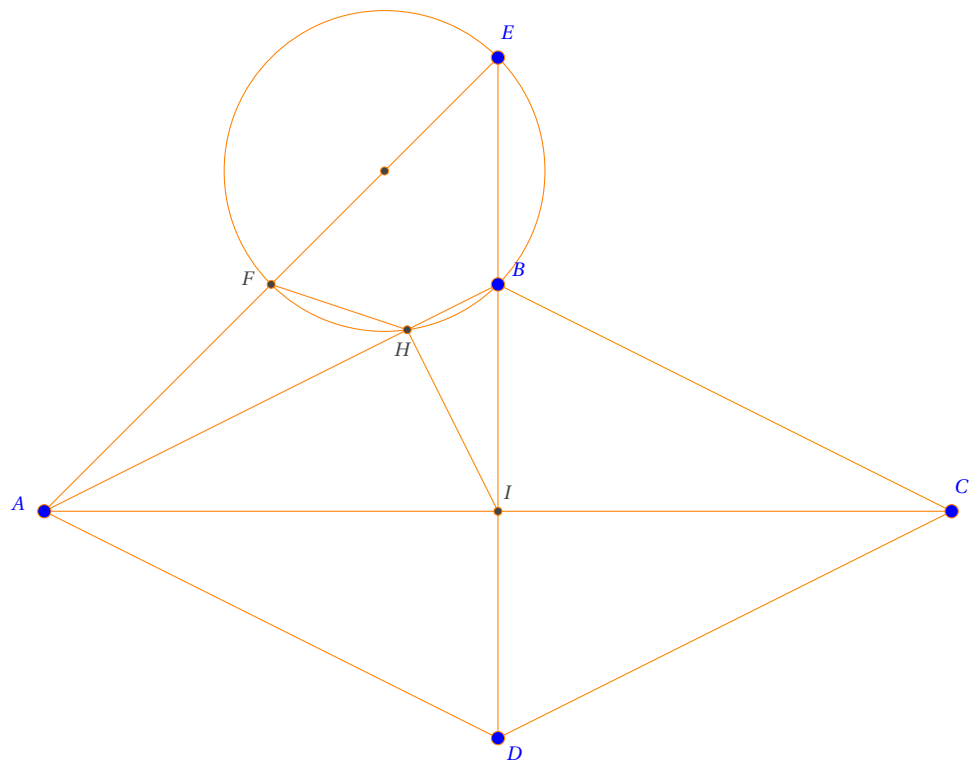


Bài tập 291. Cho tam giác ABC cân tại A . H là trung điểm BC . D là hình chiếu vuông góc của H lên AC . $M(\frac{3}{4}; \frac{11}{4})$ là trung điểm HD , $BD : x + y - 4 = 0$, $AB : 3x + y - 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm C .

(Toán học & tuổi trẻ đề số 7)

Tính chất 265. Cho hình thoi $ABCD$, tâm I có $AC = 2BD$, Gọi E là điểm đối xứng của I qua B . F là trung điểm AE . H là hình chiếu vuông góc của I lên AB . Khi đó

1. $AH = 2HI = 4HB$.
2. tứ giác $EFHB$ nội tiếp.

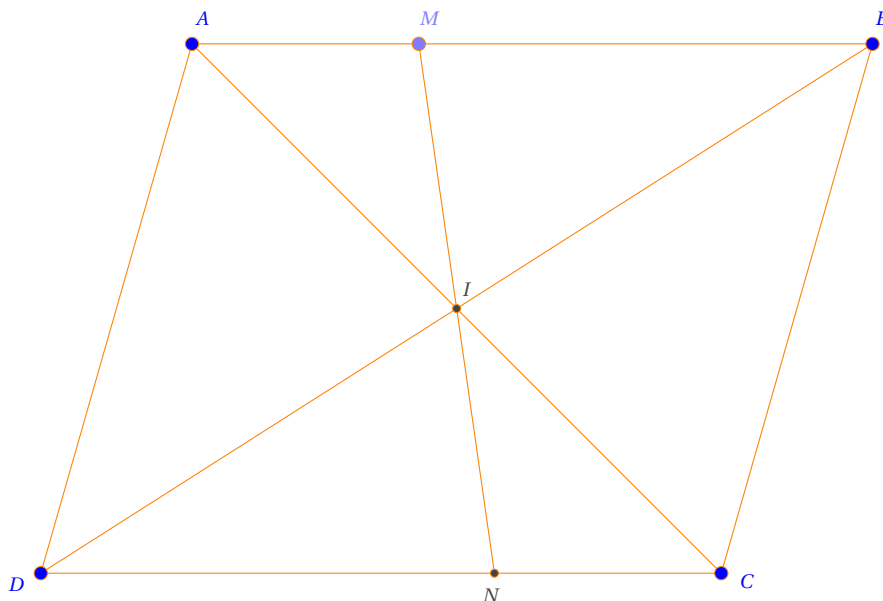


Đặt $BI = a$ suy ra $AI = 2a$, $AB = a\sqrt{5}$, $AE = 2a\sqrt{2}$. Ta có $AH = \frac{4}{5}AB$. Do đó $AH \cdot AB = AF \cdot AE$ hay tứ giác $EFHB$ nội tiếp.

Bài tập 292. Cho hình thoi $ABCD$, tâm I có $AC = 2BD$, Gọi E là điểm đối xứng của I qua B . F là trung điểm AE . H là hình chiếu vuông góc của I lên AB . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác $(ABC) : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$, $HI : 3x + 4y - 2 = 0$, $x_H > 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$.

(Nguyễn Đại Dương)

Tính chất 266.



Bài tập 293. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có tâm I và đỉnh B (4;5). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AB = 3AM$, gọi N (6;3) là giao điểm của hai đường thẳng IM và CD. Xác định tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD biết đỉnh C thuộc $d: x - y - 4 = 0$.

(Nguyễn Minh Tiến đề số 9)

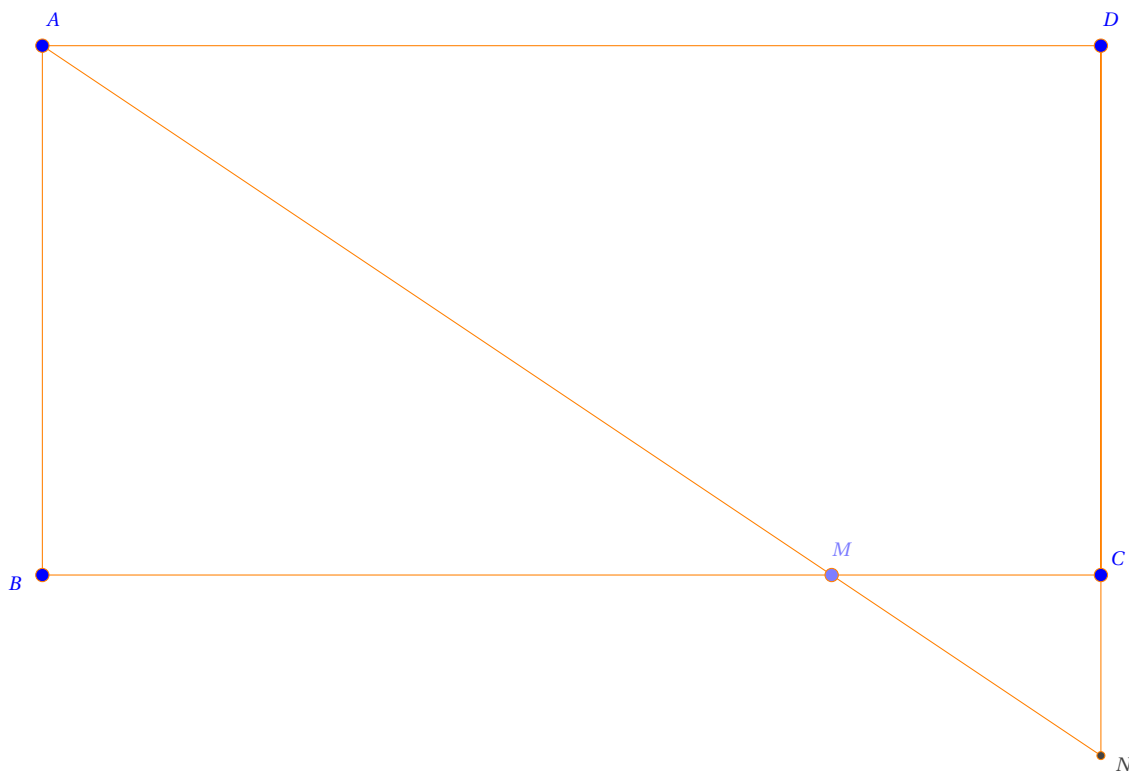
Bài tập 294. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có tâm I. Điểm M trên cạnh AB sao cho $AB = 3AM$, đường thẳng qua D vuông góc với IM cắt đường thẳng AC tại điểm $E(\frac{15}{4}; -\frac{5}{4})$ và điểm F (4; -3) là giao điểm của đường thẳng IM và CD. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh C có hoành độ nguyên.

(Nguyễn Minh Tiến đề số 8)

Bài tập 295. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có tâm I và điểm $G(0; \frac{8}{3})$ là trọng tâm của tam giác ABI. Gọi E là trọng tâm tam giác ADC, các điểm K và H lần lượt là trung điểm của các đoạn AE và BE, phương trình đường thẳng (KH) : $3y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết điểm H có hoành độ dương.

(Nguyễn Minh Tiến đề số 10)

Tính chất 267. Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm M trên cạnh BC đường thẳng AM cắt CD tại N. Khi đó $MB \cdot DN = BC \cdot CD$.



Ta có $\triangle ABM \sim \triangle NDA$ suy ra $\frac{AB}{BM} = \frac{DN}{DA}$ hay $MB \cdot DN = BC \cdot CD$.

Cách 2 Ta có $\frac{1}{2}BM \cdot DN = S_{DBM} + S_{BMN} = S_{DBM} + S_{AMC} = S_{DBM} + S_{MDC} = S_{BDC} = \frac{1}{2}BC \cdot CD$ suy ra $MB \cdot DN = BC \cdot CD$.

Bài tập 296. Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Điểm $M(\frac{21}{4}; -1)$ trên cạnh BC đường thẳng AM cắt CD tại N thỏa mãn $BM \cdot DN = 50$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật đã cho, biết rằng A có tung độ dương và đường thẳng AB có phương trình $3x + 4y - 18 = 0$.
(Vted lần 23)

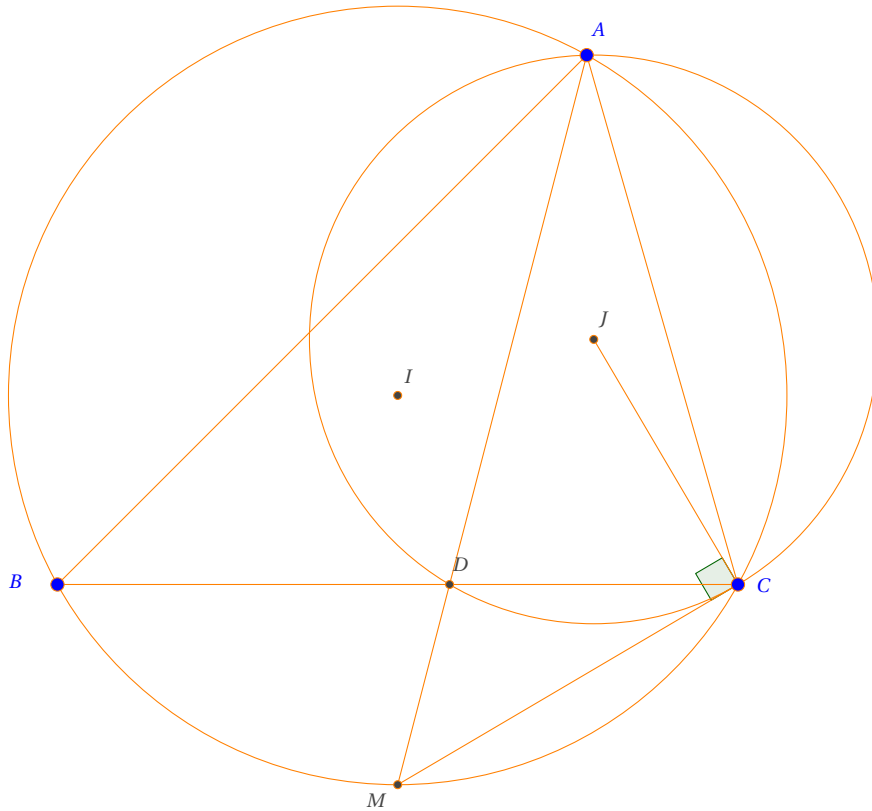
Ta có $AB \cdot BC = BM \cdot DN = 50$ suy ra $\begin{cases} BC = 10 \\ BA = 5 \end{cases}$. Đường thẳng BC đi qua M vuông góc AB nên

$BC: 4x - 3y - 24 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y - 18 = 0 \\ 4x - 3y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6; 0)$. Gọi $C(c; \frac{3c}{4} - 8)$, ta có

$BC = 10$ suy ra $\begin{cases} B(0; -8) \\ C(12; 8) \end{cases}$ loại vì B nằm giữa M, C. Tương tự gọi $A(6 - \frac{4}{3}a; a)$ ta có $AB = 5$ suy ra

$\begin{cases} A(2; 3) \\ A(10; -3) \end{cases}$ loại. Ta có $\vec{AD} = \vec{BC}$ suy ra $D(-4; -5)$.

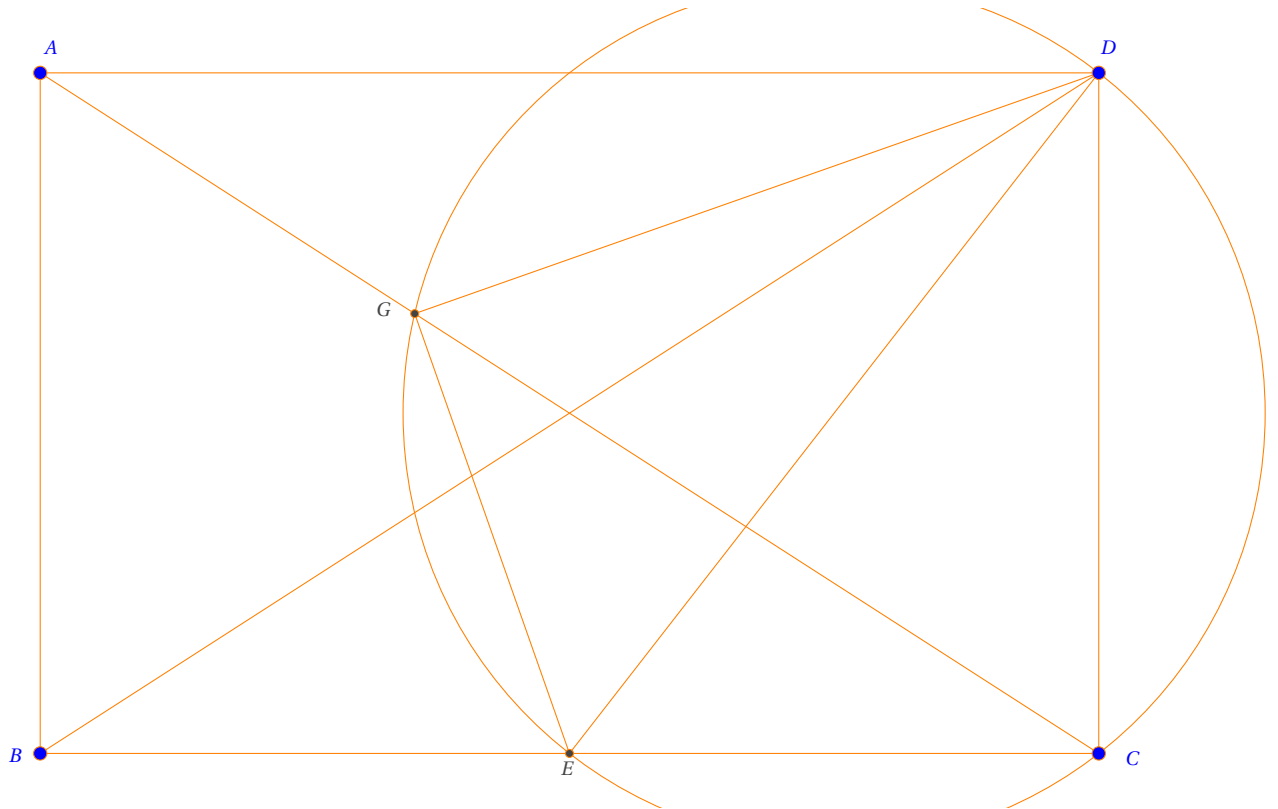
Tính chất 268. $CM \perp CJ$.



Ta có $\angle MCD = \angle MAB = \angle DAC$ suy ra MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC hay $CM \perp CJ$.

Bài tập 297. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;2)$ và AD là phân giác trong góc A . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai M . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có tâm $J(0;2)$, $CM: x - y + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm A, B, C .
(Chuyên Hưng Yên lần 2)

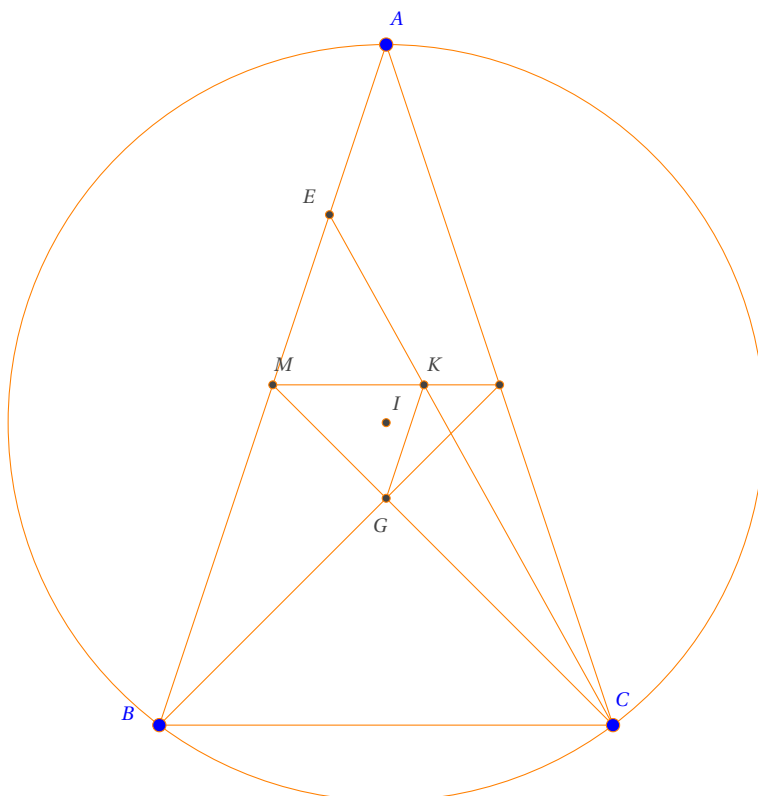
Tính chất 269. $\triangle DGE \sim \triangle DAB$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{DG}{GE}$.



Bài tập 298. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 18. Gọi E là trung điểm BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt đường chéo AC tại $G \neq C$. Biết $E(1; -1)$, $G(\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$, $D \in x + y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D .

(Sở Nam Định)

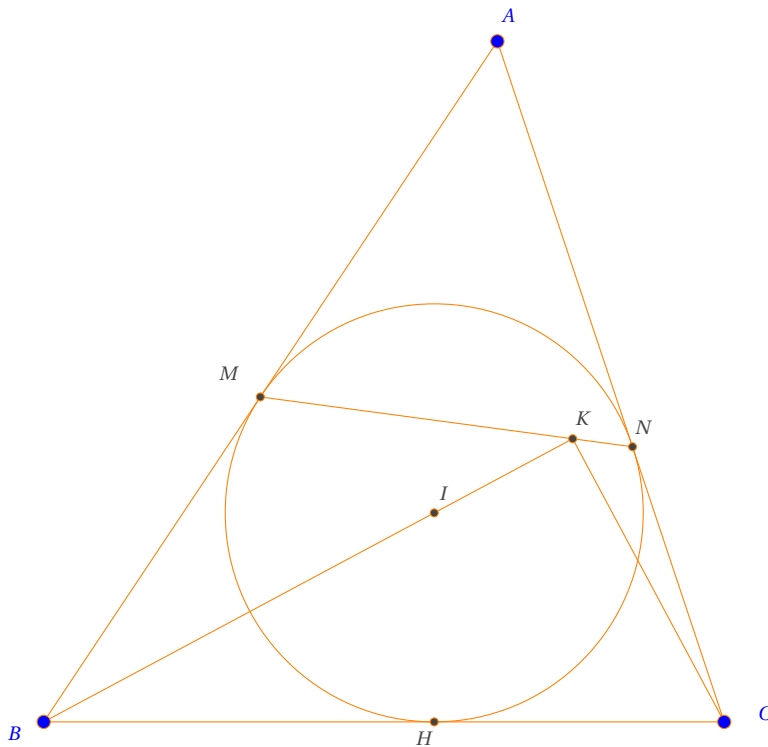
Tính chất 270. I là trực tâm tam giác MKG .



Bài tập 299. Cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm AB . Biết $I(\frac{8}{3}; \frac{1}{3})$ là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và $G(3;0), K(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ là trọng tâm tam giác ABC, ACM . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

(Sở Lào Cai)

Tính chất 271. $KB \perp KC$.



$\angle ANK = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \angle KIC$ suy ra tứ giác $IKNC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle INC = 90^\circ$ hay $KB \perp KC$.

Bài tập 300. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$ ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC . Gọi $K(-1; -4)$ là giao điểm của BI với MN . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC , biết $H(2; 1)$.

(Anh Sơn II lần 2)

Đường thẳng KB đi qua K vuông góc KC nên $KB: y + 4 = 0$. Đường thẳng CB đi qua H, C nên $HC: x - y - 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -4).$$

Vì H nằm ngoài BC nên không tồn tại tam giác nào thỏa mãn đề cho.

Nhận xét: Tính chất vẫn còn đúng khi I là tâm đường tròn bàng tiếp.

Bài tập 301. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC. Gọi $K(-1; -4)$ là giao điểm của BI với MN. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC, biết $H(-\frac{9}{4}; -\frac{13}{4})$.
(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng KB đi qua K vuông góc KC nên $KB: y + 4 = 0$. Đường thẳng CB đi qua H, C nên $HC: x - y - 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -4).$$

Đường thẳng HI đi qua H vuông góc BC nên $HI: 2x + 2y + 11 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 2y + 11 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-\frac{3}{2}; -4).$$

Đường thẳng BA đối xứng BC qua BI nên $BA: x + y + 7 = 0$. Đường thẳng AC đối xứng BC qua CI nên $AC: 23x + 7y + 37 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ 23x + 7y + 37 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{4}; -\frac{31}{4}).$$

Bài tập 302. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$ đường tròn bàng tiếp góc B có tâm là I. Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC. Gọi $K(-1; -4)$ là giao điểm của BI với MN. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC, biết $H(2; 1)$.
(Võ Quang Mẫn)

Đường thẳng KB đi qua K vuông góc KC nên $KB: y + 4 = 0$. Đường thẳng CB đi qua H, C nên $HC: x - y - 1 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 4 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -4).$$

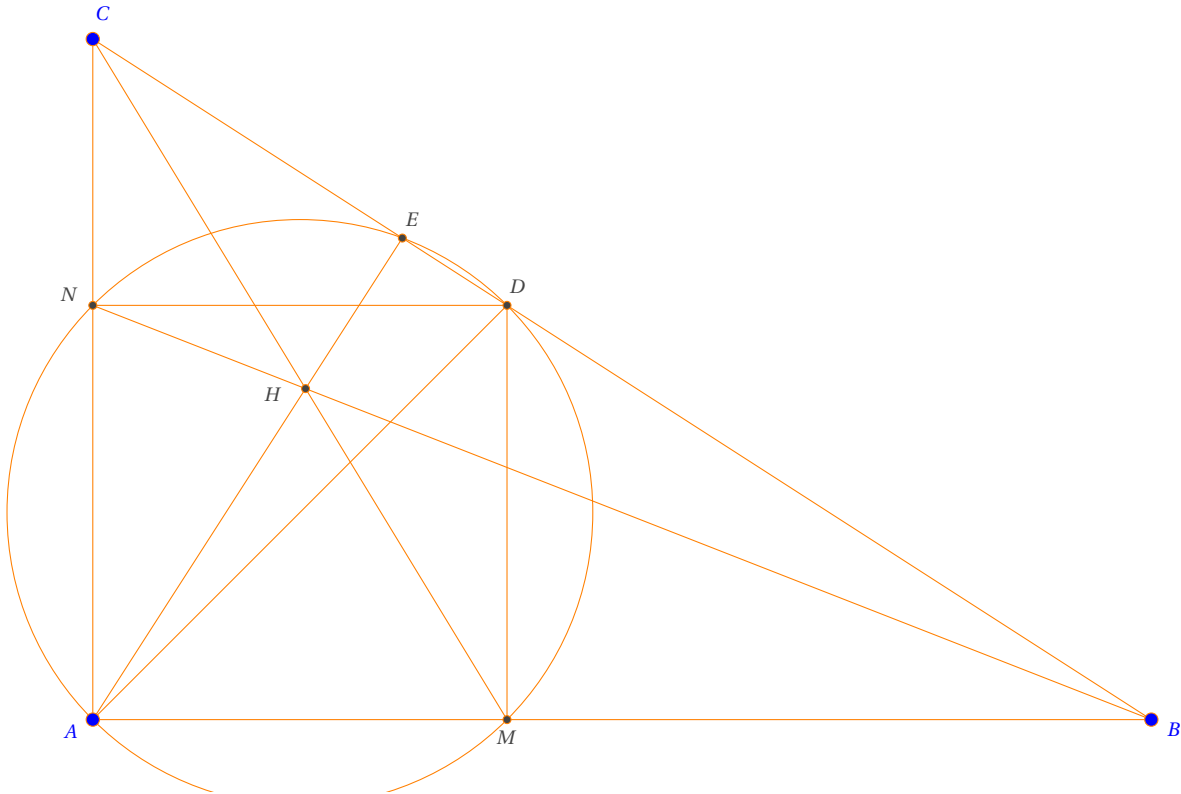
Đường thẳng HI đi qua H vuông góc BC nên $HI: x + y - 3 = 0$. Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-\frac{3}{2}; -4).$$

Đường thẳng BA đối xứng BC qua BI nên $BA: x + y + 7 = 0$. Đường thẳng AC đối xứng BC qua CI nên $AC: 23x + 7y + 37 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ 23x + 7y + 37 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{4}; -\frac{31}{4}).$$

Tính chất 272. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AD là phân giác trong. Từ D hạ DM, DN xuống các cạnh AB, AC. BN, CM cắt nhau tại H. Khi đó $AH \perp BC$.



Để thấy ANDM là hình vuông. Giả sử AH cắt BC tại E. Ta có $\triangle CND \sim \triangle DMB$ suy ra $\frac{CN}{DM} = \frac{ND}{MB} = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$ suy ra $\frac{CN}{MB} = \frac{CN}{DM} \cdot \frac{ND}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$. Theo định lý Ceva ta có $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1$ suy ra $\frac{BE}{EC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ hay E là chân đường cao hạ từ A. Do đó $AH \perp BC$.

Bài tập 303. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AD là phân giác trong. Từ D hạ DM, DN xuống các cạnh AB, AC. BN, CM cắt nhau tại H. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN có phương trình $(DMN): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$, $AH: 3x - y + 10 = 0$ và A có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ A, B, C.

(Nguyễn Minh Tiến)

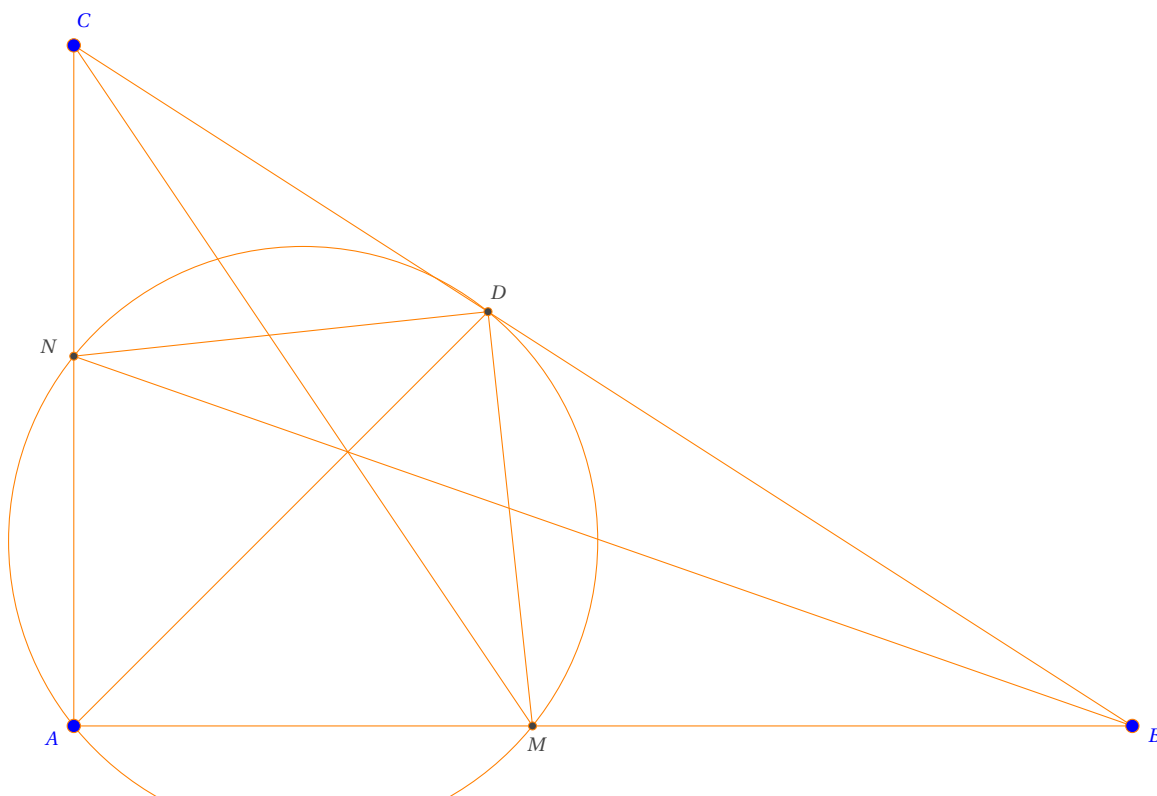
Đường tròn có tâm $I(-2; 1)$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \\ 3x - y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4).$$

Điểm D đối xứng với A qua I nên $D(-2; -2)$. Đường thẳng BC đi qua D vuông góc AH nên $BC: x + 3y + 8 = 0$. Đường thẳng AB tạo AD một góc 45° suy ra

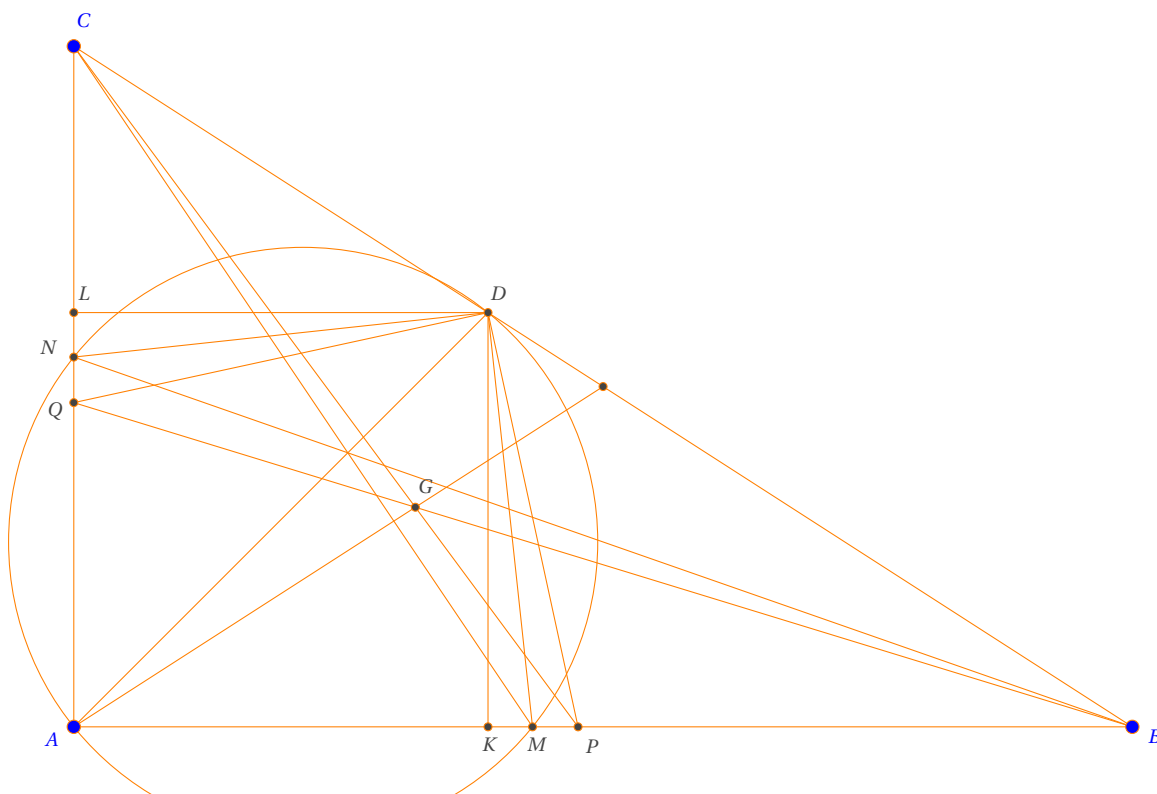
$$\begin{cases} AB: x + y - 2 = 0, AC: x - y + 6 = 0 \\ AB: x - y + 6 = 0, AC: x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(7; -5), C(-\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}) \\ B(-\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}), C(7; -5) \end{cases}.$$

Tính chất 273. Cho tam giác ABC vuông tại A , có AD là phân giác trong. Phân giác trong các $\angle ADB, \angle ADC$ cắt các cạnh AB, AC tại M, N . Khi đó BN, CM, AD đồng quy.

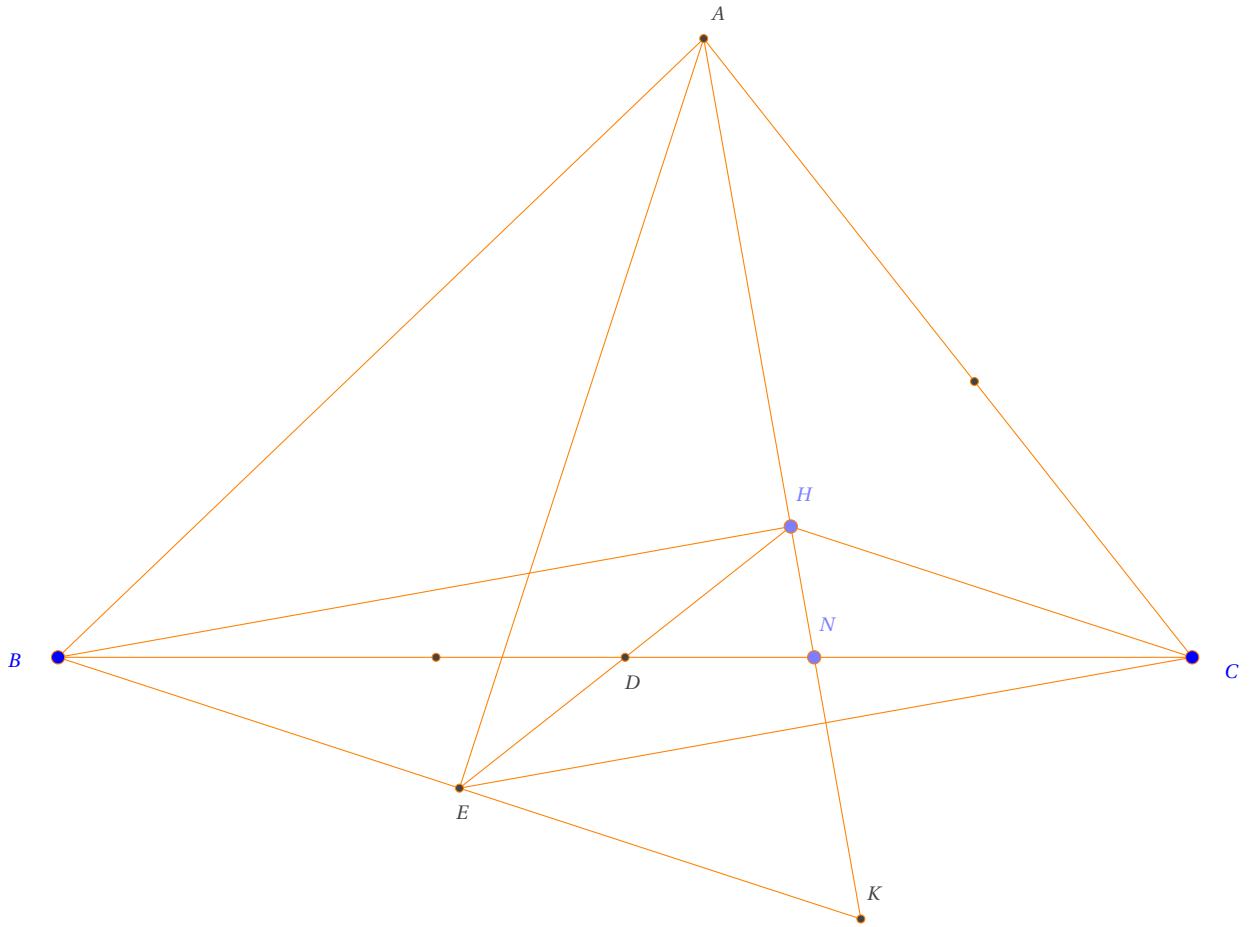


Nhận xét: tính chất vẫn còn đúng khi D là điểm bất kỳ trên cạnh BC .

Tính chất 274. Cho tam giác ABC vuông tại A , có AD là phân giác trong. Từ D hạ DK, DL xuống các cạnh AB, AC . Giả sử DP, DQ là đẳng giác của DK, DL qua phân giác $\angle ADB, \angle ADC$. BQ, CP cắt nhau tại G . Khi đó AG đi qua trung điểm của BC .



Tính chất 275. Cho tam giác ABC có D là trung điểm BC. N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Điểm H là hình chiếu của B lên AN. Biết $\angle BAN = 2\angle CAN$. Khi đó $DH \perp AC$.



Ta có $\begin{cases} \frac{ND}{NC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \\ \angle BHN = 90^\circ \end{cases}$ theo đường tròn Apollonius suy ra HN là phân giác $\angle DHC$ và $\frac{HD}{HC} =$

$\frac{ND}{NC} = \frac{1}{2}$. Giải sử phân giác $\angle BAH$ cắt DH tại E. Khi đó $\angle AHE = \angle AHC, \angle EAH = \angle CAH$ suy ra $\triangle EAH = \triangle CAH$. Do đó $HE = HC$ hay D là trung điểm EH. Suy ra BHCE là hình bình hành và tam giác BEH cân tại E. Kéo dài BE cắt HN tại K, chú ý tam giác BHK vuông tại H mà $EB = EH$ nên E là trung điểm BK do đó tam giác BAK có AE vừa là đường cao, vừa là phân giác nên cân tại A hay $BE \perp AE$ do đó $HC \perp AE$. Suy ra $EH \perp AC$.

Bài tập 304. Cho tam giác ABC có $D(2;0)$ là trung điểm BC. N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Điểm $H(2; \frac{5}{2})$ là hình chiếu của B lên AN. Biết $\angle BAN = 2\angle CAN, x_C > 0$ và đường thẳng AC đi qua $E(10; \frac{11}{2})$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Trần Hưng)

Đường thẳng AC đi qua E vuông góc DH nên $AC: y - \frac{11}{2} = 0$. Gọi $C(c; \frac{11}{2})$, ta có $HC = 2HD$ suy ra

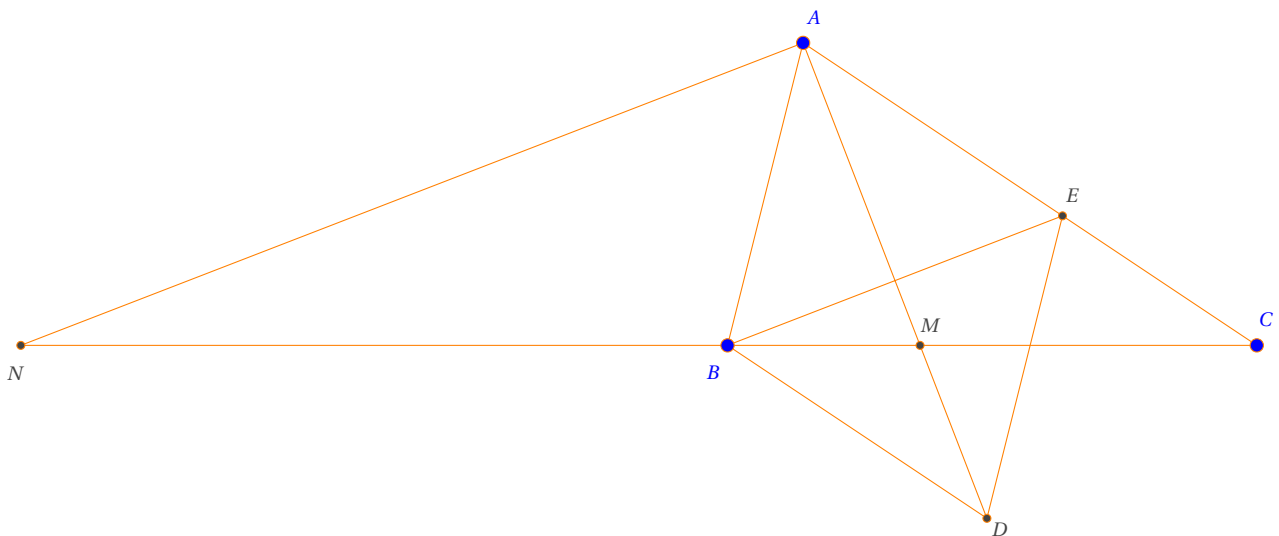
$$\begin{cases} C(6; \frac{11}{2}) \\ C(-2; \frac{11}{2}) \end{cases} \text{ loại}$$

Điểm B đối xứng C qua D nên $B(-2; \frac{11}{2})$. Ta có $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ suy ra $N(\frac{10}{3}; \frac{11}{6})$. Đường thẳng AN đi qua H, N nên AN: $x + 2y - 7 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ y - \frac{11}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-4; \frac{11}{2}).$$

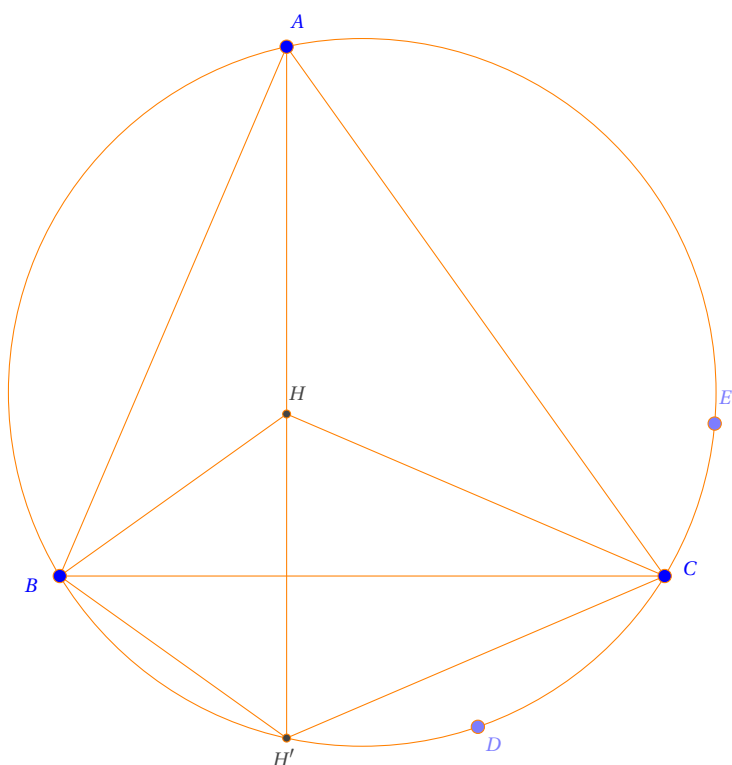
Chứng minh lại tính chất đảo của đường tròn Apollonius.

Tính chất 276. Cho tam giác ABC. M trên cạnh BC và N trên tia đối BC sao cho $\angle MAN = 90^\circ$ và $\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}$. Khi đó AM, AN là phân giác trong và ngoài của tam giác ABC.



Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, AN cắt AM, AC tại D, E. Khi đó $\frac{AE}{AC} = \frac{NB}{NC} = \frac{MB}{MC} = \frac{BD}{AC}$ suy ra $BD = AE$ do đó BAED là hình bình hành. Mặt khác $BE \perp AM$ nên BAED là hình thoi hay AM là phân giác trong $\angle BAC$ suy ra AN là phân giác ngoài.

Tính chất 277. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi H' là đối xứng của H qua BC. Khi đó H' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A \neq H'$.



Bài tập 305. Cho tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, $BC : x + y - 8 = 0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $D(7;3)$, $E(4;2)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

(Phan Chu Trinh - Đà Nẵng lần 2)

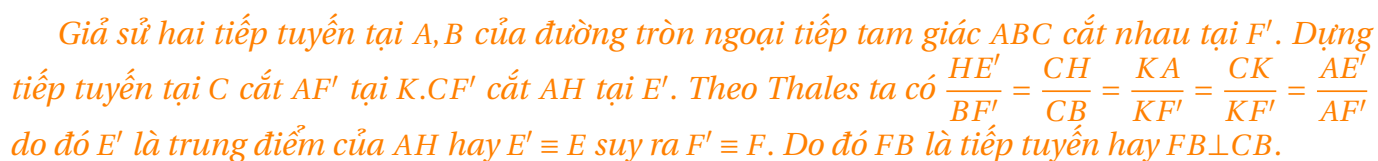
Đường thẳng AH đi qua H vuông góc BC nên $AH : x - y = 0$. Gọi H' là đối xứng của H qua BC suy ra $H'(3;3)$. Ta có H' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua H', D, E nên có phương trình $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 5$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6;6) \\ A(3;3) \end{cases} \text{ loại vì trùng } H'.$$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 5 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3;5), C(6;2) \\ B(6;2), C(3;5) \end{cases}.$$

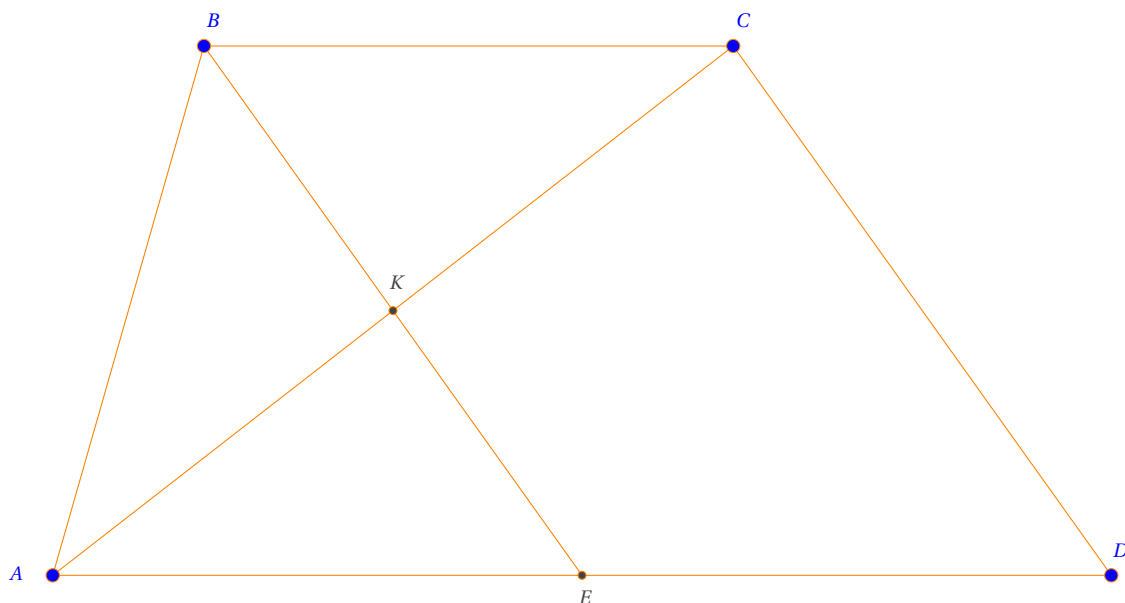
Tính chất 278. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi D, E là trung điểm AB, AH. Đường trung trực AB cắt CE tại F. Khi đó $FB \perp BC$.



(Kim Sơn A-Ninh Bình lần 3)

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}).$$
$$\begin{cases} (x+\frac{2}{5})^2 + (y-\frac{9}{5})^2 = \frac{9}{5} \\ 3x+5y=0 \end{cases} \Rightarrow D(-1; \frac{3}{5}).$$
$$\begin{cases} x + \frac{11}{5} = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{11}{5}; -\frac{3}{5}).$$

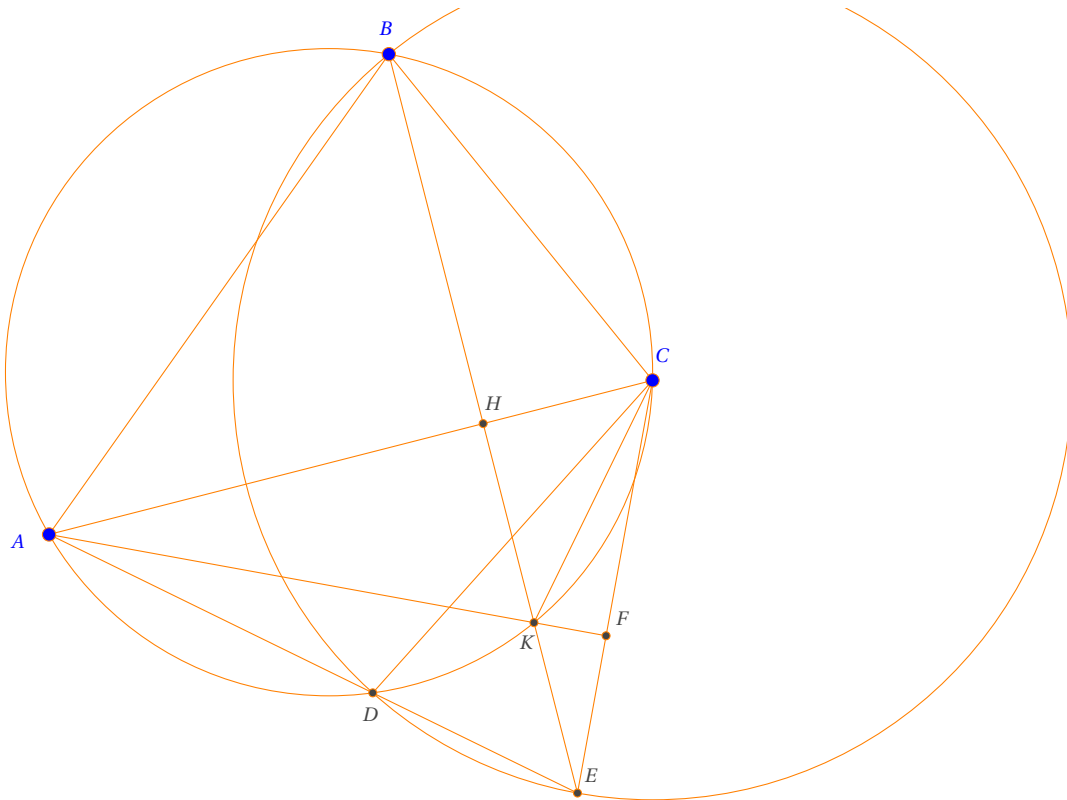
Tính chất 279. Giả sử BE cắt AC tại K . Khi đó $BCDE, ABCE$ là hình bình hành suy ra K là trung điểm BE, AC .



Bài tập 307. Cho hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $\tan \angle ADC = 0,5$, $B(4;0)$, $AC : 2x - y - 3 = 0$. Trung điểm E của AD thuộc đường thẳng $\Delta : x - 2y + 10 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$.

(Chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên lần 2)

Tính chất 280. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $BC = CD$ và $AB > AD$. Đường tròn tâm C bán kính CD cắt AD tại điểm thứ hai E , BE cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại điểm thứ hai K . Khi đó A là trực tâm tam giác KCE .



Vì $CD = CB$ nên $\angle DAC = \angle BAC$. Mặt khác tam giác DCE cân tại C nên $\angle AEC = \angle EDC = \angle ABC$ suy ra $\triangle ABC = \triangle AEC$ suy ra AC là trung trực BE hay $AC \perp BE$. Giả sử AC cắt BE tại H , AK cắt CE tại F . Ta có $\angle HAF = \angle CAK = \angle CBE = \angle BEC = \angle HEF$ suy ra tứ giác $AHFE$ nội tiếp suy ra $\angle AFE = \angle AHE = 90^\circ$ hay $AK \perp CE$. Do đó A là trực tâm tam giác KCE .

Bài tập 308. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $BC = CD$ và $AB > AD$. Đường tròn tâm C bán kính CD cắt AD tại điểm thứ hai $E(6;4)$, BE cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại điểm thứ hai $K(4;2)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, D biết rằng $C(4; -2)$ và A thuộc đường thẳng $d: 2x + y = 0$.

(Vted lần 24)

Bài tập 309. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $BC = CD$ và $AB > AD$. Đường tròn tâm C bán kính CD cắt AD tại điểm thứ hai $E(6;4)$, BE cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại điểm thứ hai $K(4;2)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, D biết rằng $C(4; -2)$.

(Võ Quang Mẫn chế lại Vted lần 24)

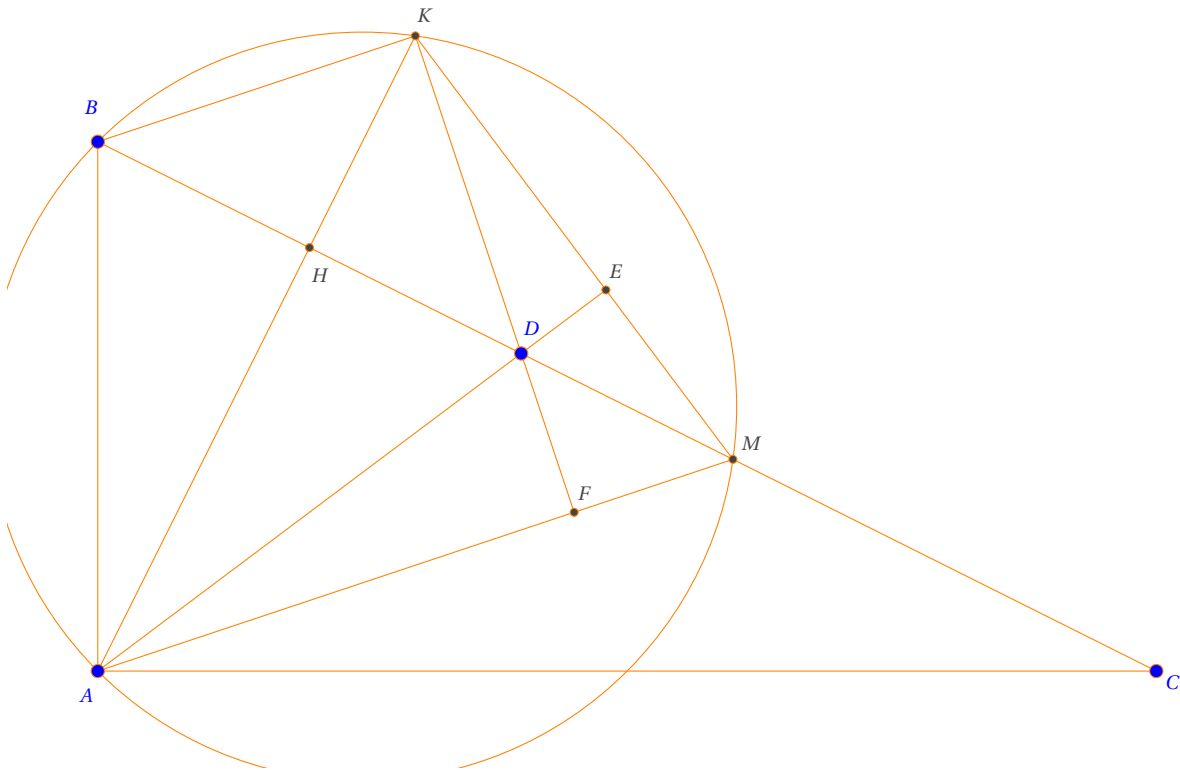
Đường thẳng AK đi qua K vuông góc CE nên $AK: x + 3y - 10 = 0$. Đường thẳng EA đi qua E vuông góc KC nên $AE: y - 4 = 0$. Vì A là trực tâm tam giác CEK nên tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 10 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4).$$

Điểm B đối xứng với E qua AC nên $B(-2; -4)$. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ đi qua A, B, C nên có phương trình $x^2 + y^2 = 20$. Tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2; 4).$$

Tính chất 281. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và D là điểm đối xứng của B qua H và M là trung điểm HC. K là trực tâm tam giác ADM, khi đó $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$.



Ta có K là trực tâm tam giác ADM nên $\angle AKM = 180^\circ - \angle ADM = \angle ADB = \angle ABM$ suy ra tứ giác ABKM nội tiếp đường tròn. Do đó $HB \cdot HM = HA \cdot HK$ mà $HB \cdot HC = HA^2$ và $HC = 2HM$ nên suy ra $HA = 2HK$ hay $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$.

Bài tập 310. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và D là điểm đối xứng của B qua H và M là trung điểm HC. Biết rằng K(4; -3) là trực tâm tam giác ADM và đường thẳng BC có phương trình $x - y - 3 = 0$, diện tích tam giác ABC bằng 40. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết B có hoành độ âm.

(Vted lần 25)

Đường thẳng KH đi qua K vuông góc BC nên $KH: x + y - 1 = 0$. Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1).$$

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$ suy ra $A(-2; 3)$. Mặt khác

$$\begin{cases} HB \cdot HC = HA^2 \\ HA \cdot (HB + HC) = 2S_{ABC} = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HB = 2\sqrt{2}, HC = 8\sqrt{2} \\ HB = 8\sqrt{2}, HC = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

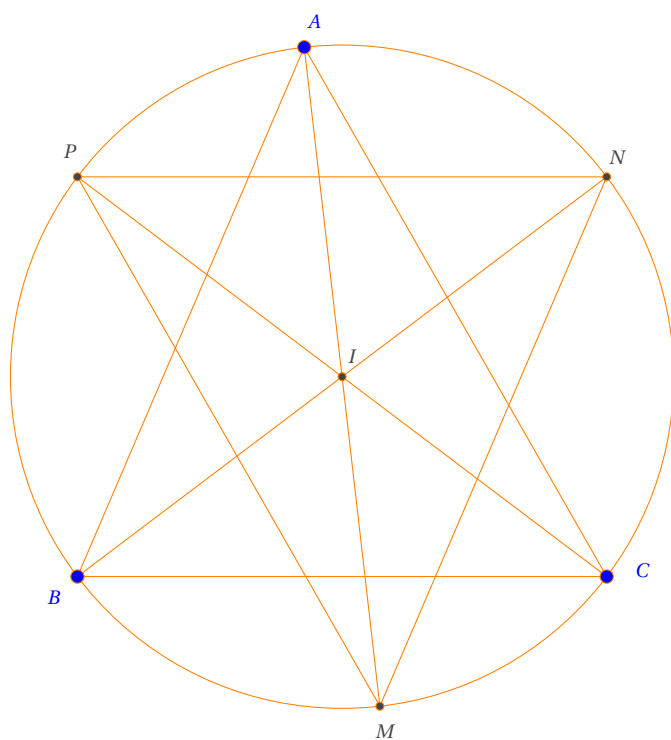
- $HB = 2\sqrt{2}, HC = 8\sqrt{2}$

Gọi $B(b; b - 3)$. Ta có $HB = 2\sqrt{2}$ suy ra $\begin{cases} B(0; -3) \\ B(4; 1) \end{cases}$ loại.

- $HB = 8\sqrt{2}, HC = 2\sqrt{2}$.

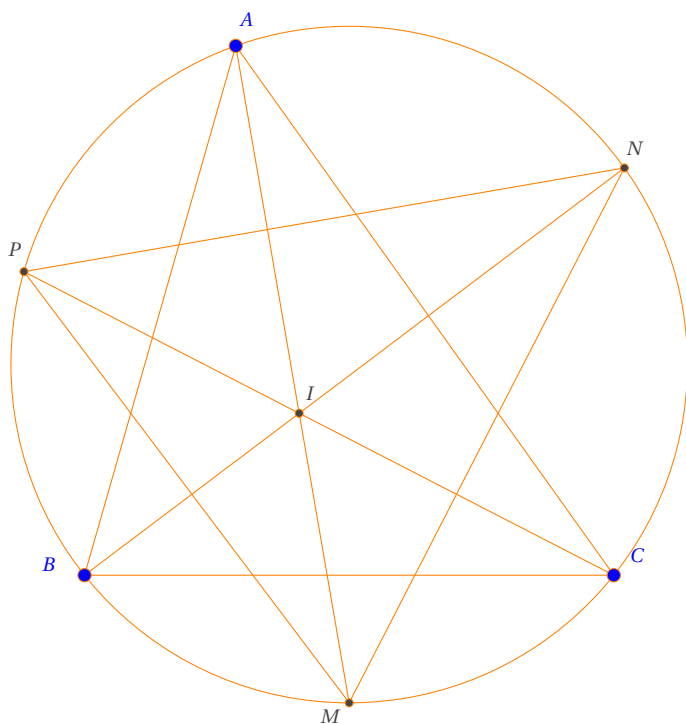
Gọi $B(b; b-3)$. Ta có $HB = 8\sqrt{2}$ suy ra $\begin{cases} B(-6; -9) \\ B(10; 7) \end{cases}$ loại. Gọi $C(c; c-3)$, ta có $HC = 2\sqrt{2}$ suy ra $\begin{cases} C(4; 1) \\ C(0; -3) \end{cases}$ loại vì H nằm ngoài BC .

Tính chất 282. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I . AI, BI, CI cắt đường tròn tại điểm thứ hai M, N, P . Khi đó $AB \parallel MN, AC \parallel MP, BC \parallel PN$.



Bài tập 311. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2; 4)$. AI, BI, CI cắt đường tròn tại điểm thứ hai M, N, P . Biết $MN: x-3y=0, MP: x+2y-20=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

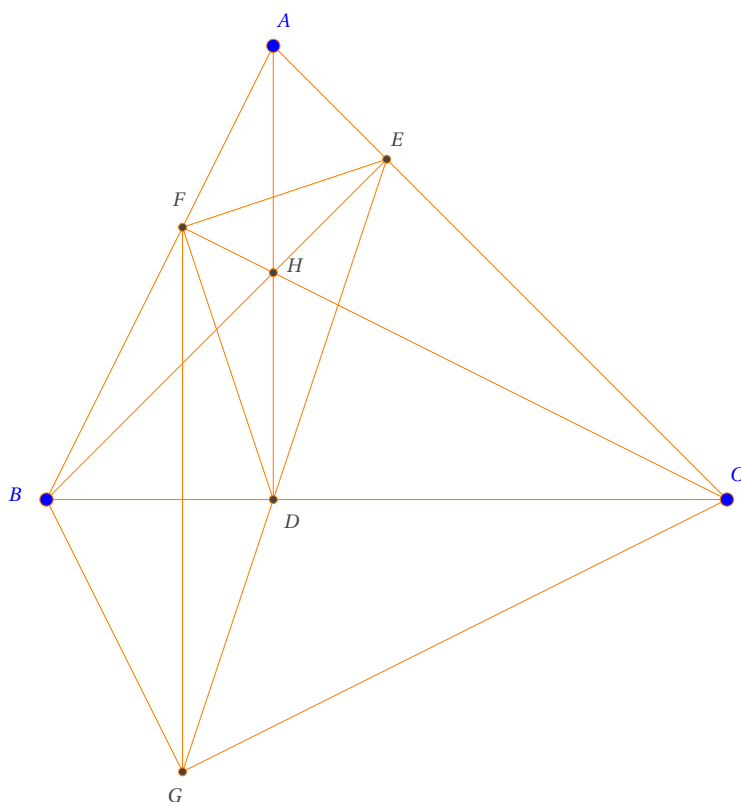
Tính chất 283. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I . AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai M, N, P . Khi đó I là trực tâm tam giác MNP .



Bài tập 312. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $I(2;4)$. AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai M, N, P. Biết $MN : x - 3y = 0$, $MP : x + 2y - 20 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Đô Lương II - Nghệ An lần 2)

Tính chất 284. BC là trung trực FG từ đó suy ra $BG \perp CG$.



Ta có $\angle FDH = \angle FBH = \angle HCE = \angle EDH$ hay DH là phân giác $\angle FDE$ mà $DH \perp DB$ nên DB là

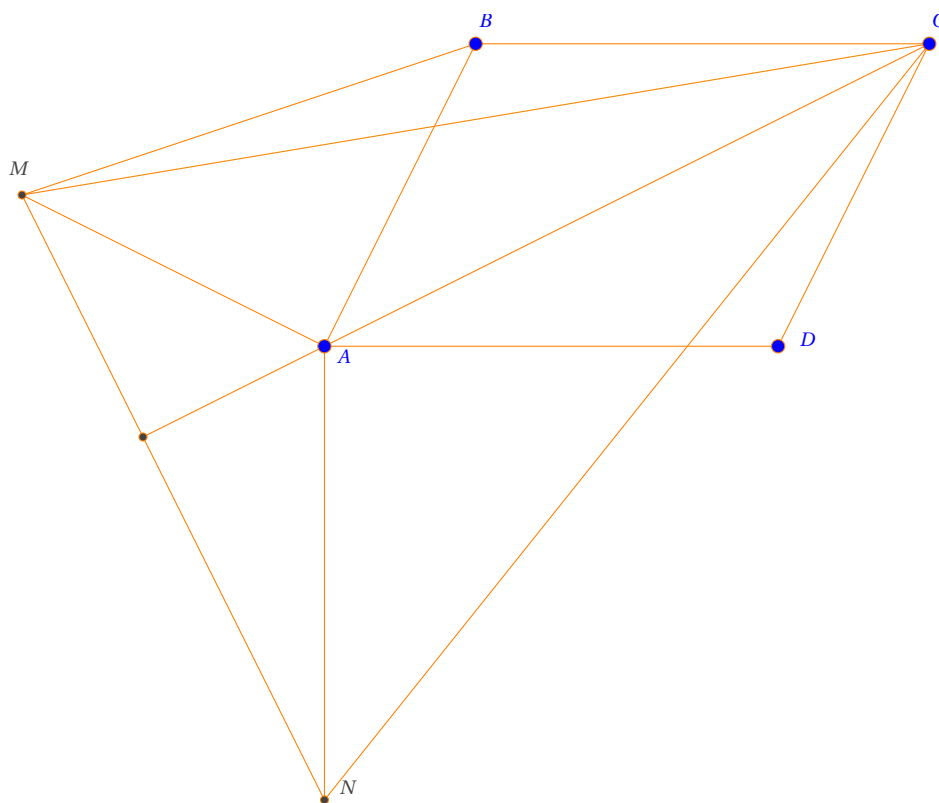
phân giác $\angle FDG$. Mặt khác $DF = DG$ nên BC là trung trực của FG do đó $\angle BFC = \angle BGC$ hay $BG \perp GC$.

Nhận xét: Tính chất trên vẫn còn đúng khi tam giác ABC tù.

Bài tập 313. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C tới các cạnh BC, CA, AB . Trên tia đối tia DE lấy điểm G sao cho $DF = DG$. Viết phương trình đường thẳng AB biết rằng đỉnh $C \in d: 2x + y - 14 = 0$ và tọa độ các đỉnh $B(-2; -2), G(4; -4)$.
(Đoàn Trí Dũng đề 7)

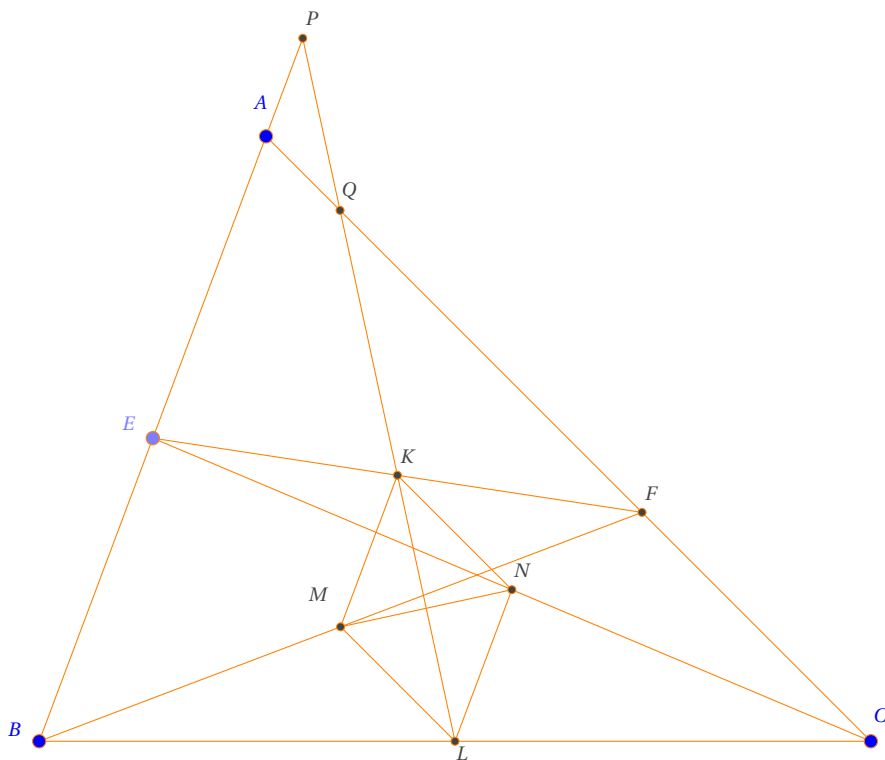
Tính chất 285. 1. $MD = BN$ và $MD \perp BN$.

2. $AC \perp MN$.



Bài tập 314. Cho hình bình hành $ABCD$ có $C(3; -2)$. Bên ngoài hình bình hành dựng các tam giác BAM, DAN đều vuông cân tại A . Biết $M(2; 7), N(-2; 4)$, tìm tọa độ các đỉnh A, B, D .

Tính chất 286. Trung trực MN song song với phân giác trong góc A .

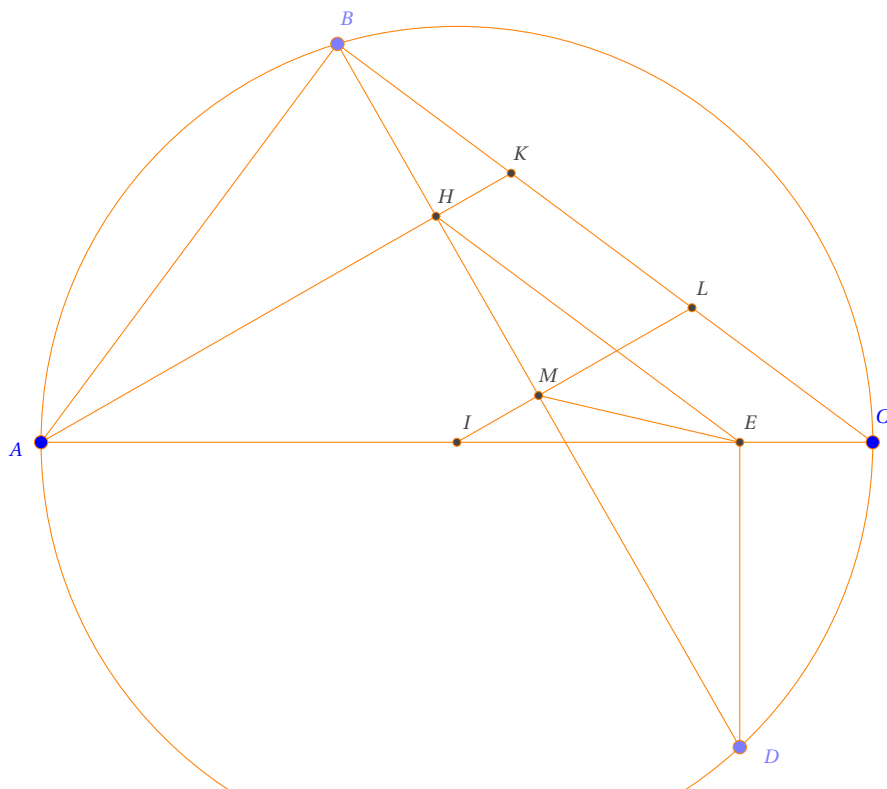


Bài tập 315. Cho tam giác ABC , trên cạnh AB, AC lấy điểm E, F sao cho $BE = CF$. Trung điểm BF, CE là M, N . Biết $A(1; 1), B(5; 3), MN: 2x + 2y - 19 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB, AC .

(Chuyên Bắc Ninh lần cuối)

Tính chất 287. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC , tâm I . Gọi H là hình chiếu của A lên BD , E là hình chiếu của D lên AC . M là trung điểm BD . Khi đó

1. $IM \perp BD$. Giả sử AH, IM cắt BC tại K, L khi đó L là trung điểm KC .
2. $HE \parallel BC$.
3. $MH = ME$.



1. Do I là tâm đường tròn suy ra $IM \perp BD$ suy ra $IM \parallel AH$ hay IL là đường trung bình của tam giác AKC do đó L là trung điểm KC .
2. Ta có $\angle AHD = \angle AED$ suy ra tứ giác $AHED$ nội tiếp suy ra $\angle DHE = \angle DAE = \angle DAC = \angle DBC$ do đó $HE \parallel AC$.
3. Ta có $\angle IMD = \angle IED$ suy ra tứ giác $IMED$ nội tiếp suy ra $\angle DME = \angle DIE = \angle DIC = 2\angle DAC = 2\angle MHE$ do đó tam giác HME cân tại M hay $MH = ME$.

Bài tập 316. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC . Gọi $H(-2;2)$ là hình chiếu của A lên BD , E là hình chiếu của D lên AC . M là trung điểm BD . Biết $BC : x - 2y - 2 = 0$, $EM : 3x + 4y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm A, B, C, D .

(chế thêm Đặng Thúc Hứa lần 2)

Đường thẳng HE đi qua H và song song BC nên $HE : x - 2y + 6 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E\left(-\frac{14}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

Đường trung trực HE có phương trình $2x + y + 3 = 0$ suy ra tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 1).$$

Đường thẳng AH, IM vuông góc HM nên $AH : y - 2 = 0, IM : y - 1 = 0$. Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(6; 2).$$

Tọa độ L là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow L(4; 1).$$

L là trung điểm KC suy ra $C(2; 0)$. Đường thẳng CE đi qua C, E nên có phương trình $CE: x + 3y - 2 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 2).$$

Đường thẳng HM đi qua H, M nên $HM: x + 2 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -2).$$

Điểm M là trung điểm BD suy ra $D(-2; 4)$.