2021

LÝ THUYẾT

TOÁN 12

- Hệ thống kiến thức trọng tâm cần
- Chia dạng toán cụ thể và chi tiết
- Ví dụ chọn lọc

NGUYỄN HOÀNG VIỆT

LUYENTHITRACNGHIEM.VN

Trường THPT .....

Họ và tên học sinh: .....

Lớp: ..... STT: .....

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

PHẦN I Đại số 1

CHƯƠNG 1 Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số 3

1 Sự đồng biến nghịch biến của hàm số ... 3
2 Cực trị hàm số ... 7
3 Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất ... 15
4 Đường tiệm cận của hàm số ... 16
5 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ... 17
6 Tiếp tuyến ... 25
7 Tương giao đồ thị ... 27
8 Điểm đặc biệt của họ đường cong ... 30

CHƯƠNG 2 Mũ và Logarit 35

1 Lũy thừa và hàm số lũy thừa ... 35
2 Lôgarit ... 38
3 Bất phương trình mũ và logarit ... 39
4 Bài toán lãi suất ngân hàng ... 41

CHƯƠNG 3 Nguyên hàm - Tích phân Ứng dụng tích phân 45

1 Nguyên hàm ... 45
2 Các phương pháp tính nguyên hàm ... 47
3 Tích phân ... 51
4 Phương pháp tính tích phân ... 52
5 Tích phân các hàm số sơ cấp cơ bản ... 54
6 Ứng dụng của tích phân ... 64

CHƯƠNG 4 Số phức 69

1 Số phức ... 69
2 Phép cộng trừ, nhân chia số phức ... 70
3 Phương trình bậc hai với hệ số thực ... 71

4 Tập hợp điểm biểu diễn số phức 72
5 Bài toán liên quan đến max, min mô-đun số phức 73

PHẦN II Hình học 75

CHƯƠNG 1 Khối đa diện 77

1 Khối lăng trụ và khối chóp 77
2 Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện 77
3 Hai đa diện bằng nhau 78
4 Phân chia và lắp ghép các khối đa diện 80
5 Khối đa diện lồi 80
6 Thể tích khối đa diện 83
7 Các công thức hình phẳng 85
8 Một số công thức tính nhanh thể tích khối chóp thường gặp 87
9 Các công thức đặc biệt của thể tích tứ diện 90

CHƯƠNG 2 Mặt nón - mặt trụ - mặt cầu 93

1 Mặt nón tròn xoay và khối nón 93
2 Mặt trụ tròn xoay và khối trụ 95
3 Mặt cầu và khối cầu 96
4 Một số dạng toán và công thức giải nón và trụ 100
5 Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt cầu 108
6 Tổng hợp các công thức đặc biệt về khối tròn xoay 118

CHƯƠNG 3 Hệ tọa độ trong không gian 123

1 Hệ tọa độ trong không gian 123
2 Mặt phẳng 127
3 Đường thẳng 133
4 Mặt cầu 144
5 Một số bài toán giải nhanh cực trị không gian 148

PHẦN

I

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1 SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A ĐỊNH NGHĨA

Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K, ta có

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (*tăng*) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (*giảm*) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

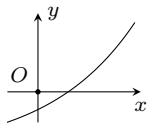
*Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu** trên K.*

Nhận xét.

- *Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,\ \forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2.$$

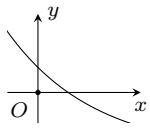
*Khi đó đồ thị của hàm số **đi lên** từ trái sang phải.*



- *Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,\ \forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2.$$

*Khi đó đồ thị của hàm số **đi xuống** từ trái sang phải.*



- *Nếu* $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b)$ *thì hàm số* $f(x)$ **đồng biến** *trên khoảng* $(a;b)$.
- *Nếu* $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b)$ *thì hàm số* $f(x)$ **nghịch biến** *trên khoảng* $(a;b)$.
- *Nếu* $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a;b)$ *thì hàm số* $f(x)$ **không đổi** *trên khoảng* $(a;b)$.
- *Nếu hàm số* $f(x)$ **đồng biến** *trên khoảng* $(a;b)$ *thì* $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a;b)$.
- *Nếu hàm số* $f(x)$ **nghịch biến** *trên khoảng* $(a;b)$ *thì* $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a;b)$.
- *Nếu thay đổi khoảng* $(a;b)$ *bằng một* **đoạn** *hoặc* **nửa khoảng** *thì phải* **bổ sung** *thêm giả thiết "hàm số* $f(x)$ ***liên tục*** *trên đoạn hoặc nửa khoảng đó".*

B QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ và C là hằng số.

- Tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- Tích: $(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$.
- Thương: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, (v \neq 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C \cdot u'}{u^2}$.
- Đạo hàm hàm hợp: Nếu $y = f(u)$ với $u = u(x)$ thì $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

C CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM HÀM PHÂN THỨC

- $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \Rightarrow y' = \left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$.

D BẢNG CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(C)' = 0, \quad (C$ là hằng số$)$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, \quad (x \neq 0)$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}, \quad (u \neq 0)$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (u > 0)$

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\sin^n x)' = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$	$(\sin^n u)' = n \cdot u' \cdot \sin^{n-1} u \cdot \cos u$
$(\cos^n x)' = -n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \sin x$	$(\cos^n u)' = -n \cdot u' \cdot \cos^{n-1} u \cdot \sin u$
$(\tan^n x)' = n \cdot \tan^{n-1} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan^n u)' = n \cdot u' \cdot \tan^{n-1} u \cdot \dfrac{1}{\cos^2 u}$
$(\cot^n x)' = -n \cdot \cot^{n-1} x \cdot \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot^n u)' = -n \cdot u' \cdot \cot^{n-1} u \cdot \dfrac{1}{\sin^2 u}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(\ln \lvert x \rvert)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$	$(\ln \lvert u \rvert)' = \dfrac{u'}{u}, \quad (u \neq 0)$
$(\log_a \lvert x \rvert)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (x \neq 0)$	$(\log_a \lvert u \rvert)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}, \quad (u \neq 0)$

E ĐẠO HÀM CẤP HAI

1 Định nghĩa

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

2 Ý nghĩa cơ học

Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = f''(t_0)$.

3 Đạo hàm cấp cao

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', \ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

F MỘT SỐ CHÚ Ý

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x)$, $g(x)$ không là các hàm số dương trên K.

Nhận xét. *Cho hàm số $u = u(x)$ xác định với mọi $x \in (a;b)$ và $u(x) \in (c;d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a;b)$.*

- ☑ *Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a;b)$ khi và chỉ khi $f(u)$ đồng biến với $u \in (c;d)$.*
- ☑ *Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a;b)$ khi và chỉ khi $f(u)$ nghịch biến với $u \in (c;d)$.*

G QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K.

- ☑ Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.
- ☑ Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Chú ý

- ☑ Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ thì dấu "=" khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.
- ☑ Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
  - Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

  - Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Trường hợp $a = b = 0$ thì c phải khác 0. Vì nếu $a = b = c = 0$ thì $f(x) = d$ có đồ thị là đường thẳng song song hoặc trùng với Ox nên không đơn điệu.

- Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng ℓ ta giải như sau
  - **Bước 1.** Tính $y' = f'(x; m) = ax^2 + bx + c$.
  - **Bước 2.** Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Điều kiện tương đương là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0. \end{cases}$ $(*)$
  - **Bước 3.** Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng ℓ khi và chỉ khi
  $$|x_1 - x_2| = \ell \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \ell^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = \ell^2. \quad (**)$$
  - **Bước 4.** Giải $(*)$ và giao với $(**)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

BÀI 2 CỰC TRỊ HÀM SỐ

A ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói

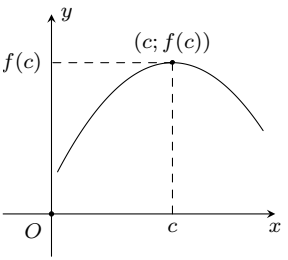
- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

Nhận xét.

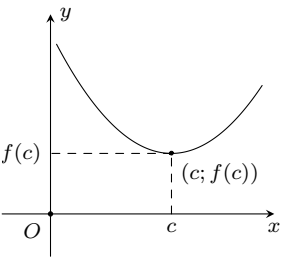
- *Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập $\mathscr{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 là điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a;b)$.*
- *Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K. Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.*

B MINH HỌA ĐỒ THỊ

Với $(a;b)$ là khoảng chứa tất cả các số thực thỏa $a < x < b$.



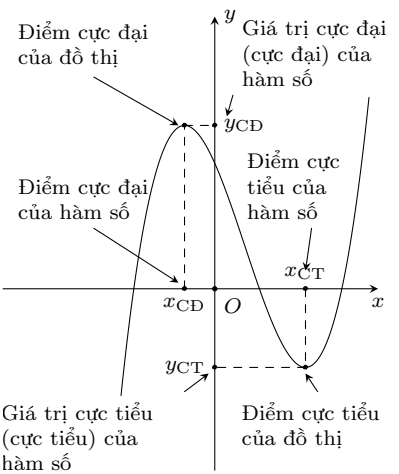
Hàm số f đạt cực đại tại $x = c$



Hàm số f đạt cực tiểu tại $x = c$

C MỘT SỐ ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Hàm số f có cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu.
- Hàm số f không có cực trị khi và chỉ khi y' không đổi dấu.
- Hàm số f chỉ có 1 cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu 1 lần.
- Hàm số f có 2 cực trị (cực đại và cực tiểu) khi và chỉ khi y' đổi dấu 2 lần.
- Hàm số f có 3 cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu 3 lần.
- Đối với một hàm số bất kỳ, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc đạo hàm không xác định.
- Cách gọi tên: cực trị, điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số,...



D ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ

Định lí 1. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*

Chú ý

- Đạo hàm $f'(x)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

E ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Định lí 2. *Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*

- *Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.*
- *Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.*

F QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

1 Quy tắc 1

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i = 1; 2; \ldots)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm.*
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó*

- *Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.*
- *Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.*

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số.

2 Quy tắc 2

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i = 1; 2; \ldots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
  - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
  - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

G MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

1 Cực trị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

① Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước.

(a) **Bài toán tổng quát**
Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước.
Phương pháp

- **Bước 1:** Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
  Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$.
- **Bước 2:** Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu) khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua hai nghiệm đó.
  Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathscr{D}_1.$$

- **Bước 3:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Khi đó

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{2b}{3a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{C}{A} = \dfrac{c}{3a}. \end{cases}$$

- **Bước 4:** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in \mathscr{D}_2$.
- **Bước 5:** Kết luận các giá trị m thỏa mãn $m \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

⚠ *Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.*

- ☑ *Hàm số không có cực trị khi* $b^2 - 3ac \leq 0$.
- ☑ *Hàm số có hai điểm cực trị khi* $b^2 - 3ac > 0$.

(b) Điều kiện để hàm số có các điểm cực trị cùng dấu, trái dấu.

- ☑ Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu, tức là

$$A \cdot C = 3ac < 0 \Leftrightarrow ac < 0.$$

- ☑ Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu, tức là

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

- ☑ Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu dương khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

- ☑ Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu âm khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} < 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

(c) Tìm điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\left\langle \begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2. \end{array} \right.$

- ☑ Hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0.$$

- ☑ Hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha. \end{cases}$$

- ☑ Hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\\ x_1+x_2>2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0\\ x_1+x_2>2\alpha.\end{cases}$$

② Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

(a) Vị trí tương đối của hai điểm với đường thẳng.
Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $\Delta\colon ax+by+c=0$.

- ☑ Nếu $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+C)<0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ.
- ☑ Nếu $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+C)>0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.

(b) Một số trường hợp đặc biệt.

- ☑ Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về một phía đối với trục Oy khi và chỉ khi hàm số có 2 điểm cực trị cùng dấu, tức là phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
- ☑ Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về hai phía đối với trục Oy khi và chỉ khi hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu, tức là phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.
- ☑ Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về một phía đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}>0$.
  Đặc biệt
  - Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng về phía trên đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases}y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}>0\\ y_{\text{CĐ}}+y_{\text{CT}}>0.\end{cases}$
  - Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng về phía dưới đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases}y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}>0\\ y_{\text{CĐ}}+y_{\text{CT}}<0.\end{cases}$
- ☑ Các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}<0$.
  (Áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số).
- ☑ Hoặc các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi đồ thị cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt (khi nhẩm được nghiệm) hay phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

③ Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị.

$$\boxed{g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}} \text{ hoặc } \boxed{g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}}$$

$$\text{hoặc } \boxed{g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}}$$

④ Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \text{ với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}.$$

2 Cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$

① Một số kết quả cần nhớ.

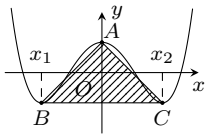
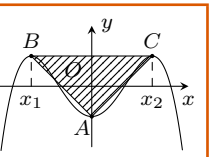
- ☑ Hàm số có một cực trị khi và chỉ khi $ab \geq 0$.
- ☑ Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0$.
- ☑ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0. \end{cases}$
- ☑ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0. \end{cases}$
- ☑ Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0. \end{cases}$
- ☑ Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0. \end{cases}$

② Một số công thức tính nhanh.

Giả sử đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị là $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $ab < 0$.

Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ thì $\boxed{\cot^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{b^3}{8a}}$.

$a > 0$, $b < 0$	Công thức	$a < 0$, $b > 0$

	$x_1 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$, $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Đặt $\widehat{BAC}=\alpha$ thì $\boxed{\cot^2\frac{\alpha}{2}=-\frac{b^3}{8a}}$.	

MỘT SỐ CÔNG THỨC GIẢI NHANH LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

STT	Dữ Kiện	Công thức thoả mãn $ab<0$ và $c\neq 0$
1	Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3=-8a$
2	Tam giác ABC đều	$b^3=-24a$
3	Tam giác ABC có diện tích $S_{\triangle ABC}=S_0$	$32a^3\left(S_0\right)^2+b^5=0$
4	Tam giác ABC có diện tích $maxS_0$	$S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
5	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\triangle ABC}=r_0$	$r=\frac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$
6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\triangle ABC}=R$	$R=\frac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$am_0^2+2b=0$
8	Tam giác ABC có độ dài cạnh $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
9	Tam giác ABC có cực trị $B,C\in Ox$	$b^2=4ac$
10	Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b\left(8a+b^3\right)>0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2=6ac$
12	Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
13	Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2=2ac$
14	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$

15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
16	Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a\left(k^2 - 4\right) = 0$
17	Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
18	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
19	Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	

BÀI 3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A ĐỊNH NGHĨA

① Số M được gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}, f(x_0) = M. \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.

② Số m được gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}, f(x_0) = m. \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.

B PHƯƠNG PHÁP TÌM GTLN, GTNN

① ***Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp***

- ☑ Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{D}$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- ☑ Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

② ***Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn***

- ☑ Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên trên đoạn $[a; b]$.
- ☑ Tìm các điểm x_1, x_2, ..., x_n trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- ☑ Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.
- ☑ Khi đó
  - $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.
  - $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

③ ***Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng***

- ☑ Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ☑ Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ☑ Tính $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- ☑ So sánh các giá trị và kết luận $M = \max\limits_{x\in(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

Lưu ý: *Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận hàm số không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

Chú ý:

- ☑ Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b)$.
- ☑ Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a)$.
- ☑ Hàm số liên tục trên một khoảng ***có thể*** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.
- ☑ Ngoài phương pháp dùng đạo hàm, ta có thể dùng phương pháp MGT, BĐT, ...

BÀI 4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

A ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là **đường tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

B ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

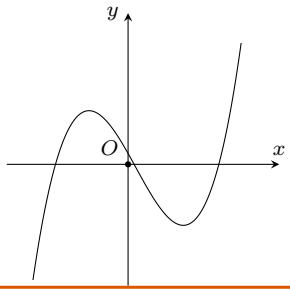
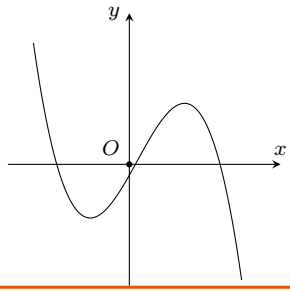
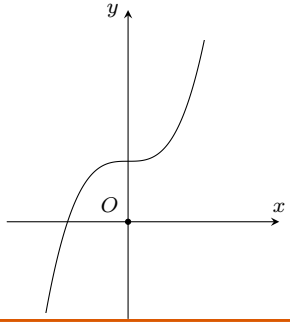
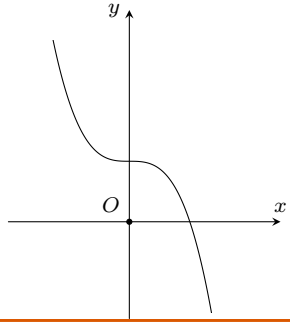
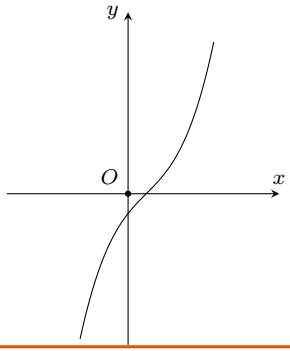
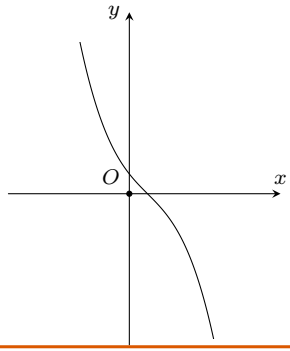
***Lưu ý*:** Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0; ad - bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$.

BÀI 5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM PHÂN THỨC

1 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

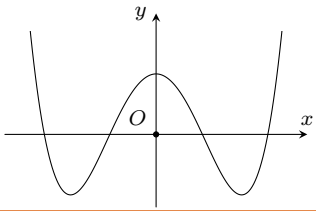
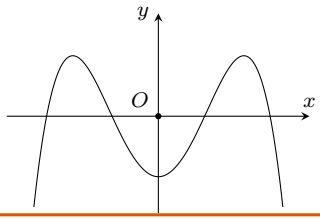
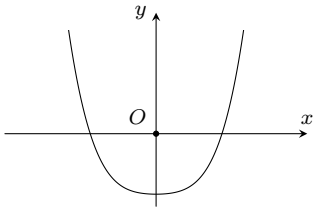
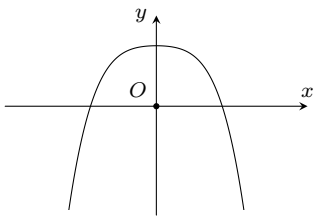
- ☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- ☑ Tính y' và cho $y' = 0$ ($y' = 0$ *hoặc có 2 nghiệm, hoặc có nghiệm kép, hoặc vô nghiệm*).
- ☑ Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
- ☑ Lập bảng biến thiên
  - Nếu $y' = 0$ *có hai nghiệm thì dấu* của y' là "**Trong trái ngoài cùng**".
  - Nếu $y' = 0$ *có nghiệm kép thì dấu* của y' là "**Luôn cùng dấu với** a" (*ngoại trừ tại nghiệm kép*).
  - Nếu $y' = 0$ *vô nghiệm thì dấu* của y' là "**Luôn cùng dấu với** a".
- ☑ Kết luận
  - Tính chất đơn điệu của hàm số.
  - Cực trị của hàm số.
- ☑ Tính y'' và cho $y'' = 0$. Suy ra điểm uốn.
- ☑ Chọn hai điểm đặc biệt của đồ thị.
- ☑ Vẽ đồ thị: Đồ thị có 6 dạng và luôn luôn nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 2 nghiệm		
Có nghiệm kép		
Vô nghiệm		

2 Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tính y' và cho $y' = 0$ ($y' = 0$ *hoặc có* 3 *nghiệm, hoặc có* 1 *nghiệm và luôn có nghiệm* $x = 0$).
- Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
- Lập bảng biến thiên: "*Bên phải bảng biến thiên, dấu* y' *luôn luôn cùng dấu với* a"

- Kết luận
  - Tính chất đơn điệu của hàm số.
  - Cực trị của hàm số.
- Chọn hai điểm đặc biệt của đồ thị.
- Vẽ đồ thị: Đồ thị có 4 dạng và luôn luôn nhận trục tung làm trục đối xứng.

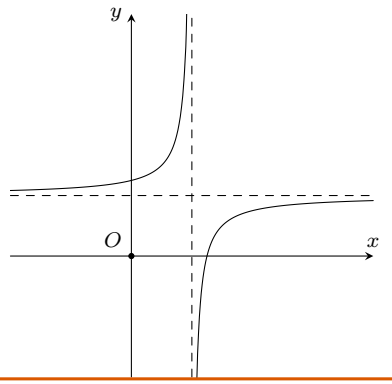
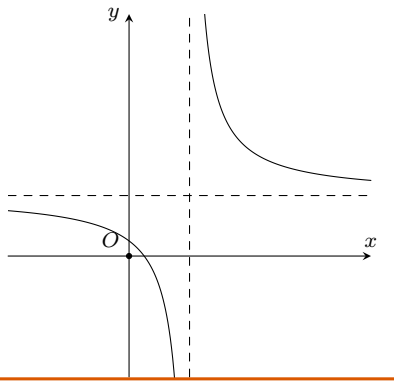
$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 3 nghiệm		
Có 1 nghiệm		

3 Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Tính $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (y' hoặc luôn dương, hoặc luôn âm $\forall x \in \mathscr{D}$)
- Đường tiệm cận:
  - Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$ vì $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = \ldots$ và $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = \ldots$.
  - Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{a}{c}$.
- Lập bảng biến thiên: Nhớ: Khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to \dfrac{a}{c}$.

"*Nghĩa là hai đầu bảng biến thiên là giá trị của tiệm cận ngang*"

- ☑ Kết luận
  - Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.
  - Hàm số không có cực trị.
- ☑ Chọn ít nhất 4 điểm đặc biệt của đồ thị và phải có tọa độ giao điểm của đồ thị với 2 trục tọa độ.
- ☑ Vẽ đồ thị: Đồ thị có 2 dạng và luôn luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

B ĐỒ THỊ HÀM CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

1 Dạng 1: $(C')\colon y = f(|x|)$

Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = f(|x|)$.

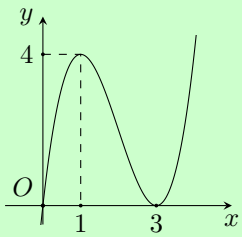
Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

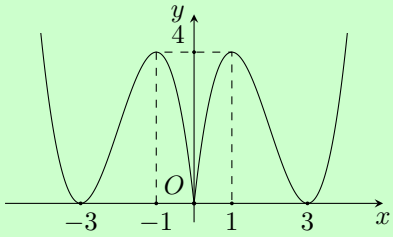
☐ **Cách vẽ (C') từ (C):**

- ☑ *Giữ nguyên* phần đồ thị <u>bên phải Oy</u> của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$.
- ☑ *Bỏ* phần đồ thị <u>bên trái Oy</u> của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua Oy.

Ví dụ 1



$(C)\colon y = x^3 - 6x + 9x$



$(C')\colon y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$

2 Dạng 2: $(C')\colon y = |f(x)|$

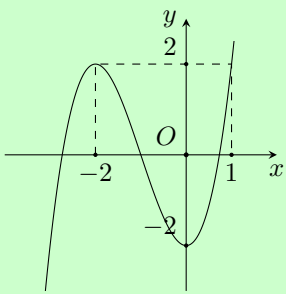
Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = |f(x)|$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

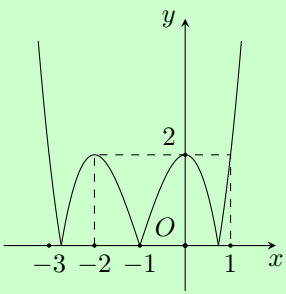
☐ **Cách vẽ (C') từ (C):**

- ☑ *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$.
- ☑ *Bỏ* phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

Ví dụ 2



$(C)\colon y = x^3 + 3x^2 - 2$



$(C')\colon y = \left|x^3 + 3x^2 - 2\right|$

! Với dạng $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$.

3 Dạng 3: $(C')\colon y = |u(x)| \cdot v(x)$

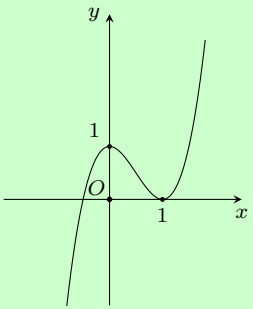
Từ đồ thị $(C)\colon y = u(x) \cdot v(x)$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = |u(x)| \cdot v(x)$.

Ta có $y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

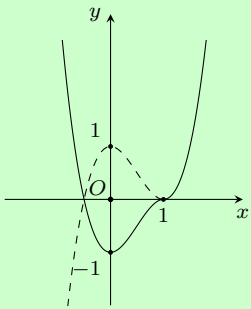
☐ **Cách vẽ (C') từ (C):**

- ☑ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$.
- ☑ *Bỏ* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

Ví dụ 3

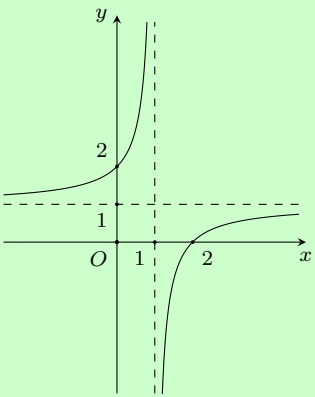


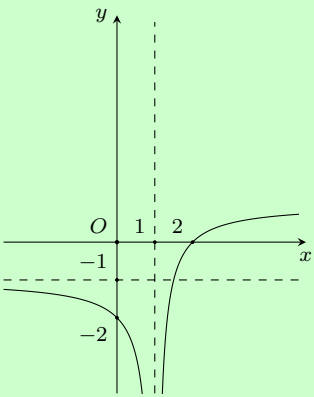
$(C)\colon y = 2x^3 - 3x + 1$



$(C')\colon y = |x-1| \cdot (2x^2 - x - 1)$

Ví dụ 4





$(C)\colon y = \dfrac{x-2}{x-1}$ $\qquad$ $(C')\colon y = \dfrac{x-2}{|x-1|}$

C MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), hãy suy ra đồ thị (C') của hàm số.

STT	ĐỒ THỊ	CÁCH VẼ
1	$y = f(-x)$	Lấy đối xứng (C) qua trục Oy.
2	$y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua trục Ox.
3	$y = f(\|x\|)$	☑ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải Oy. ☑ *Bỏ* phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng đồ thị** *được giữ* qua Oy.
4	$y = \|f(x)\|$	☑ *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C). ☑ *Bỏ* phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.
5	$y = \|f(\|x\|)\|$	Ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(\|x\|)$ và $y = \|f(x)\|$.
6	$y = \|u(x)\| \cdot v(x)$ với $(C)\colon y = u(x) \cdot v(x)$	☑ *Giữ nguyên* phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị (C). ☑ *Bỏ* phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua** Ox.

7	$y = f(x) + p,\ p > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) lên trên p đơn vị.
8	$y = f(x) - p,\ p > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) xuống dưới p đơn vị.
9	$y = f(x + q),\ q > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) sang trái q đơn vị.
10	$y = f(x - q),\ q > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) sang phải q đơn vị.
11	$y = f(kx),\ k > 1$	Co đồ thị (C) theo chiều ngang hệ số k.
12	$y = f(kx),\ 0 < k < 1$	Giãn đồ thị (C) theo chiều ngang hệ số $\frac{1}{k}$.
13	$y = kf(x),\ k > 1$	Giãn đồ thị (C) theo chiều dọc hệ số k.
14	$y = kf(x),\ 0 < k < 1$	Co đồ thị (C) theo chiều dọc hệ số $\frac{1}{k}$.
15	$y = \lvert f(x)\rvert + m$	☑ Vẽ đồ thị $y = \lvert f(x)\rvert$. ☑ Tịnh tiến đồ thị lên hoặc xuống m đơn vị.
16	$y = \lvert f(x + m)\rvert$	☑ Tịnh tiến đồ thị sang phải hoặc sang trái m đơn vị. ☑ Sau đó vẽ như cách vẽ đồ thị $y = \lvert f(x)\rvert$.
17	$y = \lvert f(\lvert x\rvert + m)\rvert$	☑ Tịnh tiến đồ thị sang phải hoặc sang trái m đơn vị. ☑ Sau đó vẽ như cách vẽ đồ thị $y = f(\lvert x\rvert)$.
18	$y = \lvert f(\lvert x + m\rvert)\rvert$	☑ Vẽ đồ thị $y = \lvert f(x)\rvert$. ☑ Tịnh tiến đồ thị sang phải hoặc sang trái m đơn vị.

BÀI 6 TIẾP TUYẾN

A TIẾP TUYẾN

Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Trong đó điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ được gọi là tiếp điểm với $y_0 = f(x_0)$ và $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

DẠNG 1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$

Phương pháp giải.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng số a.
   - Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
   - Ta có $x_0 = a$.
   - Thế $x = a$ vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.
   - Tính $f'(x)$ từ đó tính $f'(x_0)$.
   - Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng số b.
   - Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
   - Ta có $y_0 = b$.
   - Thế $y = b$ vào phương trình $y = f(x)$ từ đó tìm được x_0.
   - Tính $f'(x)$, từ đó tính được $f'(x_0)$.
   - Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

DẠNG 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có phương cho trước

Phương pháp giải.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến

bằng k.

- ☑ Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- ☑ Hệ số góc tiếp tuyến bằng k nên $f'(x_0) = k$. Giải phương trình này ta tìm được x_0.
- ☑ Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.
- ☑ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

② Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d\colon y = ax + b$.

- ☑ Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- ☑ Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d\colon y = ax + b \Rightarrow f'(x_0) = a$. Giải phương trình này tìm được x_0.
- ☑ Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.
- ☑ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

> **!** Nhớ kiểm tra tính song song của tiếp tuyến cần tìm để loại bỏ đáp án.

③ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon y = ax + b$.

- ☑ Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- ☑ Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon y = ax + b \Rightarrow f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$. Giải phương trình này tìm được x_0.
- ☑ Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.
- ☑ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

🗀 DẠNG 3. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$

Phương pháp giải.

- Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến d đi qua M.
- Suy ra $d\colon y - y_0 = k(x - x_0) \Leftrightarrow y = kx - kx_0 + y_0 \quad (*)$.
- d tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx - kx_0 + y_0 & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.
- Thế (2) vào (1) để tìm hoành độ tiếp điểm x.
- Thế x vào phương trình (2) để tìm hệ số góc k của tiếp tuyến.
- Thế k vào $(*)$ tìm được phương trình tiếp tuyến đi qua M.

! Khi thế (2) vào (1) và giả sử thu được phương trình ẩn số là x và được kí hiệu là (1). Thông thường phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm x thì qua điểm M có bấy nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (C). Từ đó ta giải quyết được bài toán "Tìm điều kiện để qua M có thể vẽ được đến đồ thị (C) n tiếp tuyến".

B ĐIỀU KIỆN TIẾP XÚC

Cho hai hàm số $(C)\colon y = f(x)$ và $(C')\colon y = g(x)$. Đồ thị (C) và (C') tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

BÀI 7 TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2).
Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x) \quad (1)$. Khi đó

1. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng số nghiệm của phương trình (1).
2. Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm .
3. Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.
4. Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).

DẠNG 1. Tìm tham số để đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ cắt đường thẳng (d) tại hai điểm

Phương pháp giải.

1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d ta được

$$g(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (*) \quad (x \neq x_0)$$

với x_0 là nghiệm của mẫu số.

2. d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ tìm được tham số.

DẠNG 2. Tìm tham số để đồ thị $(C)\colon y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt đường thẳng (d) tại 3 điểm

Phương pháp giải.

1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) gọi là phương trình $(*)$.

2. Nhẩm nghiệm của phương trình $(*)$ và giả sử được một nghiệm $x = x_0$. Dùng sơ đồ Hoocner để biến đổi phương trình $(*)$ về dạng

$$(x - x_0)(ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1). \end{array}\right.$$

3. (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ tìm được tham số.

Công thức trắc nghiệm

① Đồ thị hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi phương trình $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ có 1 nghiệm là $x = -\dfrac{b}{3a}$.

② Đồ thị hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi phương trình $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.

DẠNG 3. Tìm tham số để đồ thị $(C)\colon y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt đường thẳng d tại 4 điểm

Phương pháp giải.

① Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d giả sử được phương trình

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0 \quad (*).$$

② Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình $(*)$ trở thành $At^2 + Bt + C = 0 \quad (1)$.

③ d cắt (C) tại 4 điểm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 4 nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ với $\begin{cases} S = -\dfrac{B}{A} \\ P = \dfrac{C}{A} \end{cases}$ từ đây tìm được tham số.

Công thức trắc nghiệm
Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c. \end{cases}$

DẠNG 4. Tìm tham số để đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ cắt đường thẳng d tại n điểm thỏa mãn tính chất nào đó

Phương pháp giải.

① Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $g(x) = 0 \quad (*)$.

② d cắt (C) tại n điểm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có n nghiệm.

③ Khi đó hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của phương trình $(*)$ và thông thường sử dụng định lí Vi-ét để giải quyết bài toán.

BÀI 8 ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

A BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi.

Phương pháp giải

- **Bước 1**: Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am + B = 0$ hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$.
- **Bước 2**: Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$
- **Bước 3**: Kết luận
  - Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
  - Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m)

B BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM CÓ TỌA ĐỘ NGUYÊN

Cho đường cong (C) có phương trình $(C_m)\colon y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Phương pháp giải

- **Bước 1**: Thực hiện chia đa thức, ta được: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \dfrac{k}{Q(x)}$, trong đó $H(x)$ là đa thức và $k \in \mathbb{R}$.

- **Bước 2**: $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow H(x) + \dfrac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \text{Ư}(k)$.
- **Bước 3**: Lần lượt cho $Q(x)$ nhận giá trị (là các ước của k) để tìm giá trị của x và y tương ứng.

> **!** Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

C BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM CÓ TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

① **Bài toán 1**: Cho đồ thị $(C)\colon y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I; y_I)$

Phương pháp giải

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.
- Ta có $\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 2y_I. \end{cases}$
- Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N.

② **Bài toán 2**: Cho đồ thị $(C)\colon y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Phương pháp giải

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
- Ta có $\begin{cases} a + b = 0 \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 0. \end{cases}$
- Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N.

③ **Bài toán 3**: Cho đồ thị $(C)\colon y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng với nhau qua đường thẳng $(d)\colon y = A_1x + B_1$.

Phương pháp giải

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng với nhau qua đường thẳng d.
- Ta có: $\begin{cases} I \in (d) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u}_d = 0 \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\overrightarrow{u}_d$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d)).
- Giải hệ phương trình tìm được M, N.

D BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM ĐẶC BIỆT, KHOẢNG CÁCH

1 Lý thuyết

- Cho hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, suy ra $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h(M; (d)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Cho hàm phân thức: $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ tiếp tuyến tại M cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang ở A và B thì M là trung điểm của AB. Khi đó diện tích của $\triangle MAB$ không đổi: $S_{MAB} = \dfrac{2}{c^2}|ad - bc|$.

2 Các bài toán thường gặp

① **Bài toán 1**: Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ có đồ thị (C). Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.

Phương pháp giải

- (C) có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α, β là hai số dương.
- Nếu A thuộc nhánh trái: $x_A < -\dfrac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\dfrac{d}{c} - \alpha < -\dfrac{d}{c}$; $y_A = f(x_A)$.
- Nếu B thuộc nhánh phải: $x_B > -\dfrac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\dfrac{d}{c} + \beta > -\dfrac{d}{c}$; $y_B = f(x_B)$.
- Sau đó tính: $AB^2 = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)^2 = [(\alpha + \beta) - (a - \alpha)]^2 + (y_B - y_A)^2$.
- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si sẽ tìm ra kết quả.

② **Bài toán 2**: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

- Gọi $M(x; y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = |x| + |y|$.
- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

③ **Bài toán 3**: Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.

Theo đầu bài ta có $|y| = k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = kx \\ y = -kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = kx \\ f(x) = -kx. \end{array}\right.$

④ **Bài toán 4**: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,$ $ad - bc \neq 0)$ tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).

Phương pháp giải

- Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.
- Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cần tìm thì $IM^2 = \left(x_M + \dfrac{d}{c}\right)^2 \left(y_M - \dfrac{a}{c}\right)^2 = g(x_M)$.
- Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

⑤ Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $(d)\colon Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.

Phương pháp giải

- Gọi $I \in (C)$, suy ra $I(x_0; y_0)$ và $y_0 = f(x_0)$.

- ☑ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h(I;(d)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- ☑ Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

CHƯƠNG

2 MŨ VÀ LOGARIT

BÀI 1 LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

A KHÁI NIỆM LŨY THỪA

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương.
Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n} \quad (n \text{ thừa số } a).$$

Với $a \neq 0$ thì $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
Ta gọi a là cơ số, n là số mũ. Và chú ý 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2 Một số tính chất của lũy thừa

Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa

- ☑ $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- ☑ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$
- ☑ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$
- ☑ $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- ☑ $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$
- ☑ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$
- ☑ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- ☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
- ☑ Với $0 < a < b$ thì $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$
- ☑ Với $0 < a < b$ thì $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

⚠ ☑ *Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.*

☑ *Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.*

☑ *Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.*

B PHƯƠNG TRÌNH $X^N = B$

Ta có kết quả biện luận số nghiệm phương trình $x^n = b$ như sau

TH.1 Khi n lẻ: Với mọi số thực b phương trình có nghiệm duy nhất.

TH.2 Khi n chẵn:

a) Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm.

b) Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

c) Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

C MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA CĂN BẬC N

Với a, $b \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$.
- $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}$, $\forall ab \geq 0$.
- $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}$, $\forall a, b$.
- $\sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}$, $\forall ab \geq 0, b \neq 0$.
- $\sqrt[2n+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}$, $\forall a \geq 0, b \neq 0$.
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $a > 0$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$.
- Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $a > 0$.
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, $a > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$.

D HÀM SỐ LŨY THỪA

1 Khái niệm

Xét hàm số $y = x^\alpha$ với α là số thực cho trước.
Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

⚠ *Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α.*

- *Với α nguyên dương thì $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.*
- *Với α nguyên âm hoặc bằng 0 thì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
- *Với α không nguyên thì $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.*

2 Khảo sát hàm số lũy thừa

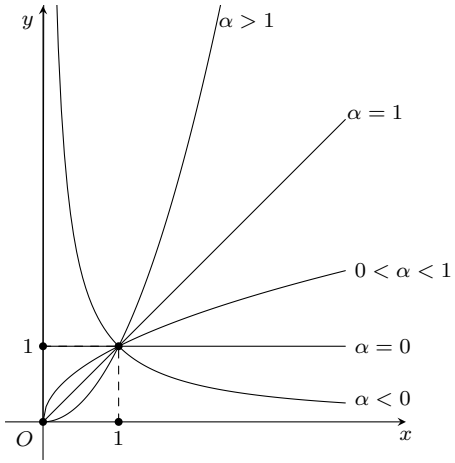
Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$. Trong trường hợp tổng quát, chúng ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên $(0; +\infty)$.

$y = x^\alpha, \alpha > 0$	$y = x^\alpha, \alpha < 0$
① Tập xác định $(0; +\infty)$. ② Sự biến thiên ☑ $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$. ☑ Giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. ☑ Tiệm cận: không có. ③ Bảng biến thiên	① Tập xác định $(0; +\infty)$. ② Sự biến thiên ☑ $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$. ☑ Giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$. ☑ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang; Oy là tiệm cận đứng. ③ Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	↗	$+\infty$

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	↘	0

Đồ thị hàm số



Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1; 1)$.

E KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ $Y = A^X$

$y = a^x, a > 1$

① Tập xác định $\mathbb{R}$.

② Sự biến thiên

- ☑ $y' = a^x \cdot \ln a > 0, \forall x$.
- ☑ Giới hạn đặc biệt

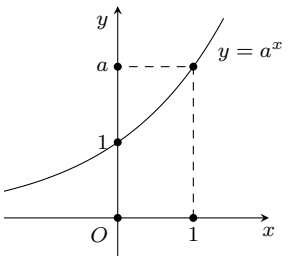
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

- ☑ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang.

③ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'				$+$			
y	0	↗	1	↗	a	↗	$+\infty$

④ Đồ thị như hình sau



$y = a^x, 0 < a < 1$

① Tập xác định $\mathbb{R}$.

② Sự biến thiên

- ☑ $y' = a^x \cdot \ln a < 0, \forall x$.
- ☑ Giới hạn đặc biệt

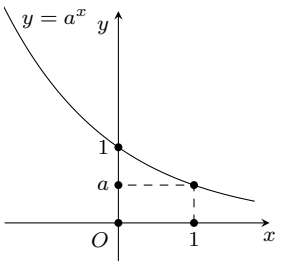
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

- ☑ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang.

③ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'				$-$			
y	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

④ Đồ thị như hình sau



BÀI 2 LÔGARIT

A KHÁI NIỆM LÔGARIT

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$.

$$\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.}$$

Không có lôgarit của số âm và số 0.

B BẢNG TÓM TẮT CÔNG THỨC MŨ - LÔGARIT THƯỜNG GẶP

Với các điều kiện của a, b, c để mỗi biểu thức có nghĩa, ta có bảng sau

Công thức mũ	Công thức lôgarit
☑ $a^0 = 1$, $a \neq 0$.	☑ $\log_a 1 = 0$.
☑ $a^1 = a$.	☑ $\log_a a = 1$.
☑ $a^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$.	☑ $\log_a a^\alpha = \alpha$.
☑ $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.	☑ $\log_{a^\alpha} a = \dfrac{1}{\alpha}$.
☑ $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$	☑ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$, $b > 0$.
☑ $a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$.	☑ $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta} \log_a b$.
☑ $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$, $b \neq 0$.	☑ $\log_{a^\beta} b^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta} \log_a b$.
☑ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \in \mathbb{Z}$.	☑ $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$.
☑ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.	☑ $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$.
☑ $a^\alpha = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$.	☑ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $1 \neq b > 0$.

BÀI 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

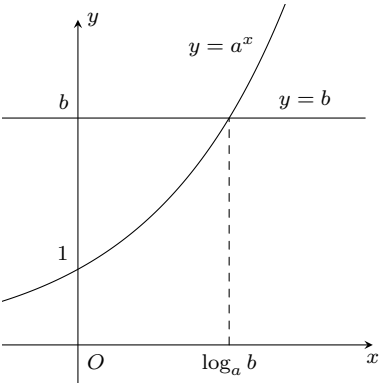
A BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.
Ta xét bất phương trình có dạng $a^x > b$.

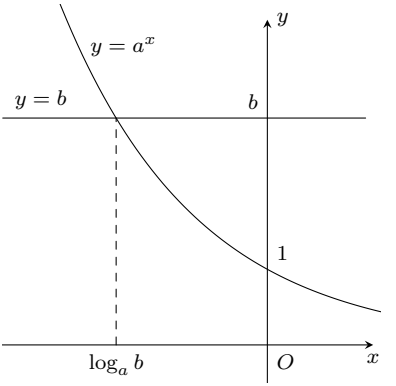
- ☑ Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
  - Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
  - Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Ta minh họa bằng đồ thị như sau:

Với $a > 1$ ta có đồ thị sau



Với $0 < a < 1$ ta có đồ thị sau



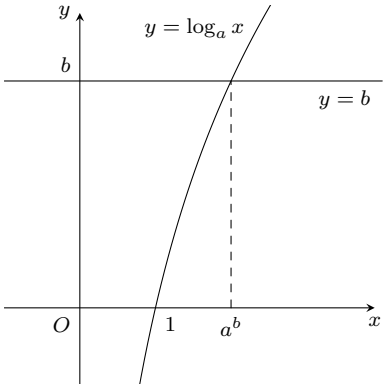
B BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN

Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.
Ta xét bất phương trình có dạng $a^x > b$.

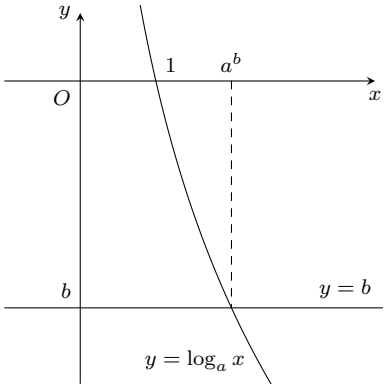
- ☑ Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
- ☑ Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Ta minh họa bằng đồ thị như sau:

Với $a > 1$ ta có đồ thị sau



Với $0 < a < 1$ ta có đồ thị sau



Quan sát đồ thị, ta thấy rằng:

- Với $a > 1$, ta có $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$, ta có $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $0 < x < a^b$.

BÀI 4 BÀI TOÁN LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

A LÃI ĐƠN

1 Định nghĩa

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

2 Công thức tính

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$/kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A + nAr = A(1 + nr).$$

⚠ *Trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ $r\%$ là $\dfrac{r}{100}$.*

B LÃI KÉP

1 Định nghĩa

Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

2 Công thức tính

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1+r)^n.$$

Các công thức liên quan

a) $n = \log_{1+r}\left(\dfrac{S_n}{A}\right)$; b) $r\% = \sqrt[n]{\dfrac{S_n}{A}} - 1$; c) $A = \dfrac{S_n}{(1+r)^n}$.

C TIỀN GỬI HÀNG THÁNG

1 Định nghĩa

Tiền gửi hàng tháng là mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

2 Công thức tính

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là

$$S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r).$$

Các công thức liên quan

a) $n = \log_{1+r}\left(\dfrac{rS_n}{A(1+r)} + 1\right)$; b) $A = \dfrac{rS_n}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$.

D GỬI NGÂN HÀNG VÀ RÚT TIỀN GỬI HÀNG THÁNG

Công thức tính

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là

$$S_n = A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

E VAY VỐN TRẢ GÓP

1 Định nghĩa

Vay vốn trả góp là vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

2 Công thức tính

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$S_n = A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

F BÀI TOÁN TĂNG LƯƠNG

1 Định nghĩa

Bài toán tăng lương được mô tả như sau: Một người được lãnh lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm $r\%$/tháng. Hỏi sau kn tháng người đó lĩnh được tất cả số tiền là bao nhiêu?

2 Công thức tính

Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là

$$S_{kn} = Ak \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r}.$$

G BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG DÂN SỐ

Công thức tính tăng trưởng dân số là

$$X_m = X_n(1+r)^{m-n},\ m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n.$$

Trong đó

- ☑ $r\%$ là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m;

- X_m là dân số năm m, X_n là dân số năm n.

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là

$$r\% = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n} - 1}.$$

H LÃI KÉP LIÊN TỤC

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/năm thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$) là $S_n = A(1+r)^n$.

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau n năm là $S_n = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$.

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \to +\infty$, gọi là hình thức lãi kép tiên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là $S = Ae^{nr}$ (công thức tăng trưởng mũ).

CHƯƠNG 3

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1 NGUYÊN HÀM

A ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$. Kí hiệu: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Định lí 1. *1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.*

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.
Do đó $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

B TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

- $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$; $d\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Nếu $F(x)$ có đạo hàm thì: $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$.
- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0.
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
- Công thức đổi biến số: Cho $y = f(u)$ và $y = g(x)$.
  Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ thì $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$.

C SỰ TỒN TẠI NGUYÊN HÀM

Định lí 2. *Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.*

D BẢNG NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

☑ $\int 0\,\mathrm{d}x = C$ ☑ $\int \mathrm{d}x = x + C$	
☑ $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{a+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$	☑ $\int (ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
☑ $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$	☑ $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$
☑ $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	☑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
☑ $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	☑ $\int \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$
☑ $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	☑ $\int a^{kx+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
☑ $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	☑ $\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
☑ $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	☑ $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
☑ $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	☑ $\int \tan(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$
☑ $\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	☑ $\int \cot(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
☑ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	☑ $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
☑ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	☑ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
☑ $\int \left(1+\tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	☑ $\int \left(1+\tan^2(ax+b)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
☑ $\int \left(1+\cot^2 x\right)\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	☑ $\int \left(1+\cot^2(ax+b)\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

E BẢNG NGUYÊN HÀM MỞ RỘNG

☑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	☑ $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$
☑ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	☑ $\int \arccos\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$
☑ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$	☑ $\int \arctan\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + C$
☑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + C$	☑ $\int \operatorname{arccot}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + C$
☑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert + C$	
☑ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert + C$	☑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$
☑ $\int \ln(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + C$	☑ $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C$
☑ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	☑ $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

BÀI 2 CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

A PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1 Đổi biến dạng 1

Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ và với $u = \varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì

$$\boxed{\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(\varphi(t)) + C}$$

① **Phương pháp chung**

- ☑ Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- ☑ Bước 2: Lấy vi phân hai vế : $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- ☑ Bước 3: Biến đổi : $f(x)\,\mathrm{d}x = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = g(t)\,\mathrm{d}t$.
- ☑ Bước 4: Khi đó tính : $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C$.

② **Các dấu hiệu đổi biến thường gặp**

Dấu hiệu	**Cách chọn**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = \lvert a\rvert \sin t$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = \lvert a\rvert \cos t$; với $t \in [0; \pi]$.
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t}$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{\lvert a\rvert}{\cos t}$; với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = \lvert a\rvert \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = \lvert a\rvert \cot t$; với $t \in (0; \pi)$.
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a\tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2 Đổi biến dạng 2

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt$x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được:

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C}$$

① **Phương pháp chung**

- ☑ Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- ☑ Bước 2: Lấy vi phân hai vế : $\mathrm{d}t = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- ☑ Bước 3: Biến đổi : $f(x)\,\mathrm{d}x = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = g(t)\,\mathrm{d}t$.

☑ Bước 4: Khi đó tính : $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C$.

② **Các dấu hiệu đổi biến thường gặp**

Dấu hiệu	**Cách chọn**
Hàm số có mẫu số	t là mẫu số
Hàm số $f(x; \sqrt{\varphi(x)})$	Đặt $t = \sqrt{\varphi(x)}$.
Hàm số $f(x) = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x + e}$	Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$; $\left(\cos\dfrac{x}{2} \neq 0\right)$.
Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với $x + a > 0$ và $x + b > 0$. Đặt $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$. Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$. Đặt $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$.

B PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Hay $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$,$\left(\text{với } \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

1 Phương pháp chung

☑ Bước 1: Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng :

$$I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\cdot f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

☑ Bước 2: Đặt $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f_1'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \int f_2(x)\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

☑ Bước 3: Khi đó: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

2 Các dạng thường gặp

DẠNG 1.

Phương pháp giải. $I = \int P(x) \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{array} \right\} \mathrm{d}x.$

Đặt $\left\{ \begin{array}{l} u = P(x) \\ dv = \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{array} \right\} \mathrm{d}x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u' \cdot \mathrm{d}u = P'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{array} \right\} \end{array} \right.$

Vậy $I = P(x) \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{array} \right\} - \int \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{array} \right\} \cdot P'(x)\,\mathrm{d}x.$

DẠNG 2.

Phương pháp giải. $I = \int P(x) \cdot \ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = P(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}x = Q(x). \end{array} \right.$

Vậy $I = \ln x \cdot Q(x) - \displaystyle\int Q(x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

DẠNG 3.

Phương pháp giải. $I = \int e^x \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} \mathrm{d}x.$

Đặt $\left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ \mathrm{d}v = \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} \mathrm{d}x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x \\ v = \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \end{array} \right\} \end{array} \right..$

Vậy $I = e^x \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \end{array} \right\} - \int \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \end{array} \right\} \cdot e^x\,\mathrm{d}x.$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int \left\{ \begin{array}{l} -\cos x \\ \sin x \end{array} \right\} \cdot e^x\,\mathrm{d}x$ sau đó thay vào I.

BÀI 3 TÍCH PHÂN

A CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Nhận xét. *Tích phân của hàm số f từ a đến b được kí hiệu là* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *hay* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

B TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K, a, b, c là ba số thuộc K. Khi đó ta có:

① $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

② $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

③ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

④ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

⑤ $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

⑥ Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \forall x \in [a; b].$

⑦ $\forall x \in [a;b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

⑧ $\forall x \in [a;b]$, nếu $M \geq f(x) \geq N \Rightarrow M(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq N(b-a).$

BÀI 4 PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1 Phương pháp đổi biến số dạng 1

Định lý

Nếu

① Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha;\beta]$.

② Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha;\beta]$.

③ $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$.

Khi đó $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$

Phương pháp chung

Bước 1. Đặt $x = u(t)$.

Bước 2. Tính vi phân hai vế $x = u(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = u'(t)\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $\left|_{x=b}^{x=a}\right. \Rightarrow \left|_{t=\beta}^{t=\alpha}\right.$.

Bước 3. Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t.

Vậy $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(u[t])u'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = G(t)|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha).$

2 Phương pháp đổi biến số dạng 2

Định lý

Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ sao cho $f(x)\,\mathrm{d}x = g\left(u(x)\right)u'(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u$ thì $I = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u$.

Phương pháp chung

- Đặt $u = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$.
- Đổi cận: $\Big|_{x=a}^{x=b} \Rightarrow \Big|_{u=u(a)}^{u=u(b)}$.
- Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo u.

Vậy $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{u(b)}^{u(a)} g(u)\,\mathrm{d}u$.

B PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1 Định lý

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thì

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

hay

$$\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

2 Phương pháp chung

- **Bước 1:** Viết $f(x)$ dưới dạng $u\,\mathrm{d}v = uv'\,\mathrm{d}x$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$.
- Tính $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$ và $v = \int \mathrm{d}v = \int v'(x)\,\mathrm{d}x$.

☑ Tính $\int\limits_a^b vu'(x)\,\mathrm{d}x =$ và $uv\Big|_a^b$.

Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần

Đặt u theo thứ tự ưu tiên **Log - đa - mũ - lượng**	$\int\limits_a^b P(x)e^x\,\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^b P(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^b P(x)\cos x\,\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^b e^x\cos x\,\mathrm{d}x$
u	$P(x)$	$\ln x$	$P(x)$	e^x
dv	$e^x\,\mathrm{d}x$	$P(x)\,\mathrm{d}x$	$\cos x\,\mathrm{d}x$	$\cos x\,\mathrm{d}x$

Chú ý: Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $\mathrm{d}v = v'\,\mathrm{d}x$ là phần của $f(x)\,\mathrm{d}x$ là vi phân của một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

BÀI 5 TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

A TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

DẠNG 1:

$$\boxed{I = \int\limits_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a} = \int\limits_\alpha^\beta \frac{a\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|\Big|_\alpha^\beta} \quad (a \neq 0).$$

Chú ý: Nếu $I = \int\limits_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int\limits_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}.a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$.

DẠNG 2:

$$\boxed{I = \int\limits_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}} \quad (a \neq 0, ax^2+bx+c \neq 0\,\forall x \in [\alpha;\beta]\,.$$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

☑ Nếu $\Delta > 0$ thì $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, khi đó

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right),$$

suy ra

$$I=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a(x_1-x_2)}.\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

☑ Nếu $\Delta=0$ thì $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=\dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$ trong đó $x_0=\dfrac{-b}{2a}$. Suy ra

$$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2}=-\frac{1}{a(x-x_0)}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

☑ Nếu $\Delta<0$ thì $I=\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}x}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$.

Đặt $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$. Khi đó

$$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)}{a\left[\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\tan t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}\mathrm{d}t=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}}(\beta-\alpha).$$

DẠNG 3:

$$\boxed{I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x.}$$

trong đó, $a\neq 0$ và $f(x)=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$.

① Bằng phương pháp đồng nhất hệ số ta tìm được A và B sao cho

$$\begin{aligned}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}&=\frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}\\&=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}.\end{aligned}$$

② Suy ra $\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x+\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x.$

- ☑ $I_1 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$.
- ☑ $I_2 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{B}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ thuộc dạng 2.

DẠNG 4:

$$\boxed{I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x.}$$

trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức biến x.

① Nếu bậc $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc $Q(x)$ thì ta dùng phép chia đa thức.

② Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ thì có thể xét các trường hợp:

- ☑ $Q(x)$ chỉ có các nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ thì
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$
- ☑ Khi $Q(x)$ có nghiệm đơn và vô nghiệm: $Q(x) = (x-\alpha)\left(x^2+px+q\right)$ với $\Delta = p^2-4q < 0$ thì
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$
- ☑ Khi $Q(x)$ có nghiệm bội
  - $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$.
  - $Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ thì
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{x-\beta} + \frac{D}{(x-\beta)^2} + \frac{E}{(x-\beta)^3}.$$

B TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

$$\boxed{I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R\left[x; f(x)\right]\mathrm{d}x.}$$

trong đó, $R\left[x; f(x)\right]$ có dạng

- $R\left(x;\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$ đặt $x=a\cdot\cos 2t,\quad t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- $R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)$ đặt $x=|a|\cdot\cos t,\quad t\in[0;\pi]$ hoặc $x=|a|\cdot\sin t,\quad t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- $R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)$ đặt $x=\dfrac{|a|}{\cos t}, t\in[0;\pi]\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
- $R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)$ đặt $x=|a|\cdot\tan t,\quad t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- $R\left(x;\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ đặt $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- $R\left(x;f(x)\right)=\dfrac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ với $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'=ax+b$.
  Đặt $t=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ hoặc $t=\dfrac{1}{ax+b}$.
- $R\left(x;\sqrt[n_1]{x},\sqrt[n_2]{x},\cdots,\sqrt[n_k]{x}\right)$, gọi $k=\text{BSCNN}\left\{n_1,\cdots,n_k\right\}$ đặt $x=t^k$.

DẠNG 1:

$$\boxed{I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x},\quad a\neq 0.$$

Ta có $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

Đặt $\begin{cases}u=x+\dfrac{b}{2a}\\ k=\dfrac{\Delta}{4a}\end{cases}\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x.$

- Nếu $a>0$ và $\Delta<0$ suy ra $\sqrt{f(x)}=\sqrt{a(u^2+k^2)}$.
  Phương pháp giải
  Đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x$ suy ra

$$\begin{cases}bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot x\\ x=\alpha\Rightarrow t=t_0; x=\beta\Rightarrow t=t_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};\mathrm{d}x=\dfrac{2}{b+2\sqrt{a}}t\mathrm{d}t\\ t-\sqrt{a}\cdot x=t-\sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}.\end{cases}$$

☑ Nếu $\Delta = 0$ suy ra $\sqrt{f(x)} = \sqrt{a}\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|$.

Phương pháp giải

Khi đó $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|\Big|_\alpha^\beta \text{ nếu } x + \dfrac{b}{2a} > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|\Big|_\alpha^\beta \text{ nếu } x + \dfrac{b}{2a} < 0. \end{cases}$

☑ Nếu $\Delta > 0$ suy ra $\sqrt{f(x)} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}$.

- Nếu $a > 0$ đặt $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \left[\begin{array}{l}(x - x_1)t \\ (x - x_2)t.\end{array}\right.$
- Nếu $a < 0$ đặt $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \left[\begin{array}{l}(x_1 - x)t \\ (x_2 - x)t.\end{array}\right.$

DẠNG 2:

$$\boxed{I = \int_\alpha^\beta \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x}, \quad a \neq 0.$$

Phương pháp giải

☑ Phân tích $\dfrac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \dfrac{A\left(ax^2 + bx + c\right)'}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \dfrac{B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (*)$.

☑ Quy đồng mẫu số, sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số A, B.

☑ Giải hệ tìm A, B thay vào $(*)$.

☑ Tính $I = 2A\sqrt{ax^2 + bx + c}\Big|_\alpha^\beta + B\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x$.

Trong đó $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x$ được tính ở dạng 1.

DẠNG 3:

$$\boxed{I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{(mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x}, \quad a \cdot m \neq 0.$$

Phương pháp giải

- Phân tích $\dfrac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \dfrac{1}{m\left(x+\dfrac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (1).

- Đặt $\dfrac{1}{y} = x + \dfrac{n}{m} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x+t} \Rightarrow dy = -\dfrac{1}{(x+t)^2}dt \\ x = \dfrac{1}{y} - t \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left(\dfrac{1}{y}-t\right)^2 + b\left(\dfrac{1}{y}-t\right) + c. \end{cases}$

- Thay tất cả vào (1) ta được $I = \displaystyle\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{1}{\sqrt{Ly^2+My+N}}\mathrm{d}y$, tích phân này đã tính ở dạng 1.

DẠNG 4:

$$\boxed{I = \int_{\alpha}^{\beta} R\left(x;\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x.}$$

trong đó $R(x;y)$ là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x, y và α, β, γ, δ là các hằng số đã biết.

Phương pháp giải

- Đặt $t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (1).

- Tính x theo t (bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế của (1) ta có dạng $x = \varphi(t)$).

- Tính vi phân hai vế $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ và đổi cận.

- Khi đó $I = \displaystyle\int_{\alpha'}^{\beta'} R\left(t;\varphi(t)\right)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$

C TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

1 Một số công thức lượng giác

① Công thức cộng

- $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b;$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a;$

- ☑ $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$.

② **Công thức nhân đôi**

- ☑ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$;
- ☑ $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$; $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$;
- ☑ $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$; $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3 \alpha$.

③ **Công thức hạ bậc**

- ☑ $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$; $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$; $\tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$;
- ☑ $\sin^3 \alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$; $\cos^3 \alpha = \dfrac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$.

④ **Công thức tính theo t**

- ☑ Với $t = \tan\dfrac{a}{2}$ thì $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$; $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\tan a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

⑤ **Công thức biến đổi tích thành tổng**

- ☑ $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$;
- ☑ $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$;
- ☑ $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$.

⑥ **Công thức biến đổi tổng thành tích**

- ☑ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;
- ☑ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;
- ☑ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;
- ☑ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;
- ☑ $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

- $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

⑦ **Công thức thường dùng**

- $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = \dfrac{3+\cos 4\alpha}{4}$;
- $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}$.

Hệ quả

- $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$;
- $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2 Một số dạng tích phân lượng giác

- Nếu gặp dạng $I = \displaystyle\int_a^b f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu gặp dạng $I = \displaystyle\int_a^b f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$ ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu gặp dạng $I = \displaystyle\int_a^b f(\tan x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ ta đặt $t = \tan x$.
- Nếu gặp dạng $I = \displaystyle\int_a^b f(\cot x)\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ ta đặt $t = \cot x$.

DẠNG 1. $\boxed{I_1 = \displaystyle\int (\sin x)^n\mathrm{d}x;\ I_2 \int (\cos x)^n\mathrm{d}x}$

Phương pháp giải

- Nếu n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc.

- ☑ Nếu $n = 3$ thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi.
- ☑ Nếu $3n$ lẻ $(n = 2p + 1)$ thì thực hiện biến đổi

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int (\sin x)^n \mathrm{d}x = \int (\sin x)^{2p} + 1 \mathrm{d}x \\
&= \int (\sin x)^{2p} \sin x \mathrm{d}x = -\int \left(1 - \cos^2 x\right)^p \mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\int \left[\mathrm{C}_p^0 - \mathrm{C}_p^1 \cos^2 x + \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_p^k \left(\cos^2 x\right)^k \right. \\
&\quad \left. + \ldots + (-1)^p \mathrm{C}_p^p \left(\cos^2 x\right)^p \right] \mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\left[\mathrm{C}_p^0 \cos x - \frac{1}{3} \mathrm{C}_p^1 \cos^3 x + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} \mathrm{C}_p^k (\cos x)^{2k+1} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} \mathrm{C}_p^p (\cos x)^{2p+1} \right] + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int (\cos x)^n \mathrm{d}x = \int (\cos x)^{2p} + 1 \mathrm{d}x \\
&= \int (\cos x)^{2p} \cos x \mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^p \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \int \left[\mathrm{C}_p^0 - \mathrm{C}_p^1 \sin^2 x + \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_p^k \left(\sin^2 x\right)^k \right. \\
&\quad \left. + \cdots + (-1)^p \mathrm{C}_p^p \left(\sin^2 x\right)^p \right] \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \left[\mathrm{C}_p^0 \sin x - \frac{1}{3} \mathrm{C}_p^1 \sin^3 x + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} \mathrm{C}_p^k (\sin x)^{2k+1} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} \mathrm{C}_p^p (\sin x)^{2p+1} \right] + C.
\end{aligned}$$

DẠNG 2. $\boxed{I = \int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x \ (m,\ n \in \mathbb{N})}$

Phương pháp giải

① **Trường hợp 1:** m, n là các số nguyên.

- ☑ Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

☑ Nếu m chẵn, n lẻ $(n = 2p+1)$ thì biến đổi

$$\begin{aligned}
I &= \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p} + 1 \mathrm{d}x = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p} \cos x \mathrm{d}x \\
&= \int (\sin x)^m \left(1 - \sin^2 x\right)^p \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \int (\sin x)^m \left[\mathrm{C}_p^0 - \mathrm{C}_p^1 \sin^2 x + \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_p^k \left(\sin^2 x\right)^k \right. \\
&\quad \left. + \cdots + (-1)^p \mathrm{C}_p^p \left(\sin^2 x\right)^p\right] \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \left[\mathrm{C}_p^0 \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} - \mathrm{C}_p^1 \frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3} \right. \\
&\quad + \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_p^k \frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m} \\
&\quad \left. + \cdots + (-1)^p \mathrm{C}_p^p \frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}\right] + C.
\end{aligned}$$

☑ Nếu m lẻ $(m = 2p+1)$, n chẵn thì biến đổi

$$\begin{aligned}
I &= \int (\sin x)^{2p} + 1 (\cos x)^n \mathrm{d}x = \int (\cos x)^n (\sin x)^{2p} \sin x \mathrm{d}x \\
&= -\int (\cos x)^n \left(1 - \cos^2 x\right)^p \mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\int (\cos x)^n \left[\mathrm{C}_p^0 - \mathrm{C}_p^1 \cos^2 x + \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_p^k \left(\cos^2 x\right)^k \right. \\
&\quad \left. + \cdots + (-1)^p \mathrm{C}_p^p \left(\cos^2 x\right)^p\right] \mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\left[\mathrm{C}_p^0 \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1} - \mathrm{C}_p^1 \frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3} \right. \\
&\quad + \cdots + (-1)^k \mathrm{C}_p^k \frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n} \\
&\quad \left. + \cdots + (-1)^p \mathrm{C}_p^p \frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n}\right] + C.
\end{aligned}$$

☑ Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

☑ Nếu m, n là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt $u = \sin x$.

$$\begin{aligned}
B &= \int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x = \int (\sin x)^m \left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos x \mathrm{d}x \\
&= \int u^m \left(1 - u^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u \quad (*)
\end{aligned}$$

Tích phân $(*)$ tính được $\Leftrightarrow$ 1 trong 3 số $\dfrac{m+1}{2}$; $\dfrac{n-1}{2}$; $\dfrac{m+k}{2}$ là số nguyên.

DẠNG 3. $\boxed{I_1 = \int (\tan x)^n \mathrm{d}x;\ I_2 = \int (\cot x)^n \mathrm{d}x (n \in \mathbb{N})}$

Phương pháp giải

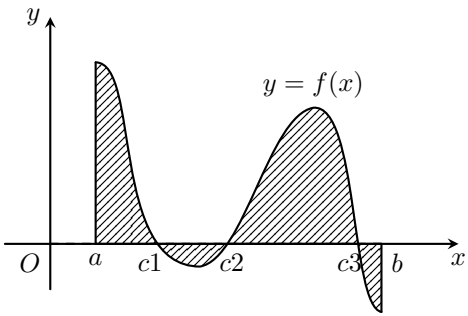
- $\int \left(1+\tan^2 x\right) \mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \mathrm{d}(\tan x) = \tan x + C;$
- $\int \left(1+\cot^2 x\right) \mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \mathrm{d}(\cot x) = -\cot x + C;$
- $\int \tan x \mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\int \dfrac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$
- $\int \cot x \mathrm{d}x = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

BÀI 6 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

A DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ được xác định: $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

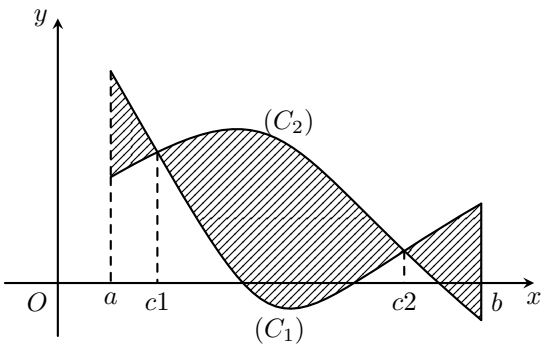


$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x}$$

2 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x}$$

- Nếu trên đoạn $[a;b]$ hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì:

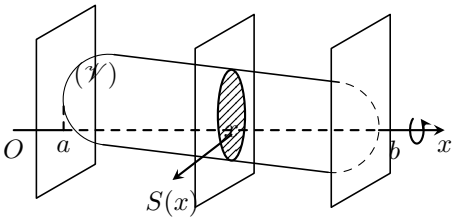
$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối.
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $\int_c^d |g(y) - h(y)|dy$.

B THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1 Thể tích vật thể

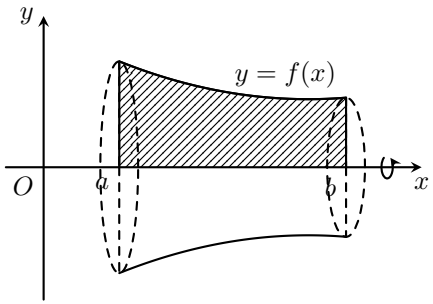
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$$

2 Thể tích khối tròn xoay

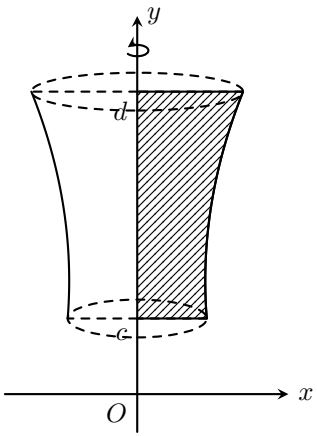
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C)\colon y = f(x) \\ (Ox)\colon y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$$

☑ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C)\colon x = g(y) \\ (Oy)\colon x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases}$$

$$\boxed{V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy}$$

☑ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \mathrm{d}x$.

CHƯƠNG 4

SỐ PHỨC

BÀI 1 SỐ PHỨC

A KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

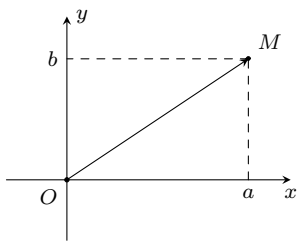
- Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$. Trong đó a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.
- Tập hợp số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 $(b = 0)$.
- z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $\Leftrightarrow$ phần thực bằng 0 $(a = 0)$.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

B HAI SỐ PHỨC BẰNG NHAU

- Hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c,\ d \in \mathbb{R})$ bằng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.
- Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = c \\ b = d. \end{array}\right.$

C BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC

Số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M\,(a; b)$ hay bởi $\overrightarrow{u} = (a; b)$ trong mặt phẳng phức (mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy).



D SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ là $\overline{z} = a - bi$.

- $\overline{\overline{z}} = z$; $\quad \overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$; $\quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\overline{z}$.

E MÔ-ĐUN CỦA SỐ PHỨC

1 Định nghĩa

Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
Vậy $|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ hay $|z| = |a + bi| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2 Một số tính chất

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} = \left|\overrightarrow{OM}\right|$; $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$.
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

BÀI 2 PHÉP CỘNG TRỪ, NHÂN CHIA SỐ PHỨC

A PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c,\, d \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)\, i.$$

- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó: $z = a + bi$, $z + \overline{z} = 2a$.

B PHÉP NHÂN SỐ PHỨC

- Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c,\, d \in \mathbb{R})$, khi đó

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

- Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$kz = k \cdot (a + bi) = ka + kbi.$$

Đặc biệt, $0 \cdot z = 0$ với mọi số phức z.

- Lũy thừa của i, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

  - $i^0 = 1$.
  - $i^1 = i$.
  - $i^2 = -1$.
  - $i^3 = i^2 \cdot i = -i$.
  - $i^{4n} = 1$.
  - $i^{4n+1} = i$.
  - $i^{4n+2} = -1$.
  - $i^{4n+3} = -i$.

C CHIA HAI SỐ PHỨC

- Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$.

- Phép chia hai số phức z' và $z \neq 0$ là $\dfrac{z'}{z} = z' z^{-1} = \dfrac{z' \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z' \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$.

BÀI 3 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC ÂM

- Cho số z, nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^2 = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z.

- Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.

- Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.

- Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

B PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$, $\forall a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2-4ac$ của phương trình. Ta thấy

- ☑ Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.
- ☑ Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

BÀI 4 TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng phức, số phức $z = x+y\cdot i$ với $x,\, y \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(x,y)$. Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp

- ☑ $ax+by+c=0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng.
- ☑ $x=0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung Oy.
- ☑ $y=0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành Ox.
- ☑ $(x-a)^2+(y-b)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là *hình tròn* tâm $I(a;b)$, bán kính R.
- ☑ $\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0\end{array}\right. \Rightarrow$ tập hợp điểm là *đường tròn* có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- ☑ $x>0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung.
- ☑ $y<0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành.
- ☑ $x<0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung.
- ☑ $y>0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía trên trục hoành.
- ☑ $y=ax^2+bx+c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol.
- ☑ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip.
- ☑ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol.

BÀI 5 BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX, MIN MÔ-ĐUN SỐ PHỨC

☑ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| = r$, $(r > 0)$, thì $\begin{cases} \max|x| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| + \dfrac{r}{|z_1|} \\ \min|z| = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| - \dfrac{r}{|z_1|}\right| \end{cases}$.

☑ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z - z_2| = r$, $(r > 0)$.

$$\max P = \left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| + \frac{r}{|z_1|} \text{ và } \min P = \left|\left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| - \frac{r}{|z_1|}\right|.$$

☑ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| + |z_1 \cdot z - z_2| = k$, $(r > 0)$ thì

$$\max|z| = \frac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min|z| = \frac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}.$$

PHẦN

II

HÌNH HỌC

CHƯƠNG

1 KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1 KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

① Khối lăng trụ (chóp) là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (chóp) kể cả hình lăng trụ (chóp) ấy. Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

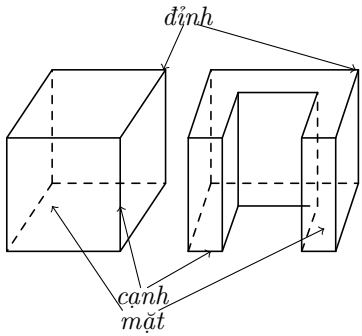
② Điểm không thuộc khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt) được gọi là điểm ngoài của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt). Điểm thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ ứng với khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt) đó được gọi là điểm trong của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt).

BÀI 2 KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

A KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN

① Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

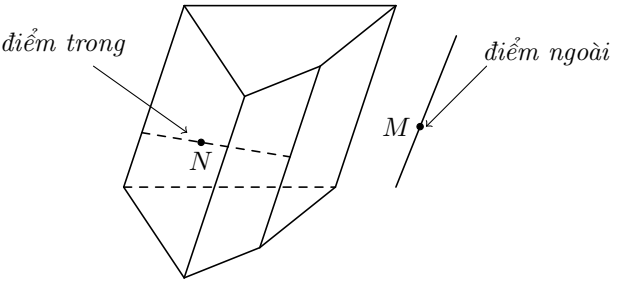
- ☑ Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- ☑ Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.



② Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

B KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

- Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
- Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện.



Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

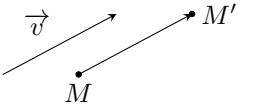
- Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.

BÀI 3 HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

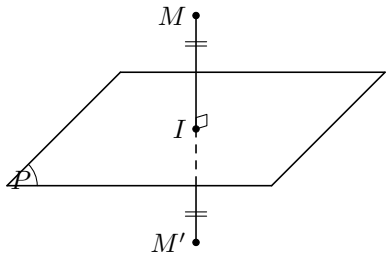
A PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.
Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.
* Một số phép dời hình trong không gian:

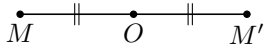
1 Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.	

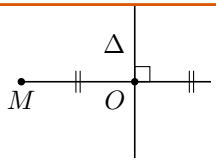
2 Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'. Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình H thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của H.	

3 Phép đối xứng qua tâm O

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM'. Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H).	

4 Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ)

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'. Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H).	

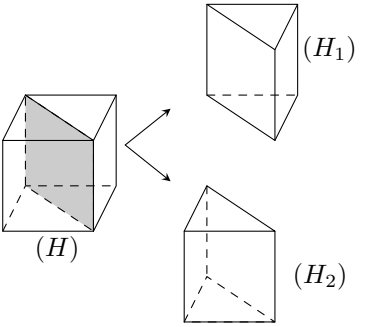
Nhận xét. ☑ *Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.*

☑ *Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').*

B HAI HÌNH BẰNG NHAU

Hai hình đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

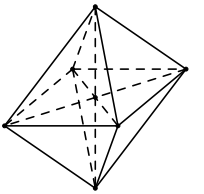
BÀI 4 PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nội dung	Hình vẽ
Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).	

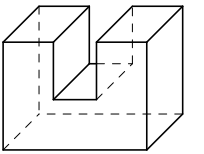
BÀI 5 KHỐI ĐA DIỆN LỒI

A KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.



Khối đa diện lồi

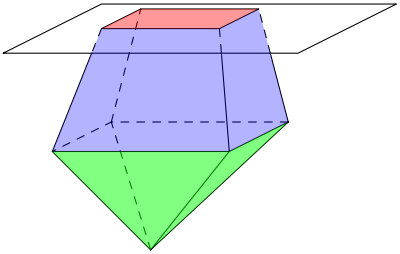


Khối đa diện không lồi

***Lưu ý*:**

① Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.

② **Công thức Ơ-le:** Trong một khối đa diện lồi nếu gọi D là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt thì ta luôn có $D + M = C + 2$.



B KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1 Định nghĩa

① Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây

- ☑ Các mặt là những đa giác đều p cạnh.
- ☑ Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q cạnh.

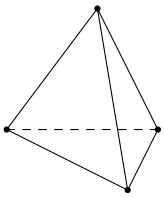
② Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$.

2 Định lí

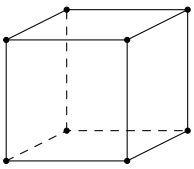
Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

- ☑ Loại $\{3; 3\}$: khối tứ diện đều.
- ☑ Loại $\{4; 3\}$: khối lập phương.
- ☑ Loại $\{3; 4\}$: khối bát diện đều.
- ☑ Loại $\{5; 3\}$: khối mười hai mặt đều.
- ☑ Loại $\{3; 5\}$: khối hai mươi mặt đều.

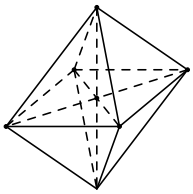
Tham khảo hình biểu diễn của năm loại khối đa diện.



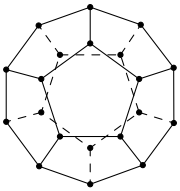
Khối tứ diện đều



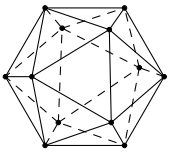
Khối lập phương



Khối bát diện đều



Khối mười hai mặt đều



Khối hai mươi mặt đều

3 Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Đa diện đều cạnh a	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Thể tích V	Bán kính R mặt cầu ngoại tiếp
Tứ diện đều $\{3;3\}$	4	6	4	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$
Lập phương $\{4;3\}$	8	12	6	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Bát diện đều $\{3;4\}$	6	12	8	$\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
Mười hai mặt đều $\{5;3\}$	20	30	12	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$
Hai mươi mặt đều $\{3;5\}$	12	30	20	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{4}a$

Giả sử khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ có D đỉnh, C cạnh và M mặt thì ta luôn có

$$\boxed{q \cdot D = 2C = p \cdot M}$$

C MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG VỀ KHỐI ĐA DIỆN LỒI

1 Kết quả 1

Cho một khối tứ diện đều. Khi đó:

- ☑ Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều;
- ☑ Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).

2 Kết quả 2

Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.

3 Kết quả 3

Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một khối lập phương.

4 Kết quả 4

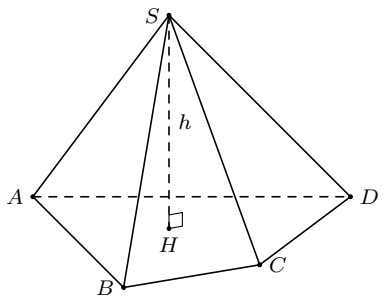
Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của khối bát diện đều. Khi đó:

- ☑ Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường;

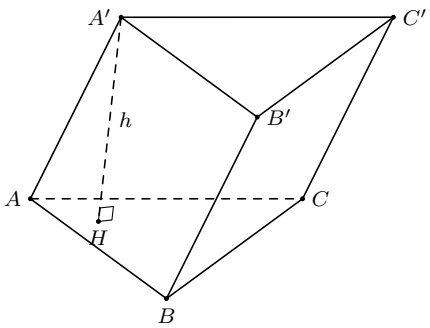
- ☑ Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau;
- ☑ Ba đường chéo bằng nhau.

BÀI 6 THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

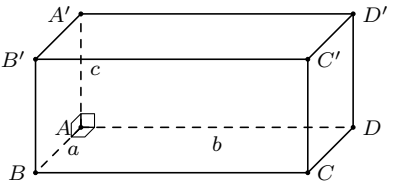
A THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V_{\text{Chóp}} = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \cdot h}$ Trong đó $\begin{cases} S_{\text{đáy}} \text{ là diện tích mặt đáy} \\ h \text{ là chiều cao khối chóp.} \end{cases}$ $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \mathrm{d}(S,(ABCD))}$	

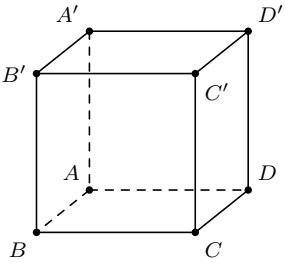
B THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V_{\text{Lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h}$ Trong đó $\begin{cases} S_{\text{đáy}} \text{ là diện tích mặt đáy} \\ h \text{ là chiều cao lăng trụ.} \end{cases}$ ***Lưu ý***: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là độ dài cạnh bên.	

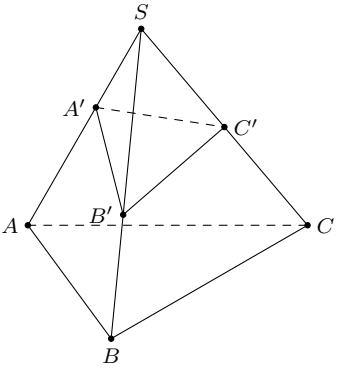
C THỂ TÍCH KHỐI HỘP CHỮ NHẬT

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V_{\text{Hộp chữ nhật}} = abc}$ Trong đó a, b, c là độ dài các cạnh khối hộp chữ nhật.	

D THỂ TÍCH KHỐI LẬP PHƯƠNG

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = a^3}$	

E TỈ SỐ THỂ TÍCH

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}}$ Thể tích khối chóp cụt $ABC.A'B'C'$ $\boxed{V = \dfrac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$ Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao	

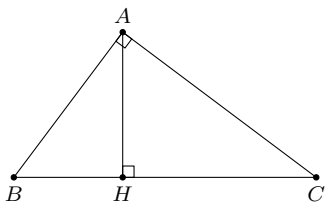
F MỘT SỐ CHÚ Ý VỀ ĐỘ DÀI CÁC ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT

- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$.
- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$.
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

BÀI 7 CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG

A HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1 Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH



- $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- $AB^2 = BH \cdot BC$.
- $AC^2 = CH \cdot BC$.
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.
- $AB = BC \cdot \sin C = BC \cos B = AC \tan C = AC \cot B$.

2 Cho $\triangle$ ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c, độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c; bán kính đường tròn ngoại tiếp $\mathbb{R}$; bán kính đường tròn nội tiếp r; nửa chu vi là p

- Định lí hàm số **côsin**

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A. \qquad b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B. \qquad c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C.$$

- Định lí hàm số **sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.
- Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}. \qquad m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}. \qquad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$

3 Các công thức tính diện tích

3.1 Tam giác

- $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$.
- $S = \frac{abc}{4R}$.
- $S = pr$.
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
- $\triangle ABC$ vuông tại A: $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}$.
- $\triangle ABC$ đều, cạnh a: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3.2 Hình vuông

- $\boxed{S = a^2}$ (a là cạnh hình vuông)

3.3 Hình chữ nhật

- $\boxed{S = a \cdot b}$ (a, b là hai kích thước)

3.4 Hình bình hành

- $\boxed{S = \text{ đáy} \times \text{cao} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}}$

3.5 Hình thoi

- $\boxed{S = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC \cdot AD}$ (a, b là hai kích thước)

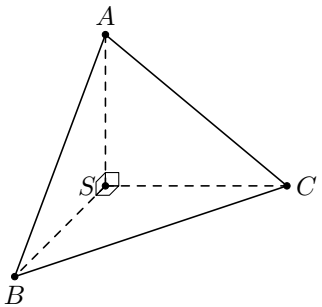
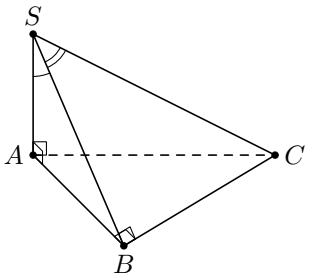
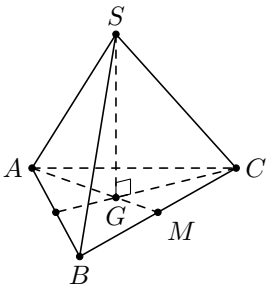
3.6 Hình thang

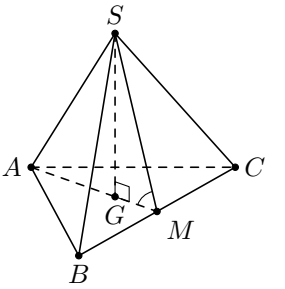
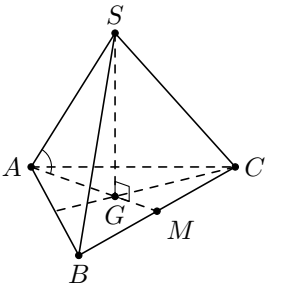
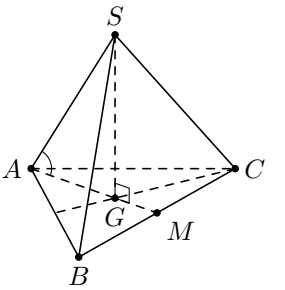
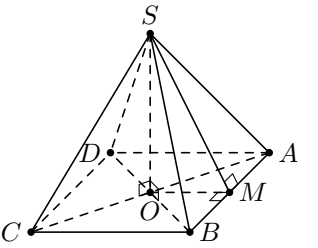
- $\boxed{S = \frac{1}{2}(a+b)h}$ (a, b là hai đáy, h là chiều cao)

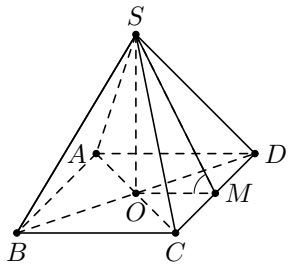
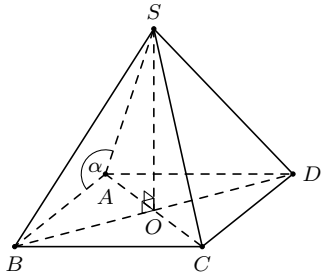
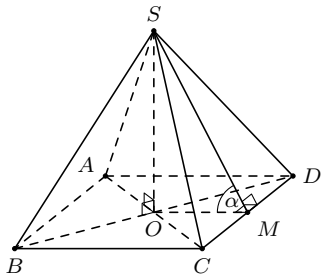
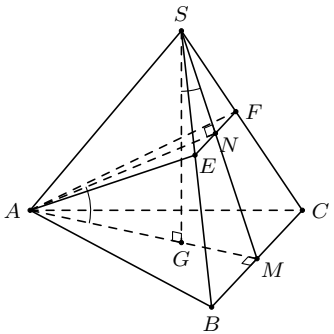
3.7 Tứ giác có hai đường chéo vuông góc AC và BD

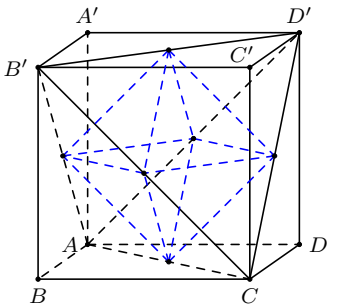
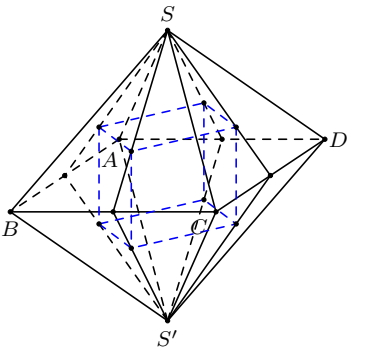
☑ $\boxed{S = \frac{1}{2}AC \cdot BD}$

BÀI 8 MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

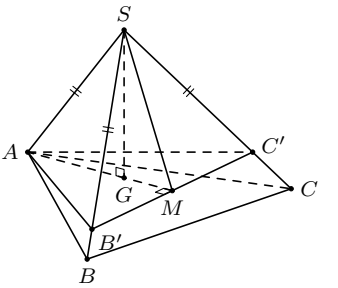
Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{3}.$$	
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{SB^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan\beta}{12}.$$	
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}.$$	

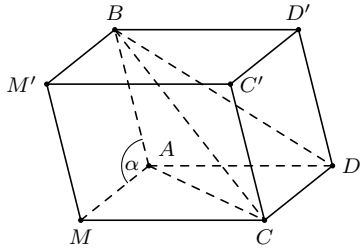
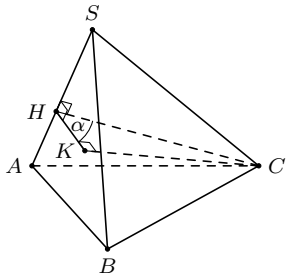
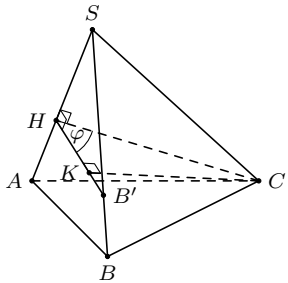
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \tan\alpha}{24}.$$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3 \cdot \sin\beta \cdot \cos^2\beta}{4}.$$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cdot \tan\beta}{12}$$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a và $SA = SB = SC = SD = b$. Khi đó $$V_{S.ABCD} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}.$$	

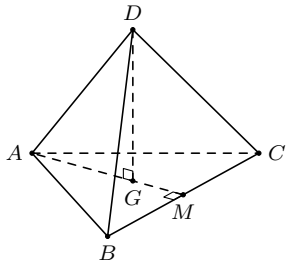
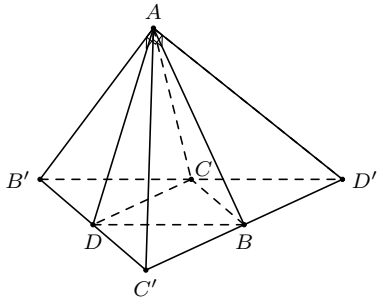
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó $$V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \tan\alpha}{6}.$$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = \alpha$ với $\alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$. Khi đó $$V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}.$$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy bằng α với $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Khi đó $$V_{S.ABCD} = \frac{4a^3 \tan\alpha}{3\sqrt{(2+\tan^2\alpha)^3}}.$$	
Cho hình tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Biết α là góc giữa (P) và mặt phẳng đáy. Khi đó $$V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cot\alpha}{24}.$$	

Khối bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó thể tích khối bát diện đều là $$V = \frac{a^3}{6}.$$	
Tâm các mặt bên của một bát diện đều cạnh a là đỉnh của một khối lập phương. Khi đó thể tích của khối lập phương là $$V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}.$$	

BÀI 9 CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT CỦA THỂ TÍCH TỨ DIỆN

Công thức	Điều kiện
Thể tích tứ diện khi biết ba cạnh chung một đỉnh và ba góc giữa các cạnh ở đỉnh đó $$V_{SABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz}.$$ Trong đó $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$.	 $$\begin{cases} SA = a,\ SB = b,\ SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha,\ \widehat{BSC} = \beta,\ \widehat{CSA} = \gamma. \end{cases}$$

Thể tích tứ diện khi biết cặp cạnh đối, khoảng cách và góc giữa cặp cạnh đó $$V_{ABCD} = \frac{1}{6}abd\sin\alpha.$$	 $\begin{cases} AB = a,\ CD = b \\ \mathrm{d}(AB, CD) = d \\ (AB, CD) = \alpha. \end{cases}$
Thể tích của tứ diện khi biết độ dài cạnh chung của hai mặt, diện tích và góc giữa hai mặt đó $$V_{SABC} = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}.$$	 $\begin{cases} S_{\triangle SAB} = S_1,\ S_{\triangle SAC} = S_2 \\ SA = a,\ ((SAB), (SAC)) = \alpha. \end{cases}$
Thể tích khối chóp tam giác khi biết ba cạnh bên, hai góc ở đỉnh và một góc giữa hai mặt bên (góc nhị diện) $$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi.$$	 $\begin{cases} SA = a,\ SB = b,\ SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha,\ \widehat{ASC} = \beta \\ ((SAB), (SAC)) = \varphi. \end{cases}$

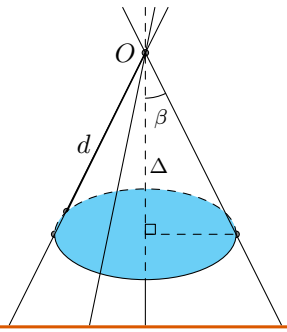
Thể tích khối tứ diện đều $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.	Tứ diện có tất cả các cạnh bằng a. 
Thể tích tứ diện gần đều $V = \dfrac{\sqrt{2xyz}}{12}$. Với $x = a^2 + b^2 - c^2$, $y = b^2 + c^2 - a^2$, $z = c^2 + a^2 - b^2$.	Tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. 

CHƯƠNG 2

MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

BÀI 1 MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

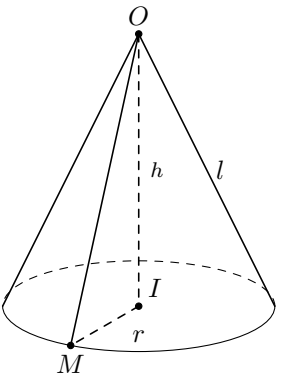
A MẶT NÓN TRÒN XOAY

Nội dung	Hình vẽ
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$, mặt phẳng (P) chứa d, Δ. (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi $\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O. ☑ Δ gọi là trục. ☑ d được gọi là đường sinh. ☑ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.	

B KHỐI NÓN

Nội dung	Hình vẽ

- ☑ Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón.
- ☑ Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.



Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

- ☑ **Diện tích xung quanh** của hình nón: $\boxed{S_{\text{xq nón}} = \pi r l}$.
- ☑ **Diện tích đáy (hình tròn)**: $\boxed{S_{\text{đáy}} = \pi r^2}$.
- ☑ **Diện tích toàn phần** của hình nón: $\boxed{S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2}$.
- ☑ **Thể tích khối nón**: $\boxed{V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{đáy}} h = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h}$.

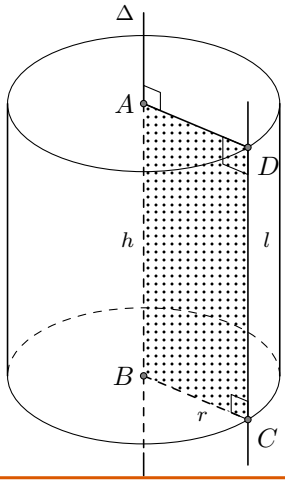
C THIẾT DIỆN KHI CẮT BỞI MẶT PHẲNG

Điều kiện	Kết quả
Cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng (Q) đi qua đỉnh của mặt nón.	
☑ Mp (Q) cắt mặt nón theo 2 đường sinh. ☑ Mp (Q) tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh.	☑ Thiết diện là tam giác cân. ☑ (Q) là mặt phẳng tiếp diện của hình nón.
Cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng (Q) không đi qua đỉnh của mặt nón.	

☑ Mp (Q) vuông góc với trục hình nón. ☑ Mp (Q) song song với 2 đường sinh hình nón. ☑ Mp (Q) song song với 1 đường sinh hình nón.	☑ Giao tuyến là 1 đường parabol. ☑ Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol. ☑ Giao tuyến là một đường tròn.

BÀI 2 MẶT TRỤ TRÒN XOAY VÀ KHỐI TRỤ

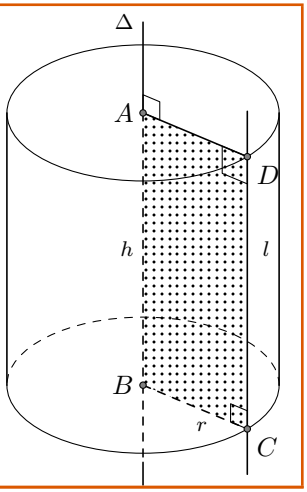
A MẶT TRỤ

Nội dung	Hình vẽ
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ. ☑ Đường thẳng Δ gọi là trục. ☑ Đường thẳng l là đường sinh. ☑ r là bán kính của mặt trụ đó.	

B HÌNH TRỤ TRÒN XOAY VÀ KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

Nội dung	Hình vẽ

Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ABCD$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.



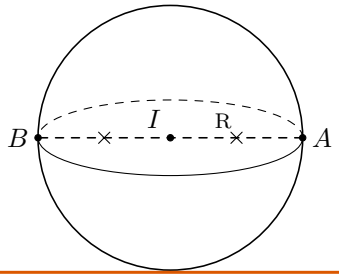
- Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
- Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng. Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

- **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{\text{xq}} = 2\pi rh}$.
- **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2 \cdot S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$.
- **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h}$.

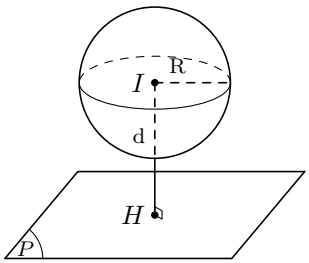
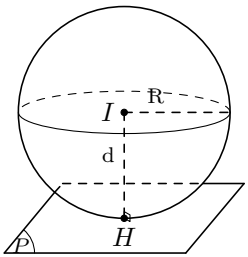
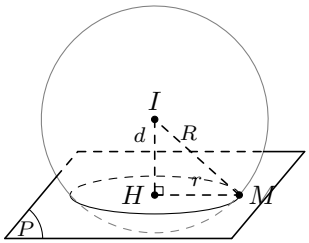
BÀI 3 MẶT CẦU VÀ KHỐI CẦU

A MẶT CẦU

Nội dung	Hình vẽ
Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. **Kí hiệu** $S(I;R)$. Khi đó $\boxed{S(I;R)=\{M \mid IM=R\}}$	

B VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

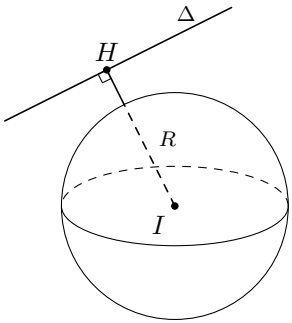
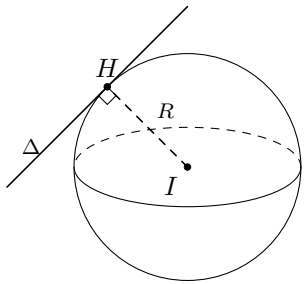
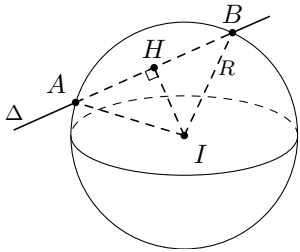
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm I lên mặt phẳng (P). Suy ra $d=IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó

$d>R$	$d=R$	$d<R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H là **tiếp điểm**.	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.
		

Lưu ý:
Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn**.

C VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm I lên đường thẳng Δ. Khi đó

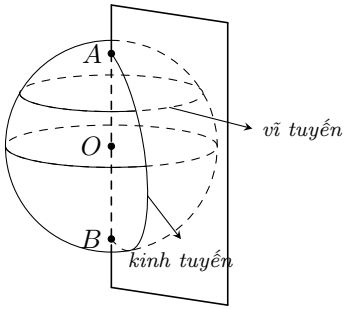
$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của (S). H: **Tiếp điểm**.	Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.
		

Lưu ý:

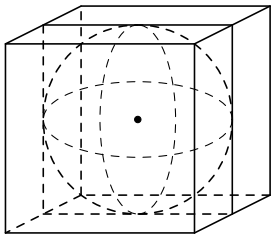
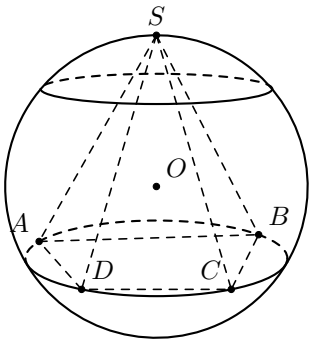
Trong trường hợp Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,(I,\Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

D ĐƯỜNG KINH TUYẾN VÀ VĨ TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Nội dung	Hình vẽ
Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến. Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu. Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu.	

*** Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện.**

Nội dung	Hình vẽ
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.	
Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu. Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi $$OA = OB = OC = OD = OS = r$$	

Cho mặt cầu $S(I; R)$

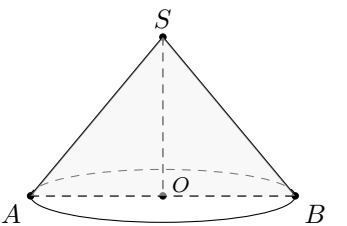
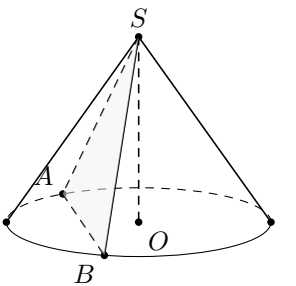
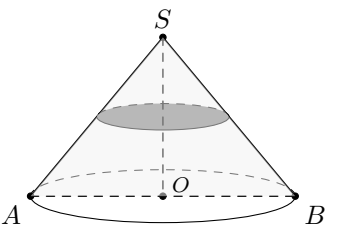
☑ Diện tích mặt cầu: $\boxed{S = 4\pi R^2}$

☑ Thể tích khối cầu: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

BÀI 4 MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI NÓN VÀ TRỤ

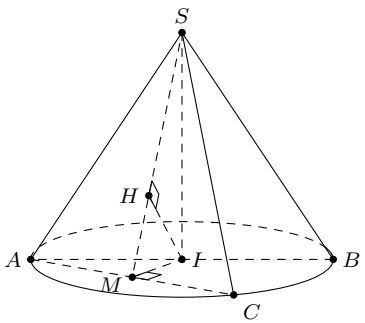
A BÀI TOÁN MẶT NÓN

1 Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

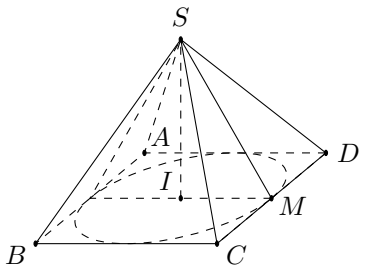
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân.	
Thiết diện qua đỉnh của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.	
Thiết diện vuông góc với trục của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.	

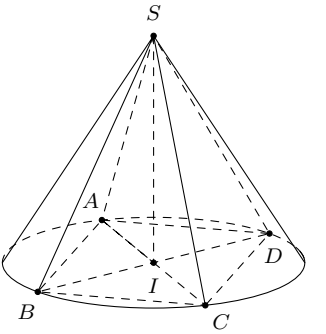
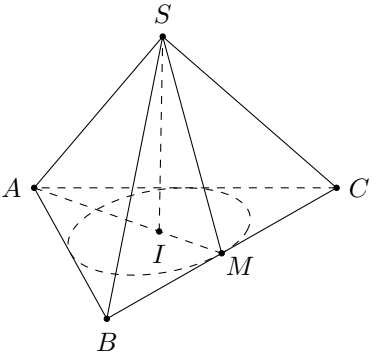
2 Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

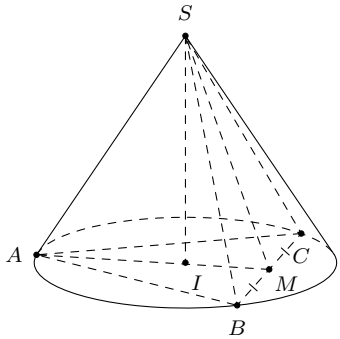
Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh ℓ.
Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d.

Nội dung	Hình vẽ
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: ☑ $AC \perp (SMI)$. ☑ Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc $\widehat{SMI}$. ☑ Góc giữa (SAC) và (SI) là góc $\widehat{MSI}$. ☑ $\mathrm{d}\,(I,(SAC)) = IH = \mathrm{d}$. **Diện tích thiết diện** $S_{\text{td}} = S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2}SM \cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{SI^2 + IM^2} \cdot 2\sqrt{AI^2 - IM^2} = \sqrt{h^2 + \frac{h^2\mathrm{d}^2}{h^2 - \mathrm{d}^2}} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{h^2\mathrm{d}^2}{h^2 - \mathrm{d}^2}}.$	

3 Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

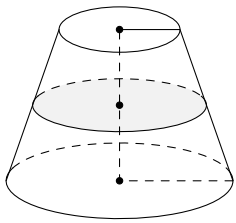
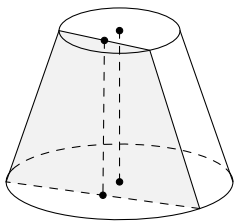
Nội dung	Hình vẽ
Hình nón **nội tiếp** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: ☑ Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$. ☑ Đường cao $h = SI$, đường sinh $\ell = SM$.	Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ 

Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp đều $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: ☑ Bán kính đáy $$r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$ ☑ Chiều cao $h = SI$. ☑ Đường sinh $\ell = SA$.	Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ 
Hình nón **nội tiếp** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có ☑ Bán kính đáy $$r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}.$$ ☑ Chiều cao $h = SI$. ☑ Đường sinh $\ell = SM$.	Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ 

Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có ☑ Bán kính đáy $$r = IA = \frac{2AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}.$$ ☑ Chiều cao $h = SI$. ☑ Đường sinh $\ell = SA$.	Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ 

4 Dạng 4. Bài toán hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là **hình nón cụt**.

Nội dung	Hình vẽ
Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.	
Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.	

Cho hình nón cụt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao.

Diện tích xung quanh của hình nón cụt

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot \ell \cdot (R + r).$$

Diện tích đáy (hình tròn)

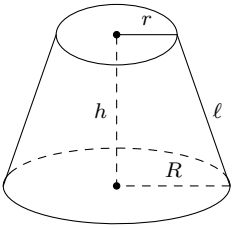
$$\begin{cases} S_{\text{đáy 1}} = \pi r^2 \\ S_{\text{đáy 2}} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{\text{đáy}} = \pi(r^2 + R^2).$$

Diện tích toàn phần của hình chóp cụt

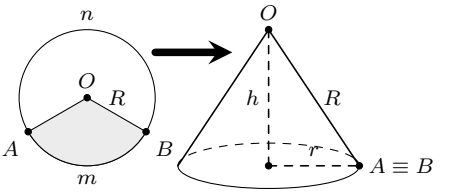
$$S_{\text{tp}} = \pi \cdot \ell \cdot (R + r) + \pi r^2 + \pi R^2.$$

Thể tích khối nón cụt

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr).$$

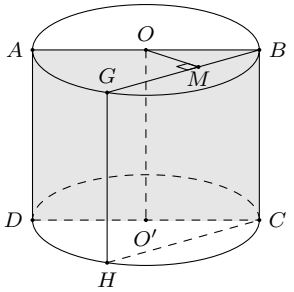


5 Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

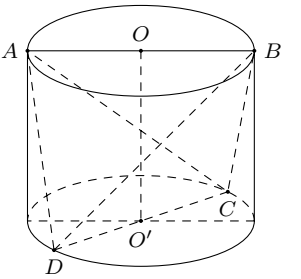
Nội dung	Hình vẽ
Từ hình tròn $(O; R)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung $\overset{\frown}{AnB}$ bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó. Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} \ell = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} \\ h = \sqrt{\ell^2 - r^2}. \end{cases}$	

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ

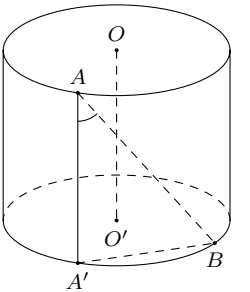
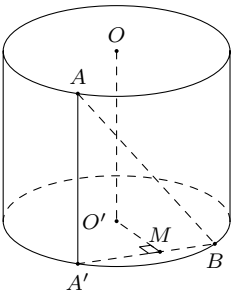
1 Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

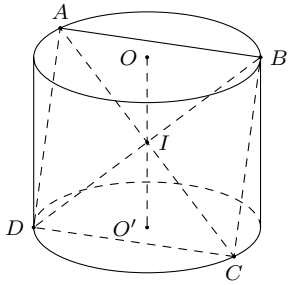
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện **vuông góc trục** là một đường tròn bán kính R. Thiết diện **chứa trục** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$. Thiết diện **song song với trục** và **không chứa trục** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là $\mathrm{d}(OO', (BGHC)) = OM$.	

2 Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

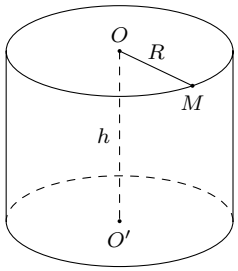
Nội dung	Hình vẽ
Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì $$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot OO' \cdot \sin(AB, CD).$$ **Đặc biệt:** Nếu AB và CD vuông góc nhau thì $$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot OO'.$$	

3 Dạng 3. Xác định góc, khoảng cách

Nội dung	Hình vẽ
Góc giữa AB và trục OO' bằng $\widehat{A'AB}$.	
Khoảng cách giữa AB và trục OO' bằng $O'M$.	

Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là cạnh hình vuông bằng $$AB = \sqrt{2R^2 + \frac{h^2}{2}}.$$	

4 Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Nội dung	Hình vẽ
Một khối trụ có thể tích V không đổi. ☑ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất $$S_{\text{tp}} \min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \\ h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}. \end{cases}$$ ☑ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy và nhỏ nhất $$S \min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}. \end{cases}$$	

5 Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \dfrac{4\pi V}{9}$.

Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{\text{xq}} = \dfrac{2S}{\pi}$.

BÀI 5 MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU

A MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

1 Các khái niệm cơ bản

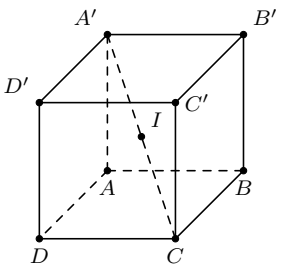
Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy. Bất kì một điểm nào nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.
Đường trung trực của đoạn thẳng là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
Mặt trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2 Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

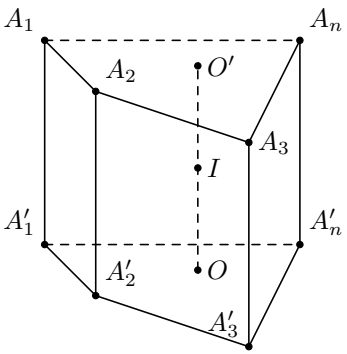
Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.
Bán kính là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3 Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

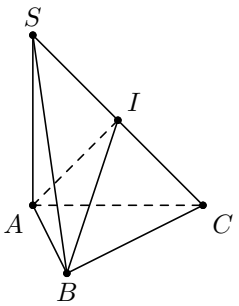
Hình hộp chữ nhật, hình lập phương

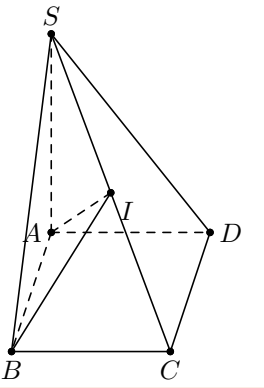
Nội dung	Hình vẽ
Tâm: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương). Suy ra tâm là I, là trung điểm của $A'C$ **Bán kính:** bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương). Suy ra bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.	

Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn

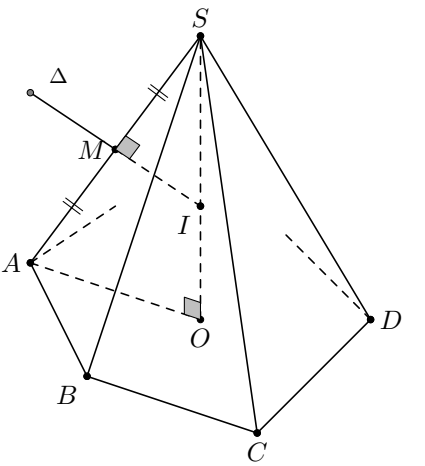
Nội dung	Hình vẽ
Xét hình lăng trụ đứng $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n.A'_1, A'_2, A'_3, \cdots A'_n$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ và $A'_1A'_2A'_3 \cdots A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có ☑ **Tâm:** I, với I là trung điểm của OO'. ☑ **Bán kính:** $R = IA_1 = IA_2 = \cdots = IA'_n$	

Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông

Nội dung	Hình vẽ
Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^\circ$. ☑ **Tâm**: I là trung điểm SC. ☑ **Bán kính**: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.	

Hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ$. ☑ **Tâm**: I là trung điểm SC. ☑ **Bán kính**: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.	

Hình chóp đều

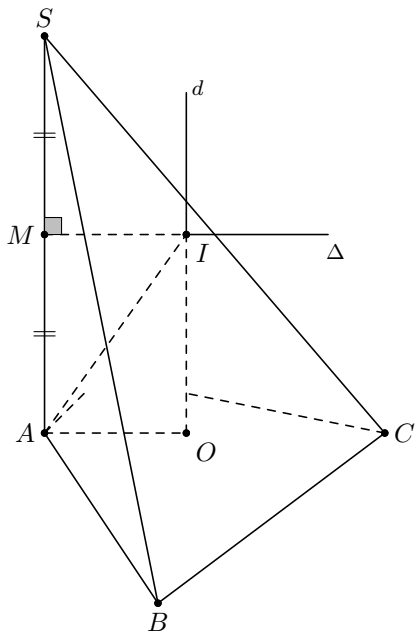
Nội dung	Hình vẽ
Hình chóp đều $S.ABC\cdots$ ☑ Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trụ của đáy. ☑ Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như mặt phẳng (SAO), ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu. **Bán kính:** Ta có $\triangle SMI \sim \triangle SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA}$ $\Rightarrow R = IS = \dfrac{SM \cdot SA}{SO} = \dfrac{SA^2}{2 \cdot SO} = IA = IB = IC = \cdots$	

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

Nội dung	Hình vẽ

Cho hình chóp $S.ABC\cdots$ có cạnh bên $SA \perp (ABC\cdots)$ và đáy $ABC\cdots$ nội tiếp đường tròn tâm O.
Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\cdots$ được xác định như sau:

- ☑ Từ tâm O ngoại tiếp đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABC\cdots)$ tại O.
- ☑ Trong mặt phẳng (d, SA), ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IC = IS = \cdots$
- ☑ Tìm bán kính.
  Ta có $MIOB$ là hình chữ nhật. Xét $\triangle MAI$ vuông tại M có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$.

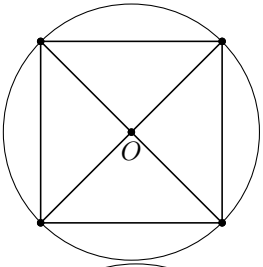


Hình chóp khác

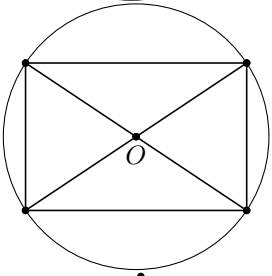
- ☑ Dựng trục Δ của đáy.
- ☑ Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- ☑ $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp.
- ☑ Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp

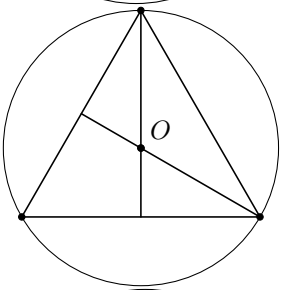
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



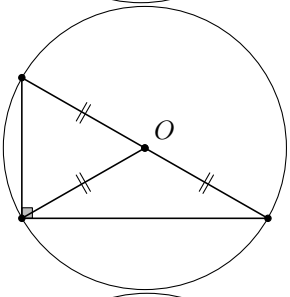
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



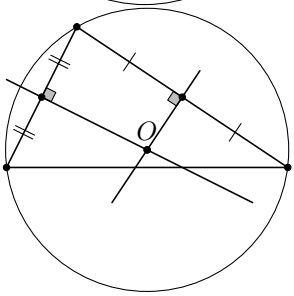
Hình chữ nhật: O là giao điểm 2 đường chéo.



Tam giác đều: O là trọng tâm tam giác.



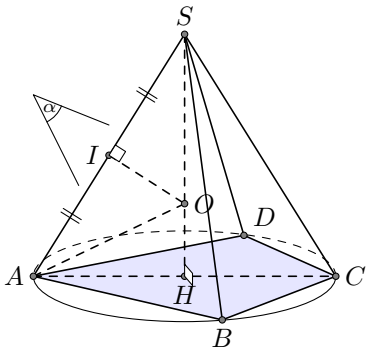
Tam giác vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Tam giác thường: O là giao điểm của 2 đường trung trực của

2 cạnh trong tam giác.

B KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước ☑ **Bước 1:** Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. ☑ **Bước 2:** Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên. Lúc đó Tâm O của mặt cầu là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α). Bán kính $R = SA = SO$. Tùy vào từng trường hợp.	

C KỸ NĂNG XÁC ĐỊNH TRỤC ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP ĐA GIÁC ĐÁY

1 Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

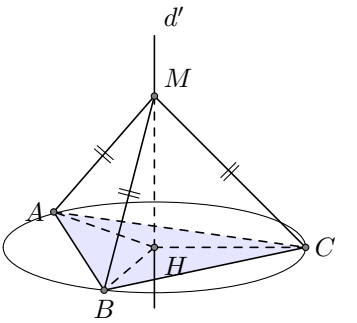
Nội dung	Hình vẽ
Định nghĩa Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy. **Tính chất** Với mọi $M \in d'$ thì $MA = MB = MC$. Suy ra $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in d'$.	

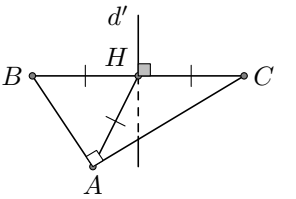
Các bước xác định trục

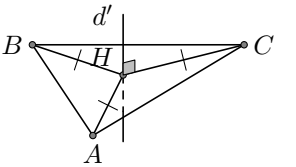
- **Bước 1:** Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- **Bước 2:** Qua H dựng đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng đáy.

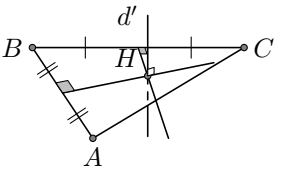
Một số trường hợp đặc biệt

- Đáy là tam giác vuông.
- Đáy là tam giác đều.
- Đáy là tam giác thường.



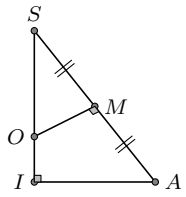






2 Kỹ năng tam giác đồng dạng

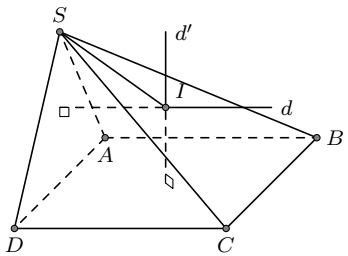
Nội dung	Hình vẽ

$\triangle SMO$ đồng dạng với $\triangle SIA$, suy ra $\dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}$.	

3 Nhận xét quan trọng

$\exists M, S$ sao cho $\begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases}$ thì SM là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

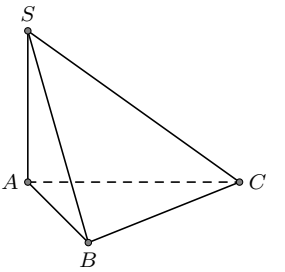
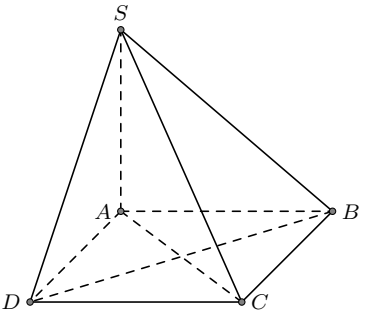
D KỸ THUẬT SỬ DỤNG HAI TRỤC XÁC ĐỊNH TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP ĐA DIỆN

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước ☑ **Bước 1:** Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng d' là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. ☑ **Bước 2:** Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (dễ xác định) của khối chóp. Lúc đó • Tâm I của mặt cầu là $\{I\} = d' \cap d$. • Bán kính $R = IA = IS$. Tùy vào từng trường hợp.	

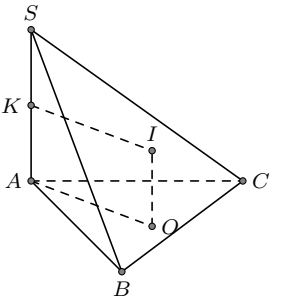
E TỔNG KẾT CÁC DẠNG TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

1 Dạng 1

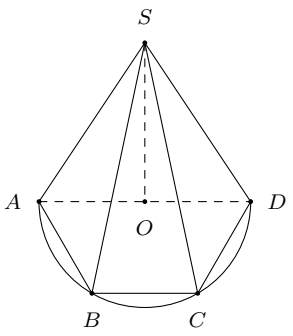
Nội dung	Hình vẽ

Cạnh bên SA vuông góc đáy và $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Khi đó $R = \dfrac{SC}{2}$ và tâm là trung điểm của SC.	 

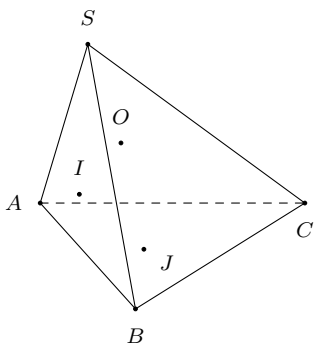
2 Dạng 2

Nội dung	Hình vẽ
Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D, khi đó $R^2 = R_D^2 + \dfrac{SA^2}{4}$. • $R_D = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ với p là nửa chu vi. • Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $R_D = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + SA^2\right)$. • Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. • Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.	

3 Dạng 3

Nội dung	Hình vẽ
Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau $SA = SB = SC = SD$, ta có $$\boxed{R = \frac{SA^2}{2SO}.}$$ ☑ $ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao của hai đường chéo. ☑ $\triangle ABC$ vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền. ☑ $\triangle ABC$ đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.	

4 Dạng 4

Nội dung	Hình vẽ
Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó, ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và SAC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $$\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}.}$$	

5 Dạng 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SH, tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O. Khi đó, ta giải phương trình $(SH-x)^2+OH^2=x^2+R_D^2$. Với giá trị x vừa tìm được, ta có

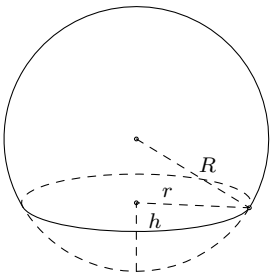
$$\boxed{R^2=x^2+R_D^2.}$$

F DẠNG 6

Bán kính mặt cầu nội tiếp $\boxed{r=\dfrac{3V}{S_{tp}}}$.

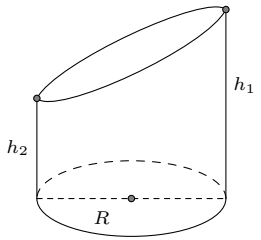
BÀI 6 TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY

A CHỎM CẦU

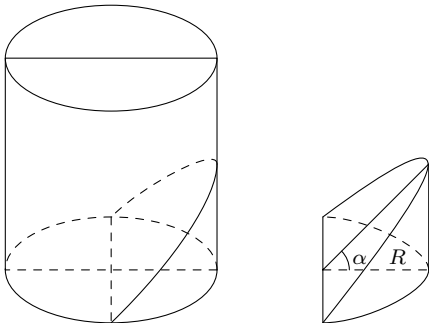
Nội dung	Hình vẽ
Ta có công thức tính diện tích và thể tích $$\boxed{\begin{cases} S_{xq}=2\pi Rh=\pi\left(r^2+h^2\right) \\ V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{\pi h}{6}\left(h^2+3r^2\right) \end{cases}}$$	

B HÌNH TRỤ CỤT

Nội dung	Hình vẽ

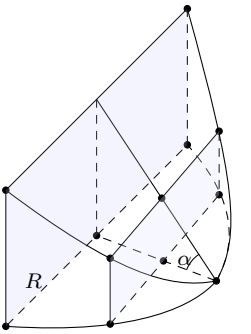
Ta có công thức tính thể tích, diện tích $$\boxed{\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}}$$	

C HÌNH NÊM LOẠI 1

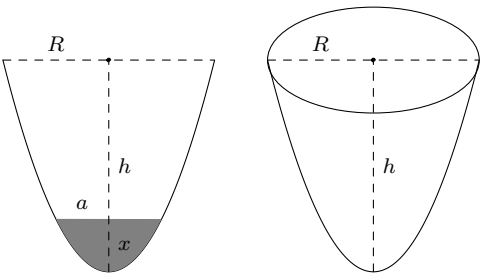
Nội dung	Hình vẽ
Ta có công thức tính thể tích $$\boxed{V = \frac{2}{3}R^3 \tan\alpha.}$$	

D HÌNH NÊM LOẠI 2

Nội dung	Hình vẽ

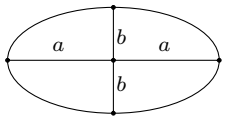
Ta có công thức tính thể tích $$\boxed{V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) R^3 \tan\alpha.}$$	

E PARABOL BẬC HAI - PARABOLOID

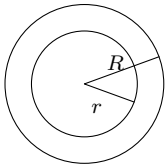
Nội dung	Hình vẽ
$$\boxed{\begin{cases} S_{\text{parabol}} = \dfrac{4}{3}Rh \\ \dfrac{S'}{S} = \left(\sqrt{\dfrac{x}{h}}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{R}\right)^3 \\ V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}V_{\text{trụ}}. \end{cases}}$$	

F DIỆN TÍCH ELIP VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY SINH BỞI ELIP

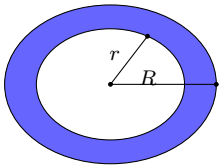
Nội dung	Hình vẽ

$\boxed{\begin{cases} S_{\text{elip}} = \pi ab \\ V_{\text{xoay quanh } 2a} = \dfrac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{\text{xoay quanh } 2b} = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b. \end{cases}}$	

G DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{S = \pi\left(R^2 - r^2\right).}$	

H THỂ TÍCH HÌNH XUYẾN (PHAO)

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = 2\pi^2\left(\dfrac{R+r}{2}\right)\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2.}$	

CHƯƠNG 3

HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1 HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

1 Khái niệm mở đầu

Trong không gian cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gốc tọa độ O, trục hoành Ox, trục tung Oy, trục cao Oz, các mặt tọa độ (Oxy), (Oyz), (Ozx).

2 Khái niệm về hệ trục tọa độ

Khi không gian có hệ trục tọa độ thì gọi là không gian tọa độ $Oxyz$ hay không gian $Oxyz$.

Chú ý

- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

3 Tọa độ véctơ

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

4 Tọa độ điểm

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

5 Các công thức tọa độ cần nhớ

Cho $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$, $\overrightarrow{v} = (a'; b'; c')$.

- ☑ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c'. \end{cases}$
- ☑ $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v} = (a \pm a'; b \pm b'; c \pm c')$.
- ☑ $k \cdot \overrightarrow{u} = (ka; kb; kc)$.
- ☑ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = aa' + bb' + cc'$.
- ☑ $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \dfrac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$.
- ☑ $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- ☑ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
- ☑ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ☑ $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

6 Chú ý

Góc của hai véc-tơ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ là góc hình học (nhỏ) giữa hai tia mang các véc-tơ đó, giá trị trong $[0; \pi]$ là $\sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \geq 0$.

7 Chia tỉ lệ đoạn thẳng

Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k nghĩa là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Công thức tọa độ của M là

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1 - k}. \end{cases}$$

8 Công thức trung điểm

Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}. \end{cases}$$

9 Công thức trọng tâm tam giác

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}. \end{cases}$$

10 Công thức trọng tâm tứ diện

Nếu G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}. \end{cases}$$

11 Tích có hướng của hai véc-tơ

Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{u}=(a;b;c)$ và $\overrightarrow{v}=(a';b';c')$. Tích có hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ là một véc-tơ, kí hiệu $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$ hay $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, có tọa độ

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)=(bc'-b'c;ca'-ac';ab'-ba').$$

12 Tính chất của tích có hướng của hai véc-tơ

- $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$ vuông góc với $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$.

- $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ cùng phương.

13 Ứng dụng của tích có hướng của hai véc-tơ

- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \cdot \overrightarrow{w} = 0$.
- Thể tích khối hộp có đáy là hình bình hành $ABCD$ và cạnh bên AA':

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] \cdot \overrightarrow{AA'}\right|.$$

- Thể tích khối tứ diện $S.ABC$: $V = \dfrac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{SA}\right|$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Các phép toán về tọa độ của véc-tơ và của điểm

Phương pháp giải

- Sử dụng các công thức về tọa độ của véc-tơ và của điểm trong không gian.
- Sử dụng các phép toán về véc-tơ trong không gian.

2 Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích - Thể tích

Phương pháp giải

- Sử dụng các công thức về tọa độ của véc-tơ và của điểm trong không gian.
- Sử dụng các phép toán về véc-tơ trong không gian.
- Công thức xác định tọa độ của các điểm đặc biệt.
- Tính chất hình học của các điểm đặc biệt.
  - $A,\ B,\ C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \overrightarrow{0}$.

- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Cho $\triangle ABC$ có các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A trên BC. Ta có $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{FC}$.
- A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

BÀI 2 MẶT PHẲNG

A CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

1 Khái niệm về véc-tơ pháp tuyến

Véc-tơ $\overrightarrow{n}$ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá vuông góc $mp(P)$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của (P).

2 Tính chất của véc-tơ pháp tuyến

Nếu $\overrightarrow{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) thì $k\overrightarrow{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P).

3 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

4 Khai triển của phương trình tổng quát

Dạng khai triển của phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0).

5 Những trường hợp riêng của phương trình tổng quát

- ☑ (P) qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow D = 0$.
- ☑ (P) song song hoặc trùng (Oxy) $\Leftrightarrow A = B = 0$.
- ☑ (P) song song hoặc trùng (Oyz) $\Leftrightarrow B = C = 0$.
- ☑ (P) song song hoặc trùng (Ozx) $\Leftrightarrow A = C = 0$.
- ☑ (P) song song hoặc chứa trục Ox $\Leftrightarrow A = 0$.

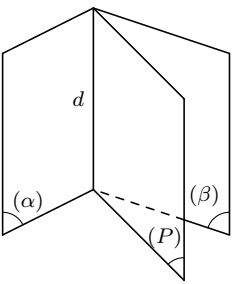
- ☑ (P) song song hoặc chứa trục $Oy \Leftrightarrow B = 0$.
- ☑ (P) song song hoặc chứa trục $Oz \Leftrightarrow C = 0$.
- ☑ (P) (không qua gốc tọa độ) cắt Ox tại $A(a;0;0)$, cắt Oy tại $B(0;y;0)$, cắt Oz tại $C(0;0;c) \Leftrightarrow (P)$ có phương trình $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

6 Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Cho $M(x_0;y_0;z_0)$ và $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$, khi đó

$$\mathrm{d}\left[M;(P)\right] = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7 Chùm mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ
☑ Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) gọi là một chùm mặt phẳng. ☑ Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta)\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. ☑ Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa d thì mặt phẳng (P) có dạng $m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ với $m^2 + n^2 \neq 0$.	

B VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một điểm thuộc (α) và một VTPT của nó.

1 Dạng 1

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$ thì

$$(\alpha)\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2 Dạng 2

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp VTCP $\vec{a}$, $\vec{b}$ thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của (α).

3 Dạng 3

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với $(\beta)\colon Ax + By + Cz = 0$ thì

$$(\alpha)\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

4 Dạng 4

Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

5 Dạng 5

Mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và một đường thẳng d không chứa M:

- ☑ Trên d lấy điểm A và VTCP $\vec{u}$.
- ☑ Một VTPT của (α) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right]$.

6 Dạng 6

Mặt phẳng (α) đi qua một điểm M, vuông góc với đường thẳng d thì VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng d là một VTPT của (α).

7 Dạng 7

Mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:

- ☑ Xác định các VTCP $\vec{a}$, $\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.
- ☑ Một VTPT của (α) là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.
- ☑ Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc $d_2 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

8 Dạng 8

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (hai đường d_1, d_2 chéo nhau):

- ☑ Xác định các VTCP $\vec{a}$, $\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.
- ☑ Một VTPT của (α) là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.
- ☑ Lấy một điểm M thuộc $d_1 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

9 Dạng 9

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2:

- ☑ Xác định các VTCP $\vec{a}$, $\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.
- ☑ Một VTPT của (α) là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

10 Dạng 10

Mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng d và vuông góc với một mặt phẳng (β):

- ☑ Xác định VTCP $\vec{u}$ của d và VTPT $\vec{n}_\beta$ của (β).
- ☑ Một VTPT của (α) là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n}_\beta]$.
- ☑ Lấy một điểm M thuộc $d \Rightarrow M \in (\alpha)$.

11 Dạng 11

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

- ☑ Xác định các VTPT $\vec{n}_\beta$, $\vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ).
- ☑ Một VTPT của (α) là $\vec{n} = [\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma]$.

12 Dạng 12

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước:

- ☑ Giả sử (α) có phương trình $A + By + Cz + D = 0$, $\left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$.
- ☑ Lấy hai điểm $A, B \in d \Rightarrow A, B \in (\alpha)$, ta được hai phương trình (1) và (2).

- Từ điều kiện khoảng cách $\mathrm{d}[M,(\alpha)]=k$, ta được phương trình (3).
- Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

13 Dạng 13

Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm H:

- Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.
- Một VTPT của (α) là $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$.

C VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ và $(P')\colon A'x+B'y+C'z+D'=0$. Khi đó

- (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A:B:C\neq A':B':C'$.
- $(P)\parallel(P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$.
- $(P)\equiv(P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$.
- $(P)\perp(P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(P')}=0 \Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$.

D KHOẢNG CÁCH VÀ HÌNH CHIẾU

1 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$ là $\mathrm{d}[M_0;(\alpha)]=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

2 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

3 Hình chiếu của một điểm lên một mặt

Điểm H là hình chiếu của điểm M lên $(P) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MH},\vec{n} \text{ cùng phương}\\ H\in(P)\end{cases}$.

4 Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng

Điểm M' đối xứng M qua $(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$.

E GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình $(\alpha)\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\beta)\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.
Góc giữa (α), (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$.

$$\cos\left[(\alpha);(\beta)\right] = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

⚠ $0^\circ \le \left[\widehat{(\alpha);(\beta)}\right] \le 90^\circ$; $(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

F VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TIẾP XÚC MẶT CẦU.

Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm I.

- ☑ (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow \mathrm{d}\left[I;(\alpha)\right] > R$.
- ☑ (α) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}\left[I;(\alpha)\right] = R$ với (α) là tiếp diện.

Để tìm tọa độ tiếp điểm, ta có thể thực hiện như sau

- ☑ Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc (α).
- ☑ Tìm tọa độ giao điểm H của d và (α), H là giao điểm của (S) với (α).
- ☑ (α) cắt (S) theo một đường tròn $\Leftrightarrow \mathrm{d}\left[I;(\alpha)\right] < R$.

Để xác định tâm và bán kính r của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau

- ☑ Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc (α).
- ☑ Tìm tọa độ giao điểm H của d và (α), với H là tâm của đường tròn giao tuyến của (S) với (α).
- ☑ Bán kính r của đường tròn giao tuyến $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.

BÀI 3 ĐƯỜNG THẲNG

A PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1 Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 1. Cho đường thẳng d. Nếu véc-tơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường phẳng d thì được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường phẳng d. Kí hiệu: $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

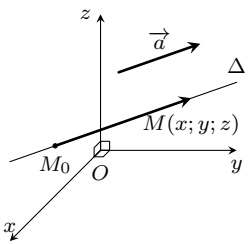
⚠

- ☑ *$\overrightarrow{a}$ là VTCP của d thì $k\overrightarrow{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của d;*
- ☑ *Nếu d đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của d;*
- ☑ *Trục Ox có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} = (1; 0; 0)$;*
- ☑ *Trục Oy có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$;*
- ☑ *Trục Oz có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$.*

2 Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



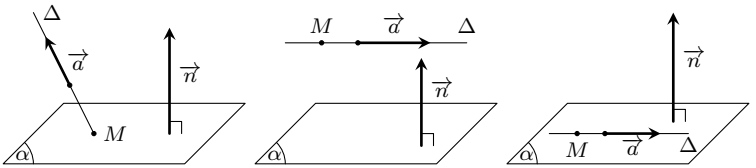
3 Phương trình chính tắc của đường thẳng

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (a_1, a_2, a_3 \neq 0).$$

B VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

1 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

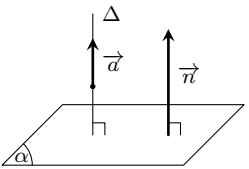


Phương pháp hình học

Định lí 1. *Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng* Δ: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \end{cases}$ *có véc-tơ chỉ phương* $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ *và đi qua* $M = (x_0; y_0; z_0)$ *và mặt phẳng* $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ *có véc-tơ pháp tuyến* $\vec{n} = (A; B; C)$.
Khi đó

- ☑ $\Delta \cap (\alpha) = \{A\} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$;
- ☑ $\Delta \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$
- ☑ $\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

Đặc biệt. $\Delta \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$.

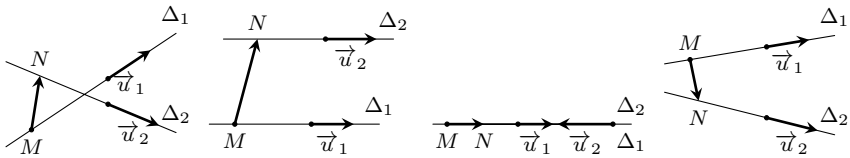


Phương pháp đại số

Muốn tìm giao điểm M của Δ và (α), ta giải hệ phương trình $\begin{cases} \text{pt}\,(\Delta) \\ \text{pt}\,(\alpha) \end{cases}$ tìm x, y, z. Suy ra $M(x; y; z)$.
Thế $(1), (2)$ và (3) vào phương trình (α) và rút gọn đưa về dạng $at + b = 0$. $\quad (*)$

- ☑ Δ cắt (α) tại một điểm $\Leftrightarrow$ pt$(*)$ có một nghiệm t;
- ☑ Δ song song với $(\alpha) \Leftrightarrow$ pt$(*)$ vô nghiệm;
- ☑ Δ nằm trong $(\alpha) \Leftrightarrow$ pt$(*)$ có vô số nghiệm t;
- ☑ $\Delta \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương.

2 Vị trí tương đối của hai đường thẳng



Phương pháp hình học

Cho hai đường thẳng: Δ_1 đi qua M và có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_1$;
Δ_2 đi qua N và có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_2$.

- ☑ $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] = \left[\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] = \overrightarrow{0}$;
- ☑ $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] = \overrightarrow{0} \\ \left[\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] \neq \overrightarrow{0}; \end{cases}$
- ☑ Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] \neq \overrightarrow{0} \\ [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = 0; \end{cases}$
- ☑ Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$.

Phương pháp đại số

Muốn tìm giao điểm M của Δ_1 và Δ_2, ta giải hệ phương trình $\begin{cases} \text{pt}\,(\Delta_1) \\ \text{pt}\,(\Delta_2) \end{cases}$ tìm x, y, z. Suy ra $M(x; y; z)$.

3 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \end{cases}$ và mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R.

Phương pháp hình học

Bước 1: Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng Δ là

$$h = \mathrm{d}(I, \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{a}\right]\right|}{|\overrightarrow{a}|}.$$

Bước 2: So sánh $\mathrm{d}(I, \Delta)$ với bán kính R của mặt cầu:

- ☑ Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) > R$ thì Δ không cắt (S);
- ☑ Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với (S);
- ☑ Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu.

Phương pháp đại số

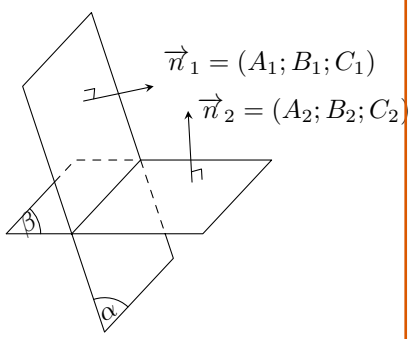
Thế $(1), (2)$ và (3) vào phương trình (S) và rút gọn và đưa về phương trình bậc hai theo t. $(*)$

- ☑ Nếu phương trình $(*)$ vô nghiệm thì Δ không cắt (S);
- ☑ Nếu phương trình $(*)$ có một nghiệm thì Δ không cắt (S);
- ☑ Nếu phương trình $(*)$ có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N.

! Để tìm tọa độ M, N, ta thay giá trị vào phương trình đường thẳng Δ.

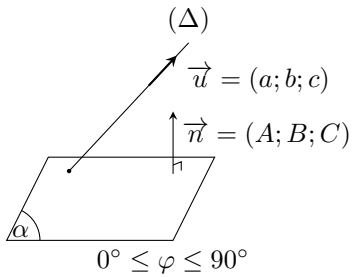
C GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1 Góc giữa hai mặt phẳng

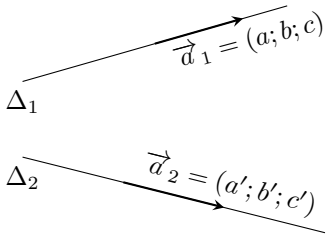
Nội dung	Hình vẽ
Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (α), (β) xác định bởi phương trình: $(\alpha)\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $(\beta)\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β), ta có công thức: $\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	

2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ

Cho đường thẳng $$(\Delta)\colon \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) ta có công thức: $$\sin\varphi=\frac{\lvert Aa+Bb+Cc\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$	

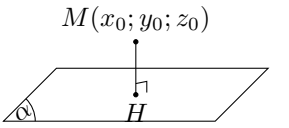
3 Góc giữa hai đường thẳng

Nội dung	Hình vẽ
Cho hai đường thẳng: $$(\Delta_1)\colon \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$ $$(\Delta_2)\colon \frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}$$ Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) ta có công thức: $$\cos\varphi=\frac{\lvert aa'+bb'+cc'\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$	 $0^\circ\le\varphi\le 90^\circ$

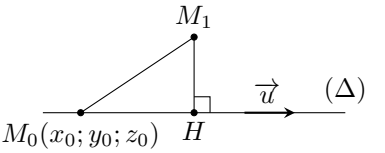
D KHOẢNG CÁCH

1 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

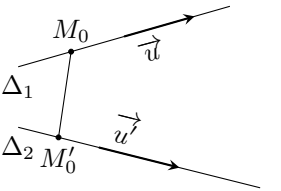
Nội dung	Hình vẽ

Cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) được tính bởi: $$\mathrm{d}\left[M, (\alpha)\right] = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$	

2 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Nội dung	Hình vẽ
Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính bởi công thức: $$\mathrm{d}(M_1, \Delta) = \frac{\left\lvert\left[\overrightarrow{M_0M_1}; \overrightarrow{u}\right]\right\rvert}{\lvert\overrightarrow{u}\rvert}.$$	

3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Nội dung	Hình vẽ
Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai đường thẳng chéo nhau: (Δ_1) có VTCP $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ và qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (Δ_2) có VTCP $\overrightarrow{u'} = (a'; b'; c')$ và qua $M_0'(x_0'; y_0'; z_0')$ Khi đó khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) được tính bởi công thức $$\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left\lvert\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] \cdot \overrightarrow{M_0M_0'}\right\rvert}{\left\lvert\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right\rvert}.$$	

E LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định một điểm thuộc d và một VTCP của nó.

1 Dạng 1

d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

2 Dạng 2

d đi qua hai điểm A, B: d có một VTCP là $\overrightarrow{AB}$.

3 Dạng 3

d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì $d \parallel \Delta$ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.

4 Dạng 4

d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước. Vì $d \perp (P)$ nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.

5 Dạng 5

d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q):
Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.

- ☑ Tìm tọa độ một điểm $A \in d$ bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} (P) \\ (Q) \end{cases}$ (với việc chọn giá trị cho một ẩn).
- ☑ Tìm một VTCP của d: $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{n}_Q]$.

Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

6 Dạng 6

d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2:
Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ nên một VTCP của d là $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{a}_{d_1}, \overrightarrow{a}_{d_2}]$.

7 Dạng 7

d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

- Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ.
  Ta có $\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \overrightarrow{u}_\Delta \end{cases}$. Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.
- Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; Q là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

8 Dạng 8

d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

- Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.
- Cách 2: Gọi $(P) = (M_0, d_1)$, $(Q) = (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. Do đó một VTCP của d có thể chọn là $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{n}_Q]$.

9 Dạng 9

d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:
Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$.
Khi đó d chính là đường thẳng AB.

10 Dạng 10

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2.
Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

11 Dạng 11

d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau.

1. Cách 1:
   Gọi $M_1 \in d_1, M_2 \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$ ta tìm được M, N. Khi đó d là đường thẳng MN.
2. Cách 2:

- ☑ Vì $d \perp d_1$ và $d \perp$ nên một véc-tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{a}_{d_1}; \overrightarrow{a}_{d_2}]$.
- ☑ Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1 bằng cách.
  - Lấy một điểm A trên d_1.
  - Một véc-tơ chỉ phương của (P) là $\overrightarrow{n}_P = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}_{d_1}]$.
- ☑ Tương tự lập phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và d_2. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

12 Dạng 12

d đi qua điểm M, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

① Cách 1:
Gọi N là giao điểm của d và d_2. Từ điều kiện $MN \perp d_1$, ta tìm được N. Khi đó, d là đường thẳng MN.

② Cách 2:

- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (P) và qua M và vuông góc với d_1.
- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2.
- ☑ Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

13 Dạng 13

d đi qua M, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

① Cách 1:
Gọi N là giao điểm của d và d_2. Từ điều kiện $MN \perp d_1$ ta tìm được N. Khi đó, d là đường thẳng MN.

② Cách 2:

- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1.
- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2.
- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2.
- ☑ Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

F VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

① Phương pháp hình học:
Dụa vào mối quan hệ giữa các véc-tơ chỉ phương và các điểm thuộc đường thẳng.

② Phương pháp đại số:
Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.

2 Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

① Phương pháp hình học:
Dựa vào mối quan hệ giữa véc-tơ chỉ phuwpwng của đường thẳng và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

② Phương pháp đại số:
Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.

G KHOẢNG CÁCH

1 Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d

① Cách 1:
Cho đường thẳng d đi qua M_0 và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a}$ thì

$$\mathrm{d}\left(M, d\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{a}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a}\right|}.$$

② Cách 2:

- ☑ Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d.
- ☑ $\mathrm{d}\left(M, d\right) = MH$.

③ Cách 3:

- Gọi $N(x;y;z) \in d$. Tính MN^2 theo t (t là tham số trong đường thẳng d).
- Tìm t để MN^2 nhỏ nhất.
- Khi đó $N \equiv H$, do đó $\mathrm{d}(M,d) = MH$.

2 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2. Biết d_1 đi qua điểm M_1 và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a}_2$ thì

$$\mathrm{d}(d_1,d_2) = \frac{\left|[\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|[\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2]|}.$$

• **Chú ý:** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 mà mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.

3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

4 Khoảng cách giữa một đường thẳng mà mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên d đến mặt phẳng (α).

H GÓC

1 Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$. Gọi α là góc giữa d_1, d_2 d_1, d_2, ta có

$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2)| = \frac{|\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_2|}{|\overrightarrow{a}_1| \cdot |\overrightarrow{a}_2|}.$$

2 Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A;B;C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa d và hình chiếu vuông góc d' của nó trên (α). Ta có

$$\sin\left(\widehat{d,(\alpha)}\right) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

BÀI 4 MẶT CẦU

A PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① Phương trình chính tắc

- Phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là $(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (1)$
- Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu
- Đặc biệt: Khi $I \equiv O$ thì $(S): x^2+y^2+z^2=R^2$

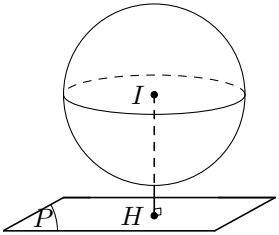
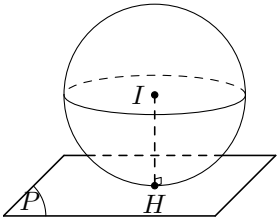
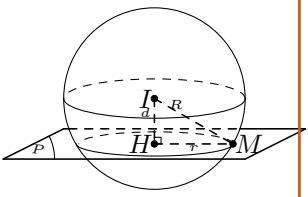
② Phương trình tổng quát

- Phương trình : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

B GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

- Cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình :
  $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$
  $(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
- Gọi $\mathrm{d}(I;(\alpha))$ là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (α).
- Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P).
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d=IH=\mathrm{d}(I,(P))$

$d>R$	$d=R$	$d<R$

Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu : (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H: tiếp điểm.	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

C MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1 Dạng 1

(S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và bán kính R thì $(S):\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

2 Dạng 2

(S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và đi qua điểm A thì bán kính $R = IA$.

3 Dạng 3

(S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính

- ☑ Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}; y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}; z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- ☑ Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

4 Dạng 4

(S) đi qua bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện)

- ☑ Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng : $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (*).

- ☑ Thay lần lượt toạ độ của các điểm $A,\ B,\ C,\ D$ vào (*), ta được 4 phương trình.
- ☑ Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a,\ b,\ c,\ d \Rightarrow$ phương trình mặt cầu (S).

5 Dạng 5

(S) đi qua ba điểm $A,\ B,\ C$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước thì giải tương tự dạng 4.

6 Dạng 6

(S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước

- ☑ Xác định tâm I và bán kính R' của mặt cầu (T).
- ☑ Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S). (Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và ngoài)

Chú ý : Với phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì (S) có tâm $I(-a;\ -b;\ -c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.
Đặc biệt :
Cho hai mặt cầu $S_1(I_1;\ R_1)$ và $S_2(I_2;\ R_2)$.

- ☑ $I_1I_2<|R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1),(S_2)$ trong nhau.
- ☑ $I_1I_2>R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),(S_2)$ ngoài nhau.
- ☑ $I_1I_2=|R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1),(S_2)$ tiếp xúc trong.
- ☑ $I_1I_2=R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),(S_2)$ tiếp xúc ngoài.
- ☑ $|R-1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),(S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn (đường tròn giao tuyến).

7 Dạng 7

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước thì bán kính mặt cầu $R=\mathrm{d}(I;(P))$.

8 Dạng 8

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện.

- ☑ Đường tròn cho trước (bán kính hoặc diện tích hoặc chu vi) thì từ công thức diện tích đường tròn $S=\pi r^2$ hoặc chu vi đường tròn $P=2\pi r$ ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến r.

- Tính $d = \mathrm{d}(I, (P))$.
- Tính bán kính mặt cầu $R = \sqrt{d^2 + r^2}$.
- Kết luận phương trình mặt cầu.

9 Dạng 9

Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ cho trước và có tâm $I(a;\ b;\ c)$ cho trước thì đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) ta có $R = \mathrm{d}(I, \Delta)$.

10 Dạng 10

Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc Δ và có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước thì ta làm như sau

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ.
- Toạ độ tâm $I = (P) \cup \Delta$ là nghiệm của phương trình.
- Bán kính mặt cầu $R = IM = \mathrm{d}(I, \Delta)$.
- Kết luận về phương trình mặt cầu (S).

11 Dạng 11

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm $A,\ B$ thoả mãn điều kiện

- Độ dài AB là một hằng số.
- Tam giác IAB là tam giác vuông.
- Tam giác IAB là tam giác đều.

Thì ta xác định $\mathrm{d}(I, \Delta) = IH$, vì $\triangle IAB$ cân tại I nên $HB = \dfrac{AB}{2}$ và bán kính mặt cầu R được tính như sau

- $R = \sqrt{IH^2 + HB^2}$.
- $R = \dfrac{IH}{\sin 45^\circ}$.
- $R = \dfrac{IH}{\sin 60^\circ}$.

12 Dạng 12

Tập hợp điểm là mặt cầu. Giả sử tìm tập hợp điểm M thoả tính chất (P) nào đó.

- ☑ Tìm hệ thức giữa các toạ độ $x,\ y,\ z$ của điểm M.
  $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ hoặc $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$.
- ☑ Tìm giới hạn quỹ tích (nếu có).

13 Dạng 13

Tìm tập hợp tâm mặt cầu

- ☑ Tìm toạ độ của tâm I, chẳng hạn : $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases} \quad (*)$
- ☑ Khử t trong (*) ta có phương trình tập hợp điểm.
- ☑ Tìm giới hạn quỹ tích (nếu có).

BÀI 5 MỘT SỐ BÀI TOÁN GIẢI NHANH CỰC TRỊ KHÔNG GIAN

A DẠNG 1.

Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B. Tìm $M\in(P)$ để $(MA+MB)_{\min}$.

• *Phương pháp*

- ☑ Nếu A và B nằm khác phía so với (P) $\Rightarrow M$, A, B thẳng hàng $\Rightarrow M=AB\cap(P)$.
- ☑ Nếu A và B nằm cùng phía so với (P) $\Rightarrow B'$ là điểm đối xứng với B qua (P).

B DẠNG 2.

Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A,B. Tìm $M\in(P)$ để $|MA-MB|_{\max}$.

• *Phương pháp*

- ☑ Nếu A và B nằm khác phía so với (P) $\Rightarrow M$, A, B thẳng hàng $\Rightarrow M=AB\cap(P)$.
- ☑ Nếu A và B nằm cùng phía so với (P) $\Rightarrow B'$ là điểm đối xứng với B qua (P) $\Rightarrow |MA-MB'|=AB'$.

C DẠNG 3.

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ không thuộc các trục và các mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{O.ABC}$ nhỏ nhất.

• *Phương pháp*

$$(P)\colon \frac{x}{3x_M} + \frac{y}{3y_M} + \frac{z}{3z_M} = 1.$$

D DẠNG 4.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, sao cho khoảng cách từ điểm $M \notin d$ đến (P) là lớn nhất .

• *Phương pháp*

$$(P)\colon \begin{cases} \text{Qua} \quad A \in d \\ \overrightarrow{n}_P = \left[\left[\overrightarrow{u}_d; \overrightarrow{AM}\right]; \overrightarrow{u}_d\right]. \end{cases}$$

E DẠNG 5.

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cách M một khoảng lớn nhất.

• *Phương pháp*

$$(P)\colon \begin{cases} \text{Qua} \quad A \\ \overrightarrow{n}_P = \overrightarrow{AM}. \end{cases}$$

F DẠNG 6.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, sao cho (P) tạo với Δ một góc lớn nhất(Δ không song song với đường thẳng d).

• *Phương pháp*

$$(P)\colon \begin{cases} \text{Qua} \quad A \in d \\ \overrightarrow{n}_P = \left[\left[\overrightarrow{u}_d, \overrightarrow{u}_\Delta\right], \overrightarrow{u}_d\right]. \end{cases}$$

G DẠNG 7.

Cho $\Delta \parallel (P)$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) song song với Δ và cách Δ một khoảng nhỏ nhất .

• *Phương pháp*

☑ Lấy điểm $A \in \Delta$, gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì d: $\begin{cases} \text{Qua} \quad A' \\ \overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{u}_\Delta. \end{cases}$

H DẠNG 8.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A \in (P)$ cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là lớn nhất (AM không vuông góc với (P)).

• *Phương pháp*

Lấy điểm $A \in \Delta$, gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (P) thì

$$(d)\colon \begin{cases} \text{Qua} \quad A \in d \\ \overrightarrow{u}_d = \left[\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{AM}\right]. \end{cases}$$

I DẠNG 9.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A \in (P)$ cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)).

• *Phương pháp*

$$d\colon \begin{cases} \text{Qua} \quad A \in d \\ \overrightarrow{u}_d = \left[\left[\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{n}_P\right]. \end{cases}$$

J DẠNG 10.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A \in (P)$ cho trước, sao cho d nằm trong (P) và tạo với đường thẳng Δ một góc nhỏ nhất (Δ cắt nhưng không vuông góc với (P)).

• *Phương pháp*

$$d\colon \begin{cases} \text{Qua} \quad A \in d \\ \overrightarrow{u}_d = \left[\left[\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{n}_P\right]. \end{cases}$$