

Bài 1 (4.0 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+y+2} + (y-1)\sqrt{x^2+x+1} = x+y \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+x+y+1 \end{cases}$$

Bài 2 (4 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{b(a^2+2)} + \frac{b^2}{c(b^2+2)} + \frac{c^2}{a(c^2+2)}$

Bài 3 (4 điểm) Cho tam giác ABC với O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\widehat{AIO} \leq 90^\circ$ khi và chỉ khi $AB + AC \geq 2BC$

Bài 4 (4 điểm)

a. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $19 \cdot 8^n + 17$ là số nguyên tố.

b. Cho 2020 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2020}$ và số nguyên $a > 1$ sao cho a chia hết cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2020}$.

Chứng minh rằng $a^{2021} + a - 1$ không chia hết cho $(a+a_1-1)(a+a_2-1)\dots(a+a_{2020}-1)$.

Bài 5 (4 điểm) Cho các số nguyên dương được viết vào 441 ô của bảng vuông 21×21 . Mỗi hàng và mỗi cột có nhiều nhất 6 giá trị khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên có mặt ở ít nhất 3 cột và ít nhất 3 hàng.

—————HẾT—————