

Câu 1. (3,0 điểm)

Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n \right)$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M biết khoảng cách từ M đến trục Oy bằng 1.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Giải phương trình $y' = 0$.

2) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{2x+6}}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a ,
 $SA = SB = SC = SD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

1) Chứng minh đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

2) Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) .

3) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lần lượt nằm trên các cạnh B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i ($i = 1, n-1$) sao cho:
 $A_{i+1}C_i = 2A_{i+1}B_i$, $B_{i+1}A_i = 2B_{i+1}C_i$, $C_{i+1}B_i = 2C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả diện tích của n tam giác trên, biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng 2. Hãy tính S theo n và tìm số nguyên dương n sao cho $S = 3 \left(1 - \frac{1}{3^{2017}} \right)$.

----- HẾT -----

Câu		Điểm
1.1		1,5
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$	1,5
1.2		1,5
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{4n^2 + n + 1} + 2n}$	1,0
	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{1}{4}$	0,5
2.		1,5
	TXĐ: $\mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 3$	0,25
	Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm	0,25
	Theo giả thiết $d(M; Oy) = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$	
	Th1: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1; y'(x_0) = 0$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y = -1$	0,5
	Th 2: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 3; y'(x_0) = 0$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y = 3$	0,5
3.1		1,0
	Ta có $y' = 4x^3 - 4x$	0,5
	Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$	0,5
	Vậy phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = \pm 1 \vee x = 0$.	
3.2		1,0
	Ta có $f(x)$ xác định tại $x_0 = 1$ nên $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$	0,25
	Mà $f(1) = a$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{2x+6}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} \right]$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3(x-1)}{(\sqrt{3x+1}+2)(x-1)} - \frac{2(x-1)}{(\sqrt[3]{(2x+6)^2} + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4)(x-1)} \right]$	0,5

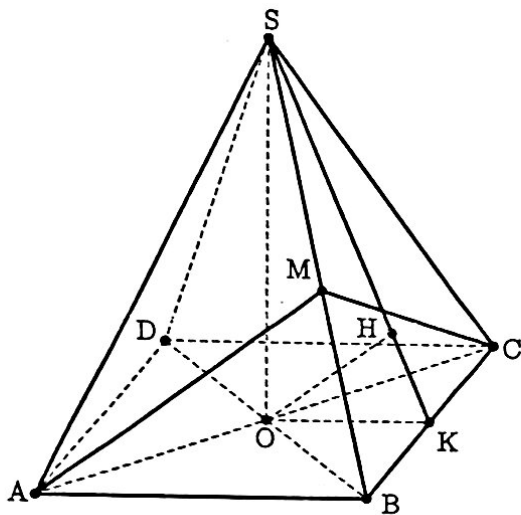
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} - \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+6)^2} + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4} \right] = \frac{7}{12}$$

Do đó, $a = \frac{7}{12}$ là giá trị cần tìm.

0,25

4.1

1,5



Vẽ hình đúng, đủ để làm câu IV.1

0,5

Ta có $SA = SC \Rightarrow \triangle SAC$ cân
 $\Rightarrow SO \perp AC$

0,5

Chứng minh tương tự $SO \perp BD$

Do đó $SO \perp (ABCD)$ (đpcm)

0,5

4.2

1,0

Gọi K là trung điểm của BC . Khi đó, $\left. \begin{matrix} OK \perp BC \\ SO \perp BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow (SOK) \perp BC$

Kẻ $OH \perp SK$ ($H \in SK$) $\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O; (SBC)) = OH$

0,5

Ta có $OK = \frac{a}{2}$; $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

0,5

4.3

0,5

Ta có $(SAB) \cap (SBC) = SB$

Ta lại có $\left. \begin{matrix} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

0,25

Kẻ $AM \perp SB$ ($M \in SB$) $\Rightarrow SB \perp (AMC) \Rightarrow CM \perp SB$

Do đó góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng góc giữa AM và CM

$$AM = CM = \frac{SK \cdot BC}{SB} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Áp dụng định lí hàm số cosin $\cos \widehat{AMC} = \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2AM \cdot CM} = -\frac{1}{4}$

0,25

Vậy cosin của góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{1}{4}$

Gọi S_i ($i = \overline{1; n}$) là diện tích của $\Delta A_i B_i C_i$. Ta có $\frac{S_{A_1 B_2 C_2}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = \frac{A_1 B_2}{C_1 B_2} \cdot \frac{A_1 C_2}{B_1 C_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

0,25

Tương tự $\frac{S_{A_2 B_1 C_2}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = \frac{S_{A_2 B_2 C_1}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = \frac{2}{9}$. Do đó $\frac{S_{A_2 B_2 C_2}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = 1 - 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{3} S_1$

Khi đó $S = S_1 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$

Theo giả thiết ta có $3 \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{3^{2017}} \right) \Leftrightarrow n = 2017$

0,25

