SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi: **Sáng 08/01/2023**

Bài 1. (3.0 điểm)

Giải phương trình $\log_2\left(x^2-3\right)-\log_2\left(6x-10\right)+1=0$.

Bài 2. (3.0 điểm)

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$S=F\left(1\right)+F\left(2\right)+F\left(3\right)+\ldots+F\left(2023\right).$$

Bài 3. (4.0 điểm)

Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

Bài 4. (4.0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ tâm O có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC.

a) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng $\left(SAD\right)$.

b) Mặt phẳng $\left(BMN\right)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé).

Bài 5. (3.0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $\left(C\right): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến $\left(C\right)$. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2.

Bài 6. (3.0 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3-8=\left(x+y\right)\left[5x+y\left(5-3x\right)-10\right] \\ \sqrt{3x+y+1}+\sqrt{2x+y-1}=3x+2+2\sqrt{2x^2+5x+3} \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

HẾT./.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THPT VÒNG TỈNH**

VĨNH LONG **NĂM HỌC 2022 – 2023**

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (Buổi sáng)

Bài 1. (3.0 điểm) Giải phương trình $\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0$.

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
1		**3.0**
	Điều kiện: $x>\sqrt{3}$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2-3}{6x-10}=-1$	1.0
	$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3}{6x-10}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	1.0
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$. So với điều kiện phương trình có nghiệm $x=2$.	1.0

Bài 2. (3.0 điểm)

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(2023)$.

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
2		**3.0**
	Ta có $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Đặt $t=x(x+1)=x^2+x \Rightarrow \mathrm{d}t=(2x+1)\mathrm{d}x$.	1.0
	Khi đó $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{t}+C=-\dfrac{1}{x(x+1)}+C$. Mặt khác, $F(1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=1$. Do đó $F(x)=-\dfrac{1}{x(x+1)}+1$	1.0
	Suy ra $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(2023)$ $=-\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{2023.2024}\right)+2023$ $=-\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2023}-\dfrac{1}{2024}\right)+2023$ $=-\left(1-\dfrac{1}{2024}\right)+2023=2022+\dfrac{1}{2024}=\dfrac{4092529}{2024}$	1.0

Bài 3. (4.0 điểm)

Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

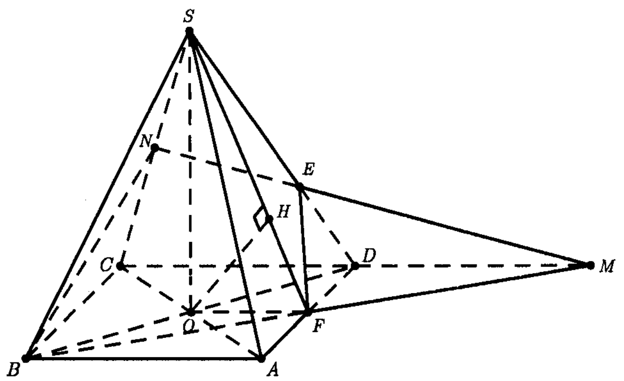
Bài	Nội dung	Điểm
3		4.0
	Số cách chọn 6 học sinh bất kì trong 15 học sinh là $C_{15}^6 = 5005$. Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 12 là $C_6^6 = 1$ cách.	1.0
	Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 11 là $C_9^6 = 84$ cách. Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 10 và 12 là $C_{11}^6 - C_6^6 = 461$ cách.	1.5
	Số cách chọn 6 học sinh chỉ có khối 11 và 12 là $C_{10}^6 - C_6^6 = 209$ cách. Do đó số cách chọn 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $5005 - 1 - 84 - 461 - 209 = 4250$ cách.	1.5

Bài 4. (4.0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tâm O cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC.

a) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAD).

b) Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé).

Bài	Nội dung	Điểm
4		4.0
	a) Giả sử các điểm như hình vẽ. $E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM, $DF \mathbin{//} BC \Rightarrow F$ là trung điểm AD. Ta có: $\begin{cases} AD \perp OF \\ AD \perp SO \end{cases} \Rightarrow AD \perp OH$ và $SF \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAD) \Rightarrow d(O,(SAD)) = OH$ $\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \widehat{SDO} = 60° \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ $\Rightarrow d(O,(SAD)) = OH = h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$	1.5

	b) Ta có: $S_{SAD}=\frac{1}{2}SF.AD=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$ $\frac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}}=\frac{ME}{MN}\cdot\frac{MF}{MB}\cdot\frac{MD}{MC}=\frac{1}{6}$	1.0
	$\Rightarrow V_{BFDCNE}=\frac{5}{6}V_{MNBC}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot d\left(M,(SBC)\right)\cdot\frac{1}{2}S_{SBC}=\frac{5}{18}\cdot 4h\cdot\frac{1}{2}S_{SAD}=\frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$	0.5
	$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}\Rightarrow V_{SABFEN}=V_{S.ABCD}-V_{BFDCNE}=\frac{7a^3\sqrt{6}}{72}$. Suy ra $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}=\frac{7}{5}$.	1.0

Bài 5. (3.0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2.

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
5		**3.0**
	$(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ suy ra có tâm $I(1;3)$ và $R=2$ Phương trình đường thẳng d đi qua $M(-3;1)$ có phương trình: $A(x+3)+B(y-1)=0$. d là tiếp tuyến với đường tròn khi và chỉ khi $d(I;d)=R$. $\Rightarrow$ ta có phương trình: $\frac{\lvert A+3B+3A-B\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}=2\Leftrightarrow 3A^2+4AB=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\3A=-4B\end{array}\right.$	1.0
	Với $A=0$, chọn $B=1$, phương trình tiếp tuyến thứ nhất là $(d_1): y=1$. Thế $y=1$ vào $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$, ta được tiếp điểm là $T_1(1;1)$. Với $3A=-4B$, chọn $A=-4; B=3$, phương trình tiếp tuyến thứ hai là $(d_2): -4x+3y-15=0$ Tiếp điểm $T_2\left(x;\frac{4x}{3}+5\right)\in(C)$ nên $(x-1)^2+\left(\frac{4x}{3}+5-3\right)^2=4\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}\Rightarrow$ $T_2\left(-\frac{3}{5};\frac{21}{5}\right)$.	1.0
	Phương trình đường thẳng $T_1T_2: 2(x-1)+1(y-1)=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2 là: $d(O,T_1T_2)=\frac{\lvert -3\rvert}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.	1.0

Bài 6. (3.0 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3-8=(x+y)\left[5x+y(5-3x)-10\right] \\ \sqrt{3x+y+1}+\sqrt{2x+y-1}=3x+2+2\sqrt{2x^2+5x+3} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài	Nội dung	Điểm
6		**3.0**
	Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi về phương trình : $x^3+y^3+3xy(x+y)=5(x+y)^2-10(x+y)+8$ $\Leftrightarrow (x+y)^3-5(x+y)^2+10(x+y)-8=0$	1.0
	$\Leftrightarrow (x+y-2)\left((x+y)^2-3(x+y)+4\right)=0 \Leftrightarrow y=2-x$ vì $(x+y)^2-3(x+y)+4=0$ (vô nghiệm).	1.0
	Thay $y=2-x$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2+2\sqrt{2x^2+5x+3}$ Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}, t>0$ ta được phương trình $t=t^2-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=2 \end{array}\right.$	0.5
	Với $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3}=-3x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-20x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x=10 \pm 4\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow x=10-4\sqrt{7} \Rightarrow y=4\sqrt{7}-8$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(10-4\sqrt{7};4\sqrt{7}-8\right)$	0.5

HẾT.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi: **Chiều 08/01/2023**

Bài 1. (4.0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C), m là tham số và điểm $C(1;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

Bài 2. (3.0 điểm)

Giải bất phương trình $2.5^{x+2} + 5.2^{x+2} \le 133.\sqrt{10^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Bài 3. (3.0 điểm)

Giải phương trình $4\sin^2\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x - 1 - 2\cos^2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = 0$.

Bài 4. (3.0 điểm)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0;1;2;3;.....;9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 1400.

Bài 5. (3.0 điểm)

Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy có tâm là O và có đường kính bằng $4a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Biết khoảng cách từ D đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$. Tính thể tích khối nón.

Bài 6. (4.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{b+3c} + \dfrac{b}{a+3c} + \dfrac{ab}{bc+ca}$.

HẾT./.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VĨNH LONG	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THPT VÒNG TỈNH NĂM HỌC 2022 – 2023

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (Buổi chiều)

Bài 1. (4.0 điểm)

Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C), m là tham số và điểm $C(1;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

Bài	Nội dung	Điểm
1		**4.0**
	Ta có $y'=3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$. Khi đó $A\left(0;4m^2-2\right)$, $B\left(2m;-4m^3+4m^2-2\right)$	1.0
	$\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2\lvert m\rvert\sqrt{4m^4+1}$ Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-0}{2m-0}=\dfrac{y-\left(4m^2-2\right)}{-4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$	1.0
	$d(C,AB)=\dfrac{\lvert 2m^2+4-4m^2+2\rvert}{\sqrt{4m^4+1}}=\dfrac{2\lvert m^2-3\rvert}{\sqrt{4m^4+1}}$ Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}.AB.d(C,AB)=4\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.2\lvert m\rvert.\sqrt{4m^4+1}.\dfrac{2\lvert m^2-3\rvert}{\sqrt{4m^4+1}}=4$	1.0
	$\Leftrightarrow \left\lvert m\left(m^2-3\right)\right\rvert=2\Leftrightarrow m^6-6m^4+9m^2-4=0\Leftrightarrow \left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm 2 \end{array}\right.$ So với điều kiện nhận $m=\pm 1; m=\pm 2$.	1.0

Bài 2. (3.0 điểm)

Giải bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\leq 133.\sqrt{10^x}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Bài	Nội dung	Điểm
2		**3.0**
	Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\leq 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\leq 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được:	1.0
	$50+\dfrac{20.2^x}{5^x}\leq\dfrac{133\sqrt{10^x}}{5^x}\Leftrightarrow 50+20.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\leq 133.\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x$ (1)	1.0
	Đặt $t=\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x,(t>0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{2}{5}\leq t\leq\dfrac{25}{4}$ Khi đó ta có: $\dfrac{2}{5}\leq\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x\leq\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\leq\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\leq\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}\Leftrightarrow -4\leq x\leq 2$.	1.0

Bài 3. (3.0 điểm)

Giải phương trình $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x-1-2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=0$.

Bài	Nội dung	Điểm
3		3.0
	Ta có $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ $\Leftrightarrow 2-2\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=2-\sin 2x \Leftrightarrow -2\cos x=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$	1.0
	$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi-x)$	1.0
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.	1.0

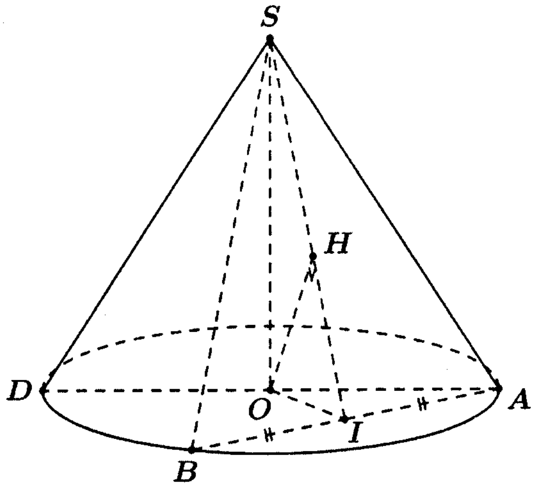
Bài 4. (3.0 điểm)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A=\{0;1;2;3;.....;9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 1400.

Bài	Nội dung	Điểm
4		3.0
	Số các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A=\{0;1;2;3;.....;9\}$ là: $n(\Omega)=9.10^5$ số. Gọi A là biến cố "Chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 1400" Nhận thấy $1400=2^3.5^2.7=1.2.4.7.5^2=1.1.8.7.5^2$.	1.0
	Suy ra số được chọn: Tạo thành từ 3 chữ số 2, 2 chữ số 5 và 1 chữ số 7 có $C_6^3.C_3^2$ cách chọn hoặc là 1 chữ số 1, 1 chữ số 2, 1 chữ số 4, 1 chữ số 7 và 2 chữ số 5 có A_6^4 cách chọn hoặc là 2 chữ số 1, 1 chữ số 8, 1 chữ số 7 và 2 chữ số 5 có $A_6^2.C_4^2$ cách chọn.	1.5
	Nên số các số có tích các chữ số bằng 1400 là: $n(A)=C_6^3.C_3^2+A_6^4+A_6^2.C_4^2=600$ số. Xác suất cần tìm là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{600}{9.10^5}=\frac{1}{1500}$.	0.5

Bài 5. (3.0 điểm)

Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy có tâm là O và có đường kính bằng $4a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Biết khoảng cách từ D đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. Tính thể tích khối nón.

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
5		**3.0**
	 Theo đề bài, có $R=OA=2a$. Vì D là điểm đối xứng với A qua O nên O là trung điểm của AD. $\Rightarrow \dfrac{d(D,(SAB))}{d(O,(SAB))}=\dfrac{AD}{AO}=2 \Leftrightarrow d(O,(SAB))=\dfrac{d(D,(SAB))}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.	1.0
	Gọi I là trung điểm AB, suy ra $OI\perp AB$. Mà $AB\perp SO$ nên $AB\perp(SOI)$. Kẻ $OH\perp SI\,(H\in SI)\Rightarrow OH\perp AB\Rightarrow OH\perp(SAB)$. Do đó: $d(O,(SAB))=OH=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Xét $\Delta OAI: OI=\sqrt{OA^2-IA^2}=\sqrt{(2a)^2-(a\sqrt{3})^2}=a$.	1.0
	Xét $\Delta SOI: \dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OI^2}\Rightarrow SO=\dfrac{1}{2}a$. Thể tích khối nón: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi.(2a)^2.\dfrac{1}{2}a=\dfrac{2a^3\pi}{3}$ (đvtt).	1.0