UBND TỈNH THÁI NGUYÊN	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG**
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020 - 2021**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn: TOÁN**
(Đề thi có 01 trang)	*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. *(4,0 điểm)* Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y))=4f(x)+f(y)-3x \quad \text{với mọi} \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)* Cho đa thức $P(x)=x^2+ax+b$ với a,b là các số nguyên. Biết rằng với mọi số nguyên tố p, luôn tồn tại số nguyên k để $P(k)$ và $P(k+1)$ đều chia hết cho p. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên m để $P(m)=P(m+1)=0$.

Câu 3. *(5,0 điểm)* Với mỗi số nguyên dương x, kí hiệu $s(x)$ là số chính phương lớn nhất không vượt quá x. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1=p$ (p là số nguyên dương) và

$$a_{n+1}=2a_n-s\left(a_n\right) \text{ với } \forall n\geq 1.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương p để dãy số (a_n) bị chặn.

Câu 4. *(5,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC, ω,γ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác. D là tiếp điểm của γ và BC. M thay đổi trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ các tiếp tuyến ME, MF với γ (E,F là các tiếp điểm). P đối xứng với D qua tâm của γ. H là trực tâm tam giác PEF.

a) Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định.

b) Lấy B_1, C_1 lần lượt thuộc tia đối của các tia CA, BA ($B_1\neq C, C_1\neq B$). Qua B_1 kẻ tiếp tuyến (khác AC) với γ, cắt BC, BA lần lượt tại A_1, C_2. Qua C_1 kẻ tiếp tuyến (khác AB) với γ, cắt CB, CA lần lượt tại A_2, B_2. Giả sử B_1C_2, C_1B_2, AM đồng quy và đường tròn ngoại tiếp các tam giác $MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2$ theo thứ tự cắt ω lần thứ hai tại X,Y,Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-zx+x^2}\geq 3.$$

———————Hết———————