

CHƯƠNG II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

1. Định nghĩa

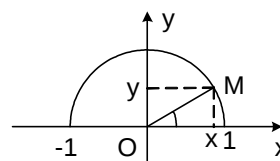
Lấy M trên nửa đường tròn đơn vị tâm O. Xét góc nhọn $\alpha = \widehat{xOM}$. Giả sử M(x; y).

$\sin \alpha = y$ (tung độ)

$\cos \alpha = x$ (hoành độ)

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \left(\frac{\text{tung độ}}{\text{hoành độ}} \right) \quad (x \neq 0)$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} \left(\frac{\text{hoành độ}}{\text{tung độ}} \right) \quad (y \neq 0)$$



Chú ý: – Nếu α tù thì $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

– $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^0$, $\cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^0$ và $\alpha \neq 180^0$.

2. Tính chất

• Góc phụ nhau

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^0 - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^0 - \alpha) = \tan \alpha$$

• Góc bù nhau

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^0 - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

4. Các hệ thức cơ bản

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

Chú ý: $0 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $a \sin 0^0 + b \cos 0^0 + c \sin 90^0$ b) $a \cos 90^0 + b \sin 90^0 + c \sin 180^0$
 c) $a^2 \sin 90^0 + b^2 \cos 90^0 + c^2 \cos 180^0$ d) $3 - \sin^2 90^0 + 2 \cos^2 60^0 - 3 \tan^2 45^0$
 e) $4a^2 \sin^2 45^0 - 3(a \tan 45^0)^2 + (2a \cos 45^0)^2$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng 0^0 ; 45^0 ; 60^0 . b) $2 \sin x + \cos 2x$ khi x bằng 45^0 ; 30^0 .

Bài 3. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

- a) $\sin \beta = \frac{1}{4}$, β nhọn. b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ c) $\tan x = 2\sqrt{2}$

Bài 4. Biết $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^0$, $\tan 15^0$, $\cot 15^0$.

Bài 5. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính giá trị của một biểu thức:

- a) $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^0 < x < 180^0$. Tính $A = \frac{\tan x + 3 \cot x + 1}{\tan x + \cot x}$.
 b) $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$ b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
 c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
 e) $\sin x \cdot \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$

Bài 7. Đơn giản các biểu thức sau:

- a) $\cos y + \sin y \cdot \tan y$ b) $\sqrt{1 + \cos b} \cdot \sqrt{1 - \cos b}$ c) $\sin a \sqrt{1 + \tan^2 a}$
 d) $\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \tan x \cdot \cot x$ e) $\frac{1 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$
 f) $\sin(90^0 - x) + \cos(180^0 - x) + \sin^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

Bài 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$ b) $\sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$

Bài 9.

- a)

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

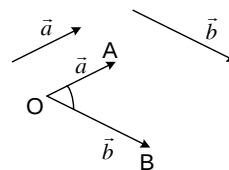
1. Góc giữa hai vector

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$.

Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ với $0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$.

Chú ý:

- + $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- + $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng
- + $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng
- + $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$



2. Tích vô hướng của hai vector

- Định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Đặc biệt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$.

- Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và $\forall k \in \mathbb{R}$, ta có:

- + $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- + $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$; $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.
- + $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$; $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- + $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.
- + $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ nhọn
- + $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ tù
- + $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ vuông.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

- Cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Khi đó: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
- Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Khi đó: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Tính các tích vô hướng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì.

- a) Chứng minh: $\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0$.
- b) Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Bài 4. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh:

$$\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} = 0.$$

Bài 5. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

- a) Chứng minh: $\vec{AM} \cdot \vec{AI} = \vec{AB} \cdot \vec{AI}$, $\vec{BN} \cdot \vec{BI} = \vec{BA} \cdot \vec{BI}$.
- b) Tính $\vec{AM} \cdot \vec{AI} + \vec{BN} \cdot \vec{BI}$ theo R.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

- a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

c) $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

e) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

HD: a) a^2

b) a^2

c) $2a^2$

d) $-a^2$

e) 0

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $BC = 4$, $CA = 3$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c) Tính giá trị biểu thức $S = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.

d) Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, suy ra AD.

HD: a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}$

c) $S = -\frac{29}{6}$

d) Sử dụng tính chất đường phân giác $\overrightarrow{DB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$, $AD = \frac{\sqrt{54}}{5}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $A = 60^\circ$. M là trung điểm của BC.

a) Tính BC, AM.

b) Tính IJ, trong đó I, J được xác định bởi: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.

HD: a) $BC = \sqrt{19}$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{2}$

b) $IJ = \frac{2}{3} \sqrt{133}$

Bài 10. Cho tứ giác ABCD.

a) Chứng minh $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2.$$

Bài 11. Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2.$$

Bài 12. Cho hình chữ nhật ABCD, M là một điểm bất kì. Chứng minh:

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

c) $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$ (O là tâm của hình chữ nhật).

Bài 13. Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$, $C(2; 0)$.

a) Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M biết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

e) Tìm toạ độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.

f) Tìm toạ độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N.

g) Tìm toạ độ điểm D để ABDC là hình chữ nhật.

h) Tìm toạ độ điểm K trên Ox để AOKB là hình thang đáy AO.

i) Tìm toạ độ điểm T thoả $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$

k) Tìm tọa độ điểm E đối xứng với A qua B.

l) Tìm tọa độ điểm I chân đường phân giác trong tại đỉnh C của ΔABC .

Bài 15. Cho tam giác ABC. tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $MA^2 = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

b) $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

d) $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Bài 16. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 5a^2$

c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$

d) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$

Bài 17. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M

sao cho: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

Bài 18.

a)

III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho ΔABC có: – độ dài các cạnh: $BC = a, CA = b, AB = c$

- độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a, m_b, m_c
- độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a, h_b, h_c
- bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
- nửa chu vi tam giác: p
- diện tích tam giác: S

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

2. Định lí sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

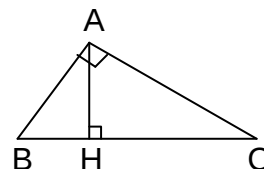
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hê-rông}) \end{aligned}$$

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông (nhắc lại)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao.

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pi-ta-go)
- $AB^2 = BC \cdot BH$, $AC^2 = BC \cdot CH$
- $AH^2 = BH \cdot CH$, $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
- $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C = c \tan B = c \cot C$; $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B = b \tan C = b \cot C$

**6. Hệ thức lượng trong đường tròn (bổ sung)**

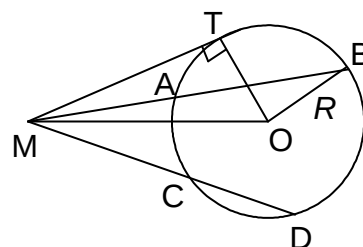
Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định.

- Từ M vẽ hai cát tuyến MAB, MCD.

$$P_{M/(O)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} = MO^2 - R^2$$

- Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT.

$$P_{M/(O)} = MT^2 = MO^2 - R^2$$



Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

- $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
- $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$
- $h_a = 2R \sin B \sin C$
- $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$$e) S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B \sin C = \sin^2 A$, $h_b h_c = h_a^2$

c) A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Bài 3. Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

b) Nêu kết quả trong trường hợp tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Bài 4. Cho ΔABC vuông ở A, $BC = a$, đường cao AH.

a) Chứng minh $AH = a \cdot \sin B \cdot \cos B$, $BH = a \cdot \cos^2 B$, $CH = a \cdot \sin^2 B$.

b) Từ đó suy ra $AB^2 = BC \cdot BH$, $AH^2 = BH \cdot HC$.

Bài 5. Cho ΔAOB cân đỉnh O, OH và OK là các đường cao. Đặt $OA = a$, $\widehat{AOH} = \alpha$.

a) Tính các cạnh của ΔOAK theo a và α .

b) Tính các cạnh của các tam giác OHA và AKB theo a và α .

c) Từ đó tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ theo $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

Bài 6. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c = 14$; $\hat{A} = 60^\circ$; $\hat{B} = 40^\circ$

b) $b = 4,5$; $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{C} = 75^\circ$

c) $c = 35$; $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{C} = 120^\circ$

d) $a = 137,5$; $\hat{B} = 83^\circ$; $\hat{C} = 57^\circ$

Bài 7. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\hat{C} = 54^\circ$

b) $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^\circ$

c) $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$

d) $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$

Bài 8. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$

b) $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$

c) $a = 4$; $b = 5$; $c = 7$

d) $a = 2\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Bài 9.

a)

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$b) \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cdot \cos x$$

$$c) \left(\frac{\tan^2 x - 1}{2 \tan x} \right)^2 - \frac{1}{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -1$$

$$d) \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$e) \frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \tan x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \cot x)} = \sin x - \cos x$$

$$f) \left(\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \cdot \left(\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$g) \cos^2 x (\cos^2 x + 2 \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x) = 1$$

Bài 2. Biết $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Tính $\cos 18^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\sin 162^\circ$, $\cos 162^\circ$, $\sin 108^\circ$, $\cos 108^\circ$, $\tan 72^\circ$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$a) A = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$b) B = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$$

Bài 4. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$.

a) Tính góc $(\vec{a}, \vec{b})$, biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và hai vector $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc.

b) Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$, biết $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.

c) Tính góc $(\vec{a}, \vec{b})$, biết $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$, $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$.

d) Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$, $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, biết $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

e) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, biết $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} + 3\vec{b})$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 6$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\cos A$.

b) M, N là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$. Tính MN.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD có $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài hai đường chéo AC và BD. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp DE$.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh $HK \perp IJ$.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Trên đường chéo AC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$.

a) Chứng minh DN vuông góc với MN.

b) Tính tổng $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$c) (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$d) (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

Bài 11. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

$$a) b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$$

$$b) (b^2 - c^2) \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$$

$$b) \sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin(B + C)$$

Bài 12. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

a) Nếu $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ thì $\hat{A} = 60^\circ$.

b) Nếu $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2$ thì $\hat{A} = 60^\circ$.

c) Nếu $\cos(A+C) + 3\cos B = 1$ thì $\hat{B} = 60^\circ$.

d) Nếu $b(b^2-a^2) = c(a^2-c^2)$ thì $\hat{A} = 60^\circ$.

Bài 13. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

a) Nếu $\frac{b^2-a^2}{2c} = b\cos A - a\cos B$ thì ΔABC cân đỉnh C.

b) Nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A$ thì ΔABC cân đỉnh B.

c) Nếu $a = 2b.\cos C$ thì ΔABC cân đỉnh A.

d) Nếu $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B.\sin C}$ thì ΔABC vuông tại A.

e) Nếu $S = 2R^2 \sin B.\sin C$ thì ΔABC vuông tại A.

Bài 14. Cho ΔABC . Chứng minh điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau là: $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Bài 15. Cho ΔABC .

a) Có $a = 5, b = 6, c = 3$. Trên các đoạn AB, BC lần lượt lấy các điểm M, K sao cho $BM = 2, BK = 2$. Tính MK.

b) Có $\cos A = \frac{5}{9}$, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{ABC} = \widehat{DAC}$, $DA = 6, BD = \frac{16}{3}$. Tính chu vi tam giác ABC.

HD: a) $MK = \frac{8\sqrt{30}}{15}$ b) $AC = 5, BC = \frac{25}{3}, AB = 10$

Bài 16. Cho một tam giác có độ dài các cạnh là: $x^2 + x + 1; 2x + 1; x^2 - 1$.

a) Tìm x để tồn tại một tam giác như trên.

b) Khi đó chứng minh tam giác ấy có một góc bằng 120° .

Bài 17. Cho ΔABC có $\hat{B} < 90^\circ$, AQ và CP là các đường cao, $S_{\Delta ABC} = 9S_{\Delta BPQ}$.

a) Tính $\cos B$.

b) Cho $PQ = 2\sqrt{2}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

HD: a) $\cos B = \frac{1}{3}$ b) $R = \frac{9}{2}$

Bài 18. Cho ΔABC .

a) Có $\hat{B} = 60^\circ, R = 2$, I là tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔACI .

b) Có $\hat{A} = 90^\circ, AB = 3, AC = 4$, M là trung điểm của AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCM .

c) Có $a = 4, b = 3, c = 2$, M là trung điểm của AB. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBCM .

HD: a) $R = 2$ b) $R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$ c) $R = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{23}{30}}$

Bài 19. Cho hai đường tròn (O_1, R) và (O_2, r) cắt nhau tại hai điểm A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại C và D. Gọi N là giao điểm của AB và CD (B nằm giữa

A và N). Đặt $\widehat{AO_1C} = \alpha$, $\widehat{AO_2D} = \beta$.

a) Tính AC theo R và α ; AD theo r và β .

b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$.

HD: a) $AC = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, $AD = 2r \sin \frac{\beta}{2}$ b) $\sqrt{Rr}$.

Bài 20. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC, $BD = a$, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CAD} = \beta$.

a) Tính AC.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD theo a, α , β .

HD: a) $AC = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$ b) $S = \frac{a^2 \cos(\beta - \alpha)}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ cân đỉnh A, $\widehat{A} = \alpha$, $AB = m$, D là một điểm trên cạnh BC sao cho $BC = 3BD$.

a) Tính BC, AD.

b) Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD là bằng nhau. Tính $\cos \alpha$ để bán kính của chúng bằng $\frac{1}{2}$ bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

HD: a) $BC = 2m \sin \frac{\alpha}{2}$, $AD = \frac{m}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$ b) $\cos \alpha = -\frac{11}{16}$.

Bài 22.

a)