

NGUYỄN THỊ ANH THƯ
&
ĐỘI TUYỂN TOÁN 11



Các bài toán về
GIỚI HẠN

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

LỜI GIỚI THIỆU

Kính chào Quý Thầy Cô cùng các bạn học sinh thân mến!

Trong quá trình ôn tập để chuẩn bị cho những kì thi học sinh giỏi, em cùng với **Đội tuyển Toán 11 Trường THPT Nguyễn Đình Chiểu - Tiền Giang** đã vô cùng thích thú với **Chuyên đề “Giới hạn”**. Nhằm để củng cố kiến thức, qua sưu tầm, tìm tòi và học hỏi, chúng em đã tổng hợp được một số dạng toán trong các đề thi Olympic tháng 4, Kì thi tuyển chọn học sinh giỏi, ... và phát triển thêm một số bài tập hay và khó. Chúng em hy vọng tài liệu nhỏ này có thể giúp Quý Thầy Cô và các bạn học sinh tham khảo, mở rộng thêm nhiều dạng bài tập mới, cũng như sẽ giúp ích cho các bạn học sinh, các anh chị ôn tập để chuẩn bị cho những kì thi sắp tới!

Khi tổng hợp và biên soạn, chúng em xin chân thành cảm ơn đến **Thầy Nguyễn Minh Thành** đã góp ý về mặt ý tưởng cũng như hỗ trợ về mặt công nghệ thông tin để giúp chúng em hoàn thiện tài liệu này. Ngoài ra, xin gửi lời cảm ơn đến những bạn sau:

- ① **Bạn Tăng Phồn Thịnh, Lớp 11A1, Niên khóa 2019 – 2022.**
- ② **Bạn Huỳnh Trần Nhật Quang, Lớp 11T1, Niên khóa 2019 – 2022.**
- ③ **Bạn Nguyễn Phạm Nhật Minh, Lớp 11T2, Niên khóa 2019 – 2022.**
- ④ **Bạn Lý Nguyễn, Lớp 11T2, Niên khóa 2019 – 2022.**
- ⑤ **Bạn Nguyễn Đức Lộc, Lớp 11T1, Niên khóa 2019 – 2022.**
- ⑥ **Bạn Nguyễn Minh Khoa, Lớp 11A2, Niên khóa 2019 – 2022.**

Cùng các bạn là thành viên của **Đội tuyển Toán 11 Trường THPT Nguyễn Đình Chiểu - Tiền Giang** đã cùng tham gia, đóng góp để tài liệu thêm hoàn thiện và chỉnh chu hơn.

Đây là dự án ebook đầu tiên của chúng em, dù đã cố gắng nhưng vẫn không thể tránh những sai sót, chúng em rất mong nhận được những phản hồi, góp ý từ Quý Thầy Cô và các bạn học sinh.

Kính chúc Quý Thầy Cô và các bạn học một năm mới thành công và hạnh phúc. Đặc biệt, chúc các bạn trong **Đội tuyển Toán 11 Trường THPT Nguyễn Đình Chiểu - Tiền Giang** đạt kết quả thật cao trong những kỳ thi sắp tới. Em xin trân trọng kính chào!

Mỹ Tho, ngày 18 tháng 02 năm 2021
Nguyễn Thị Anh Thư, Lớp 11T3, Niên khóa 2019 – 2022

CÁC BÀI TOÁN GIỚI HẠN TRONG ĐỀ THI OLYMPIC THÁNG 4 TP.HCM

📁 DẠNG 1. Bài toán giới hạn dãy số theo quy luật

Phương pháp giải.

- ☑ Thu gọn u_n , dựa vào đó tìm $\lim u_n$.
- ☑ Sử dụng định lý kẹp: “Xét 3 dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$. Giả sử với mọi n ta có $v_n \leq u_n \leq w_n$. Khi đó nếu $\lim v_n = \lim w_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) thì $\lim u_n = L$.”

Bài 1. Tính $\lim u_n$ với

$$u_n = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{n}{(n-2)! + (n-1)! + n!}, \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

(Đề thi Olympic Tháng 4 TP.HCM lần 1 Lớp 11 - Năm học 2014 - 2015)

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{n}{(n-2)! + (n-1)! + n!} &= \frac{n}{(n-2)! [1 + n - 1 + n(n-1)]} \\ &= \frac{1}{(n-2)!n} = \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } u_n = \sum_{k=3}^n \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = \sum_{k=3}^n \left[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right] = \frac{1}{2!} - \frac{1}{n!}.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \sum_{k=3}^n \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = \lim \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{n!} \right) = \frac{1}{2}.$$

Bài 2. Tính giới hạn $A = \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \lim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} \right) = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Áp dụng tính chất $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$ để giải quyết các bài toán dạng trên.

Bài 3. Tính giới hạn $B = \lim \left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right]$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$.

Suy ra $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$.

Vậy $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4}$. ■

Nhận xét. Áp dụng tính chất

$$\frac{1}{n(n+1) \dots (n+k)} = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} \right], \forall n, k \in \mathbb{N}^*$$

để giải quyết các bài toán dạng trên.

Bài 4. Tính giới hạn $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}}$.

Lời giải

Ta có $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{1 + \frac{1}{\frac{2 \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3 \cdot 4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{1 + 2 \left[\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{2 - \frac{2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021(n+1)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{2021}{2}.$$
 ■

Nhận xét. Áp dụng tính chất của cấp số cộng, ta có $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và tính chất đã sử dụng ở

Bài toán 2 – Dạng 1, bài toán trở nên dễ dàng.

Bài 5. Tính giới hạn $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_n = \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$.

Lời giải

Ta có $a_n = \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3} = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$.

Suy ra $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3} \right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$.

Vậy $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^3} \right] = 1$. ■

Bài 6. Tính giới hạn $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right]$.

Lời giải

(Lời giải của bạn Huỳnh Trần Nhật Quang)

Ta có $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$

Vậy $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$

 **Bài 7.** Cho dãy số $u_n = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2}$. Tìm giới hạn của dãy số đã cho.

 Lời giải

(Lời giải của bạn Nguyễn Phạm Nhật Minh)

Ta có $u_n + 1 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2}{4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)}$
 $= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{4n+1}{2(n+1)}.$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n+2} = 2$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Nhận xét. Áp dụng tính chất $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, bài toán được xử lý khá dễ dàng.

 **Bài 8.** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ với $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

 Lời giải

Ta có $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \dots \frac{n^2-1}{n^2}$
 $= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$

 **Bài 9.** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ với $u_n = \frac{n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}.$

 Lời giải

Ta có $u_n = \frac{n + \left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{n-2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right) + \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \dots - \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}$
 $= \frac{\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n} + \frac{n}{n+1} + \left(n - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \dots - \frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}$
 $= \frac{n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} + \dots + 1 - \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}$

$$= \frac{n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}} = n + 1.$$

Vậy $\lim u_n = \lim (n + 1) = +\infty$.

Bài 10. Tính $\lim u_n$ với

$$u_n = \frac{\sqrt{3.4 + \frac{1}{5}} + \sqrt{4.5 + \frac{1}{6}} + \sqrt{5.6 + \frac{1}{7}} + \dots + \sqrt{n(n+1) + \frac{1}{n+2}}}{n^3 + 2021}, (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Lời giải

Ta có $n(n+1) + \frac{1}{n+2} < n(n+1) + \frac{1}{4}$ (vì $n \geq 3$ thì $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$).

$$\Leftrightarrow n(n+1) + \frac{1}{n+2} < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1) + \frac{1}{n+2}} < n + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sum_{k=3}^n \sqrt{k(k+1) + \frac{1}{k+2}} < \sum_{k=3}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} - 3 + \frac{n-2}{2} = \frac{n^2 + 2n - 8}{2}.$$

Do đó, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có $0 < u_n < \frac{n^2 + 2n - 8}{2(n^3 + 2021)}$. Mà $\lim \frac{n^2 + 2n - 8}{2(n^3 + 2021)} = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

Bài 11. Tính $\lim u_n$ với $u_n = \frac{2.2^2 + 3.2^3 + \dots + n.2^n}{(n-1)(2^n + 1)}$.

Lời giải

Cách 1. (Lời giải của bạn Tăng Phôn Thịnh)

Đặt $S_n = 2.2^2 + 3.2^3 + \dots + n.2^n$.

Khi đó $S_n + 2 = 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \dots + n.2^n$

$$= (2 + 2^2 + \dots + 2^n) + (2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) + \dots + (2^{n-1} + 2^n) + 2^n$$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} + \dots + \frac{2^{n-1}(1-2^2)}{1-2} + \frac{2^n(1-2^1)}{1-2}$$

$$= n.2^{n+1} - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = n.2^{n+1} - \frac{2(1-2^n)}{1-2} = (n-1).2^{n+1} + 2$$

$$\text{Suy ra } S_n + 2 = (n-1).2^{n+1} + 2 \Leftrightarrow S_n = (n-1).2^{n+1}.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \frac{S_n}{(n-1)(2^n + 1)} = \lim \frac{(n-1).2^{n+1}}{(n-1)(2^n + 1)} = \lim \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \lim \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2.$$

Cách 2.

Ta có $n.2^n = (n-1).2^{n+1} - (n-2).2^n, \forall n$.

$$\text{Suy ra } \sum_{k=2}^n k.2^k = \sum_{k=2}^n [(k-1).2^{k+1} - (k-2).2^k] = (n-1).2^{n+1}.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \frac{(n-1).2^{n+1}}{(n-1)(2^n + 1)} = \lim \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \lim \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2.$$

Bài 12. Tính $\lim \frac{u_n}{n}$ với $u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n^2 + 2n + 1 + 1) + (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Suy ra $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = n + 1 - \frac{1}{n+1}.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1 - \frac{1}{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$

 **Bài 13.** Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \cdot \dots \cdot f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \cdot \dots \cdot f(2n)}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n}$.

Lời giải

Ta có $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1$

$$= (n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2) = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1].$$

Suy ra $\frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{[(2n-1)^2 + 1](4n^2 + 1)}{(4n^2 + 1)[(2n+1)^2 + 1]} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}.$

Khi đó $u_n = \frac{1^2 + 1}{3^2 + 1} \cdot \frac{3^2 + 1}{5^2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{1}{2n^2 + 2n}.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{\frac{1}{2n^2 + 2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

DẠNG 2. Bài toán giới hạn có chứa căn thức

Phương pháp giải. Sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp để khử các căn thức đồng thời làm xuất hiện nhân tử chung để khử các dạng vô định.

Các công thức nhân lượng liên hợp cần nhớ:

☒ $\sqrt{A} \pm B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} \mp B}.$

☒ $\sqrt[3]{A} \pm B = \frac{A \pm B^3}{\sqrt[3]{A^2} \mp B\sqrt[3]{A} + B^2}.$

 **Bài 14.** Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - 2\sqrt{x-1} + 2x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x-3} - 2x}.$

(Đề thi Olympic Tháng 4 TP.HCM lần 1 Lớp 11 - Năm học 2014 - 2015)

Lời giải

Cách 1. (Lời giải của bạn Nguyễn Thị Anh Thư)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{5-2x}-1) - 2(\sqrt{x-1}-1) + 2(x-2)}{(\sqrt{2x-3}-1) + (\sqrt{6x-3}-3) - 2(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + 2(x-2)}{\frac{2(x-2)}{\sqrt{2x-3}+1} + \frac{6(x-2)}{\sqrt{6x-3}+3} - 2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \left(-\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + 2 \right)}{(x-2) \left(\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} + \frac{6}{\sqrt{6x-3}+3} - 2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} + 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}+1}}{\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} - 1 + \frac{6}{\sqrt{6x-3}+3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\sqrt{5-2x}-1}{\sqrt{5-2x}+1} + \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}}{\frac{1-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} + \frac{3-\sqrt{6x-3}}{\sqrt{6x-3}+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{2(x-2)}{(\sqrt{5-2x}+1)^2} + \frac{2}{x-2}}{-\frac{2(x-2)}{(\sqrt{2x-3}+1)^2} - \frac{1}{(\sqrt{6x-3}+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{2}{(\sqrt{5-2x}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{-\frac{2}{(\sqrt{2x-3}+1)^2} - \frac{1}{(\sqrt{6x-3}+3)^2}} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Bài toán thuộc dạng $\frac{0}{0}$ nên ta phải tìm cách khử nhân tử chung làm cho tử và mẫu bằng 0.

Cụ thể ở bài toán này ta cần tạo nhân tử $x-2$. Do đó để tìm được lượng liên hợp thích hợp cho mỗi căn

$$\text{thức, ta thay } x=2 \text{ vào từng căn thức như sau } \begin{cases} \sqrt{5-2x} = \sqrt{5-2 \cdot 2} = 1 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \\ \sqrt{2x-3} = \sqrt{2 \cdot 2-3} = 1 \\ \sqrt{6x-3} = \sqrt{6 \cdot 2-3} = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy lượng liên hợp cần tạo là } \begin{cases} \sqrt{5-2x}-1 \\ \sqrt{x-1}-1 \\ \sqrt{2x-3}-1 \\ \sqrt{6x-3}-3 \end{cases}.$$

Cách 2.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x}-2\sqrt{x-1}+2x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x-3}-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x}-(3-x)+x-2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}-(x-1)+\sqrt{6x-3}-(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{5-2x-(x-3)^2}{\sqrt{5-2x}+3-x} + \frac{x^2-4(x-1)}{x+2\sqrt{x-1}}}{\frac{2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{2x-3}+x-1} + \frac{6x-3-(x+1)^2}{\sqrt{6x-3}+x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{(x-2)^2}{\sqrt{5-2x}+3-x} + \frac{(x-2)^2}{x+2\sqrt{x-1}}}{-\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2x-3}+x-1} - \frac{(x-2)^2}{\sqrt{6x-3}+x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{\sqrt{5-2x}+3-x} + \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}}{-\frac{1}{\sqrt{2x-3}+x-1} - \frac{1}{\sqrt{6x-3}+x+1}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Bài toán thuộc dạng $\frac{0}{0}$ nên ta phải tìm cách khử nhân tử làm cho tử và mẫu bằng 0, nếu ta tìm lượng liên hợp để chỉ tạo nhân tử chung $x-2$ của tử và mẫu như **Cách 1** thì lúc sau vẫn còn dạng $\frac{0}{0}$ nên phải tiếp tục liên hợp để tạo nhân tử chung “**khá vất vả**”. Nếu để ý rằng $x=2$ là nghiệm kép của tử và mẫu, khi đó ta sẽ tìm cách liên hợp để xuất hiện luôn nhân tử $(x-2)^2$.

• Cách kiểm tra nghiệm kép của 1 đa thức

$$\text{Bấm } \frac{d}{dx} (\sqrt{5-2x}-2\sqrt{x-1}+2x-3) \Big|_{x=2} \text{ và } \frac{d}{dx} (\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x-3}-2x) \Big|_{x=2} \text{ nếu kết quả bằng 0 thì}$$

đa thức nhận $x = 2$ là nghiệm kép.

Chú ý. Kí hiệu $\left. \frac{d}{dx} (f(x)) \right|_{x=x_0}$ là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

- Cách liên hợp để tạo nhân tử $(x-2)^2$.

Đặt $\sqrt{5-2x} = ax + b$. Vì $x = 2$ là nghiệm kép nên ta có

$$\begin{cases} \sqrt{5-2 \cdot 2} = a \cdot 2 + b \\ \left. \frac{d}{dx} (\sqrt{5-2x}) \right|_{x=2} = \left. \frac{d}{dx} (ax+b) \right|_{x=2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}.$$

Vậy lượng liên hợp cần tạo là $\sqrt{5-2x} - (3-x)$. Tương tự cho các căn thức còn lại, các lượng liên hợp

$$\text{cần tạo là } \begin{cases} x-2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{2x-3} - (x-1) \\ \sqrt{6x-3} - (x+1) \end{cases}.$$

 **Bài 15.** Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-2x} + x - 2}{2\sqrt{x} - 1 - x}$.

(Đề thi Olympic Tháng 4 TP.HCM lần 2 Lớp 11 – Năm học 2015 - 2016)

 **Lời giải**

$$\text{Ta có } B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x-2)^2 - (3-2x)}{x-2-\sqrt{3-2x}}}{\frac{4x - (1+x)^2}{2\sqrt{x} + 1 + x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x-1)^2}{x-2-\sqrt{3-2x}}}{\frac{(x-1)^2}{-2\sqrt{x} + 1 + x}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{2\sqrt{x} + 1 + x}{x-2-\sqrt{3-2x}} = 2.$$

Nhận xét. Bài toán thuộc dạng $\frac{0}{0}$ và $x = 1$ là nghiệm kép của tử và mẫu. Bằng cách tạo lượng liên hợp như bài trên, ta thấy bài toán này đơn giản hơn vì lượng liên hợp đã có sẵn.

 **Bài 16.** Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+1)\sqrt{5+2x} - \sqrt[3]{x-1} - 5x-4}{(1-3x)\sqrt{x+2} + x\sqrt{2x-3} + x^3}$.

 **Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } C &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+1)(\sqrt{5+2x}-3) + (1-\sqrt[3]{x-1}) + x-2}{(1-3x)(\sqrt{x+2}-2) + x(\sqrt{2x-3}-1) + x^3-5x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(2x+1)(2x-4)}{\sqrt{5+2x}+3} + \frac{2-x}{1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}} + x-2}{\frac{(1-3x)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x(2x-4)}{\sqrt{2x-3}+1} + (x-2)(x^2+2x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1-3x}{\sqrt{5+2x}+3} - \frac{2x}{1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 1}{\frac{1-3x}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{2x}{\sqrt{2x-3}+1} + x^2+2x-1} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{3} + 1}{-\frac{5}{4} + 2 + 7} = \frac{28}{93}. \end{aligned}$$

 **Bài 17.** Tính giới hạn $D = \lim \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+3n+2} \right)$.

 **Lời giải**

(Lời giải của bạn Nguyễn Phạm Nhật Minh)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } D &= \lim \left[\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) + \left(n - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 2} \right) \right] \\ &= \lim \left[\frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \frac{n^3 - (n^3 + 3n + 2)}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 3n + 2} + \sqrt[3]{(n^3 + 3n + 2)^2}} \right] \\ &= \lim \left[\frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \frac{-3n - 2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 3n + 2} + \sqrt[3]{(n^3 + 3n + 2)^2}} \right] \\ &= \lim \left[\frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} + \frac{-\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)^2}} \right] = \frac{1}{1+1} + \frac{0}{1+1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 **Bài 18.** Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{2 - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{x+5}}$.

(Đề thi Olympic Tháng 4 TP.HCM lần 3 Lớp 11 – Năm học 2016 - 2017)

 **Lời giải**

Phân tích. Lượng liên hợp cần tạo là $\begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 \\ \sqrt[3]{x-2} - 1 \\ \sqrt{x-2} - 1 \\ \sqrt[3]{x+5} - 2 \end{cases}$. Vậy giờ chỉ việc tách sao cho khéo thôi!!!

(Lời giải của bạn Lý Nguyễn)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } E &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{2 - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{x+5}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x-2} - 1)}{2 - \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x+5}(\sqrt{x-2} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{4 - (x+1)}{2 + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \cdot \frac{(x-2) - 1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1}}{\frac{8 - (x+5)}{4 + \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{(x+5)^2}} - \sqrt[3]{x+5} \cdot \frac{(x-2) - 1}{\sqrt{x-2} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{x-3}{2 + \sqrt{x+1}} - \frac{(x-3)\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1}}{-\frac{x-3}{4 + \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{(x+5)^2}} - \frac{(x-3)\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{x-2} + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{1}{2 + \sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1}}{-\frac{1}{4 + \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{(x+5)^2}} - \frac{\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{x-2} + 1}} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{12} - 1} = \frac{11}{13}. \end{aligned}$$

 **Bài 19.** Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{ax+1} - 1}{x}$, với $a \neq 0$ và $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

 **Lời giải**

Đặt $t = \sqrt[n]{ax+1}$. Suy ra khi $x \rightarrow 0$ thì $t \rightarrow 1$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax+1) - 1}{x} = a.$$

$$\text{Khi đó } F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{ax+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t^n - 1}{x(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t^n - 1}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1} = \frac{a}{n}.$$

Nhận xét. Bài toán thuộc dạng $\frac{0}{0}$ và nhận $x = 0$ là nghiệm chung của tử và mẫu.

Thay $x = 0$ vào $\sqrt[n]{ax+1}$ ta được 1 nên lượng liên hợp cần tạo là $\sqrt[n]{ax+1} - 1$.

Áp dụng hằng đẳng thức $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ để nhân liên hợp giúp ta khử được căn bậc n , bài toán giờ được xử lý dễ dàng.

 **Bài 20.** Tính giới hạn $G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$.

Lời giải

(Lời giải của bạn Huỳnh Trần Nhật Quang)

Đặt $y = \sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}$. Suy ra khi $x \rightarrow 0$ thì $y \rightarrow 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)(3x+1)(4x+1) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (24x^2 + 26x + 9) = 9$.

Khi đó $G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^n - 1}{x(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^n - 1}{x} \cdot \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1} = \frac{9}{n}.$

 **Bài 21.** Tính giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{2.3x+1} \cdot \sqrt[4]{3.4x+1} \dots \sqrt[2021]{2020.2021x+1} - 1}{x}$.

Lời giải

Phân tích. Thay $x = 0$ vào từng căn thức, ta có lượng liên hợp cần tạo của mỗi căn thức có dạng $\sqrt[n+1]{n(n+1)x+1} - 1$. Khi đó, ta có lời giải như sau

Ta có $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+1} - 1) \sqrt[3]{2.3x+1} \sqrt[4]{3.4x+1} \dots \sqrt[2021]{2020.2021x+1}}{x}$

$+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{2.3x+1} - 1) \sqrt[4]{3.4x+1} \dots \sqrt[2021]{2020.2021x+1}}{x} + \dots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2021]{2020.2021x+1} - 1}{x}.$

Mặt khác, theo kết quả **Bài toán 19 – Dạng 2** thì

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{ax+1} - 1}{x} = \frac{a}{n} \text{ và để ý rằng } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n+1]{n(n+1)x+1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó $L = 1 + 2 + \dots + 2020 = \frac{2020.2021}{2} = 1010.2021 = 2041210$.

DẠNG 3. Bài toán giới hạn có liên quan đến lượng giác

Phương pháp giải.

☒ Biến đổi để đưa về giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

☒ Sử dụng định lý kẹp: “Xét 3 dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$. Giả sử với mọi n ta có $v_n \leq u_n \leq w_n$. Khi đó nếu $\lim v_n = \lim w_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) thì $\lim u_n = L$.”

Bài 22. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2 - 2\sqrt{6x+3}}{x^2 - 2x + 2 - \cos(x-1)}$.

(Đề thi Olympic Tháng 4 TP.HCM lần 4 Lớp 11 – Năm học 2017 - 2018)

Lời giải

Phân tích. Bài toán thuộc dạng $\frac{0}{0}$ và $x = 1$ là nghiệm kép của tử và mẫu. Như **Bài toán 14 – Dạng 2**, ta có các lượng liên hợp cần tạo là $\begin{cases} x+2-\sqrt{6x+3} \\ x+1-2\sqrt{x} \end{cases}$, sau đó đưa về giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+2-\sqrt{6x+3}) + \sqrt{6x+3}(x+1-2\sqrt{x})}{(x-1)^2 + 2\sin^2 \frac{x-1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1) \left[(x+2) - (6x+3) \right] + \sqrt{6x+3} \cdot \frac{(x+1)^2 - 4x}{x+1+2\sqrt{x}}}{(x-1)^2 + 2\sin^2 \frac{x-1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2+\sqrt{6x+3}} + \frac{(x-1)^2\sqrt{6x+3}}{x+1+2\sqrt{x}}}{(x-1)^2 + 2\sin^2 \frac{x-1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x+2+\sqrt{6x+3}} + \frac{\sqrt{6x+3}}{x+1+2\sqrt{x}}}{1 + 2 \frac{\sin^2 \frac{x-1}{2}}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x+2+\sqrt{6x+3}} + \frac{\sqrt{6x+3}}{x+1+2\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x-1}{2}}{\frac{x-1}{2}} \right)^2} = \frac{\frac{2}{6} + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

Bài 23. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5 \sin 2x + \cos^2 x}{x^2 + 2}$.

Lời giải

(Lời giải của bạn Huỳnh Trần Nhật Quang)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5 \sin 2x + \cos^2 x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 1 - 10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 1}{2x^2 + 4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4}. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác, } 0 \leq \left| \frac{-10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} \right| \leq \frac{\sqrt{(10^2 + 1^2)} (\sin^2 2x + \cos^2 2x)}{2x^2 + 4} = \frac{\sqrt{101}}{2x^2 + 4}, \forall x$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{101}}{2x^2 + 4} = 0 \text{ nên } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} = 0.$$

Bài 24. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = -1.$$

Bài 25. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin x \tan 2x}$.

 Lời giải

$$\text{Ta có } D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin x \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2} \cos 2x}{\sin x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \right] = \frac{9}{4}.$$

 **Bài 26.** Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x \right).$

 Lời giải

Đặt $t = x - \frac{\pi}{2}$. Suy ra $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } E &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} - \tan^2 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t (1 - \cos t)}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cos t \cdot \frac{t^2}{\sin^2 t} \cdot \frac{\sin^2 \frac{t}{4}}{\frac{t^2}{4} \cdot 4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 **Bài 27.** Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 1) \tan \frac{2}{x}.$

 Lời giải

Đặt $t = \frac{1}{x}$. Suy ra khi $x \rightarrow \infty$ thì $t \rightarrow 0$.

$$\text{Khi đó } F = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 1) \tan \frac{2}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{5}{t} + 1 \right) \tan 2t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2(5+t)}{\cos 2t} = 10.$$

 **Bài 28.** Tính giới hạn $G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2}$, a là tham số thực.

 Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2} &= \frac{\sin(a+2x) - \sin(a+x) + \sin a - \sin(a+x)}{x^2} \\ &= \frac{2 \cos \left(a + \frac{3x}{2} \right) \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \left(a + \frac{x}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x^2} \left[\cos \left(a + \frac{3x}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{x}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{4}{x^2} \sin^2 \frac{x}{2} \sin(a+x). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } G = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{4}{x^2} \sin^2 \frac{x}{2} \sin(a+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [-\sin(a+x)] = -\sin a.$$

 **Bài 29.** Tính giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$

 Lời giải

Cách 1.

$$\text{Ta có } \cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) \cos 2x = \frac{1}{4} (\cos 6x + \cos 2x + \cos 4x + 1).$$

$$\text{Suy ra } 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{4} (1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x) = \frac{1}{2} (\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x).$$

$$\text{Khi đó } H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2 x}{x^2} + 4 \cdot \frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} + 9 \cdot \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} \right] \cdot 4 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$= 1 + 4 + 9 = 14.$$

Cách 2.

$$\text{Ta có } \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} + \cos x \cos 2x \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cos 2x \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cos 2x \cdot \frac{\sin^2 3x}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 4 = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } H = 1 + 4 + 9 = 14.$$

Nhận xét. Ở bài toán trên, làm theo **Cách 2** sẽ cho ta lời giải ngắn gọn và giải quyết bài toán tổng quát tiếp theo khá nhẹ nhàng.

Bài 30. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_1 x \cos a_2 x \dots \cos a_n x}{x^2}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_1 x \cos a_2 x \dots \cos a_n x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos a_1 x}{x^2} + \cos a_1 x \cdot \frac{1 - \cos a_2 x}{x^2} + \dots + \cos a_1 x \cos a_2 x \dots \cos a_{n-1} x \cdot \frac{1 - \cos a_n x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \frac{a_1 x}{2}}{\left(\frac{a_1 x}{2}\right)^2} \cdot \frac{a_1^2}{2} + \cos a_1 x \cdot \frac{\sin^2 \frac{a_2 x}{2}}{\left(\frac{a_2 x}{2}\right)^2} \cdot \frac{a_2^2}{2} + \dots + \cos a_1 x \cos a_2 x \dots \cos a_{n-1} x \cdot \frac{\sin^2 \frac{a_n x}{2}}{\left(\frac{a_n x}{2}\right)^2} \cdot \frac{a_n^2}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Bài 31. Tính giới hạn $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x} + 1} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

DẠNG 4. Một số bài toán tổng hợp

Phương pháp giải.

 **Bài 32.** Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức

$$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $\lim u_n = 0$ khi và chỉ khi $a + b + c = 0$.

 Lời giải

- Giả sử $\lim u_n = 0$.

Đặt $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} = a + b\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + c\sqrt{\frac{n+3}{n+1}}$. Suy ra $v_n \rightarrow a + b + c$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Khi đó $u_n = v_n\sqrt{n+1}$.

Nếu $a + b + c \neq 0$ suy ra $\lim u_n = \lim v_n\sqrt{n+1} = \infty$ (trái với $\lim u_n = 0$).

Suy ra $a + b + c = 0$.

- Giả sử $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c$.

Khi đó $u_n = b(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + c(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = \frac{b}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + \frac{2c}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}$.

Suy ra $\lim u_n = 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

 **Bài 33.** Cho a, b là các số thực thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a+b)x + a + b - 1}{x - 1} = -3 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2.$$

Tìm a và b .

 Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a+b)x + a + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a-b+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-a-b+1) = 2-a-b$.

Suy ra $a+b=5$ (1).

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-bx}}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{ax}{x \left(\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{ax+1} + 1 \right)} + \frac{bx}{x(1 + \sqrt{1-bx})} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{ax+1} + 1} + \frac{b}{1 + \sqrt{1-bx}} \right] = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} a+b=5 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. ■

 **Bài 34.** Biết rằng $a+b=4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn.

Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right)$.

 Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)(1+x+x^2)}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (a+ax+ax^2-b) = 0 \Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Suy ra $\begin{cases} 2a-b=-1 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$.

Vậy $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = 1$.

Bài 35. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1} - ax - b \right) = 0$. Tính $a+2b$.

Lời giải

(Lời giải của bạn Nguyễn Minh Khoa)

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-3x+1-(2x+1)(ax+b)}{2x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-2a)x^2 - (a+2b+3)x + 1-b}{2x+1}$.

Để $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1} - ax - b \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2a=0 \\ a+2b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy $a+2b = 2+2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -3$.

Bài 36. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{an^2+bn+1} - n) = \frac{3}{2}$. Tính a^2+b^2 .

Lời giải

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{an^2+bn+1} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^2+bn+1-n^2}{\sqrt{an^2+bn+1}+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)n^2+bn+1}{\sqrt{an^2+bn+1}+n}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)n+b+\frac{1}{n}}{\sqrt{a+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$.

Để $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{an^2+bn+1} - n) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ \frac{b}{\sqrt{a}+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$.

Vậy $a^2+b^2 = 1^2+3^2 = 10$.

Bài 37. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{ax+b}-3}{x^2-9} = \frac{1}{54}$. Tìm a và b .

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{ax+b}-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax+b-27}{(x^2-9) \left[\sqrt[3]{(ax+b)^2} + 3\sqrt[3]{ax+b} + 9 \right]}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3) + 3a + b - 27}{(x^2 - 9) \left[\sqrt[3]{(ax+b)^2} + 3\sqrt[3]{ax+b+9} \right]}.$$

$$\text{Để } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{ax+b}-3}{x^2-9} = \frac{1}{54} \text{ thì } \begin{cases} 3a+b-27=0 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a}{(x+3) \left[\sqrt[3]{(ax+b)^2} + 3\sqrt[3]{ax+b+9} \right]} = \frac{1}{54} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=27 \\ \frac{a}{6 \left[\sqrt[3]{(3a+b)^2} + 3\sqrt[3]{3a+b+9} \right]} = \frac{1}{54} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=18 \end{cases}.$$

 **Bài 38.** Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x - 2} = 5$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2b - 3a$.

Lời giải

Cách 1. Vì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x - 2} = 5$ nên phương trình $x^2 - ax + b = 0$ có nghiệm $x = 2$.

Suy ra $2^2 - 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = 2a - 4$.

Với $b = 2a - 4$, ta được $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + 2a - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2-a)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2-a) = 5$

$\Leftrightarrow 4 - a = 5 \Leftrightarrow a = -1$. Từ đó tìm được $b = -6$. Vậy $P = 2b - 3a = -9$. **Cách 2.** Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x - 2} = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + (2-a)x + 2a - 4 + 4 - 2a + b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x + 2 - a + \frac{4 - 2a + b}{x - 2} \right)$. Để $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x - 2} = 5$

thì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2 - a) = 5 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}$. Vậy $P = 2b - 3a = 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-1) = -9$.

 **Bài 39.** Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + ax^2 - 4x + b}{(x-1)^2} = 5$. Tính $a + b$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + ax^2 - 4x + b}{(x-1)^2} = 5$ nên phương trình $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ phải có nghiệm kép $x = 1$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4$.

Khi đó $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + b = 0 \\ 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$.

Thử lại, với $a = -1, b = 3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(2x+3)}{(x-1)^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ (thỏa mãn).

Vậy $a + b = 2$.

 **Bài 40.** Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^n - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x + 1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)] \\ &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Bài 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 2$.

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 7f(x) - 15}{x - 1}$.

Lời giải

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 5] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 7f(x) - 15}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[2f(x) + 3][f(x) - 5]}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) + 3] = 2(2 \cdot 5 + 3) = 26. \end{aligned}$$

Bài 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 1} = 3$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{f(x)} - 2]^2}{(\sqrt{x} - 1)[\sqrt{f(x)} + 5 - 3]}$.

Lời giải

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 1} = 3 \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 1} [\sqrt{f(x)} - 2] = 0 \Leftrightarrow f(1) = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{f(x)} - 2]^2}{(\sqrt{x} - 1)[\sqrt{f(x)} + 5 - 3]} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{f(x)} - 2]^2 (\sqrt{x} + 1) [\sqrt{f(x)} + 5 + 3]}{(x - 1)[f(x) - 4]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 1} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1) [\sqrt{f(x)} + 5 + 3]}{\sqrt{f(x)} + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1) [\sqrt{f(x)} + 5 + 3]}{\sqrt{f(x)} + 2} \\ &= 3 \cdot \frac{(\sqrt{1} + 1)(\sqrt{f(1)} + 5 + 3)}{\sqrt{f(1)} + 2} = 9. \end{aligned}$$

Bài 43. Cho các đa thức $f(x), g(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 1}{x - 1} = 3$.

Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)g(x)} + 4 - 3}{x - 1}$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 1}{x - 1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)g(x)} + 4 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - 5}{(x - 1)[\sqrt{f(x)g(x)} + 4 + 3]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)[g(x) - 1] + f(x) - 5}{(x - 1)[\sqrt{f(x)g(x) + 4} + 3]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 1}{x - 1} \cdot \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)g(x) + 4} + 3} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)g(x) + 4} + 3} \\
 &= 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{5 \cdot 1 + 4} + 3} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 1 + 4} + 3} = \frac{17}{6}.
 \end{aligned}$$

 **Bài 44.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $4f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) + 9x = 0, \forall x \neq 0$.

Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{xf(x) + 14} - 5}{x^2 - x - 2}$.

 **Lời giải**

Từ giả thiết, thay x thành $\frac{1}{x}$ ta được
$$\begin{cases} 4f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) + 9x = 0 & (1) \\ 5f(x) + 4f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{9}{x} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy 5.(2) - 4.(1) ta suy ra $9f(x) + \frac{45}{x} - 36x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4x - \frac{5}{x}$.

Khi đó
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{xf(x) + 14} - 5}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 5}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2)(x + 2)}{(x + 1)(x - 2)(\sqrt{4x^2 + 9} + 5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x + 2)}{(x + 1)(\sqrt{4x^2 + 9} + 5)} = \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

Đáp số: $\frac{12}{5}$.

b) $\lim \frac{n\sqrt{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}}{2n^2 + n + 1}$.

Đáp số: $\frac{1}{2}$.

c) $\lim \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2}{n^3}$.

Đáp số: $\frac{4}{3}$.

d) $\lim \left[\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n(2n + 2)} \right]$.

Đáp số: $\frac{1}{4}$.

e) $\lim n^2 \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} \right]$.

Đáp số: $+\infty$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{2n + 1}$.

Đáp số: $-\frac{1}{2}$.

 **Bài 2.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$, với $|a| < 1, |b| < 1$.

Đáp số: $\frac{1 - b}{1 - a}$.

b) $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right), n \in \mathbb{N}^*.$

Đáp số: $\frac{1}{2}.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$

Đáp số: 0.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2n]{2} \right).$

Đáp số: 2.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \right).$

Đáp số: 0.

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1+n^6}}{\sqrt{n^4+1} + n^2}.$

Đáp số: 1.

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}.$

Đáp số: $-1.$

c) $\lim \frac{(n - \sqrt{n^2-1})^5 + (n + \sqrt{n^2-1})^5}{n^5}.$

Đáp số: 32.

d) $\lim \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}.$

Đáp số: $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

e) $\lim \left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{n} - \frac{\sqrt{4n^6+2}}{n} \right).$

Đáp số: $-\infty.$

Bài 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{3n-1} - \sqrt{3n+21}).$

Đáp số: 0.

b) $\lim (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2}).$

Đáp số: $\frac{1}{2}.$

c) $\lim (\sqrt{9n^2+2n} - \sqrt[3]{8n^3+6n+1} - n).$

Đáp số: $-\frac{1}{6}.$

d) $\lim n (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}).$

Đáp số: $+\infty.$

e) $\lim n (\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt[3]{n+n^3}).$

Đáp số: $+\infty.$

Bài 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x}.$

Đáp số: 1.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3}.$

Đáp số: $-\frac{2}{3}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4} - \sqrt{3x-2}}{x+1}.$

Đáp số: 0.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}.$

Đáp số: 0.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}.$

Đáp số: $-2.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$

Đáp số: $\frac{7}{36}.$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$

Đáp số: $\frac{1}{n!}.$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}.$

Đáp số: $\frac{n(n-1)}{2}.$

 **Bài 6.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^4(5x+3)^6(6x+2)^7}{(3-2x)^5(6-3x)^9(7-2x)^3}.$

Đáp số: $-\frac{125000}{9}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}.$

Đáp số: $\frac{2}{5}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+2}{\sqrt{x^2+3}-x}.$

Đáp số: $\frac{5}{2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4-9x^3}+x^2}{x-3}.$

Đáp số: $+\infty.$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}).$

Đáp số: $\frac{3}{2}.$

 **Bài 7.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x} + \sqrt{3x+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right).$

Đáp số: $\frac{1}{2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+6x^2} - x \right).$

Đáp số: $2.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2} \right).$

Đáp số: $+\infty.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x} \right).$

Đáp số: $0.$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x \right).$

Đáp số: $-\infty.$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{4x^2-3x} + 3\sqrt[3]{x^3-x} - 7\sqrt{x^2+3} \right).$

Đáp số: $-\frac{3}{2}.$

 **Bài 8.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3}.$

Đáp số: $\frac{1}{3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

Đáp số: $\cos a.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}.$

Đáp số: $\frac{3}{2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}.$

Đáp số: $\frac{2}{\pi}.$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2 \sin x}.$

Đáp số: $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$

Đáp số: $\frac{1}{4}.$

g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + \sqrt{1 + \sin 3x}}{1 + \sin 3x}.$

Đáp số: $+\infty.$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt[3]{4x^2 + 1}}{1 - \cos x}.$

Đáp số: $-\frac{2}{3}.$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$

Đáp số: $3.$

Bài 9. Tìm các số thực a và b thỏa mãn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = 5.$

Đáp số: $a = 1, b = 2.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + ax + b) = \frac{3}{4}.$

Đáp số: $a = 2, b = \frac{1}{2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + bx - 2}) = 2.$

Đáp số: $a = 1, b = -3.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3ax^2 + 1} - bx) = 5.$

Đáp số: $a = -5, b = 1.$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = -1.$

Đáp số: $a = 8, b = 12.$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{8x^3 - ax^2 - x + b}{4x - 1} = 3.$

Đáp số: $a = -23, b = -\frac{21}{16}.$

Bài 10. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 27}{x - 3} = 9.$

Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - 19x + 3] \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x^2 - 3x} \right).$

Đáp số: $-\frac{2}{3}.$

Bài 11. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 2.$

Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} + 2\sqrt[3]{3f(x) - 2} - 3}{x^3 - 3x - 2}.$

Đáp số: $\frac{5}{9}.$

Bài 12. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2018}{x - 4} = 2019.$

Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1009[f(x) - 2018]}{(\sqrt{x} - 2) [\sqrt{2019f(x) + 2019} + 2019]}.$

Đáp số: $2018.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Toán 11 - Huỳnh Đức Khánh.
- [2] Ứng dụng giới hạn để giải toán trung học phổ thông - Nguyễn Phú Hy.
- [3] Giải toán Giải Tích 11 - Võ Anh Dũng, Trần Đức Huyền.
- [4] Tài liệu chuyên Toán Đại số và Giải tích 11 - Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Đặng Hùng Thắng.
- [5] Internet.