

BỒI DƯỠNG KIẾN THỨC VÀ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

CƠ SỞ 1. 4/101 LÊ HUÂN - TP HUẾ

CƠ SỞ 2. 46/1 CHU VĂN AN - TP HUẾ

SĐT: 01234332133

GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Tài liệu này thân tặng các em học
sinh Khối 12- chuẩn bị kỳ thi
THPT Quốc Gia 2016

HUẾ, 05/05/2016

GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB=a, AC=2a, AA'=b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và AB .

a. Tính theo a và b thể tích của tứ diện $A'CMN$.

b. Tính tỉ số $\frac{b}{a}$ để $B'C \perp AC'$.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, C, A' . Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0),$

$$C(0;2a;0), A'(0;0;b), B'(a;0;b), C'(0;2a;b), M\left(a;0;\frac{b}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};0;0\right)$$

a. Thể tích của tứ diện $A'CMN$ là:

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'M}] \cdot \overrightarrow{A'N} \right|$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'C} = (0;2a;-b), \overrightarrow{A'M} = \left(a;0;-\frac{b}{2}\right), \overrightarrow{A'N} = \left(\frac{a}{2};0;-b\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'M}] = (-ab; -ab; -2a^2)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'M}] \cdot \overrightarrow{A'N} = -\frac{a^2b}{2} + 0 + 2a^2b = \frac{3a^2b}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{A'CMN} = \frac{1}{6} \left| \frac{3a^2b}{4} \right| = \frac{a^2b}{8}$$

b. Ta có: $\overrightarrow{B'C} = (a; -2a; b), \overrightarrow{AC'} = (0; 2a; b)$

$$B'C \perp AC' \Leftrightarrow \overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0 \Leftrightarrow 0 - 4a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2a \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 2$$

Bài 2. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AB=2a, BC=BE=a$. Trên đường chéo AE lấy điểm M và trên đường chéo BD lấy điểm N sao cho $\frac{AM}{AE} = \frac{BN}{BD} = k$ với $k \in (0;1)$. Tính k để MN là đoạn vuông góc chung của AE và BD .

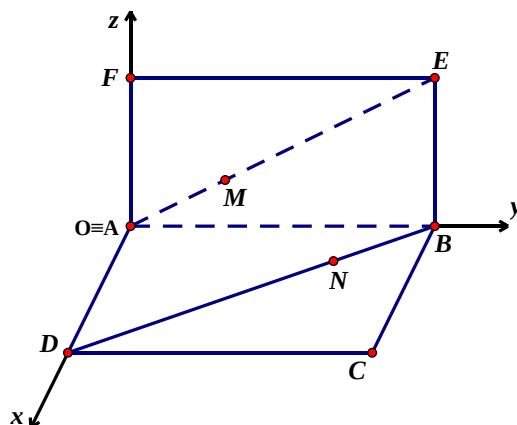
Giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, F . Khi đó $A(0;0;0), B(0;2a;0), C(a;2a;0), D(a;0;0), E(0;2a;a), F(0;0;a)$

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{AE} = k \Leftrightarrow AM = kAE, k \in (0;1)$$

Mà $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE}$, do đó tọa độ của M là:

$$\begin{cases} x_M = kx_E = 0 \\ y_M = ky_E = 2ka \text{ hay } M(0;2ka;ka) \\ z_M = kz_E = ka \end{cases}$$



$$\text{Tương tự } \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 0 = k(a - 0) \\ y_N - 2a = k(0 - 2a) \\ z_N - 0 = k(0 - 0) \end{cases} \text{ hay } N(ka; 2a - 2ka; 0)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = (ka; 2a - 4ka; -ka) \\ \overrightarrow{AE} = (0; 2a; a) \\ \overrightarrow{BD} = (a; -2a; 0) \end{cases}$$

$$MN \text{ là đoạn vuông góc chung của } AE \text{ và } BD \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 8ka^2 - ka^2 = 0 \\ ka^2 - 4a^2 + 8ka^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{4}{9}$$

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AE và BD khi $k = \frac{4}{9}$

Bài 3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Trên các cạnh BB', CD, A'D' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B'M = CN = D'P = x, $x \in (0; a)$.

a. Chứng minh $AC' \perp (MNP)$.

b. Xác định vị trí của M, N, P để tam giác MNP có diện tích bé nhất.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, A'. Khi đó $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$,

$D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; a)$, $B'(a; 0; a)$,

$C'(a; a; a)$, $D'(0; a; a)$, $M(a; 0; a - x)$, $N(a - x; a; 0)$, $P(0; a - x; a)$

a. Ta có $\overrightarrow{AC'} = (a; a; a)$

$$\overrightarrow{MN} = (-x; a; -a + x)$$

$$\overrightarrow{MP} = (-a; a - x; x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Rightarrow AC' \perp (MNP) \text{ (đpcm)}$$

$$b. \text{ Ta có } MN = MP = NP = \sqrt{x^2 + a^2 + (a - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác MNP là tam giác đều có cạnh bằng } \sqrt{2} \sqrt{x^2 - ax + a^2}$$

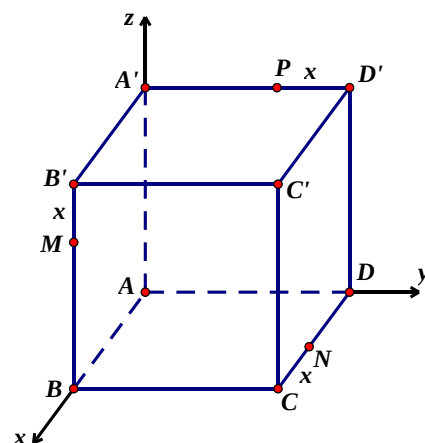
$$\Rightarrow \text{Diện tích của tam giác MNP là: } S = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} (x^2 - ax + a^2)$$

$$\text{hay } S = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right] \geq \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8} \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Vậy $\min(S) = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}$ khi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D'.

Bài 4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BB'. Chứng minh $AC' \perp (AB'D')$ và tính thể tích của khối tứ diện A'CMN.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có như hình vẽ, ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$

a. Ta có $\overrightarrow{A'C} = (a;a;-a)$, $\overrightarrow{AB'} = (a;0;a)$, $\overrightarrow{AD'} = (0;a;a)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0 \text{ và } \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AD'} = 0$$

$$\Rightarrow A'C \perp AB' \text{ và } A'C \perp AD'$$

$$\Rightarrow A'C \perp (AB'D') \text{ (đpcm)}$$

b. Thể tích của tứ diện $A'CMN$ là:

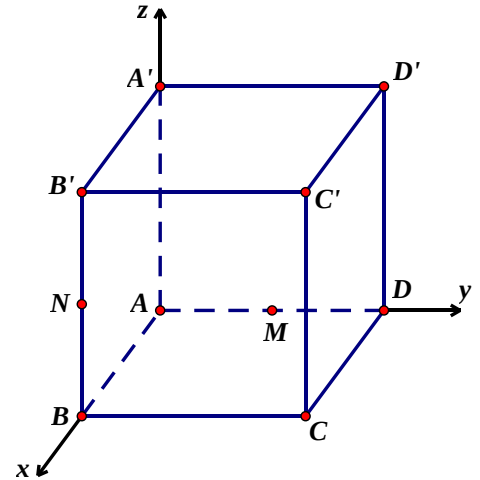
$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{A'N}, \overrightarrow{A'M}] \cdot \overrightarrow{A'C} \right|$$

Ta có: $N\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$, $M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'N} = \left(a;0;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{A'M} = \left(0;\frac{a}{2};-a\right) \text{ và } \overrightarrow{A'C} = (a;a;-a)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'N}, \overrightarrow{A'M}] = \left(\frac{a^2}{4}; a^2; \frac{a^2}{2}\right) \text{ và } [\overrightarrow{A'N}, \overrightarrow{A'M}] \cdot \overrightarrow{A'C} = \frac{a^3}{4} + a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{3a^3}{4}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a^3}{4} = \frac{a^3}{8} \text{ (đvtt)}$$



Bài 5. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A . Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ ($0 < t < 2a$). Tính t để MN ngắn nhất. Trong trường hợp này chứng minh MN là đoạn vuông góc chung của BC và SA đồng thời tính thể tích của khối tứ diện $ABMN$.

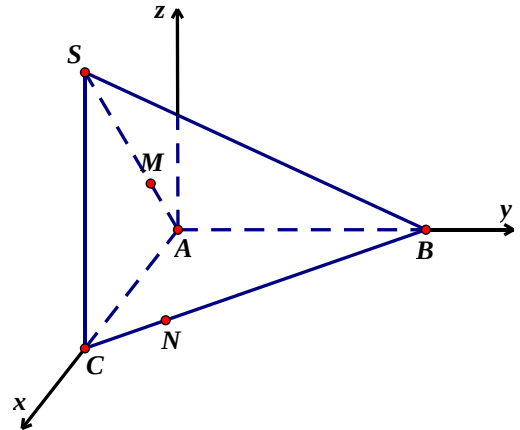
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A \equiv O(0;0;0)$, tia Ox chứa

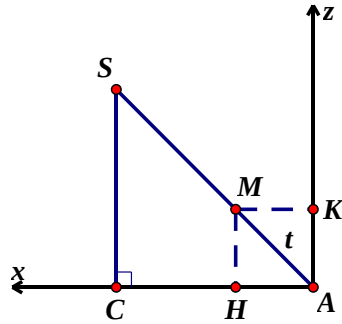
AC , tia Oy chứa AB và tia Oz cùng hướng với vec-tơ $\overrightarrow{CS}$.

Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a\sqrt{2};0)$, $C(a\sqrt{2};0;0)$,

$S(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2})$



Vẽ $MH \perp Ax$ ($H \in Ax$) và $MK \perp Az$ ($K \in Az$)

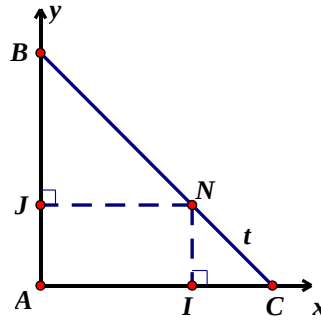


Vì tam giác SCA vuông cân ở C nên MHAK là hình vuông có cạnh huyền bằng t

$$\Rightarrow AH = AK = \frac{t\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vẽ $NI \perp Ax$ ($I \in Ax$) và $NJ \perp Ay$ ($J \in Ay$)



Vì tam giác INC vuông cân ở I

$$\Rightarrow IN = IC = \frac{NC\sqrt{2}}{2} = \frac{t\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow N\left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

a. Ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-t); \frac{t\sqrt{2}}{2}; -\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a-t)^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{2a}{3}$

Vậy MN ngắn nhất bằng $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ khi $t = \frac{2a}{3}$

b. Khi MN ngắn nhất $\left(t = \frac{2a}{3}\right)$, ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta còn có $\overrightarrow{SA} = (a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{BC} = (a\sqrt{2}; -a\sqrt{2}; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{SA} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Vậy MN là đường vuông góc chung của SA và BC (đpcm)

Bài 6. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải

Gọi O là trung điểm của AC.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là O, tia Ox đi qua A, tia Oy đi qua B.

Khi đó $A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right),$

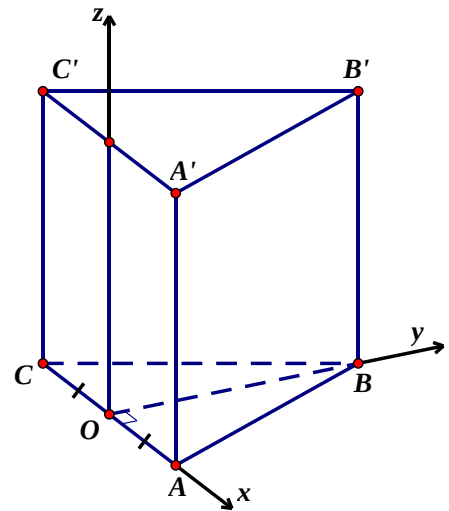
$C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right), B'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right), C'\left(-\frac{a}{2}; 0; h\right)$

$(h = AA' = BB' = \dots)$

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right)$ và $\overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right)$

$AB' \perp BC' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$



Bài 7. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', BC, DD'.

a. Tính góc giữa hai đường thẳng AC' và A'B.

b. Chứng minh $AC' \perp (MNP)$ và tính thể tích của khối tứ diện AMNP.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ A'xyz như hình vẽ, ta có: $A'(0;0;0), B(1;0;0), C'(1;1;0), D'(0;1;0), A(0;0;1),$

$B(1;0;1), C(1;1;1), D(0;1;1), M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), N\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), P\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$

a. Ta có $\overrightarrow{AC'} = (1; 1; -1)$ và $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai đường thẳng AC' và A'B có số đo bằng 90°

b. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ và $\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ và $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

$\Rightarrow AC' \perp MN$ và $AC' \perp MP$

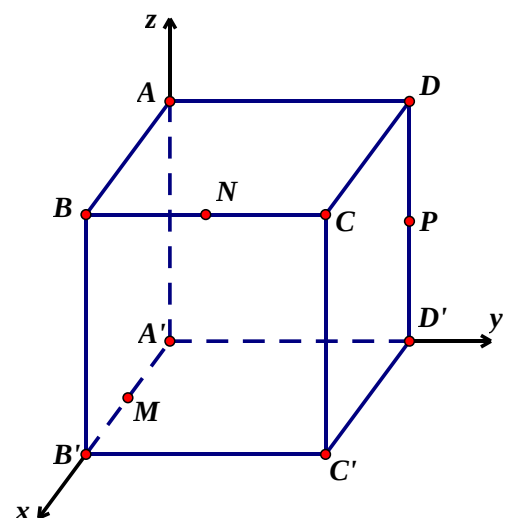
$\Rightarrow AC' \perp (MNP)$ (đpcm)

Thể tích khối tứ diện AMNP là:

$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MA}|$ với $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right),$

$\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$

Vậy $V = \frac{1}{6} \left| \frac{3}{8} + 0 + \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{16}$ (đvtt)



Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh

a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh rằng $AM \perp BP$ và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Giải

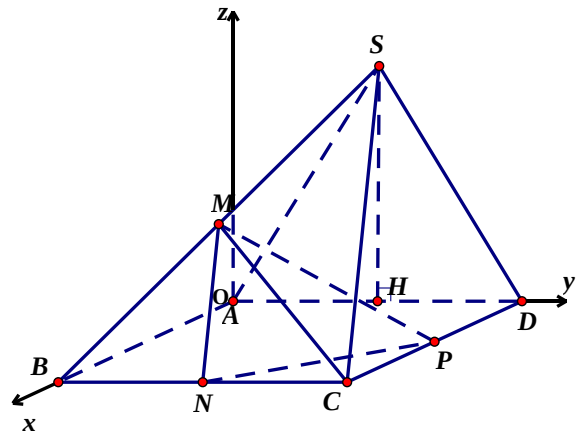
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox đi qua B, tia Oy đi qua D, tia Oz cùng hướng với vec-tơ $\overrightarrow{HS}$ (H là trung điểm của AD), khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$,

$$C(a;a;0), \quad D(0;a;0), \quad S\left(0;\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \quad M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$N\left(a;\frac{a}{2};0\right), \quad P\left(\frac{a}{2};a;0\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \text{ và } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow AM \perp BP \text{ (đpcm)}$$



$$\text{Thể tích của CMNP là } V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] \cdot \overrightarrow{CP}|$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{CP} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right) \\ \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{CN} = \left(0; -\frac{a}{2}; 0\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{8}; 0; \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{CMNP}} = \frac{1}{6} \left| -\frac{a^3\sqrt{3}}{16} \right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$$

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên hợp với đáy góc 45° . Gọi O là tâm của ABCD và I, J, K lần lượt là trung điểm SO, SD, DA.

- Xác định đoạn vuông góc chung của IJ và AC.
- Tính thể tích của khối tứ diện AIJK.

Giải

a. IJ là đường trung bình của tam giác SOD.

$$\Rightarrow IJ \parallel OD \Rightarrow IJ \perp SO \text{ hay } IJ \perp IO \quad (1)$$

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC \text{ hay } IO \perp AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IO là đoạn vuông góc chung của IJ và AC.

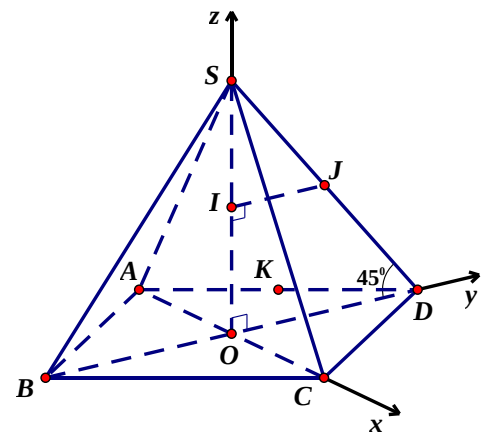
b. Góc giữa cạnh bên SD và đáy (ABCD) là $\angle SDO = 45^\circ$

$\Rightarrow$ Tam giác SOD vuông cân tại O

$$\Rightarrow OS = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có O trùng với tâm của hình vuông ABCD, tia Ox đi qua C, tia Oy đi qua D và tia Oz đi qua S. \

$$\text{Khi đó } A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right),$$



$$D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), I\left(0; 0; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right), J\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right), K\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$$

Thể tích của tứ diện AIJK là $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}] \cdot \overrightarrow{AK}|$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \\ \overrightarrow{AJ} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \\ \overrightarrow{AK} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}] = \left(-\frac{a^2}{8}; 0; \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}] \cdot \overrightarrow{AK} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$$

$$\text{Vậy } V_{AIJK} = \frac{1}{6} \left| -\frac{a^3\sqrt{2}}{32} \right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{192}$$

Bài 10. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. K là trung điểm của DD' và O là tâm của hình vuông AA'B'B. Tính thể tích của khối tứ diện AIKA'. Suy ra khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (AB'K)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $A \equiv O$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, A'. Khi đó $A(0; 0; 0)$, $A'(0; 0; a)$, $B(a; 0; 0)$, $B'(a; 0; a)$, $C(a; a; 0)$, $C'(a; a; a)$, $D(0; a; 0)$, $D'(0; a; a)$, $K\left(0; a; \frac{a}{2}\right)$, $I\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ (I là trung điểm của AB' và A'B)

Thể tích của khối tứ diện AIKA' là $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AK} = \left(0; a; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AA'} = (0; 0; a)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}] = \left(-\frac{a^2}{2}; -\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}] \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{a^3}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{AIKA'} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{12}$$

Ta có $(AB'K) \equiv (AIK)$

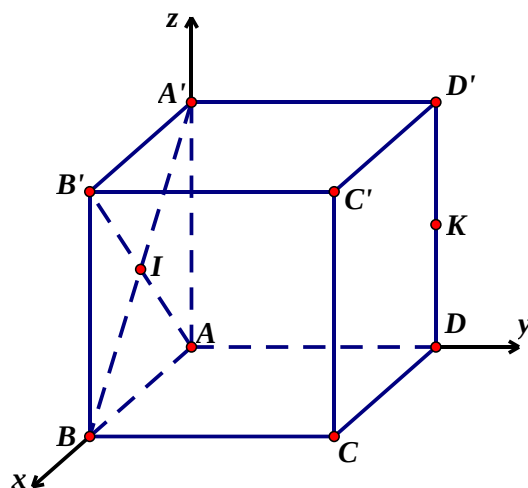
$$\Rightarrow d(A', (AB'K)) = d(A', (AIK)) = \frac{3V_{A'.AIK}}{S_{\Delta AIK}} \text{ với } V_{A'.AIK} = \frac{a^3}{12} \text{ và}$$

$$S_{\Delta AIK} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}]| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^4}{4}} = \frac{3a^2}{8}$$

$$\text{Vậy } d(A', (AB'K)) = \frac{3a^2}{12} : \frac{3a^2}{8} = \frac{2a}{3}$$

Bài 11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AD và N là tâm của hình vuông CC'D'D. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BC'MN.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ $A'xyz$ như hình vẽ.

Ta có $A'(0;0;0)$, $B'(a;0;0)$, $C'(a;a;0)$,

$D'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $B(a;0;a)$,

$C(a;a;a)$, $D(0;a;a)$, $M\left(0;\frac{a}{2};a\right)$, $N\left(\frac{a}{2};a;\frac{a}{2}\right)$

Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $BC'MN$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$$

Bán kính mặt cầu nói trên là $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$

Mặt cầu (S) đi qua B, C', M, N nên:

$$\begin{cases} a^2 + 0 + a^2 + 2\alpha a + 0 + 2\gamma a + \delta = 0 \\ a^2 + a^2 + 0 + 2\alpha a + 2\beta a + 0 + \delta = 0 \\ 0 + \frac{a^2}{4} + a^2 + 0 + \beta a + 2\gamma a + \delta = 0 \\ \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} + \alpha a + 2\beta a + \gamma a + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha a + 2\gamma a + \delta = -2a^2 \\ 2\alpha a + 2\beta a + \delta = -2a^2 \\ \beta a + 2\gamma a + \delta = -\frac{5a^2}{4} \\ \alpha a + 2\beta a + \gamma a + \delta = -\frac{6a^2}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

$$(1) \text{ trừ } (2) \Rightarrow \beta = \gamma \quad (5)$$

$$(2) \text{ trừ } (3) \text{ kết hợp với } (5) \Rightarrow 2\alpha - \beta = -\frac{3a}{4} \quad (6)$$

$$(3) \text{ trừ } (4) \text{ kết hợp với } (5) \text{ ta được } \alpha = -\frac{a}{4} \quad (7)$$

$$(6) \text{ trừ } (7) \Rightarrow \beta = \frac{a}{4} \text{ mà } \gamma = \beta \text{ nên } \gamma = \frac{a}{4}$$

Thay α, β vào (1) ta được $\delta = -2a^2$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BC'MN$ là: $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + 2a^2} = \frac{a\sqrt{35}}{6}$

Bài 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Gọi I là trung điểm của cạnh bên SC . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI)

Giải

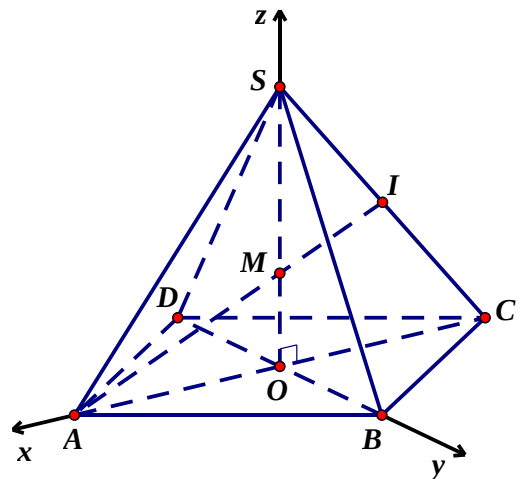
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ là tâm O của hình vuông $ABCD$, tia Ox chứa OA , tia Oy chứa OB và tia Oz chứa OS .

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; a\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S(0; 0; h)$

Giao điểm M của SO và AI là trọng tâm của tam giác SAC và ta

có $M\left(0; 0; \frac{h}{3}\right)$

$mp(ABI)$ cũng là $mp(ABM)$. Vậy, phương trình của $mp(ABI)$ là:



$$\frac{\frac{x}{a\sqrt{2}}}{2} + \frac{\frac{y}{a\sqrt{2}}}{2} + \frac{\frac{z}{h}}{3} = 1 \text{ hay } \frac{\frac{x}{a\sqrt{2}}}{2} + \frac{\frac{y}{a\sqrt{2}}}{2} + \frac{\frac{z}{h}}{3} - 1 = 0$$

$$\text{vậy khoảng cách từ S tới mp(ABI) là: } d = \frac{\left| \frac{\frac{h}{h} - 1}{\frac{h}{3}} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a\sqrt{2}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{a\sqrt{2}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{h}}{3} \right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} \text{ hay } d = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$$

Bài 13. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (A'MD)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Kéo dài DM cắt AB tại E.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

$\Rightarrow$ BM là đường trung bình của tam giác ADE

$\Rightarrow$ B là trung điểm của AE

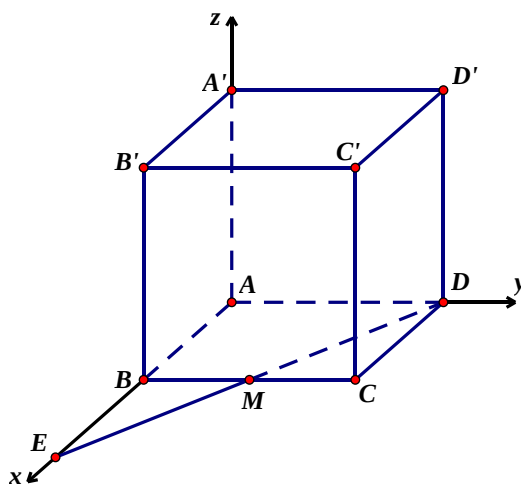
$\Rightarrow$ AE = 2AB = 2. Khi đó:

$$A(0;0;0), E(2;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1).$$

Mp(A'MD) cũng là mặt phẳng (A'ED) nên phương trình của

$$\text{mặt phẳng (A'MD) là: } \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Khoảng cách từ A tới mp(A'MD) là } d(A, (A'MD)) = \frac{|-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}$$



Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\angle BAD = 120^\circ$, đường cao SO (O là tâm của ABCD), $SO = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC và SB.

a. Tính thể tích của khối tứ diện SAMN.

b. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một mặt cầu tâm O và tiếp xúc với bốn mặt bên của S.ABCD.

Tính thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu nói trên.

Giải

$$\text{Ta có } \angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

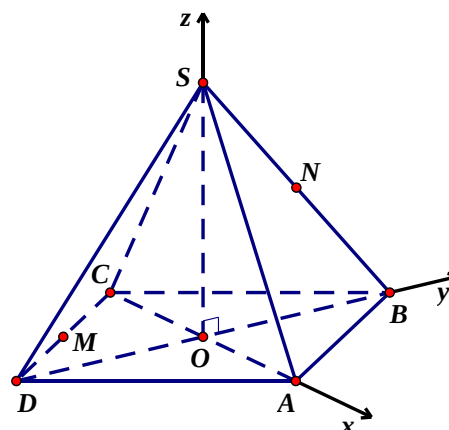
ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\angle ABC = 60^\circ$

$\Rightarrow$ ABC, ADC là các tam giác đều cạnh bằng a.

$$\Rightarrow OA = OC = \frac{a}{2} \text{ và } OB = OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a}{2};0;0\right),$$



$$C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), S(0; 0; 2a), M\left(-\frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}; 0\right), N\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{4}; a\right)$$

a. Thể tích của tứ diện SAMN là $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN}|$

$$\overrightarrow{SA} = \left(\frac{a}{2}; 0; -2a\right), \overrightarrow{SM} = \left(-\frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}; -2a\right), \overrightarrow{SN} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{4}; -a\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \frac{3a^2}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} + \frac{a^3\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{SAMN}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

b. Mặt cầu tâm O và tiếp xúc với bốn mặt bên.

$$\text{Phương trình mp(SAB) là: } \frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} + \frac{z}{2a} = 1 \text{ hay } 4\sqrt{3}x + 4y + \sqrt{3}z - 2a\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow d(O, (SAB)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{67}} = 2a\sqrt{\frac{3}{67}}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } d(O, (SBC)) = d(O, (SCD)) = d(O, (SDA)) = 2a\sqrt{\frac{3}{67}}$$

Vậy tồn tại duy nhất mặt cầu tâm O và tiếp xúc với bốn mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SDA), bán kính của mặt cầu này bằng $2a\sqrt{\frac{3}{67}}$ (đpcm)

Bài 15. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3$. Tính thể tích của OABC khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Đặt $OA = a, OB = b$ và $OC = c$ ($a, b, c > 0$) ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có

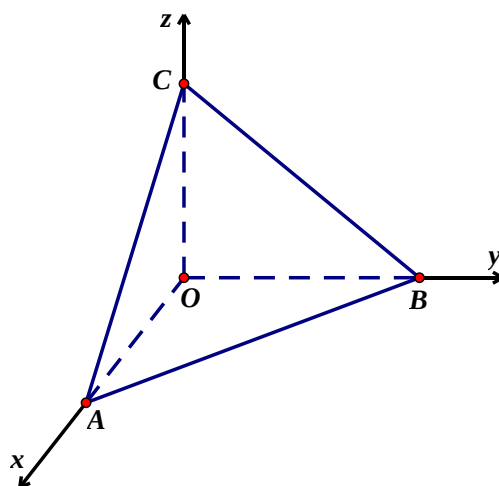
$$O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$$

$$\text{Phương trình mp(ABC) là: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{hay } bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$\Rightarrow d(O, (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \end{cases}$$



$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow d(O, (ABC)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 = 1$ hay $a = b = c = 1$

Vậy $d(O, (ABC))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $a = b = c = 1$ và trong trường hợp này

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{abc}{6} = \frac{1}{6} \text{ (đvtt)}$$

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Tính khoảng cách từ A đến mp(BCM) và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN .
- Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC)
- Tính tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp $S.ABCD$ chia bởi mp(BCM)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có $A \equiv O$, tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AS . Khi đó

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;2a), M(0;0;a), N\left(0;\frac{a}{2};a\right)$$

Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;a;0)$ và $\overrightarrow{BM} = (-a;0;a)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] = (a^2; 0; a^2)$$

a. Mp(BCM) có vtpt

$$\vec{n} = \frac{1}{a^2} \cdot [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] = (1; 0; 1)$$

Vậy phương trình của mp(BCM) là:

$$1(x-a) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0 \text{ hay } x + z - a = 0$$

$$\Rightarrow d(A, (BCM)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

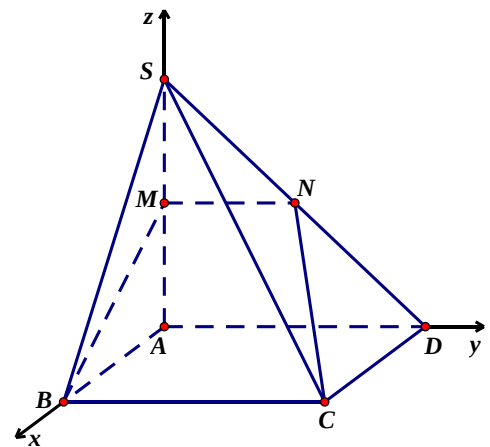
$$\overrightarrow{BS} = (-a; 0; 2a), \overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{a}{2}; a\right), \overrightarrow{SC} = (a; a; -2a)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}] = \left(a^2; -a^2; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}] \cdot \overrightarrow{SC} = a^3 - a^3 - a^3 = -a^3$$

$$\Rightarrow \text{Khoảng cách giữa hai đường thẳng } SB, CN \text{ là: } d(SB, CN) = \frac{|[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}] \cdot \overrightarrow{SC}|}{\|[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}]\|} = \frac{|-a^3|}{\sqrt{a^4 + a^4 + \frac{a^4}{4}}} = \frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{2a}{3}$$

$$b. [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (0; 2a^2; a^2)$$

$$\Rightarrow \text{Mp}(SCD) \text{ có vec-tơ pháp tuyến } \vec{n} = (0; 2; 1)$$



$$[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2; 0; a^2) \Rightarrow \text{Mp(SBC) có vec-tơ pháp tuyến } \vec{n}' = (2; 0; 1)$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC), ta có: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|-1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

c. Thể tích của khối chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2a = \frac{2a^3}{3}$

Mp(BCM) cắt SD tại N, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (BCM) \cap (SAD) = MN \\ (BCM) \supset BC, (SAD) \supset AD \\ BC \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC \quad (1)$$

Mp(BCM) chia khối chóp thành hai phần: khối chóp S.BCMN và khối đa diện còn lại.

Thể tích của khối chóp S.BCMN là $V_1 = \frac{1}{3} S_{BCMN} \cdot d(S, (BCM))$ trong đó:

BCMN là hình thang có đáy lớn $BC = a$, đáy nhỏ $MN = \frac{a}{2}$, chiều cao $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_{BCMN} = \frac{1}{2} (AB + MN) \cdot BM = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2} \right) \cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$$

$$d(S, (BCM)) = \frac{|2a - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{4}$$

Vậy tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp S.ABCD chia bởi mp(BCM) là: $k = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{2a^3}{3} - \frac{a^3}{4}} = \frac{3}{5}$

Chú ý: ta có $\left\{ \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \supset BM \Rightarrow BC \perp BM \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BCMN là hình thang có đường cao BM.

Bài 17. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = AD = a$, $AA' = b$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'.

a. Tính thể tích của khối tứ diện BDA'M.

b. Tìm tỉ số $\frac{a}{b}$ để $(A'BD) \perp (MBD)$

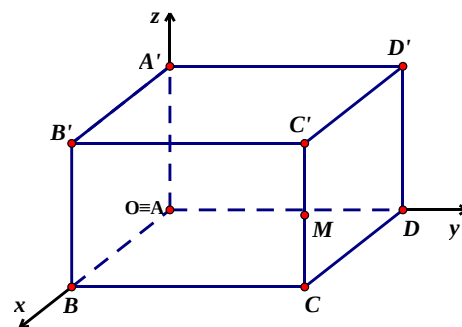
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, A'. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$,

$$C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;b), C'(a;a;b), M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$$

a. Thể tích của khối tứ diện BDA'M

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'}|$$



$$\text{với } \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-a; a; 0), \overrightarrow{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right) \\ \overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b) \Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'} = -\frac{3a^2b}{2} \end{cases}$$

$$\text{vậy } V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'}| = \frac{a^2b}{4}$$

b. Mặt phẳng (BDM) có vec-tơ pháp tuyến là: $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Mặt phẳng (A'BD) có vec-tơ pháp tuyến là: $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (ab; ab; a^2)$

Hai mặt phẳng (BDM) và (A'BD) vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$$

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có chiều cao $SA = a$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và SC.

a. Tính khoảng cách từ A đến mp(SCD) và thể tích của tứ diện SBEF.

b. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, S. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$,

$$D(0;2a;0), S(0;0;a), E(0;a;0), F\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

a. Phương trình mp(SCD) có dạng: $\frac{x}{m} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{a} = 1$. Mặt

phẳng này đi qua điểm $C(a;a;0)$ nên: $\frac{a}{m} + \frac{a}{2a} = 1 \Leftrightarrow m = 2a$

Vậy phương trình của mp(SCD) là: $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{a} = 1$ hay

$$x + y + 2z - 2a = 0$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{|-2a|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

Thể tích của tứ diện SBEF là: $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SE}] \cdot \overrightarrow{SF}|$

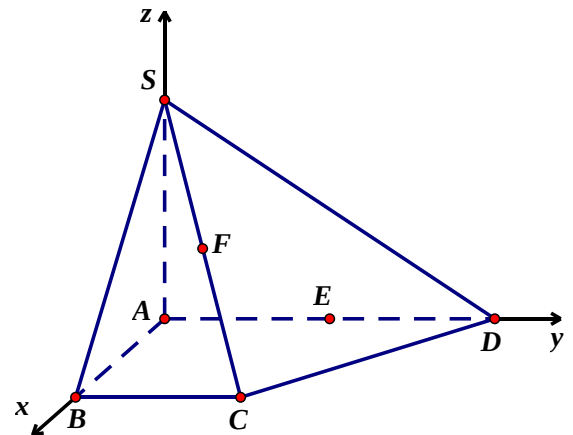
$$\text{Ta có } \overrightarrow{SB} = (a; 0; -a), \overrightarrow{SE} = (0; a; -a), \overrightarrow{SF} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SE}] = (a^2; a^2; a^2) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SE}] \cdot \overrightarrow{SF} = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}$$

$$\text{Vậy } S_{SBEF} = \frac{1}{6} \left| \frac{a^3}{2} \right| = \frac{a^3}{12}$$

b. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Mx + 2Ny + 2Pz + Q = 0$$



$$\text{Mặt cầu đi qua S, C, D, E nên} \begin{cases} a^2 + 2Pa + Q = 0 \\ a^2 + a^2 + 2Ma + 2Na + Q = 0 \\ 4a^2 + 4Na + Q = 0 \\ a^2 + 2Na + Q = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có: $M = -\frac{a}{2}$, $N = -\frac{3a}{2}$, $P = -\frac{3a}{2}$, $Q = 2a^2$.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE có tâm $I\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$ và bán kính

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} - 2a^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$

Bài 19. Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC và OCA là các tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Bằng phương pháp tọa độ hãy chứng minh:

- Tam giác ABC có ba góc nhọn.
- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Ta có $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, với $a > 0, b > 0, c > 0$

($a = OA$, $b = OB$, $c = OC$)

a. Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn

$$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0), \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 > 0$$

Vậy góc A của tam giác ABC là góc nhọn.

Chứng minh tương tự, các góc B và C của tam giác ABC cũng là các góc nhọn.

b. Chứng minh $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Phương trình của mp(ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

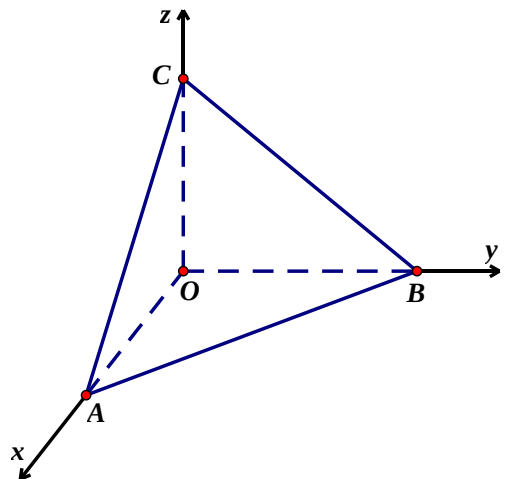
$$\Rightarrow \text{Mp(ABC) có vec-tơ pháp tuyến là } \vec{n} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$$

Mặt phẳng (OBC) chính là mặt phẳng (Oyz) nên có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1; 0; 0)$

$$\alpha \text{ là góc hợp bởi mp(ABC) và mp(OBC), ta có: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

$$\text{Tương tự, ta có } \cos^2 \beta = \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}, \cos^2 \gamma = \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Vậy $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (đpcm)



Bài 20. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $mp(C'AB)$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

- Tính theo a và α thể tích của khối tứ diện $C'A'AB$.
- Tìm α để hai mặt phẳng (ABC') và $(A'B'C)$ vuông góc với nhau.

Giải

Gọi M là trung điểm của AB , ta có $MC \perp AB$ (vì ABC là tam giác đều)

$\Rightarrow M'C \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \angle CMC' = \alpha$: góc hợp bởi $mp(C'AB)$ và mặt đáy (ABC)

Ta còn có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CM \perp (AA'B)$

$\Rightarrow CM = d(C, (AA'B)) = d(C', (AA'B))$ (vì $CC' \parallel (AA'B)$)

a. Thể tích của khối tứ diện $C'A'AB$ là:

$$\begin{aligned} V_{C'A'AB} &= V_{C'.A'AB} = \frac{1}{3} S_{A'AB} \cdot d(C', (A'AB)) = \frac{1}{3} S_{A'AB} \cdot CM \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AA' \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{6} AA' \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Tam giác MCC' vuông tại C' và có $\angle CMC' = \alpha$, $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CC' = MC \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha = AA'$

$$\text{Vậy } V_{C'.A'AB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \tan \alpha}{8}$$

b. Tìm α để $(ABC') \perp (A'B'C)$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có $O \equiv M$, ba tia Ox , Oy , Oz lần lượt đi qua B , C , M' (M' là trung điểm của $A'B'$). Khi đó $M(0;0;0)$, $A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $A'\left(-\frac{a}{2}; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha\right)$,

$$B'\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha\right), C'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha\right)$$

Ta có:

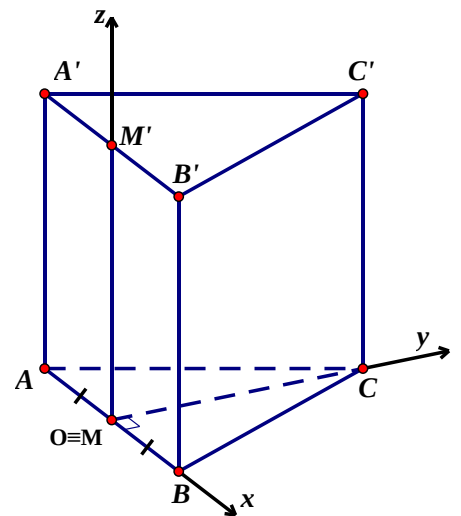
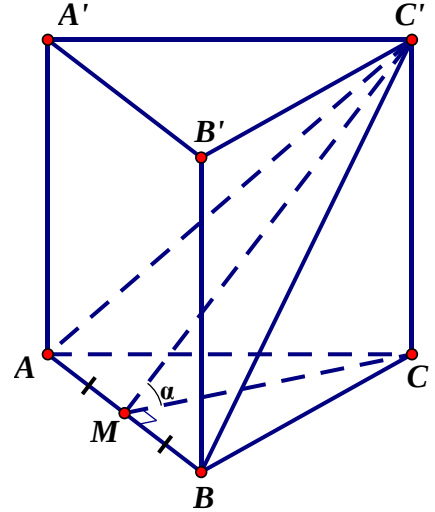
$$\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0), \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha\right),$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (a; 0; 0), \overrightarrow{A'C} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}] = \left(0; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \tan \alpha; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \\ [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C}] = \left(0; \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \tan \alpha; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vtpt của hai mặt phẳng (ABC') và $(A'B'C)$ lần lượt là:

$$\vec{n}_1 = \frac{2}{a^2\sqrt{3}} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}] = (0; -\tan \alpha; 1) \text{ và } \vec{n}_2 = \frac{2}{a^2\sqrt{3}} \cdot [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C}] = (0; \tan \alpha; 1)$$



$$(ABC') \perp (A'B'C) \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow -\tan^2 \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \left(0^\circ < \alpha < 90^\circ \right) \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

Bài 21. Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AB = a$, $BC = BE = b$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của CD và CB.

- Tính thể tích của khối tứ diện IJEF theo a và b.
- Tìm hệ thức giữa a và b để hai mặt phẳng (AIF) và (DJE) vuông góc với nhau.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc $O \equiv A$, ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, F. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D(b;0;0)$, $C(b;a;0)$, $E(0;a;b)$, $F(0;0;b)$, $I\left(b;\frac{a}{2};0\right)$, $J\left(\frac{b}{2};a;0\right)$

a. Thể tích của khối tứ diện IJEF là $V = \frac{1}{6} |[\vec{IJ}, \vec{IE}] \cdot \vec{IF}|$

Ta có $\vec{IF} = \left(-b; -\frac{a}{2}; b\right)$

$$\begin{cases} \vec{IJ} = \left(-\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) \\ \vec{IE} = \left(-b; \frac{a}{2}; b\right) \end{cases} \Rightarrow [\vec{IJ}, \vec{IE}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{b^2}{2}; \frac{ab}{4}\right)$$

$$\Rightarrow [\vec{IJ}, \vec{IE}] \cdot \vec{IF} = -\frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{4} + \frac{ab^2}{4} = -\frac{ab^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{IJEF} = \frac{1}{6} \left| -\frac{ab^2}{2} \right| = \frac{ab^2}{12}$$

b. Ta có $\vec{AI} = \left(b; \frac{a}{2}; 0\right)$, $\vec{AF} = (0;0;b)$

$$\Rightarrow [\vec{AI}, \vec{AF}] = \left(\frac{ab}{2}; -b^2; 0\right)$$

$$\Rightarrow \text{Vtpt của mp(AIF) là } \vec{n_1} = \left(\frac{ab}{2}; -b^2; 0\right)$$

Tương tự $\vec{DJ} = \left(-\frac{b}{2}; a; 0\right)$, $\vec{DE} = (-b; a; b)$

$$\Rightarrow [\vec{DJ}, \vec{DE}] = \left(ab; \frac{b^2}{2}; \frac{ab}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Vtpt của mp(DJE) là } \vec{n_2} = \left(ab; \frac{b^2}{2}; \frac{ab}{2}\right)$$

$$\text{Hai mặt phẳng (AIF) và (DJE) vuông góc với nhau} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{2} - \frac{b^4}{2} = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, $AB = a$, $SA = AD = 2a$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Tính theo a độ dài đoạn thẳng HK và thể tích của khối tứ diện ACHK.

Giải

Tính HK.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AD = 2a \Rightarrow \triangle SAD$ vuông cân tại A.

Mà $AK \perp SD$ ($K \in SD$) nên K là trung điểm của SD.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có $O \equiv A$, tia Ox đi qua B, tia Oy đi qua D, tia Oz đi qua S. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;2a;0)$, $S(0;0;2a)$, $K(0;a;a)$

Ta có $\overrightarrow{SB} = (a;0;-2a)$

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng SB:
$$\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$$

(vtcp của $\overrightarrow{SB}$ là $\vec{u} = \frac{1}{a}\overrightarrow{SB} = (1;0;-2)$)

Lấy $H(a+t;0;-2t) \in SB$ ta có $\overrightarrow{AH} = (a+t;0;-2t)$

H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow a + t + 0 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{a}{4}$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{4a}{5};0;\frac{2a}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \left(-\frac{4a}{5};a;\frac{3a}{5}\right) \Rightarrow HK = \sqrt{\frac{16a^2}{25} + a^2 + \frac{9a^2}{25}} = a\sqrt{2}$$

Chú ý: Ta có thể tính HK bằng cách khác

Áp dụng định lý cosin vào tam giác SHK, ta có:

$$HK^2 = SH^2 + SK^2 - 2.SH.SK.\cos HSK$$

$$K \text{ là trung điểm của } SD \text{ nên } SK = \frac{SD}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

Tam giác SAB vuông tại A và có đường cao AH nên:

$$SH.SB = SA^2 \Leftrightarrow SH.a\sqrt{5} = 4a^2 \Leftrightarrow SH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$$

$$\cos HSK = \cos BSD = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2SB.SD} = \frac{5a^2 + 8a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

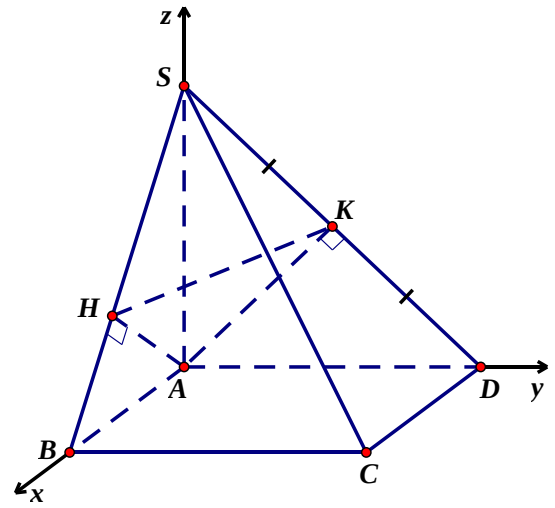
$$\text{Vậy } HK^2 = \left(\frac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - 2.\frac{4a}{\sqrt{5}}.a\sqrt{2}.\frac{2}{\sqrt{10}} = 2a^2 \Leftrightarrow HK = a\sqrt{2}$$

Thể tích của khối tứ diện ACHK:

$$\text{Ta có } V_{ACHK} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}] \cdot \overrightarrow{AK}|$$

$$\text{với } \overrightarrow{AC} = (a;2a;0), \overrightarrow{AH} = \left(\frac{4a}{5};0;\frac{2a}{5}\right), \overrightarrow{AK} = (0;a;a)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}] = \left(\frac{4a^2}{5}; -\frac{2a^2}{5}; -\frac{8a^2}{5}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}] \cdot \overrightarrow{AK} = -\frac{2a^3}{5} - \frac{8a^3}{5} = -2a^3$$



$$\text{Vậy } V_{\text{ACHK}} = \frac{1}{6} \cdot |-2a^3| = \frac{a^3}{3}$$

Bài 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. M và N là hai điểm thay đổi và lần lượt ở trên cạnh AA' , BC sao cho $AM = BN = h$, $h \in (0;1)$. Chứng minh rằng khi h thay đổi, đường thẳng MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc O trùng với B' , tia Ox đi qua A' , tia Oy đi qua C' , tia Oz đi qua B . Khi đó $B'(0;0;0)$, $A'(1;0;0)$, $C'(0;1;0)$, $D'(1;1;0)$, $B(0;0;1)$, $A(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(1;1;1)$, $M(1;0;1-h)$, $N(0;h;1)$

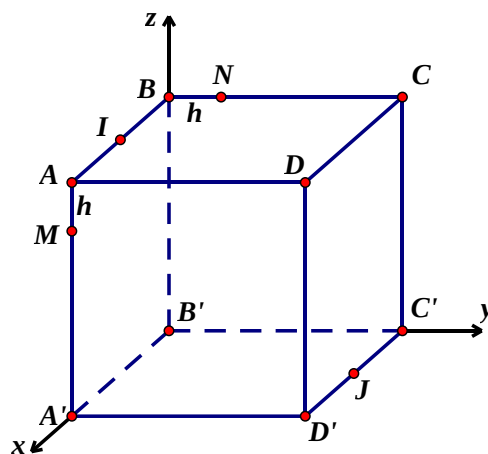
Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và $C'D'$, ta có

$$I\left(\frac{1}{2};0;1\right), J\left(\frac{1}{2};1;0\right) \text{ (I và J cố định)}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (-1; h; h) \text{ và } \overrightarrow{IJ} = (0; 1; -1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

$$\Rightarrow MN \perp IJ \quad (1)$$



$$\text{Phương trình tham số của hai đường thẳng MN và IJ lần lượt là } \begin{cases} x = -t \\ y = h + ht \\ z = 1 + ht \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} -t = \frac{1}{2} \\ h + ht = t' \\ 1 + ht = 1 - t' \end{cases} \text{ ta có nghiệm duy nhất } (t; t') = \left(-\frac{1}{2}; \frac{h}{2}\right)$$

$$\text{Vậy hai đường thẳng MN và IJ cắt nhau} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ khi h thay đổi, đường thẳng MN luôn cắt và vuông góc với đường thẳng cố định IJ (đpcm)

$$\text{Chú ý: Giao điểm của hai đường thẳng MN và IJ là } K\left(\frac{1}{2}; \frac{h}{2}; 1 - \frac{h}{2}\right)$$

Bài 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'B$, CD và $A'D'$.

- Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $A'B$, $B'D$ và cặp đường thẳng PI , AC' (I là tâm của đáy $ABCD$)
- Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$, tính góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và $(DCC'D')$

Giải

a. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc O trùng với A , tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD , tia Oz chứa AA' . Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $B'(1;0;1)$, $C'(1;1;1)$, $D'(0;1;1)$

$$d(A'B, B'D)$$

Ta có $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{B'D} = (-1; 1; -1)$ và $\overrightarrow{A'B'} = (1; 0; 0)$

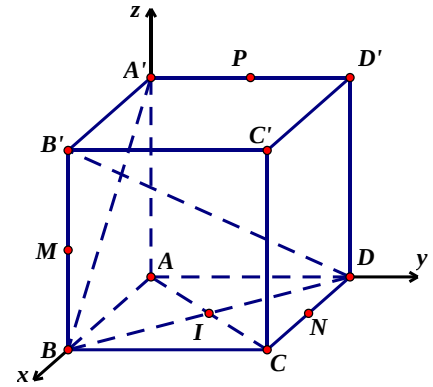
$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}] = (1; 2; 1)$$

$$\Rightarrow d(A'B, B'D) = \frac{[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}] \cdot \overrightarrow{A'B'}}{|\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} d(PI, AC')$$

Ta có:

$$P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{IP} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$$

$$\overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1), \overrightarrow{AP} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow d(PI, AC') = \frac{[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}] \cdot \overrightarrow{AP}}{[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}] \cdot \overrightarrow{AP}} = \frac{\sqrt{14}}{28}$$



b. Ta có $M\left(1; 0; \frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{NC'} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow MP \perp NC'$$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai đường thẳng MP và NC' có số đo bằng 90°

Mp(PAI) có vec-tơ pháp tuyến: $\vec{n} = [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AI}] = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

Mp(DCC'D') có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC'D'), ta có: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi \approx 48^\circ 11'$

Bài 25. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Xét điểm M trên AD' và điểm N trên DB sao cho $AM = DN = k \left(0 < k < a\sqrt{2}\right)$. Gọi P là trung điểm của B'C'

- Tính góc giữa hai đường thẳng AP và BC'
- Tính thể tích khối tứ diện APBC'
- Chứng minh MN luôn song song với mp(A'D'CB) khi k thay đổi và tìm k để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD, tia Oz chứa AA'. Khi đó

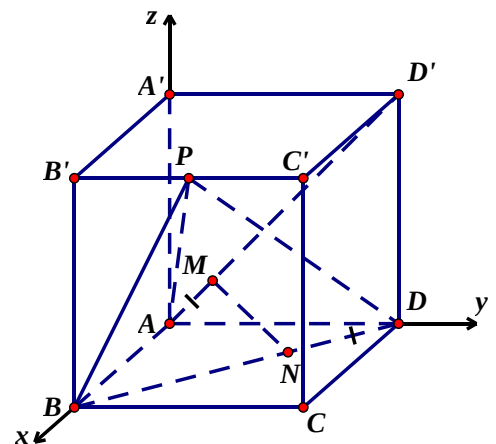
$$A(0; 0; 0), A'(0; 0; a), B(a; 0; 0), B'(a; 0; a), D(0; a; 0), D'(0; a; a),$$

$$C(a; a; 0), C'(a; a; a), P\left(a; \frac{a}{2}; a\right)$$

a. Ta có $\overrightarrow{AP} = \left(a; \frac{a}{2}; a\right)$,

$$\overrightarrow{BC'} = (0; a; a)$$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AP và BC', ta có:



$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\left|0 + \frac{a^2}{2} + a^2\right|}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

b. Ta có $\overrightarrow{AP} = \left(a; \frac{a}{2}; a\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC'} = (a; a; a)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}] = \left(0; a^2; -\frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{AC'} = 0 + a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{APBC'} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{AC'}| = \frac{1}{6} \cdot \left|\frac{a^3}{2}\right| = \frac{a^3}{12}$$

c. Mp($A'D'CB$) đi qua điểm $A'(0; 0; a)$ và có vtpt $\vec{n} = \frac{1}{a^2} [\overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{A'B}] = (1; 0; 1)$ nên có phương trình

$$1(x-0) + 0(y-0) + 1(z-a) = 0 \text{ hay } x + z - a = 0$$

Từ giả thiết $M \in AD'$, $N \in DB$, $AM = DN = k$ ta được:

$$M\left(0; \frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}-k}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}; -\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 1 \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n} \quad (1)$$

Ngoài ra ta có $x_M + z_M - a = 0 + \frac{k}{\sqrt{2}} - a \neq 0$ (vì $0 < k < a\sqrt{2}$)

$$\Rightarrow M \notin (A'D'CB) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN \parallel (A'D'CB)$

Ta có:

$$MN^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3k^2 - 2a\sqrt{2}k + a^2 = 3 \left[\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{9} \right] \geq 3 \cdot \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow MN \geq \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$ khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3} \in (0; a\sqrt{2})$

Bài 26. Cho hình hộp đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông cân, $AA' = 2a$, $AB = AC = a$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, I là tâm của hình chữ nhật $AA'B'B$.

a. Chứng minh hai đường thẳng IG và $G'C$ song song với nhau đồng thời tính khoảng cách giữa hai đường thẳng này.

b. Tính thể tích của khối chóp $A.IGCG'$.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, A'. Khi đó

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(0; a; 0), A'(0; 0; 2a), B'(a; 0; 2a), C'(0; a; 2a), G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 0\right), G'\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 2a\right), I\left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \text{ (I là trung điểm của } AB' \text{ và } A'B)$$

a. Ta có

$$\overrightarrow{IG} = \left(-\frac{a}{6}; \frac{a}{3}; -a\right), \overrightarrow{G'C} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; -2a\right), \overrightarrow{GC} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; 0\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{IG}$ và $\overrightarrow{G'C}$ cùng phương ($\overrightarrow{G'C} = 2\overrightarrow{IG}$), $\overrightarrow{IG}$ và $\overrightarrow{GC}$ không cùng phương $\Rightarrow IG \parallel G'C$ (đpcm)

Tính $d(IG, G'C)$

Ta có:

$$IG \parallel G'C \Rightarrow d(IG, G'C) = d(G, G'C) = \frac{[\overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{GC}]}{|\overrightarrow{G'C}|}$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{GC}] = \left(\frac{4a^2}{3}; \frac{2a^2}{3}; 0\right)$$

$$\Rightarrow d(IG, G'C) = \frac{\sqrt{\frac{16a^4}{9} + \frac{4a^4}{9} + 0}}{\sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} + 4a^2}} = 2a\sqrt{\frac{5}{41}}$$

$$\text{b. Mp}(IGCG') \text{ có vtpt } \vec{n} = \frac{3}{2a^2} \cdot [\overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{GC}] = (2; 1; 0)$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình của mp}(IGCG') \text{ là } 2\left(x - \frac{a}{3}\right) + 1\left(y - \frac{a}{3}\right) + 0(z - 0) = 0 \text{ hay } 2x + y - a = 0$$

$$\Rightarrow h = d(A, (IGCG')) = \frac{|-a|}{\sqrt{4+1}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Thể tích của khối chóp $A.IGCG'$ là $V = \frac{1}{3}S_{IGCG'} \cdot h$ trong đó:

$$S_{IGCG'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{G'C}) \cdot d(IG, G'C) \text{ với } \overrightarrow{IG} = \frac{a\sqrt{41}}{6}, \overrightarrow{G'C} = \frac{a\sqrt{41}}{3}, d(IG, G'C) = 2a\sqrt{\frac{5}{41}}$$

$$\Rightarrow S_{IGCG'} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{41}}{6} + \frac{a\sqrt{41}}{3}\right) \cdot 2a\sqrt{\frac{5}{41}} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}, h = d(A, (IGCG')) = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } V_{A.IGCG'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a^3}{6}$$

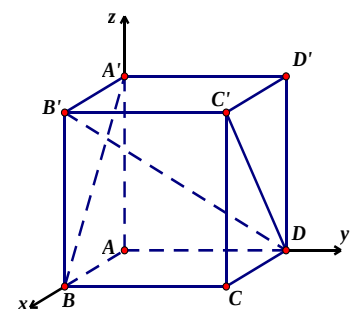
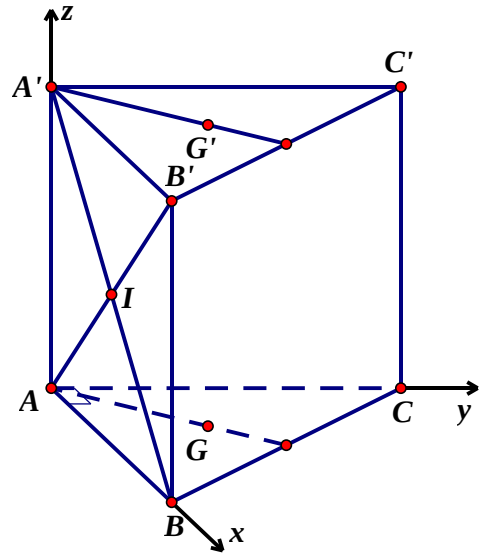
Bài 27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

- Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$.
- Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', CD, A'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$.

Giải

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A và ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, A' (như hình vẽ). Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), C(a;a;0), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$.



Ta có: $\overrightarrow{A'B} = (a; 0; -a)$,

$$\overrightarrow{B'D} = (-a; a; -a), \overrightarrow{A'B'} = (a; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}] = (a^2; 2a^2; a^2)$$

$$\text{Vậy } d(A'B, B'D) = \frac{|\overrightarrow{A'B'} \cdot [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}]|}{|[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}]|} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

b. Góc giữa hai đường thẳng MP và C'N

$$\text{Ta có } M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), P\left(0; \frac{a}{2}; a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC'} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow MP \perp NC'$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MP và C'N có số đo bằng 90°

Bài 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Giải

a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

Cách 1.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa A'C và song song với MN. Khi đó:

$$d(A'C, MN) = d(M, (P))$$

Phương trình của mặt phẳng (P):

$$\text{Ta có } C(1; 1; 0), M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1), \overrightarrow{MN} = (0; 1; 0)$$

$\Rightarrow$ Vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = (1; 0; 1)$

$$\vec{n} = [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = (1; 0; 1)$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình của mp(P) là: } 1(x-0) + 0(y-0) + 1(z-1) = 0 \text{ hay } x + z - 1 = 0$$

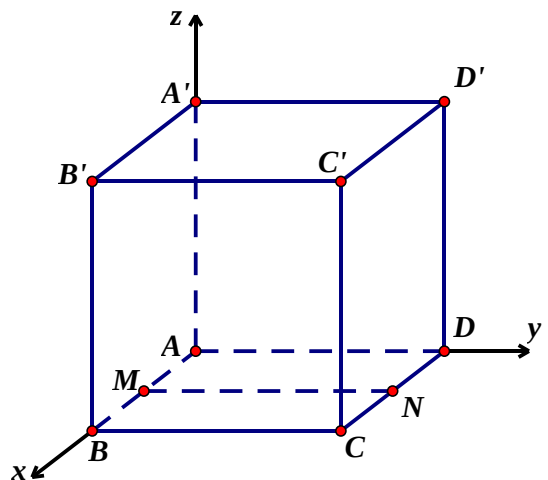
$$\text{Vậy } d(A'C, MN) = d(M, (P)) = \frac{\left|\frac{1}{2} + 0 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Cách 2.

$$d(A'C, MN) = \frac{|\overrightarrow{A'M} \cdot [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]|}{|[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]|} \text{ với } [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = (1; 0; 1), \overrightarrow{A'M} = \left(\frac{1}{2}; 0; -1\right)$$

$$\Rightarrow |[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]| = \sqrt{2}, [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] \cdot \overrightarrow{A'M} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } d(A'C, MN) = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



b. Viết phương trình mặt phẳng chứa $A'C$ tạo với $mp(Oxy)$ một góc α .

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $A'C$ và tạo với $mp(Oxy)$ một góc α .

Phương trình $mp(Q)$ có dạng: $ax + by + cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$

$mp(Q)$ đi qua $A'(0;0;1)$ và $C(1;1;0)$ nên $\begin{cases} c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = -d = a + b$

Khi đó phương trình của (Q) là: $ax + by + (a + b)z - (a + b) = 0$

$\Rightarrow mp(Q)$ có vtpt là $\vec{n} = (a; b; a + b)$

$mp(Oxy)$ có vtpt là $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Gọi α là góc giữa (Q) và (Oxy) , ta có $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 6(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2 + ab)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 5ab = 0 \Leftrightarrow (2a^2 + ab) + (2b^2 + 4ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(2a + b) + 2b(b + 2a) = 0 \Leftrightarrow (2a + b)(a + 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2b \text{ hoặc } b = -2a$$

Với $a = -2b$, chọn $a = 2$ và $b = -1$

$\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (Q) là $2x - y + z - 1 = 0$

Với $b = -2a$, chọn $a = 1$ và $b = -2$

$\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (Q) là $x - 2y - z + 1 = 0$

Bài 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các đoạn thẳng BD và AD' sao cho $DM = AN$.

- Xác định vị trí của hai điểm M, N để MN nhỏ nhất. Chứng minh rằng khi đó MN vuông góc với BD và AD' .
- Chứng minh rằng MN vuông góc với một đường thẳng cố định.

Giải

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD , tia Oz chứa AA' .

a. Giả sử cạnh hình lập phương có độ dài bằng a . Đặt

$$AN = DM = t \quad (0 \leq t \leq a\sqrt{2}).$$

Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$,

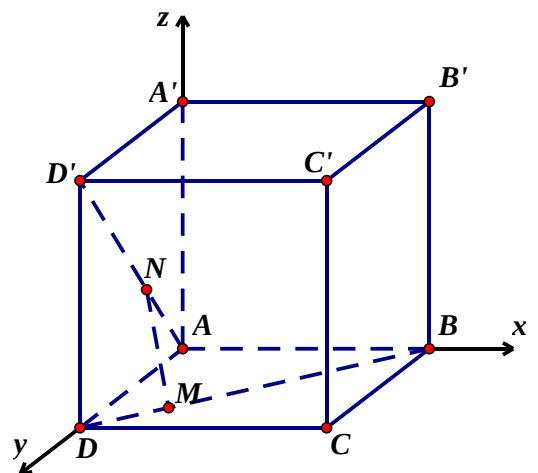
$$M\left(\frac{t}{\sqrt{2}}; a - \frac{t}{\sqrt{2}}; 0\right), N\left(0; \frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{t}{\sqrt{2}}; t\sqrt{2} - a; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Ta có:

$$MN^2 = \left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + (t\sqrt{2} - a)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3t^2 - 2\sqrt{2}at + a^2$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 2\sqrt{2}at + a^2$. Hàm số này có đồ thị là một



parabol quay bề lõm lên phía trên. Do đó $f(t)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Vì $\frac{a\sqrt{2}}{3} \in [0; a\sqrt{2}]$ nên MN nhỏ nhất khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow M, N$ thuộc đoạn BD, AD' tương ứng sao cho

$$DM = \frac{1}{3}BD, AN = \frac{1}{3}AD'$$

Khi MN nhỏ nhất ta có: $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ nên $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$, $\overrightarrow{AD'} = (0; a; a)$ nên:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(-\frac{a}{3}\right) \cdot (-a) + \left(-\frac{a}{3}\right) \cdot a + \frac{a}{3} \cdot 0 = 0$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD'} = \left(-\frac{a}{3}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{a}{3}\right) \cdot a + \frac{a}{3} \cdot a = 0$$

Vậy MN vuông góc với BD và AD'.

b. Trước hết ta tìm phương $\vec{\alpha} = (x; y; z) \neq \vec{0}$ vuông góc với vec-tơ $\overrightarrow{MN}$. Điều đó tương đương với:

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \quad \forall t \in [0; a\sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow x \left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + y(t\sqrt{2} - a) + z \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \forall t \in [0; a\sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{z}{\sqrt{2}}\right)t - ya = 0 \quad \forall t \in [0; a\sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ ya = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Chọn $\vec{\alpha} = (1; 0; 1)$

Vậy MN vuông góc với một đường thẳng cố định nhận $\vec{\alpha} = (1; 0; 1)$ làm vec-tơ chỉ phương.

Chú ý: Ta có kết luận tương tự là MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Bài 30. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A. Các điểm M, N thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $(MBC) \perp (NBC)$

- Chứng minh rằng AM.AN không đổi.
- Xác định vị trí của M, N để tứ diện MNBC có thể tích nhỏ nhất.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm A, các tia Ox, Oy Oz lần lượt trùng các tia AB, AC, AM.

Đặt $AB = b$, $AC = c$, $AM = m$ (b, c không đổi)

Khi đó $A(0; 0; 0)$, $B(b; 0; 0)$, $C(0; c; 0)$, $M(0; 0; m)$

Giả sử $N(0; 0; n)$

Ta có (MBC): $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{m} - 1 = 0$ có pháp vec-tơ $\vec{\alpha} \left(\frac{1}{b}; \frac{1}{c}; \frac{1}{m}\right)$;

(NBC): $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{n} - 1 = 0$ có pháp vec-tơ $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{b}; \frac{1}{c}; \frac{1}{n}\right)$.

Vậy $(MBC) \perp (NBC) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{m \cdot n} = 0 \Leftrightarrow mn = \frac{-b^2 c^2}{b^2 + c^2}$$

Mặt khác $m > 0$ nên $n < 0$. Vậy M và N nằm về hai phía của A.

a. Ta có $AM \cdot AN = |m| \cdot |n| = |m \cdot n| = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$ không đổi.

b. Ta có: $\vec{BC} = (-b; c; 0)$, $\vec{BM} = (-b; 0; m)$, $\vec{BN} = (-b; 0; n)$

$$[\vec{BM}, \vec{BN}] = (0; b(n-m); 0)$$

Vậy $V_{MNBC} = \frac{1}{6} |[\vec{BM}, \vec{BN}] \cdot \vec{BC}| = \frac{1}{6} |bc(n-m)|$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V_{MNBC} = \frac{1}{6} bc(n-m) \geq \frac{1}{6} bc \cdot 2\sqrt{m \cdot (-n)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = -n = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Vậy V_{MNBC} nhỏ nhất khi M, N nằm về hai phía của A và $AM = AN = \frac{AB \cdot AC}{BC}$

Chú ý: ta có thể tính thể tích tứ diện MNBC theo cách:

$$\begin{aligned} V_{MNBC} &= V_{MABC} + V_{NABC} = \frac{1}{3} AM \cdot S_{\triangle ABC} + \frac{1}{3} AN \cdot S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{3} (AM + AN) \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} bc(m-n) \end{aligned}$$

Bài 31. Cho tam giác đều ABC có cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua I. Dựng

đoạn $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a. $(SAB) \perp (SAC)$

b. $(SBC) \perp (SAD)$

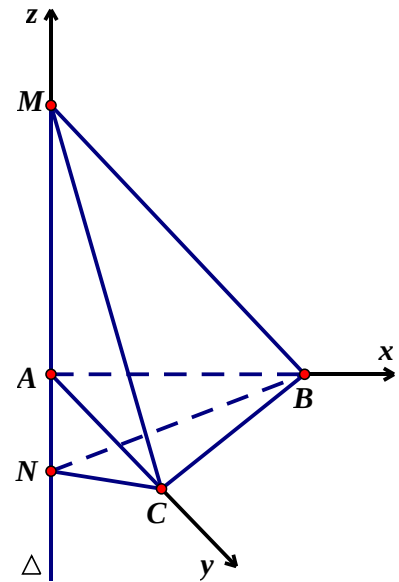
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm I, các tia Ox, Oy, lần lượt trùng các tia ID, IC, tia Oz

song song và cùng chiều với tia DS. Khi đó $D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$,

$$C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), B\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$$

SA cắt Iz tại trung điểm M của SA. Ta có $M = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$



a. Mặt phẳng (SAB) đi qua $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right),$

$M\left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$ nên có phương trình đoạn chắn (SBA):

(SBA): $-\frac{2x}{a\sqrt{3}} - \frac{2y}{a} + \frac{4z}{a\sqrt{6}} - 1 = 0$ và có pháp vec-tơ

$$\vec{n}_1\left(-\frac{2}{a\sqrt{3}}; -\frac{2}{a}; \frac{4}{a\sqrt{6}}\right)$$

Mặt phẳng (SAC) đi qua

$A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), M\left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$ nên có phương trình

đoạn chắn

(SAC): $-\frac{2x}{a\sqrt{3}} + \frac{2y}{a} + \frac{4z}{a\sqrt{6}} - 1 = 0$ và có pháp vec-tơ $\vec{n}_2\left(-\frac{2}{a\sqrt{3}}; \frac{2}{a}; \frac{4}{a\sqrt{6}}\right)$

$$\text{Ta có } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\frac{2}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} + \frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{2}{a}\right) + \frac{4}{a\sqrt{6}} \cdot \frac{4}{a\sqrt{6}} = 0$$

Do đó (SAB) $\perp$ (SAC)

b. Mặt phẳng (SBC) có cặp vec-tơ chỉ phương là:

$$\vec{BC}(0; a; 0) \parallel \vec{\alpha}(0; 1; 0); \quad \vec{CS}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right) \parallel \vec{\beta}(\sqrt{3}; -1; \sqrt{6})$$

Vậy (SBC) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_3 = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}] = (\sqrt{6}; 0; -\sqrt{3})$

Mặt phẳng (SAD) trùng mặt phẳng tọa độ (xOz) nên có pháp vec-tơ $\vec{n}_4(0; 1; 0)$

Do $\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_4 = 0$ nên (SBC) $\perp$ (SAD)

Bài 32. Cho hình vuông ABCD. Các tia Am và Cn cùng vuông góc với mặt ABCD và cùng chiều. Các điểm M, N lần lượt thuộc Am, Cn. Chứng minh rằng (BMN) $\perp$ (DMN) $\Leftrightarrow$ (MBD) $\perp$ (NBD)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia AB, AD, Am. Giả sử hình vuông ABCD có cạnh bằng a.

Đặt AM = m, CN = n. Ta có:

$$B(a; 0; 0), D(0; a; 0), M(0; 0; m),$$

$$N(a; a; n), C(a; a; 0)$$

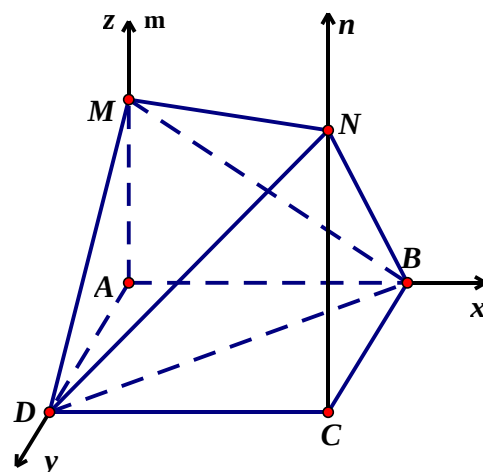
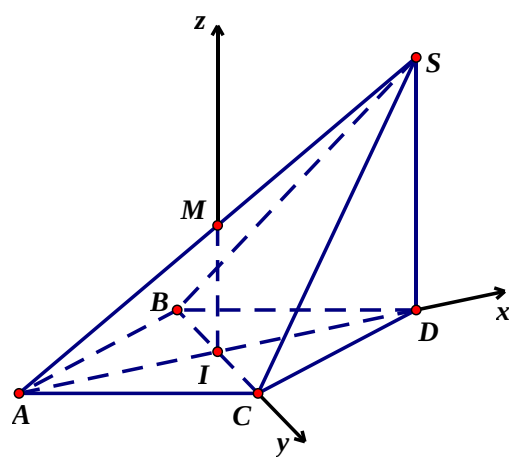
Mặt phẳng (BMN) có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{BM} = (-a; 0; m),$

$$\vec{BN} = (0; a; n)$$

Do đó (BMN) có pháp vec-tơ

$$[\vec{BM}, \vec{BN}] = (-am; an; -a^2) \parallel \vec{\alpha}_1(m; -n; a)$$

Mặt phẳng (DMN) có cặp



vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{DM} = (0; -a; m)$, $\overrightarrow{DN} = (a; 0; n)$

Do đó (DMN) có pháp vec-tơ $[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}] = (-an; am; a^2) \parallel \vec{\alpha}_2(-n; m; a)$

$$\text{Vậy } (BMN) \perp (DMN) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2 = 0 \Leftrightarrow m \cdot n = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

Ta có (MBD): $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{m} - 1 = 0$ có pháp vec-tơ là $\vec{\beta}_1 = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{a}; \frac{1}{m}\right)$

Mặt phẳng (BDN) có cặp vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$, $\overrightarrow{BN} = (0; a; n)$

Do đó (NBD) có pháp vec-tơ $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BN}] = (an; an; -a^2) \parallel \vec{\beta}_2(n; n; -a)$ (2)

$$\text{Vậy } (MBD) \perp (NBD) \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{a} + \frac{n}{a} - \frac{a}{m} = 0 \Leftrightarrow m \cdot n = \frac{a^2}{2}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 33. Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng nhau, M là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng A'M vuông góc với AC' và CB'.

Giải

Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có các tia Ox, Oy lần lượt trùng với các tia OC, OB, tia Oz song song cùng chiều với tia AA'. Giả sử các cạnh của hình lăng trụ bằng a. Khi đó:

$$C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B'\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$$

$$, A'\left(0; -\frac{a}{2}; a\right), C'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a\right), M\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{A'M} = \left(0; a; -\frac{a}{2}\right) \parallel \vec{\alpha}(0; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AC'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\right) \parallel \vec{\beta}(\sqrt{3}; 1; 2)$$

$$\overrightarrow{CB'} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\right) \parallel \vec{\gamma}(-\sqrt{3}; 1; 2)$$

Do $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$ nên $A'M \perp AC'$ và $A'M \perp CB'$

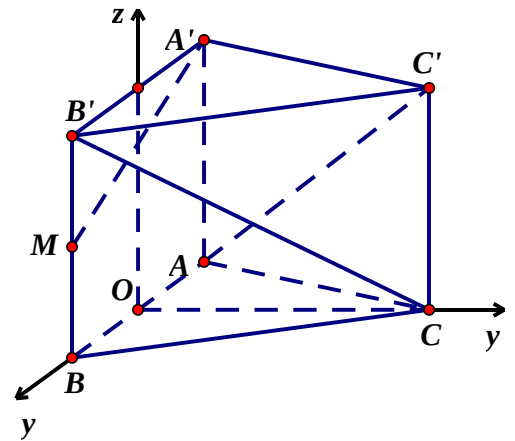
Bài 34. Cho hình chóp đều S.ABCD, đáy có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Biết rằng $BM \perp DN$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc tọa độ O là tâm của hình vuông ABCD, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia OA, OB, Ó.

$$\text{Đặt } SO = h. \text{ Khi đó: } B\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right), D\left(0; -\frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right), A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), C\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right),$$

$$S(0; 0; h), M\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}; 0; \frac{h}{2}\right), N\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}; 0; \frac{h}{2}\right) \text{ (vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC)}$$



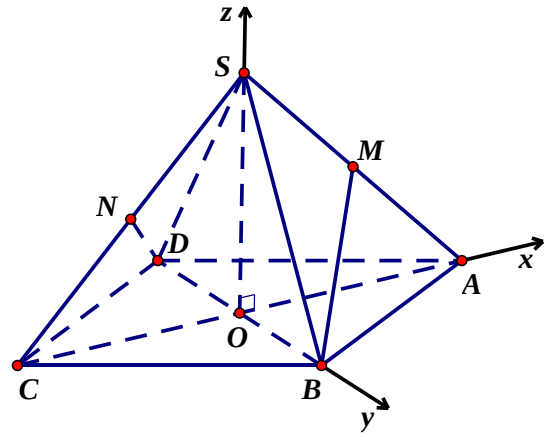
Ta có $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}; \frac{-a}{\sqrt{2}}; \frac{h}{2} \right); \overrightarrow{DN} = \left(\frac{-a}{2\sqrt{2}}; \frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{h}{2} \right)$

Ta có:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow \frac{-a^2}{8} - \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{10}}{6}$

Bài 35. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.



Giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có O là tâm tam giác đều ABC , các tia Oy, Oz lần lượt trùng các tia OB, OS , tia Ox cùng hướng với tia CA .

Đặt $SO = h$. Khi đó:

$$A\left(\frac{a}{2}; \frac{-a}{2\sqrt{3}}; 0\right), B\left(0; \frac{a}{\sqrt{3}}; 0\right), C\left(\frac{-a}{2}; \frac{-a}{2\sqrt{3}}; 0\right),$$

$$S(0; 0; h), M\left(0; \frac{a}{2\sqrt{3}}; \frac{h}{2}\right), N\left(\frac{-a}{4}; \frac{-a}{4\sqrt{3}}; \frac{h}{2}\right)$$

Mặt phẳng (AMN) có cặp vec-tơ chỉ phương

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{h}{2} \right), \overrightarrow{AN} = \left(\frac{-3a}{4}; \frac{a}{4\sqrt{3}}; \frac{h}{2} \right)$$

Vậy (AMN) có pháp vec-tơ

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{3ah}{8\sqrt{3}}; \frac{-ah}{8}; \frac{5a^2}{8\sqrt{3}} \right) \parallel \vec{\alpha} \left(\frac{3ah}{\sqrt{3}}; -ah; \frac{5a^2}{\sqrt{3}} \right)$$

Mặt phẳng (SBC) cắt trục Ox tại $K\left(\frac{-a}{3}; 0; 0\right)$ và đi qua $B\left(0; \frac{a}{\sqrt{3}}; 0\right), S(0; 0; h)$ nên có phương trình đoạn

$$\text{chắn (SBC): } \frac{-3x}{a} + \frac{\sqrt{3}y}{a} + \frac{z}{h} - 1 = 0$$

$$\text{Vậy (SBC) có pháp vec-tơ } \vec{\beta} \left(\frac{-3}{a}; \frac{\sqrt{3}}{a}; \frac{1}{h} \right)$$

$$\text{Ta có } (AMN) \perp (SBC) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{-9h}{\sqrt{3}} - h\sqrt{3} + \frac{5a^2}{h\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{5}{12}}a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}}a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{5}}{24}$$

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều. Gọi M, N, P, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SD, SB .

- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MK và AP .
- Chứng minh rằng $(ANP) \perp (ABCD)$.

Giải

Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia ON, OB, OS. Khi đó:

$$A\left(0; \frac{-a}{2}; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), N(a; 0; 0), S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$D\left(a; \frac{-a}{2}; 0\right), P\left(\frac{a}{2}; \frac{-a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), K\left(0; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

a. Đường thẳng MK có vec-tơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{MK} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{-a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \parallel \vec{\alpha}(2; 1; -\sqrt{3})$$

Đường thẳng AP có vec-tơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \parallel \vec{\beta}(2; 1; \sqrt{3})$$

$$\text{Ta có } [\vec{\alpha}, \vec{\beta}] = (2\sqrt{3}; -4\sqrt{2}; 0), \overrightarrow{AK} = \left(0; \frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Vậy } d(MK, AP) = \frac{|\overrightarrow{AK} \cdot [\vec{\alpha}, \vec{\beta}]|}{\|[\vec{\alpha}, \vec{\beta}]\|} = \frac{3\sqrt{3}a}{2\sqrt{15}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}$$

b. Mặt phẳng (APN) có cặp vec-tơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{NP} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{-a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \parallel \vec{\alpha}(2; 1; -\sqrt{3}); \overrightarrow{AP} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \parallel \vec{\beta}(2; 1; \sqrt{3})$$

$$\text{Do đó (ANP) có pháp vec-tơ là } [\vec{\alpha}, \vec{\beta}] = (2\sqrt{3}; -4\sqrt{3}; 0) \parallel \vec{n}_1 = (1; -2; 0)$$

$$\text{Mặt phẳng (ABCD) có pháp vec-tơ là } \vec{n}_2 = (0; 0; 1)$$

$$\text{Do } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ nên } (ANP) \perp (ABCD)$$

Bài 37. Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có A(0;0;0), D(0;1;0), D'(0;1;2), B'(1;1;2). Gọi E là điểm đối xứng với A qua B. Điểm M thuộc đoạn CD sao cho mặt phẳng (A'ME) tạo với mặt (ABB'A') góc φ thỏa mãn $\tan \varphi = \sqrt{2}$

a. Viết phương trình mặt phẳng (A'ME)

b. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua C, B', D' và có tâm thuộc mặt phẳng (A'ME)

Giải

Dễ dàng suy ra được tọa độ của các điểm A'(0;0;2),

$$B(1;0;0), C(1;1;0), C'(1;1;2), E(2;0;0)$$

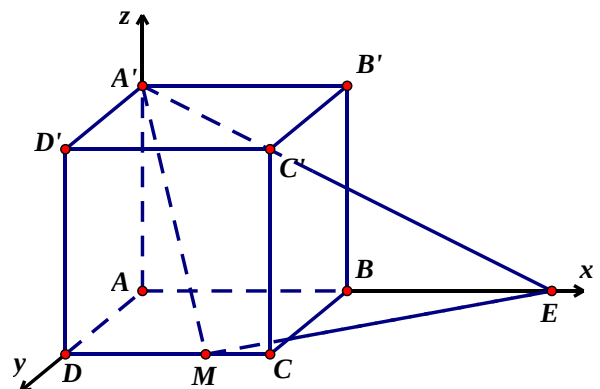
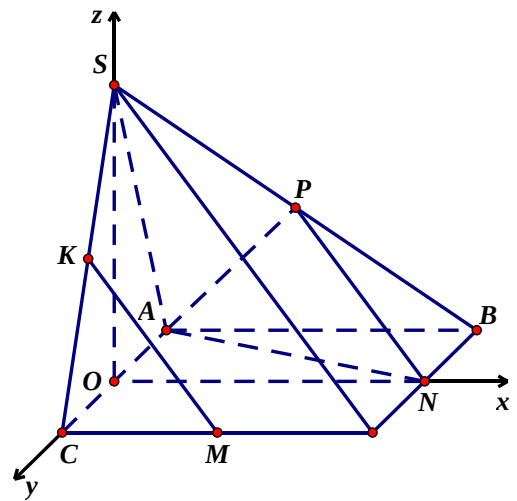
$$\text{Đặt } DM = t \ (0 \leq t \leq 1). \text{ Khi đó } M(t; 1; 0)$$

Mặt phẳng (A'ME) có cặp vec-tơ chỉ phương

$$\overrightarrow{A'M} = (t; 1; -2), \overrightarrow{A'E} = (2; 0; -2) \parallel \vec{\alpha}(1; 0; -1)$$

$$\text{Do đó (A'ME) có pháp vec-tơ } [\overrightarrow{A'M}, \vec{\alpha}] = \vec{n}_1(-1; t-2; -1)$$

$$\text{Mặt phẳng (ABB'A') có pháp vec-tơ } \vec{n}_2(0; 1; 0)$$



Ta có $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|t-2|}{\sqrt{2+(t-2)^2}}$ suy ra $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(t-2)^2}}$

Vậy $\sqrt{2} = \tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{|t-2|} \Leftrightarrow |t-2| = 1 \Leftrightarrow t = 1$ (vì $0 \leq t \leq 1$)

Vậy $M(1;1;0)$ (trùng với điểm C)

a. Mặt phẳng $(A'ME)$ có pháp vec-tơ $\vec{n}_1(-1; t-2; -1) = (-1; -1; -1) // (1; 1; 1)$ và đi qua điểm $E(2; 0; 0)$ nên có phương trình:

$$(A'ME): 1(x-2) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \text{ hay } (A'ME): x + y + z - 2 = 0$$

b. (S) đi qua C, B', D' nên có tâm I thuộc các mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ lần lượt là các mặt phẳng trung trực của CB', CD'.

(α) đi qua trung điểm $K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ của CB' và có pháp vec-tơ $\vec{CB'} = (0; -1; 2)$

Vậy $(\alpha): -\left(y - \frac{1}{2}\right) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2y - 4z + 3 = 0$

(β) đi qua trung điểm $L\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ của CD' và có pháp vec-tơ $\vec{D'C} = (1; 0; -2)$

Do đó $(\beta): 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0(y-1) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4z + 3 = 0$

Vậy tọa độ của I là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2y - 4z + 3 = 0 \\ 2x - 4z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$$

Mặt cầu (S) có bán kính $R = IC = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Vậy $(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}$

Bài 38. Cho tứ diện OABC vuông tại O. Các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$ tạo với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ tương ứng. Gọi S_O, S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh O, A, B, C của tứ diện. Chứng minh rằng:

a. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ với H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC)

b. $S_O^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2$

Giải

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Giả sử $OA = a, OB = b, OC = c$, khi đó $O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

a. Mặt phẳng (ABC) có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\Rightarrow OH = d(O, (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

b. Do các tam giác OAB, OAC, OBC là các tam giác vuông tại O nên:

$$S_A^2 = S_{OBC}^2 = \left(\frac{1}{2} OB \cdot OC \right)^2 \Rightarrow S_A^2 = \frac{b^2 c^2}{4}$$

$$\text{Tương tự ta có: } S_B^2 = \frac{c^2 a^2}{4}, S_C^2 = \frac{a^2 b^2}{4}$$

$$\text{Mặt khác: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2} \Rightarrow S_O^2 = S_{\Delta ABC}^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2$$

Bài 39. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $AD = b$. Các tia Am và Cn cùng hướng và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các tia Am, Cn sao cho $(MBD) \perp (NBD)$. Chứng minh rằng AM.CN không đổi.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, khi đó:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;b;0), C(a;b;0)$$

Giả sử $AM = m$, $CN = n$ ($m, n > 0$). Ta có $M(0;0;m)$, $N(a;b;n)$

Mặt phẳng (MBD) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{m} \right)$

Mặt phẳng (NBD) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}' = [\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{ND}]$

Do $\overrightarrow{NB} = (0; -b; -n)$, $\overrightarrow{ND} = (-a; 0; -n)$ nên

$$\vec{n}' = (bn; an; -ab) = abn \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; -\frac{1}{n} \right)$$

$$(MBD) \perp (NBD) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{mn} = 0.$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{mn} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \Rightarrow AM \cdot CN = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \text{const}$$

Bài 40. Cho hình chóp đều S.ABCD, đáy có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC, O là tâm của đáy ABCD. Biết MN tạo với mặt phẳng (ABCD) góc 30°

a. Chứng minh rằng: $SO = MN$

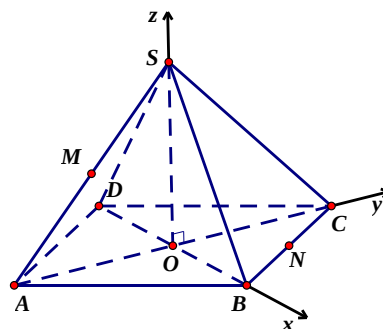
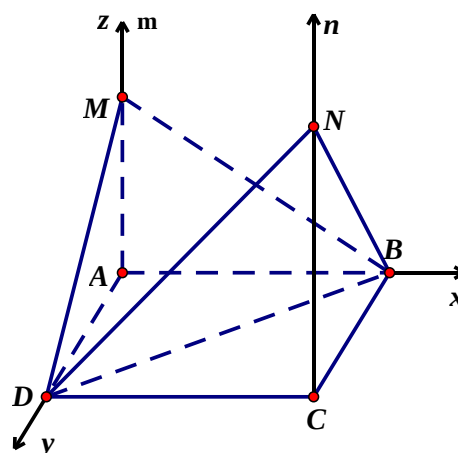
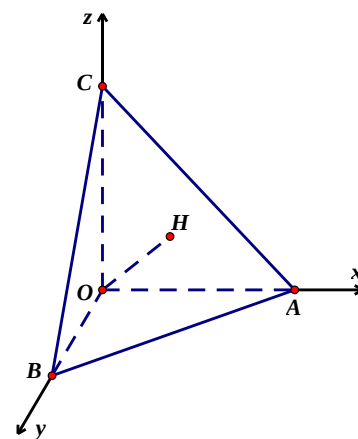
b. Tính góc giữa MN và (SBD)

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, khi đó: $O(0;0;0)$,

$$B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right), A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

Giả sử $SO = h$ ($h > 0$). Khi đó



$$S(0;0;h), M\left(0; \frac{-a\sqrt{2}}{4}; \frac{h}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{h}{2}\right)$$

a. Mặt phẳng (ABCD) có phương trình $z=0$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(0;0;1)$, suy ra $\sin 30^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{MN}|}$

(vì MN tạo với (ABCD) góc 30°). Do đó:

$$\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{2a^2}{16} + \frac{2a^2}{4} + \frac{h^2}{4}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{5a^2 + 2h^2}} = 1 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{6} \text{ hay } h = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{Vậy } SO = h = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{Mặt khác } MN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} + \frac{5a^2}{24}} = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{Vậy } SO = MN$$

b. Mặt phẳng (SBD) có phương trình $y=0$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}'(0;1;0)$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a\sqrt{30}}{12}\right)$$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa MN và (SBD), ta có: } \sin \alpha = \frac{|\vec{n}' \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{n}'| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{30}}{6}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Bài 41. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt (ABC). Tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, $BC=b$. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° . Tính thể tích hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Giả sử $SA=h$, khi đó $B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $S(a;0;h)$

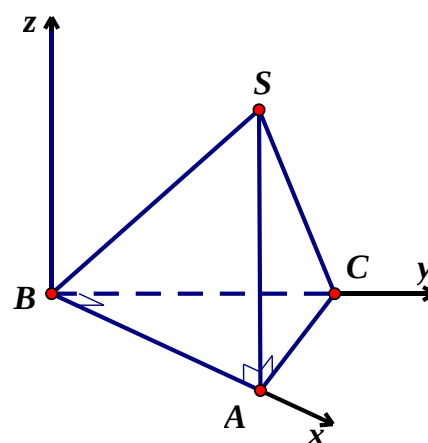
$$\overrightarrow{SC} = (-a; b; -h)$$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $z=0$. $\vec{n}=(0;0;1)$ là vec-tơ pháp tuyến của (ABC)

Do SC tạo với (ABC) góc 60° nên:

$$\sin 60^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \sqrt{3(a^2 + b^2)}$$

Giả sử $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, ta có:



$$IA^2 = IB^2 = IC^2 = IS^2$$

$$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 + z_0^2$$

$$= x_0^2 + y_0^2 + \left(z_0 - \sqrt{3(a^2 + b^2)}\right)^2$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{a}{2}; y_0 = \frac{b}{2}; z_0 = \frac{\sqrt{3(a^2 + b^2)}}{2}$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, ta có:

$$R = IB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Gọi V là thể tích hình chóp, ta có:

$$V = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}SA.AB.BC = \frac{1}{6}ab.\sqrt{3(a^2 + b^2)}$$

Bài 42. Cho hình chóp đều S.ABC, đáy có cạnh bằng a. M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Biết $BM \perp AN$. Tính thể tích và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC và K là trung điểm của BC, khi đó: $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $KB = KC = \frac{a}{2}$. Giả sử

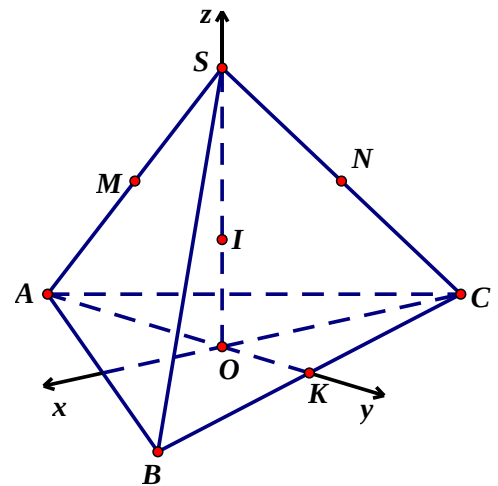
$$SO = h \ (h > 0)$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó:

$$O(0;0;0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right), A\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right), S(0;0;h)$$

$$\Rightarrow M\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{h}{2}\right), N\left(-\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{h}{2}\right), \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{a}{4}; \frac{5a\sqrt{3}}{12}; \frac{h}{2}\right)$$



$$\text{Do } BM \perp AN \text{ nên } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{8} - \frac{15a^2}{36} + \frac{h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{42}}{6}a$$

$$\text{Gọi V là thể tích hình chóp, ta có: } V = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}$$

Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, dễ thấy $I \in SO$ nên $I(0;0;m)$

Ta có:

$$IA^2 = IS^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + m^2 = \left(\frac{a\sqrt{42}}{6} - m\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + m^2 = \frac{7}{6}a^2 - \frac{\sqrt{42}}{3}a.m + m^2 \Leftrightarrow m = \frac{5a}{2\sqrt{42}}$$

$$\text{Vậy } R = IA = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{25a^2}{168}} = \frac{9a}{2\sqrt{42}}$$

Bài 43. Cho điểm M nằm trong góc tam diện vuông Oxyz. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm phân biệt A, B, C. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện OABC.

Giải

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Trần Đình Cư. GV THPT Gia Hội, TP Huế. SĐT: 01234332133

Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (α) cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

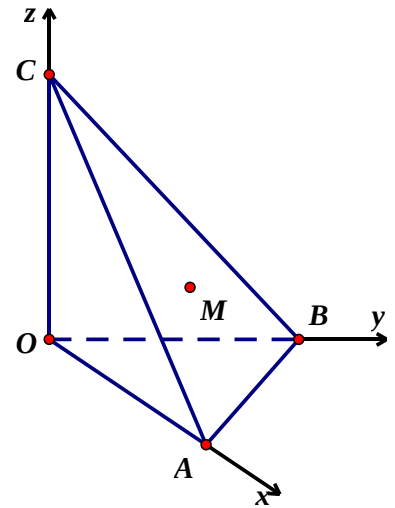
Khi đó mặt phẳng (α) có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Ta có $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$. Vì $M \in (\alpha)$ nên $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1$

Suy ra $1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x_0 y_0 z_0}{abc}}$ (bất đẳng thức Cô-si)

$$\Rightarrow abc \geq 27x_0 y_0 z_0 \Rightarrow V_{OABC} \geq \frac{27x_0 y_0 z_0}{6}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x_0 \\ b = 3y_0 \\ c = 3z_0 \end{cases}$$



Bài 44. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b vuông góc với nhau, nhận AB làm đoạn vuông góc chung (A thuộc a, B thuộc b). Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên a, b sao cho $MN = AM + BN$. Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm O của đoạn AB tới đường thẳng MN không đổi. Từ đó suy ra MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB .

Giải

Kẻ $Ay \parallel b$. Dễ thấy $Ay \perp a, Ay \perp AB$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Giả sử $AB = h, AM = m, BN = n$ ($h, m, n > 0$).

Khi đó: $A(0; 0; 0), B(0; 0; h), M(m; 0; 0),$

$N(0; n; h), O\left(0; 0; \frac{h}{2}\right)$

Theo giả thiết $MN = AM + BN$ nên ta có

$$\sqrt{m^2 + n^2 + h^2} = m + n \Leftrightarrow h^2 = 2mn$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (-m; n; h), \overrightarrow{OM} = \left(m; 0; -\frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OM}] = \left(-\frac{hn}{2}; \frac{hm}{2}; -mn\right)$$

Do đó

$$d(O, MN) = \frac{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OM}]}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{\sqrt{\frac{h^2 n^2}{4} + \frac{h^2 m^2}{4} + m^2 n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2mn^3}{4} + \frac{2m^3 n}{4} + m^2 n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn}} = \sqrt{\frac{mn}{2}} = \frac{h}{2}$$

Vậy khoảng cách từ O đến MN không đổi và bằng $\frac{AB}{2}$. Do đó MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB .

Bài 45. Trong không gian tọa độ cho các điểm $A(0; 0; 1), D(0; 2; 0)$. Các điểm B và C thay đổi trên trục Ox sao cho $(ACD) \perp (ABD)$. Xác định vị trí của B và C để thể tích tứ diện $ABCD$ nhỏ nhất. Ứng với vị trí đó, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AD và tạo với các mặt $(ACD), (ABD)$ những góc bằng nhau.

Giải

Giả sử $B(b;0;0)$, $C(c;0;0)$. Khi đó (ABD) có phương trình: $\frac{x}{b} + \frac{y}{2} + z = 1$

và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(\frac{1}{b}; \frac{1}{2}; 1\right)$

Mặt phẳng (ACD) có phương trình: $\frac{x}{c} + \frac{y}{2} + z = 1$ và có vec-tơ pháp tuyến

$\vec{n}' = \left(\frac{1}{c}; \frac{1}{2}; 1\right)$

Do $(ACD) \perp (ABD)$ nên $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Rightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{4} + 1 = 0 \Rightarrow bc = -\frac{4}{5}$

Vậy ta có $OB \cdot OC = \frac{4}{5}$ và B, C nằm khác phía đối với O .

Ta có:

$$V_{ABCD} = V_{BOAD} + V_{COAD} = \frac{1}{3}(BO + CO) \cdot S_{\Delta OAD} = \frac{1}{3}(BO + CO) \geq \frac{2}{3} \sqrt{BO \cdot CO} = \frac{4}{3\sqrt{5}} \quad \text{Dấu "}" xảy ra}$$

$\Leftrightarrow BO = CO = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Khi đó mp(AOD) tạo với các mặt phẳng (ACD) , (ABD) những góc bằng nhau và do đó, mặt phẳng (α) qua AD và vuông góc với (AOD) cũng tạo với các mặt phẳng (ACD) , (ABD) những góc bằng nhau.

(AOD) có phương trình: $x = 0$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;0;0)$

Mặt phẳng (α) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{n}, \overrightarrow{AD}] = (0;1;2)$. Do đó (α) có phương trình: $0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) + 2 \cdot (z-1) = 0$ hay $y + 2z - 2 = 0$.

Bài 46. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;-1;0)$, $C(2;1;0)$, $B'(2;-1;2)$, $D'(0;1;2)$. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các đoạn $A'B'$ và BC sao cho $D'M \perp AN$.

a. Chứng minh rằng MN luôn vuông góc với một đường thẳng cố định.

b. Khi M là trung điểm của $A'B'$, viết phương trình mặt phẳng (DMN)

Giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2;2;0)$, $\overrightarrow{B'D'} = (-2;2;0)$

$\Rightarrow AC \perp B'D'$ và $AC = B'D'$

$\Rightarrow AC \perp BD$ và $AC = BD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình vuông

Tương tự, ta chứng minh được các mặt còn lại của hình hộp là những hình vuông, do đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Giả sử $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}] \Rightarrow \vec{n} = (0;0;8)$

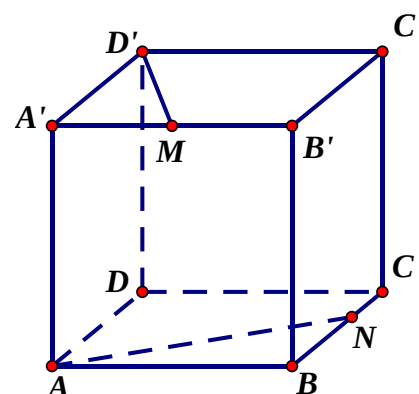
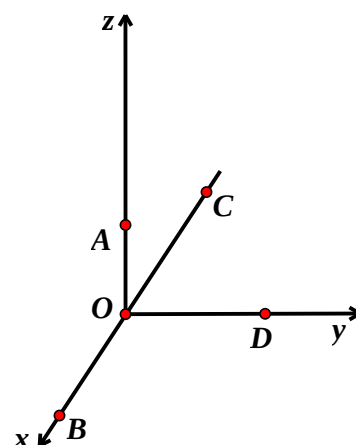
$\Rightarrow (ABCD)$ có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(0;0;8)$

$\Rightarrow (ABCD)$ có phương trình: $z = 0$

$(A'B'C'D')$ có phương trình: $z = 2$

Từ đó dễ dàng xác định được các đỉnh còn lại của hình lập phương là:

$B(2;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;-1;2)$, $C'(2;1;2)$



$$A'B' \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \quad BC \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 2s \\ z = 0 \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

Do M, N nằm trên các đoạn A'B' và BC nên $M(2t; -1; 2)$, $N(2; -1 + 2s; 0)$ với $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$

Theo giả thiết $D'M \perp AN \Rightarrow \overrightarrow{D'M} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Rightarrow t = s$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2 - 2t; 2t; -2)$$

a. Xét $\vec{u} = (1; 1; 1)$, ta thấy $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \forall t$ nên MN luôn vuông góc với các đường thẳng có phương $\vec{u}$, suy ra MN luôn vuông góc với một đường thẳng cố định.

b. Khi M là trung điểm của A'B' thì $t = s = \frac{1}{2}$

Ta có $M(1; -1; 2)$, $N(2; 0; 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1; 1; -2), \overrightarrow{DM} = (1; -2; 2)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DM}] = (-2; -4; -3)$$

$$\Rightarrow (DMN) \text{ qua } D(0; 1; 0) \text{ và có vec-tơ pháp tuyến } \vec{n}_1 = (2; 4; 3)$$

Vậy (DMN) có phương trình: $2x + 4y + 3z - 4 = 0$