

XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

VÍ DỤ MINH HỌA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

ĐỀ MINH HỌA TỐT NGHIỆP THPT 2020: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	1		$+\infty$		1
			$-\infty$		

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

PHÂN TÍCH VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. DẠNG TOÁN: Đây là bài toán ở dạng vận dụng: Từ bảng biến thiên xác định dấu các hệ số a, b và c của hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$.

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ là $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Từ công thức của hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ chỉ ra phương trình đường thẳng của tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và công thức tính đạo hàm của nó.

B2: Từ bảng biến thiên chỉ ra tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số và chiều biến thiên của hàm số đó.

B3: Thay các dữ kiện ở bước 1 vào bước 2 ta sẽ xác định được dấu của các hệ số a, b và c .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Chọn C

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có:
$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{c}{2} \quad (1)$$

Mặt khác: $f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên

$$f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow ac-b > 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow -c^2 + c > 0 \Leftrightarrow 0 < c < 1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN - PHẦN 1

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+m^2+4}{bx+c}$ ($a, b, c, m \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận đứng: $x = 3 > 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$.

Tiệm cận ngang: $y = 1 > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 3 > 0 \Rightarrow -\frac{m^2+4}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow c > 0$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+9}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	3	$-\infty$	3

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Tiệm cận đứng: $x = -2 < 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} < 0 \Rightarrow bc > 0$.

Tiệm cận ngang: $y = 3 > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x < -2 < 0 \Rightarrow -\frac{9}{a} < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow c > 0$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	2	$-\infty$	2

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $b < 0, c < 0, d < 0$.

D. $b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận ngang: $y = 2 > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > 0$, mà $a > 0 \Rightarrow c > 0$.

Tiệm cận đứng: $x = -1 < 0 \Rightarrow -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow \frac{d}{c} > 0$, mà $c > 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x < -1 < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $b < 0, c < 0, d < 0$.

D. $b > 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải

Chọn D

Tiệm cận ngang: $y = 2 > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > 0$, mà $a < 0 \Rightarrow c < 0$.

Tiệm cận đứng: $x = 1 > 0 \Rightarrow -\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow \frac{d}{c} < 0$, mà $c < 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 1 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-2}{bx+c}$ ($a, b, c, m \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	1		$+\infty$		1

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận đứng: $x = 1 > 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$.

Tiệm cận ngang: $y = 1 > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow c < 0$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+2020}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\frac{1}{3}$		$+\infty$		$-\frac{1}{3}$

Kết quả nào sau đây **đúng**?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn B

+ Tiệm cận đứng: $x = 4 > 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc < 0$

+ Tiệm cận ngang: $y = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow ab < 0$

+ Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $x > 4 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow -\frac{2020}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow c < 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $a \neq 0$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y									
			2				2		
	$-\infty$				1				$-\infty$

Tính $P = a - 2b + 3c$.

A. $P = 3$.

B. $P = 6$.

C. $P = -2$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $a < 0$; $b > 0$, hàm đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và $y(\pm 1) = 2$, hàm

đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y(0) = 1$. Suy ra, $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$.

Do đó: $P = a - 2b + 3c = -2$.

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			0	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; 3)$ do đó $c = 3 > 0$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0, d < 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y		3				$+\infty$
	$-\infty$					-1
						

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Nên theo công thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có:
$$\begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Từ dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

$x = 0 \Rightarrow y = d = -1 \Rightarrow d < 0$.

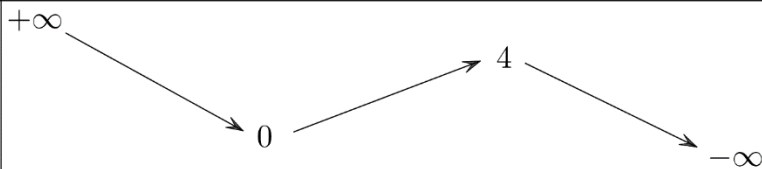
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Nên theo công thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có:
$$\begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$						

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Từ dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

$$x = 0 \Rightarrow y = d > 0.$$

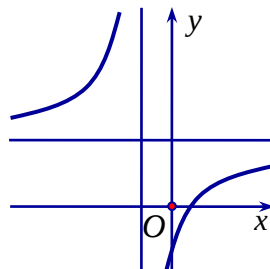
$$\text{Ta có } y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Nên theo công thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}.$$

$$\text{Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: } \begin{cases} -\frac{2b}{3a} = 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-c}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $a < 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn D

❖ Từ hàm số $y = \frac{ax+b}{x-c}$ suy ra:

+ Tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng có phương trình $x = c$.

+ Tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng có phương trình $y = a$.

+ Giao điểm với trục hoành là $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $a \neq 0$.

+ Giao điểm với trục tung là $B\left(0; -\frac{b}{c}\right)$, $c \neq 0$.

❖ Từ đồ thị hàm số ta có:

+ Đường tiệm cận đứng nằm bên trái Oy nên $c < 0$.

+ Đường tiệm cận ngang nằm trên Ox nên $a > 0$.

+ Giao điểm với trục Ox có hoành độ dương nên $-\frac{b}{a} > 0$. Vì $a > 0$ nên $b < 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{x+d}$ ($a, d \in \mathbb{R}, ad+1 \neq 0$) có đồ thị như hình bên.

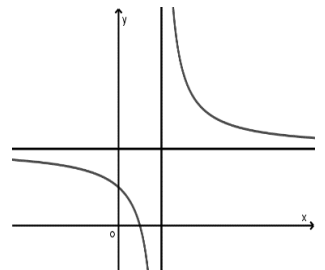
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\begin{cases} a > 0 \\ d < 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a > 0 \\ d > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a < 0 \\ d > 0 \end{cases}$



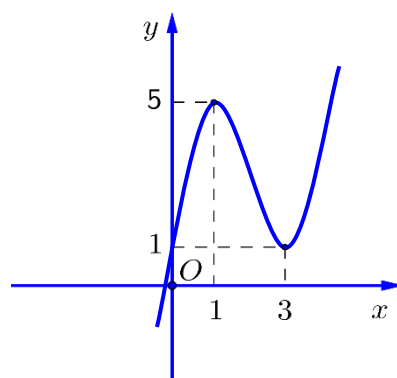
Lời giải

Chọn A

+ Phương trình tiệm cận đứng: $x = -d$. Dựa vào đồ thị ta có $-d > 0 \Leftrightarrow d < 0$

+ Phương trình tiệm cận ngang: $y = a$. Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy nhánh cuối cùng bên phải hướng lên trên suy ra $a > 0$.

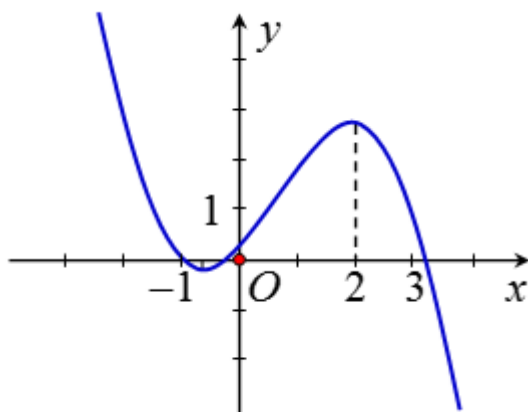
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $x = 1 \Rightarrow d = 1 > 0$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1 = 1 > 0, x_2 = 3 > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

$$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0.$$

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Mệnh đề nào sau đây đúng.



A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

B. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.

C. $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

D. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.

Lời giải

Chọn A

Có $a < 0$ do điểm cuối đồ thị có hướng đi xuống.

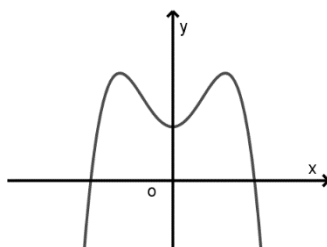
$d > 0$ do giao điểm của đồ thị với Oy nằm phía trên Ox .

Đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $3ac < 0 \Rightarrow c > 0$.

Hoành độ điểm uốn dương nên $-\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 16: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0; b > 0; c < 0$.

B. $a > 0; b < 0; c < 0$.

C. $a < 0; b < 0; c > 0$.

D. $a < 0; b > 0; c > 0$.

Lời giải

Chọn D

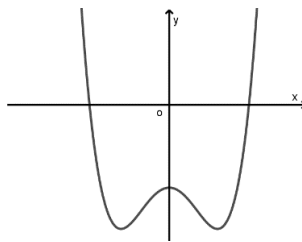
+ Dựa vào dạng đồ thị ta thấy: $a < 0$.

+ Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

+ Với $x = 0$ ta có: $y(0) = c > 0$.

Câu 17: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $a > 0; b > 0; c < 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c < 0$. **C.** $a < 0; b > 0; c < 0$. **D.** $a < 0; b > 0; c > 0$.

Lời giải

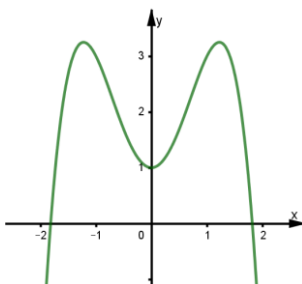
Chọn B

+ Dựa vào dạng đồ thị ta thấy: $a > 0$.

+ Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

+ Với $x = 0$ ta có: $y(0) = c < 0$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $a < 0; b > 0; c > 0$.

B. $a > 0; b < 0; c > 0$.

C. $a < 0; b < 0; c > 0$.

D. $a < 0; b > 0; c < 0$.

Lời giải

Chọn A

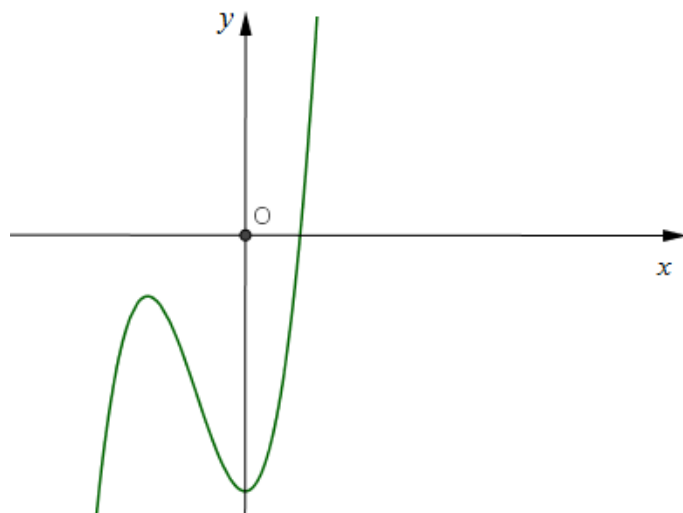
Ta có nhánh bên phải đồ thị đi xuống, suy ra $a < 0$.

Mặt khác do đồ thị có ba cực trị suy ra $ab < 0$ mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$.

Mà giao điểm của đồ thị với trục Oy tại điểm có tung độ $y = c > 0$.

Vậy chọn đáp án **A**.

Câu 19: 2 Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.

B. $a > 0, b = 0, c < 0, d < 0$.

C. $a > 0, b = 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b = 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn A

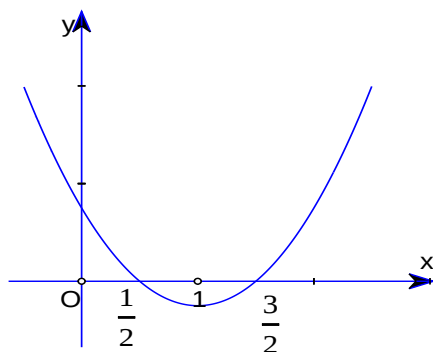
Do nhánh cuối của đồ thị đi lên nên ta có $a > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Do cực tiểu của hàm số thuộc trục tung và có giá trị âm nên $d < 0$ và $x = 0$ là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Rightarrow c = 0$.

$$\text{Lại có } 3ax^2 + 2bx \Leftrightarrow 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2b}{3a} \Rightarrow -\frac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow a > 0, b > 0. \end{cases}$$

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Giá trị của $\frac{c}{b}$ là:



A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

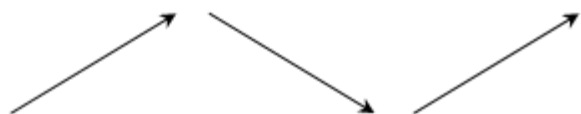
Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm cấp 1 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3a}{4} + b + c$ và $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27a}{4} + 3b + c$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} 3a + 4b + 4c = 0 \\ 27a + 12b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 36b + 36c = 0 \\ 27a + 12b + 4c = 0 \end{cases}$.

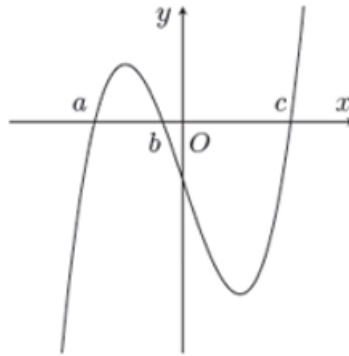
$$\Rightarrow 24b + 32c = 0 \Rightarrow \frac{c}{b} = -\frac{3}{4}.$$

Vậy $\frac{c}{b} = -\frac{3}{4}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN - PHẦN 2

↳ Mức độ 3

Câu 43.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$, biết rằng đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(a) > 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

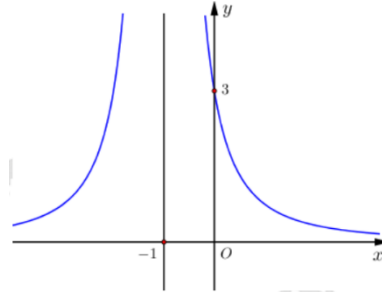
x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\swarrow$ $f(a)$ $\nearrow$ $f(b)$ $\searrow$ $f(c)$ $\nearrow$				

Vì $f(a) > 0$ nên ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $f(c) > 0$ thì toàn bộ đồ thị hàm số nằm ở phía trên trục hoành, do đó đồ thị hàm số không cắt trục hoành.
- Nếu $f(c) = 0$ thì đồ thị hàm số và trục hoành có một điểm chung duy nhất
- Nếu $f(c) < 0$ thì đồ thị hàm số và trục hoành có hai điểm chung

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành nhiều nhất tại hai điểm.

Câu 43.2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- A.** $f(1) = 2$. **B.** $f(2) = \frac{11}{2}$. **C.** $f(1) = \frac{7}{2}$. **D.** $f(2) = 6$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $A(0;4)$ nên $b = 4d$ (1).

Ta có: $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Căn cứ theo đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $-\frac{d}{c} = -1 \Rightarrow c = d$ (2).

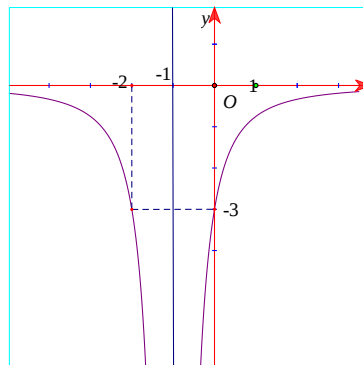
Đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua $(0;3)$ nên $\frac{ad - bc}{d^2} = 3 \Rightarrow ad - bc = 3d^2$ (3).

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ad - 4d^2 = 3d^2 \Rightarrow a = 7d$ ($d \neq 0$) vì nếu $d = 0$ thì $a = b = c = d = 0$ (vô lí).

Do đó $f(x) = \frac{7dx + 4d}{dx + d} = \frac{7x + 4}{x + 1}$.

Vậy $f(2) = 6$.

Câu 43.3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là



- A.** $x + 3y + 2 = 0$. **B.** $x + 3y - 2 = 0$. **C.** $x - 3y - 2 = 0$. **D.** $x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có $f'(x) = \frac{(ad-bc)^2}{(cx+d)^2}$.

Ta có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $f(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{b}{d} = 2 \Leftrightarrow b = 2d$

. Từ đồ thị $y = f'(x)$ nhận đường thẳng $x = -1$ làm tiệm cận đứng nên $-\frac{d}{c} = -1 \Leftrightarrow d = c$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{ad-2d^2}{(cx+d)^2} = \frac{a-2d}{d(x+1)^2}.$$

Mặt khác ta lại có đồ thị $y = f'(x)$ đi qua điểm $(-2; -3)$ nên $f'(2) = 3 \Rightarrow \frac{a-2d}{d} = -3 \Leftrightarrow a = -d$.

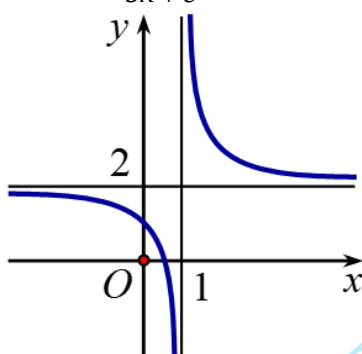
$$\text{Vậy } f(x) = \frac{-dx+2d}{dx+d} = \frac{-x+2}{x+1}.$$

Đồ thị (C) cắt trục Ox tại điểm $(2; 0)$ và $f'(2) = -\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục Ox là $y = -\frac{1}{3}(x-2)$

$$\Leftrightarrow x+3y-2=0.$$

Câu 43.4. Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a = 2, b = 1, c = -1$.

B. $a = 2, b = 1, c = 1$.

C. $a = 2, b = 2, c = -1$.

D. $a = 2, b = -1, c = 1$.

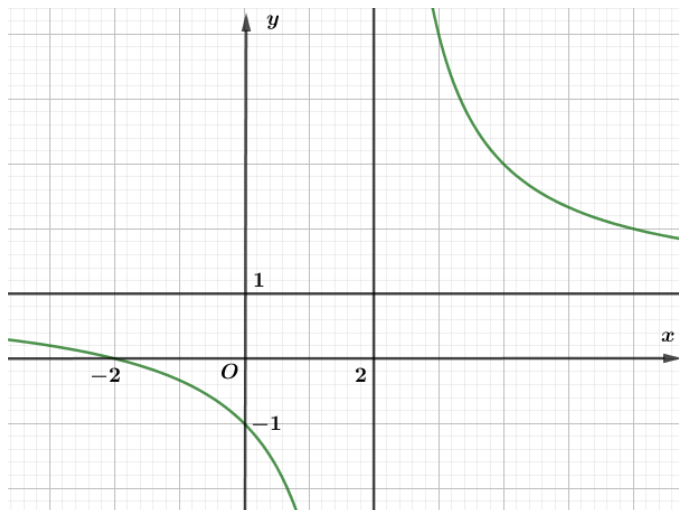
Lời giải

Chọn A

Nhận xét: đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = \frac{-b}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b}$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } \begin{cases} \frac{-b}{c} = 1 \\ \frac{a}{b} = 2 \\ M(0;1) \in (C): y = \frac{ax-1}{bx+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ a=2b \\ 1 = \frac{-1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ a=2b \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b=2 \\ b=-c=1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Câu 43.5. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ với a, b, c là các số thực.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a=1; b=-2; c=1$. **B.** $a=1; b=2; c=1$. **C.** $a=1; b=1; c=-1$. **D.** $a=2; b=2; c=-1$.

Lời giải:

Chọn A

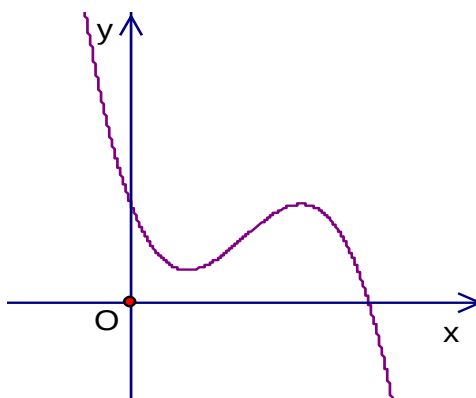
Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(-2; 0)$ nên ta có:

$$\frac{-2a+2}{-2c+b} = 0 \Rightarrow a=1. \text{ Vậy loại D}$$

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1 \Rightarrow \frac{a}{c}=1 \Rightarrow c=a=1$. Vậy loại C

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2 \Rightarrow -\frac{b}{c}=2 \Rightarrow b=-2c=-2$.

Câu 43.6. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0, c > 0, d > 0$.

C. $a < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải:

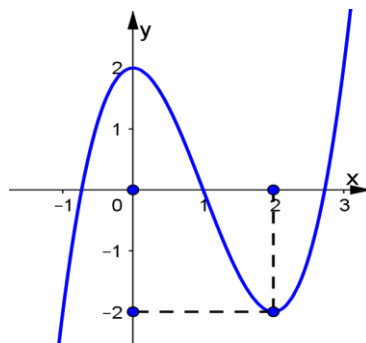
Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị: đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Đồ thị có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung nên $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

Câu 43.7. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Tính tổng $S = a + b + c + d$.

A. $S = -4$.

B. $S = 2$.

C. $S = 0$.

D. $S = 6$.

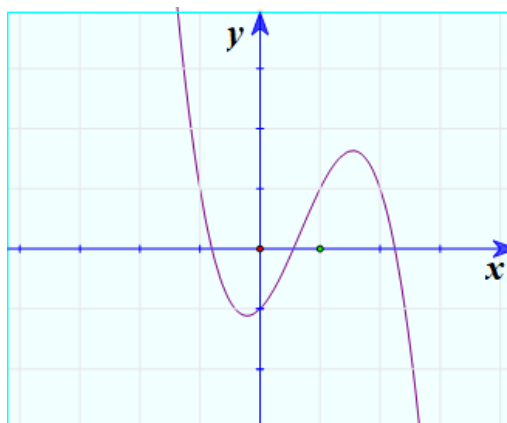
Lời giải:

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ liên tục trên $\mathbb{R}$; đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2; -2)$ và $(0; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ d = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow S = 0.$$

Câu 43.8. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải:

Chọn A

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Từ đồ thị ta có: hàm số có hai điểm cực trị $\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| < x_2 \end{cases}$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ

âm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

Câu 43.9. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		c		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > 0$ và $b \leq 0$. **B.** $a < 0$ và $b \geq 0$. **C.** $a > 0$ và $b \geq 0$. **D.** $a < 0$ và $b \leq 0$.

Lời giải:

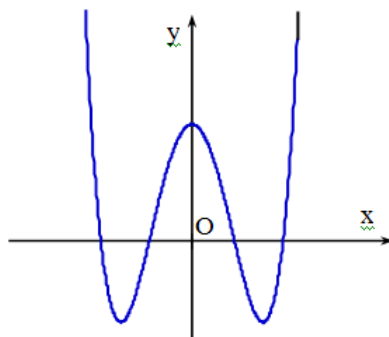
Chọn C

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		c		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow a > 0$.

Hàm số có một cực trị $\Rightarrow ab \geq 0 \Rightarrow b \geq 0$. Vậy KĐ “ $a > 0$ và $b \geq 0$ ” là đúng.

Câu 43.10. Cho hàm số $y = ax^4 - bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải:

Chọn A

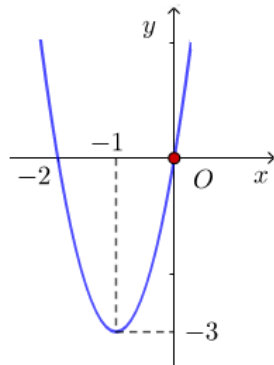
Ta có $y' = 4ax^3 - 2bx = 0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $a > 0$ và $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{b}{2a}} \\ x = -\sqrt{\frac{b}{2a}} \end{cases} \text{ với } a > 0, b > 0 \text{ loại B và C.}$$

Thay $x = 0 \Rightarrow y = c > 0$ loại D.

Câu 43.11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4.

B. 1.

C. -4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Nhìn đồ thị ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. Do đó, hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = -2$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow f(-2) = 0$. (1)

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm có tọa độ $(0; 0)$, $(-2; 0)$, $(-1; -3)$. (2)

$$\text{Từ (1), (2) lập được hệ phương trình } \begin{cases} c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = -3 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = f(0) = -4$.

Câu 43.12. Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đi qua điểm

$A(2; -3)$. Lúc đó hàm số $y = \frac{ax+1}{cx+d}$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

A. $y = \frac{-3}{5} \cdot \frac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y = \frac{2x-1}{1-x}$. **C.** $y = \frac{-2x-1}{-x+1}$. **D.** $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải:

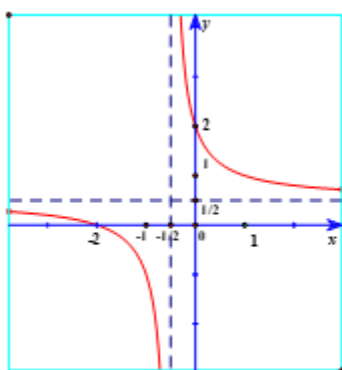
Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$

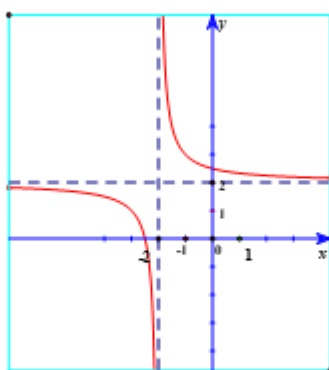
$$\text{Theo đề bài ta có } \begin{cases} \frac{a}{c} = 2 \\ -\frac{d}{c} = 2 \\ \frac{a \cdot 2 - 1}{c \cdot 2 + d} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ -d = 2c \\ 2a - 1 = -6c - 3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2c + d = 0 \\ 2a + 6c + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Câu 43.13. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?

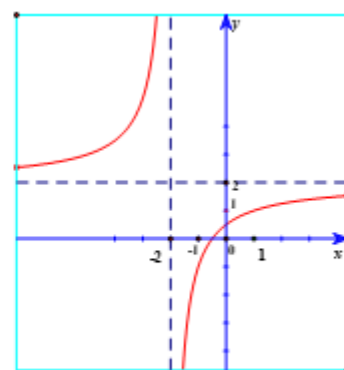
Hãy chọn đáp án **sai**?



Hình (I)



Hình (II)



Hình (III)

A. Hình (I) và (III).

B. Hình (III).

C. Hình (I).

D. Hình (II).

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

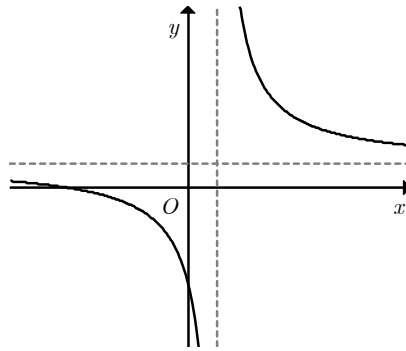
Ta có $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$, $y' < 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$; $y' > 0 \Leftrightarrow m^2-1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. Hình

(I) có $m = -\frac{1}{2} \in (-1; 1)$ nên $y' < 0$ suy ra hàm số nghịch biến, do đó Hình (I) đúng. Hình (II) có

$m = -\frac{3}{2} < -1$ nên $y' > 0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (II) sai. Hình (III) có

$m = -2 < -1$ nên $y' > 0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (III) đúng.

Câu 43.14. Hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c - ab = 0$.

D. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.

Lời giải

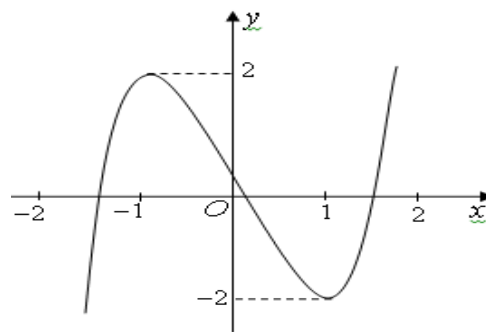
Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y' = \frac{c-ab}{x-a}^2 < 0, \forall x \neq a \longrightarrow c - ab < 0$.

Vậy $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

Câu 43.15. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số đã cho trong hình vẽ ta có phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1 ,

$$x_2 \text{ và } x_3 \text{ thuộc khoảng } (-2; 2) \text{ hay } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases} \text{ với } x_1, x_2 \text{ và } x_3 \text{ thuộc khoảng}$$

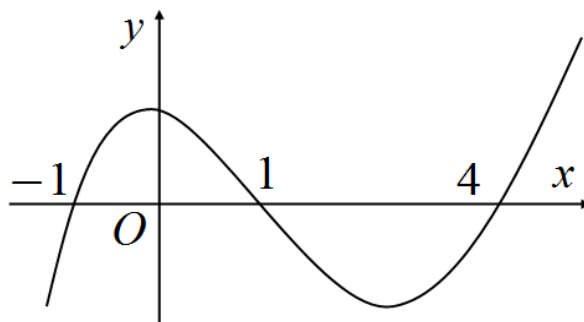
$(-2; 2)$.

$$\text{Đặt } t = f(x) \text{ ta có } f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \\ t = t_2 \\ t = t_3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} f(x) = t_1 \\ f(x) = t_2 \\ f(x) = t_3 \end{cases} \text{ với } t_1, t_2 \text{ và } t_3 \text{ thuộc khoảng } (-2; 2)$$

Dựa vào đồ thị ta thấy ba đường thẳng phân biệt $y = t_1$, $y = t_2$ và $y = t_3$ mỗi đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại ba điểm.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm.

Câu 43.16. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ là



A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m > 0$ và

$$f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-4) = 4mx^3 - 16mx^2 - 4mx + 16m.$$

$$* \text{ Mà } f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q. \text{ Suy ra } \begin{cases} n = -\frac{16}{3}m \\ p = -2m \\ q = 16m \end{cases}.$$

* Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$.

$$\Leftrightarrow mx^4 - \frac{16}{3}mx^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m - \frac{128}{3}m - 8m + 32m + r$$

$$\Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \frac{8}{3}\right) = 0$$

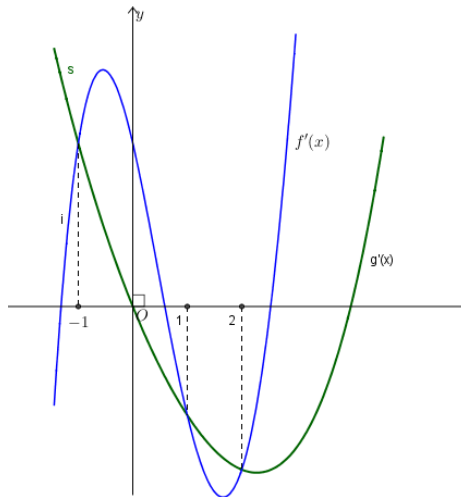
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \end{cases}.$$

Phương trình $x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có 4 nghiệm.

Câu 43.17. Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$(m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải:

Chọn B

+ Từ đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow m \neq 0$.

+ $f(0) = g(0) \Rightarrow r = d$.

+ Ta có $f'(x) - g'(x) = 4mx^3 + 3(n-a)x^2 + 2(p-b)x + q - c$ (1).

Mặt khác từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ ta có $f'(x) - g'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-2)$

hay $f'(x) - g'(x) = 4mx^3 - 8mx^2 - 4mx + 8m$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra
$$\begin{cases} 3(n-a) = -8m \\ 2(p-b) = -4m \\ q-c = 8m \end{cases}$$

+ Phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = ax^3 + bx^2 + cx$

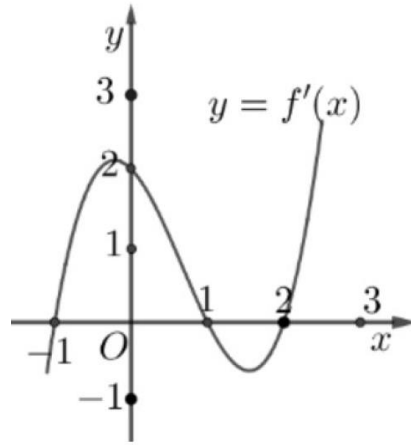
$\Leftrightarrow x[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + q-c] = 0 \Leftrightarrow x \left(mx^3 - \frac{8m}{3}x^2 - 2mx + 8m \right) = 0$

$\Leftrightarrow mx \left(x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0 \end{cases}$

Phương trình $x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$ có đúng một nghiệm thực khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 43.18. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ là một đa thức bậc ba có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-1; 1; 2$. Vì vậy $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 4a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Mặt khác $f'(0) = 2 \Rightarrow 4a(0+1)(0-1)(0-2) = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

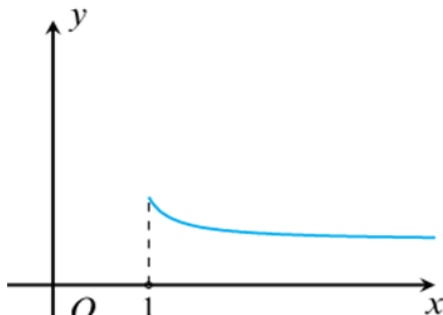
Vậy ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = (x+1)(x-1)(x-2), \forall x$

$\Leftrightarrow 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = x^3 - 2x^2 - x + 2, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 3b = -2 \\ 2c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c; d) = \left(\frac{1}{4}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 2 \right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + e$$

Khi đó $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{155}{192} = 0 \Rightarrow 4$ nghiệm. Chọn đáp án **A**.

Câu 43.19. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ để hàm số $y = \frac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây?



A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số không xác định tại điểm $x = \frac{b}{4}$. Theo đồ thị ta có tiệm cận đứng nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow$

$$\frac{b}{4} < 1 \Leftrightarrow b < 4. \text{ Do } b \text{ nguyên dương nên } b \in \{1, 2, 3\}.$$

Ta có $y' = \frac{4a-2b}{(4x-b)^2}$. Hàm số nghịch biến nên $4a-2b < 0 \Leftrightarrow b > 2a$. Do a là số nguyên

dương và $b \in \{1, 2, 3\}$ nên ta có một cặp (a, b) thỏa mãn là $(1, 3)$

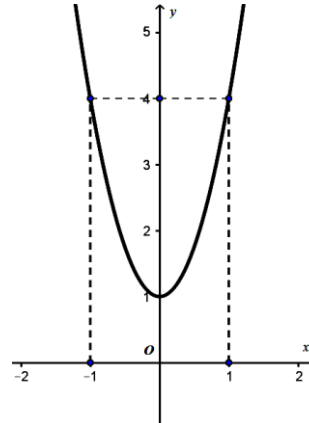
Câu 43.20. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

A. $H = 64$.

B. $H = 51$.

C. $H = 58$.

D. $H = 45$.



Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } \begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1.$$

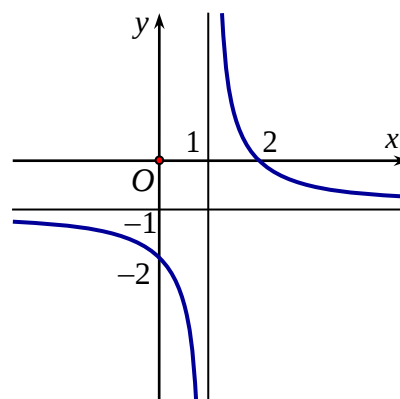
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox , $x = 4$, $x = 2$.

$$\text{Ta có } S = \int_2^4 (3x^2 + 1) dx = 58.$$

$$\text{Lại có: } S = \int_2^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^4 = f(4) - f(2).$$

$$\text{Do đó: } H = f(4) - f(2) = 58.$$

Câu 43. 21. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 0 < a$.

B. $0 < b < a$.

C. $b < a < 0$.

D. $0 < a < b$.

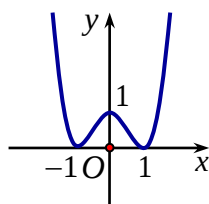
Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta thấy : Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = a$ và tiệm cận đứng $x = 1$. Đồ thị

cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{b}{a} > 1$. Ta có :
$$\begin{cases} \frac{a}{-1} = 1 \\ \frac{b}{a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow b < a = -1 < 0.$$

Câu 43.22. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > 0, b < 0, c = 1$.

B. $a > 0, b > 0, c = 1$.

C. $a < 0, b > 0, c = 1$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Đồ thị hướng lên nên $a > 0$, loại đáp án **C**.

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = c = 1$ nên loại đáp án **D**.

+ Có 3 cực trị nên $ab < 0$ suy ra $b < 0$.

Câu 43.23. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

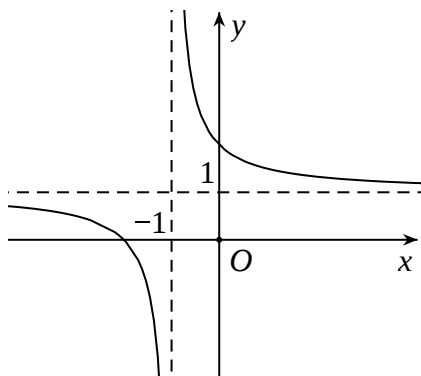
Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $a = b = 0, c > 0$

Trường hợp 1: $a \neq 0$, giải $\Delta' = b^2 - 3ac$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 43.24. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $b < 0 < a$.

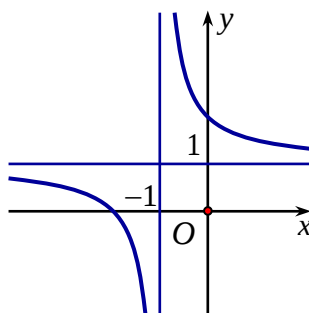
B. $0 < a < b$.

C. $a < b < 0$.

D. $0 < b < a$.

Lời giải

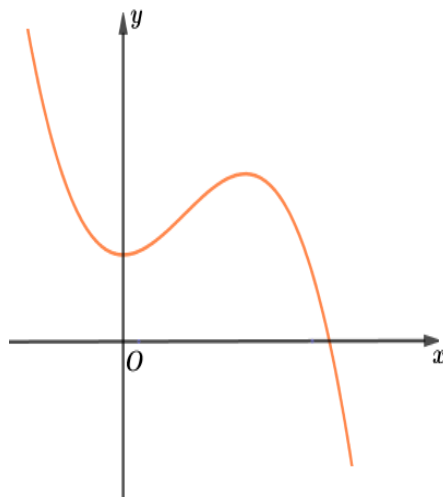
Chọn B



$y' = \frac{a-b}{(x+1)^2}$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định và có đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Suy ra: $\begin{cases} y' < 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b < 0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b > 1 \end{cases}$. Vậy $0 < a < b$.

Câu 43.25. cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0.$

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0.$

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0..$

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0..$

Lời giải

Chọn A

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

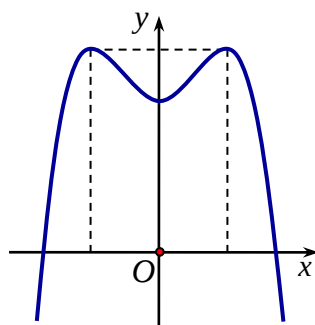
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Cho $x = 0$, ta có $f(0) = d > 0$. Từ hình dáng đồ thị ta thấy $a < 0$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu, suy ra $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, từ đồ thị

$$\text{có hoành độ hai điểm cực trị không âm do đó } \begin{cases} a < 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Câu 43.26. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



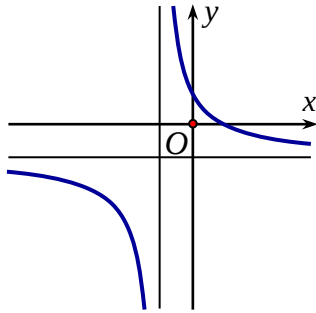
A. $a < 0; b > 0; c > 0.$ **B.** $a < 0; b > 0; c < 0.$ **C.** $a > 0; b < 0; c < 0.$ **D.** $a < 0; b < 0; c < 0.$

Lời giải:

Chọn A

Đồ thị hàm số có dạng đồ thị của hàm số bậc bốn hệ số a âm, giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên điểm O nên hệ số c dương. Đồ thị hàm số có ba cực trị nên hệ số b trái dấu với hệ số a , hay hệ số b dương.

Câu 43.27. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ (a, c, d : hằng số thực) như hình vẽ.



Khẳng định nào đúng

- A.** $d > 0, a > 0, c < 0$. **B.** $d > 0, a < 0, c > 0$. **C.** $d < 0, a > 0, c < 0$. **D.** $d < 0, a < 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn C

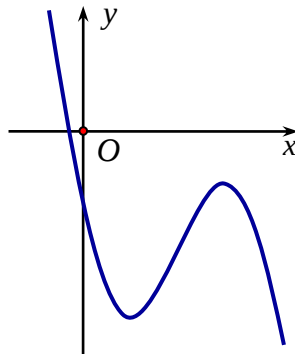
Ta có $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{d} > 0 \Rightarrow d < 0$.

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow a > 0$.

Hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} < 0 \Rightarrow c < 0$.

Vậy $d < 0, a > 0, c < 0$.

Câu 43.28. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số thực và $a \neq 0$) như hình vẽ.



Khẳng định nào đúng

- A.** $b > 0, c > 0$. **B.** $b > 0, c < 0$. **C.** $b < 0, c > 0$. **D.** $b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Nhận thấy $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt nên

$$\begin{cases} P = \frac{c}{3a} > 0 \\ S = -\frac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

Câu 43.29. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	1	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$
		-3	$-\infty$		$-\infty$	1	

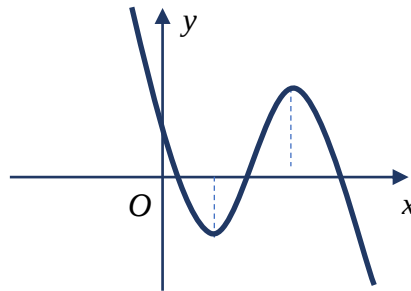
Câu 43.30. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0; b^2 > 3ac$.

B. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0; b^2 > 3ac$.

C. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0; b^2 > 3ac$.

D. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0; b^2 > 3ac$.



Lời giải

Chọn C

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$\Delta' = b^2 - 3ac.$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên $a < 0$. (1)

Nhìn vào ĐTHS khi $x = 0$ thì $y = d > 0$. (4)

$$\text{Phương trình có hai cực trị dương nghiệm nên } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \quad (5) \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0 \quad (2) \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow c < 0 \quad (3) \end{cases}$$

Câu 43.31. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{bx+1}$ có đồ thị (C). Nếu (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ thì các giá trị của a và b lần lượt là

A. $-\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{6}$.

B. -3 và -6 .

C. $-\frac{1}{6}$ và $-\frac{1}{2}$.

D. -6 và -3 .

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq -\frac{1}{b} \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình $x = -\frac{1}{b}$, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình $y = \frac{a}{b}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi } \begin{cases} -\frac{1}{b} = \frac{1}{3} \\ \frac{a}{b} = 2 \\ a \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) + b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = -6 \end{cases}$$

Câu 43.32. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc -3 . Khi đó giá trị a, b thỏa mãn điều kiện sau:

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } y' = \frac{-a-b}{(x-1)^2}.$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$ nên: $1 = \frac{b}{-1} \Rightarrow b = -1$.

Vì tiếp tuyến tại A có hệ số góc bằng -3 nên: $y'(0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-a-b}{(-1)^2} = -3 \Rightarrow a = 4$.

Vậy $a+b=3$.

----- **HẾT** -----

<https://toanmath.com/>
