SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ
KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM 2018

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 26/10/2017
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. ***(5 điểm)***

a) Cho q là số thực thuộc khoảng (0;1) và dãy $\{u_n\}_{n\geq 1}$ thỏa mãn điều kiện $|u_{n+2}-u_{n+1}|<q|u_{n+1}-u_n|,\ \forall n\geq 1.$ Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $\{v_n\}_{n\geq 1}$ xác định bởi $0<v_1\neq 1$ và $v_{n+1}=\dfrac{3}{2+v_n},\forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{v_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tính $\lim v_n$.

Bài 2. ***(5 điểm)***

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để 5^n+1 chia hết cho 7^{2018}.

Bài 3. ***(5 điểm)***

Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự (a,b,c); với a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $[a,b,c]=2^3.3^5.5^7$? (Kí hiệu $[a,b,c]$ là bội chung nhỏ nhất của ba số nguyên dương a,b,c).

Bài 4. ***(5 điểm)***

Cho tam giác nhọn *ABC* có *B*, *C* cố định, *A* thay đổi. Phía ngoài tam giác *ABC* dựng các tam giác *ABD*, *ACE* vuông cân tại *A* và hình vuông *BCFG*. Dựng tam giác *XAB* vuông cân tại *X* (*X* khác phía với *D* đối với đường thẳng *AB*), tam giác *YAC* vuông cân tại *Y* (*Y* khác phía với *E* đối với đường thẳng *AC*).

a) Chứng minh rằng 3 điểm *D*, *Y*, *F* thẳng hàng.

b) Các đường thẳng *DY*, *EX* cắt nhau tại *P*. Chứng minh rằng đường thẳng *AP* luôn đi qua một điểm cố định khi *A* thay đổi.

……………………………………….HẾT……………………………………

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM 2018

Ngày thi: 26/10/2018

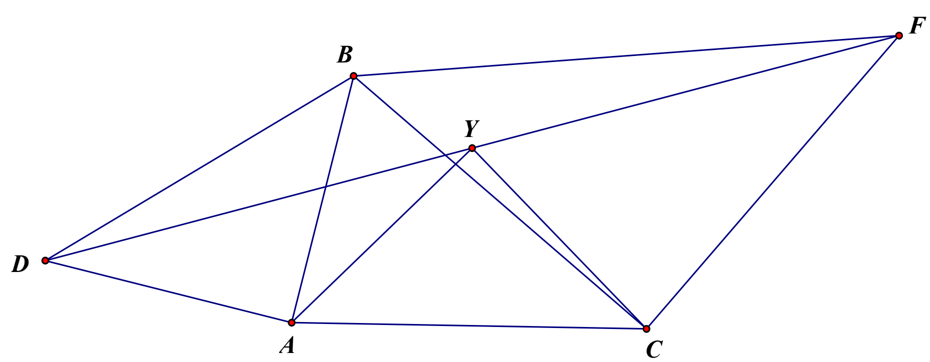
Môn: Toán

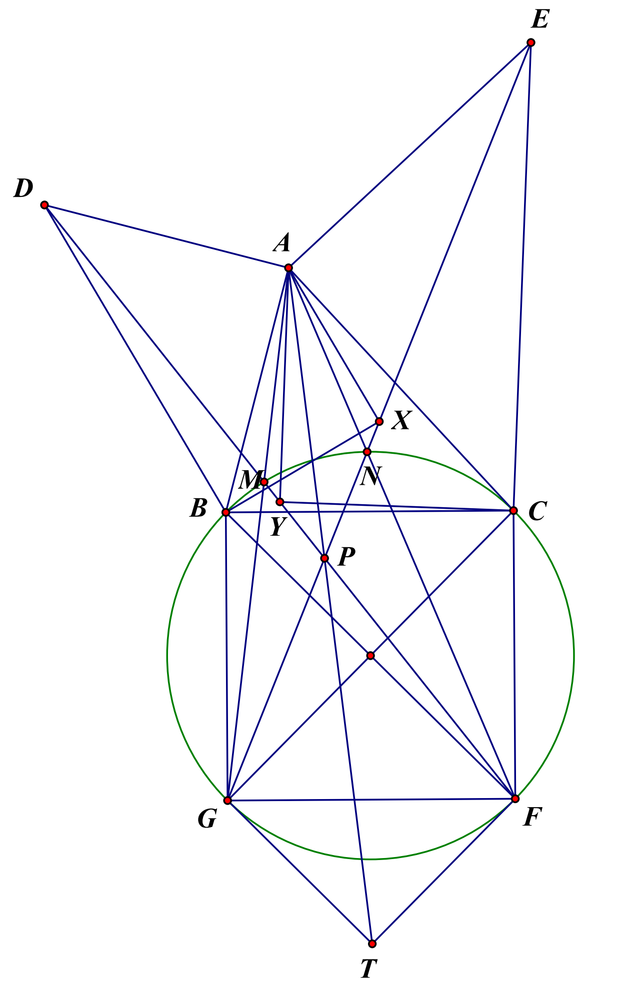
Thời gian làm bài: 180 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
	Bài 1. ***(5 điểm)*** a) Cho q là số thực thuộc khoảng (0;1) và dãy $\{u_n\}_{n\geq 1}$ thỏa mãn điều kiện $\lvert u_{n+2}-u_{n+1}\rvert < q\lvert u_{n+1}-u_n\rvert,\ \forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. b) Cho dãy $\{v_n\}_{n\geq 1}$ xác định bởi $0<v_1\neq 1$ và $v_{n+1}=\dfrac{3}{2+v_n}, \forall n\geq 1$. Chứng minh dãy $\{v_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tính $\lim v_n$.	
a.	Ta có $\lvert u_{n+k}-u_n\rvert = \lvert u_{n+k}-u_{n+k-1}+u_{n+k-1}-u_{n+k-2}+\ldots+u_{n+1}-u_n\rvert$ $< q\left(\lvert u_{n+k}-u_{n+k-1}\rvert + \lvert u_{n+k-1}-u_{n+k-2}\rvert+\ldots+\lvert u_{n+1}-u_n\rvert\right)$ $<\left(q^k+q^{k-1}+\ldots+q\right)\lvert u_{n+1}-u_n\rvert$	1 điểm
	$<\left(q^k+q^{k-1}+\ldots+q\right)q^{n-2}\lvert u_2-u_1\rvert$ $=\dfrac{q^{n-1}\left(1-q^k\right)}{1-q}\lvert u_2-u_1\rvert$ $<\dfrac{q^{n-1}}{1-q}\lvert u_2-u_1\rvert$	1 điểm
	Vì $\lim q^n=0$ nên $\forall\varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}$ sao cho $\lvert u_{n+k}-u_n\rvert<\varepsilon, \forall n>N_0, \forall k>0$ Do đó, theo tiêu chuẩn Cauchy dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn.	1 điểm
b.	Ta có $\{v_n\}$ là dãy số dương. $\lvert v_{n+2}-v_{n+1}\rvert = \left\lvert \dfrac{3}{2+v_{n+1}}-\dfrac{3}{2+v_n}\right\rvert = \left\lvert\dfrac{3\left(v_{n+1}-v_n\right)}{\left(2+v_{n+1}\right)\left(2+v_n\right)}\right\rvert < \dfrac{3}{4}\lvert v_{n+1}-v_n\rvert$.	1 điểm

	Theo câu a), dãy $\{v_n\}$ hội tụ và tính được $\lim v_n = 1$.	1 điểm
	Bài 2. ***(5 điểm)*** Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để 5^n+1 chia hết cho 7^{2018}.	
	Nhận xét $n>3$, $5^3 \equiv -1 \pmod 7$ và $ord_7(5)=6$	1 điểm
	Nên 5^n+1 chia hết cho 7^{2018} suy ra $5^n=5^3.5^{n-3}\equiv -1.5^{n-3}\equiv -1 \pmod 7$ hay $5^{n-3}\equiv 1 \pmod 7$ suy ra $6 \mid n-3$ hay $n=6k+3$.	1 điểm
	Ta tìm k để cho $7^{2018} \mid 5^{6k+3}+1$ hay $v_7((5^3)^{2k+1}+1)\geq 2018$. Theo định lý LTE ta có $v_7((5^3)^{2k+1}+1)=v_7(5^3+1)+v_7(2k+1)=1+v_7(2k+1)$	1 điểm
	Hay $v_7(2k+1)\geq 2017$ suy ra $2k+1=7^m.t$ với m,t là các số nguyên dương $m\geq 2017$ và t là số lẻ.	1 điểm
	Khi đó $n=3.7^m.t$ nên số nguyên dương n nhỏ nhất là $n=3.7^{2017}$.	1 điểm
	Bài 3. ***(5 điểm)*** Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự (a,b,c), với a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $[a,b,c]=2^3.3^5.5^7$? (kí hiệu $[a,b,c]$ là bội chung nhỏ nhất của ba số nguyên dương a,b,c).	
	Đặt $a=2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}$, $b=2^{b_1}3^{b_2}5^{b_3}$, $c=2^{c_1}3^{c_2}5^{c_3}$. $0\leq a_1,b_1,c_1\leq 3$, $0\leq a_2,b_2,c_2\leq 5$, $0\leq a_3,b_3,c_3\leq 7$. Ta có $[a,b,c]=2^3 3^5 5^7$ khi và chỉ khi $max\{a_1,b_1,c_1\}=3, max\{a_2,b_2,c_2\}=5, max\{a_3,b_3,c_3\}=7$.	1 điểm
	Ta đếm tất cả các bộ có thứ tự gồm các số nguyên không âm (a_1,b_1,c_1) sao cho $\max\{a_1,b_1,c_1\}=3$. Đặt: $A=\{(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a_1=3, 0\leq b_1,c_1\leq 3\}$ $B=\{(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid b_1=3, 0\leq a_1,c_1\leq 3\}$ $C=\{(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid c_1=3, 0\leq a_1,b_1\leq 3\}$ Khi đó, $A\cup B\cup C$ là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự gồm các số nguyên không âm (a_1,b_1,c_1) sao cho $\max\{a_1,b_1,c_1\}=3$.	1 điểm
	Ta có $\|A\|=\|B\|=\|C\|=16, \|A\cap B\|=\|B\cap C\|=\|C\cap A\|=4, \|A\cap B\cap C\|=1$. Do đó $\|A\cup B\cup C\|=(\|A\|+\|B\|+\|C\|)-(\|A\cap B\|+\|B\cap C\|+\|C\cap A\|)+\|A\cap B\cap C\|=37$.	1 điểm

	Vậy số tất cả các bộ có thứ tự gồm các số nguyên không âm (a_1,b_1,c_1) sao cho $\max\{a_1,b_1,c_1\}=3$ bằng 37.	
	Tương tự: Số tất cả các bộ có thứ tự gồm các số nguyên không âm (a_2,b_2,c_2) sao cho $\max\{a_2,b_2,c_2\}=5$ bằng 91. Số tất cả các bộ có thứ tự gồm các số nguyên không âm (a_3,b_3,c_3) sao cho $\max\{a_3,b_3,c_3\}=7$ bằng 169.	1 điểm
	Theo quy tắc nhân số tất cả các bộ số nguyên dương (a,b,c) thỏa mãn bài toán bằng $37\text{x}91\text{x}169=569023$.	1 điểm
	Bài 4. ***(5 điểm)*** Cho tam giác *ABC* có *B*, *C* cố định, *A* thay đổi. Phía ngoài tam giác *ABC* dựng các tam giác *ABD* và *ACE* là các tam giác vuông cân tại *A* và hình vuông *BCFG*. Dựng tam giác *XAB* vuông cân tại *X* (*X* khác phía với *D* đối với đường thẳng *AB*), tam giác *YAC* vuông cân tại *Y* (*Y* khác phía với *E* đối với đường thẳng *AC*). a. Chứng minh rằng 3 điểm *D*, *Y*, *F* thẳng hàng. b. Các đường thẳng *DY*, *EX* cắt nhau tại *P*. Chứng minh rằng đường thẳng *AP* luôn đi qua một điểm cố định khi *A* thay đổi.	
a.	 Phép quay $Q_C^{90^o}: F \to B$ và phép quay $Q_A^{90^o}: B \to D$. Do đó $Q_A^{90^o} \circ Q_C^{90^o}: F \to D$. Gọi *Y’* là tâm của phép quay $Q_A^{90^o} \circ Q_C^{90^o}$. Theo tính chất tích của 2 phép quay, ta có $(AC, AY') = 45^o$ và $(CY', CA) = 45^o$.	1 điểm
	Suy ra tam giác *Y’AC* cân tại *Y’*. Suy ra $Y' \equiv Y$. Do đó $Q_Y^{180^o}: F \to D$. Nên *D*, *Y*, *F* thẳng hàng. Hơn nữa, *Y* là trung điểm *DF*.	1 điểm

b.		
	Tương tự câu a, chứng minh được X là trung điểm của EG. Gọi $M = AG \cap DF, N = AF \cap EG$. Vì $\triangle BAG \sim \triangle BDF$ nên $\angle BAG = \angle BDF$. Do đó, tứ giác $BDAM$ nội tiếp.	1 điểm
	Suy ra $BM \perp DF$. Tương tự, $CN \perp EG$. Do đó, 6 điểm B, C, F, G, M, N cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $BCFG$.	1 điểm
	Gọi T là giao điểm của tiếp tuyến tại F và tiếp tuyến tại G của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $BCFG$. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm B, C, F, G, M, N ta được A, P, T thẳng hàng. Vậy đường thẳng AP luôn đi qua điểm T cố định.	1 điểm