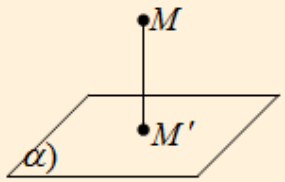
BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng

Khoảng cách giữa một điểm và một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng đó.



$d\left(M,(\alpha)\right)=MM'$ với M' là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (α).

1.1. Khoảng cách từ điểm M bất kì đến mặt phẳng (α) có chứa đường cao của hình chóp (lăng trụ…)

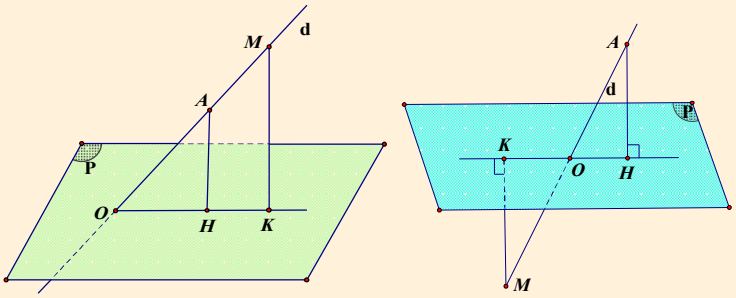
Phương pháp:

Bước 1: Quy khoảng cách từ điểm M về điểm A thuộc mp đáy.

Bước 2: Tìm giao tuyến của mp đáy với mp (α)

Bước 3: Từ A dựng AH vuông góc với giao tuyến tại H. Khi đó $AH=d\left(A;(\alpha)\right)$

* Công thức tính tỉ lệ khoảng cách: $\dfrac{d\left(M,mp(P)\right)}{d\left(A,mp(P)\right)}=\dfrac{MO}{AO}$



1.2. Khoảng cách từ hình chiếu vuông góc A của đỉnh S đến mp bên (α)

Phương pháp:

Bước 1: Tìm giao tuyến của (α) với mp đáy.

Bước 2: Từ A dựng AH vuông góc với giao tuyến tại H.

Bước 3: Nối SH, dựng AK vuông góc SH tại K. Khi đó $AK=d\left(A;(\alpha)\right)$.

1.3. Khoảng cách từ điểm bất kì đến mp bên.

Phương pháp: Quy khoảng cách từ điểm đó đến mp bên về khoảng cách từ điểm là hình chiếu của đỉnh S đến mp bên.

2. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này tới mặt phẳng kia.

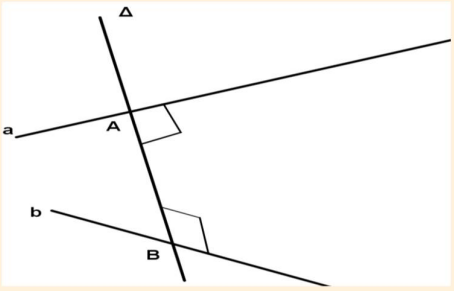
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.

4. Khoảng cách 2 đường thẳng chéo nhau

4.1. Khoảng cách 2 đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó

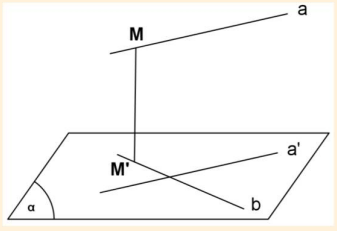
$$\begin{cases}\Delta \perp a, \Delta \perp b \\ \Delta \cap a = A, \Delta \cap b = B\end{cases} \Rightarrow d(a,b) = AB$$



4.2. Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

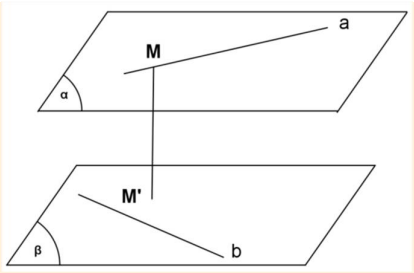
❖**Cách 1:**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

$d(a, b) = d(a, (\alpha))$.Với $\begin{cases}(\alpha) \supset b \\ a // (\alpha)\end{cases}$.



❖ **Cách 2:**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

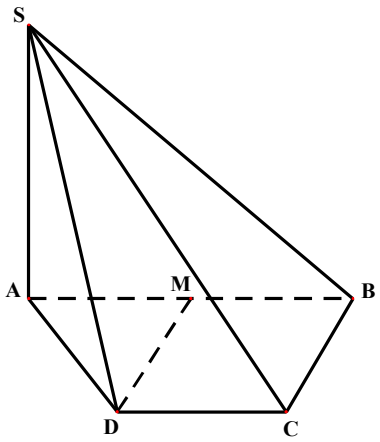
$d(a, b) = d((\alpha),(\beta))$. Với $\begin{cases}(\alpha) \supset a \\ (\beta) \supset b \\ (\alpha) // (\beta)\end{cases}$.



❖**Cách 3:** Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

BÀI TẬP MẪU

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB=2a$, $AD=DC=CB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3a$ (minh họa như hình bên dưới). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{2}$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}a}{13}$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}a}{13}$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng khoảng cách từ đường thẳng DM đến mặt phẳng (SBC).

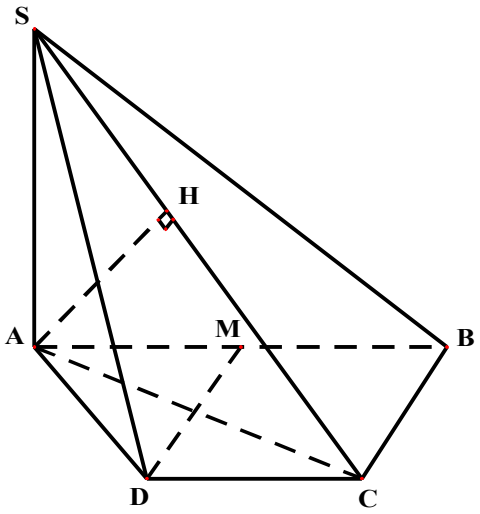
B2: Tính khoảng cách từ DM đến mặt phẳng (SBC) thông qua khoảng cách từ điểm A đến (SBC).

B3: Tính và kết luận

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A



Do M là trung điểm của $AB \Rightarrow BM = AM = \frac{1}{2}AB = a = AD = BC = CD$

$\Rightarrow$ nên tứ giác $ADCM$; $BCDM$ là hình thoi.

$\Rightarrow DM//BC \Rightarrow DM//(SBC) \Rightarrow d(DM,SB) = d(DM,(SBC)) = d(M,(SBC))$.

Mặt khác $AM \cap (SBC) \equiv B \Rightarrow \frac{d(M,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(M,(SBC)) = \frac{1}{2}d(A,(SBC))$ (1)

Xét tam giác ABC, có đường trung tuyến $CM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$

Trong tam giác vuông SAC dựng $AH \perp SC$.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \ \ (do\, SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AH$.

Suy ra: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A,(SBC))$.

Xét tam giác vuông ABC tại C có $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông tại A nên ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2}$

$\Rightarrow AH = \frac{AS.AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{3a.\sqrt{3}a}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \frac{3a}{2} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{3a}{2}$

Từ $(1) \Rightarrow d(M,(SBC)) = \frac{3a}{4}$.

Vậy $d(DM,SB) = d(M,(SBC)) = \frac{3a}{4}$.

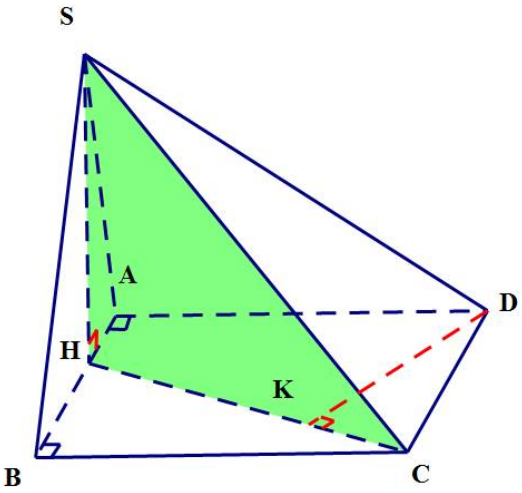
Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 37.1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=2a; AD=3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là H thuộc AB sao cho $HB=2HA$. Tính khoảng cách từ D đến (SHC).

A. $\frac{9\sqrt{97}}{97}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{85}}{11}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{85}}{11}$. **D.** $\frac{a\sqrt{97}}{97}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng $DK \perp HC$ tại K.

Ta có $\begin{cases} DK \perp HC \\ DK \perp SH \end{cases} \Rightarrow DK \perp (SHC) \Rightarrow DK = d(D;(SHC))$.

$$HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + (3a)^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}a.$$

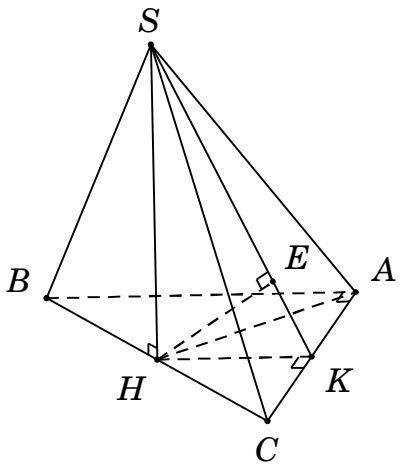
Khi đó $S_{\Delta HDC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}DK.HC \Rightarrow DK = \frac{S_{ABCD}}{HC} = \frac{6a^2}{\frac{\sqrt{97}a}{3}} = \frac{9\sqrt{97}}{97}a.$

Câu 37.2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d=\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ $(E \in SK)$.

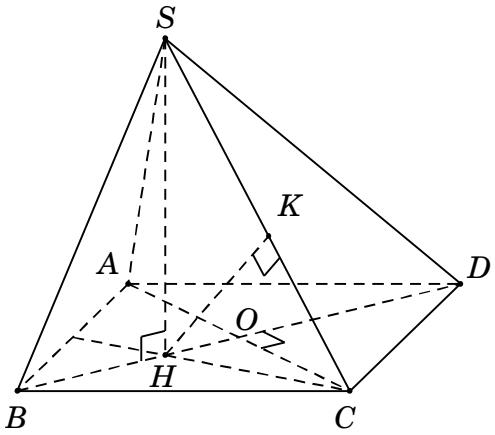
Khi đó $d(B,(SAC)) = 2d(H,(SAC)) = 2HE = 2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 37.3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $30°$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $d(B,(SCD)) = \dfrac{BD}{HD}d(H,(SCD)) = \dfrac{3}{2}d(H,(SCD))$.

Trong (SHC),kẻ $HK \perp SC$ (1).

Ta có: $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$. Lại có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.

Suy ra: $CD \perp (SHC) \Rightarrow CD \perp HK$ (2).

Từ $(1),(2) \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HK$.

+ Theo bài ra ta có: $\widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{(SD,HD)} = \widehat{SDH} = 30°$ và $SH = HD.\tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$.

Tam giác vuông SHC, có $HK = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

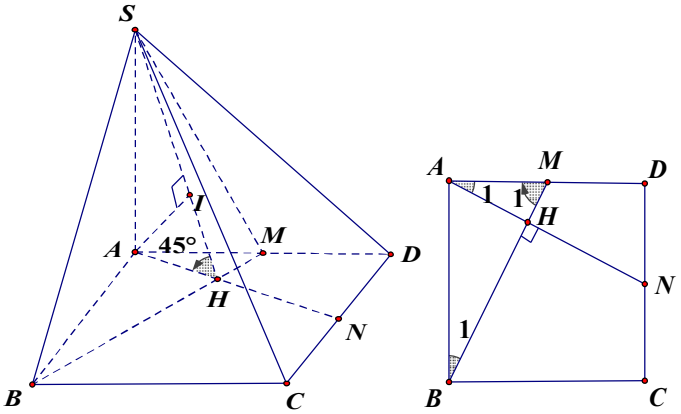
Vậy $d(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 37.4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC, góc giữa (SBM) và mặt đáy là $45°$.Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM)?

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



+ Ta có : $AM = DM \Rightarrow d(D,(SBM)) = d(A,(SBM))$.

+ Gọi H là giao điểm của BM và AN.

Ta có : $\Delta ABM = \Delta DAN\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}$. Mà $\widehat{B_1} + \widehat{M_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^0$.

Vậy $BM \perp AN$.

Khi đó: $\begin{cases} BM \perp AN \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAN) \Rightarrow BM \perp SH$.

Trong (SAH), dựng $AI \perp SH$.

Lại có: $BM \perp (SAN) \Rightarrow BM \perp AI$. Suy ra: $AI \perp (SBM) \Rightarrow d(A,(SBM)) = AI$.

+ Ta có : $\begin{cases} BM = (SBM) \cap (ABCD) \\ BM \perp SH \\ BM \perp AN \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBM),(ABCD))} = \widehat{(SH,AN)} = \widehat{SHA} = 45^\circ$

Suy ra : ΔSAH vuông cân tại A có $SA = AH = a \Rightarrow SH = a\sqrt{2}$.

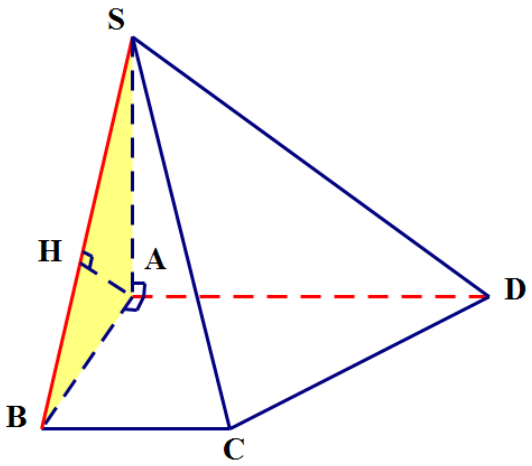
$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(D,(SBM)) = AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37.5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa AD và SB?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Trong (SAB), dựng $AH \perp SB$.

Vì $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$.

Khi đó: $d(AD,SB) = AH$.

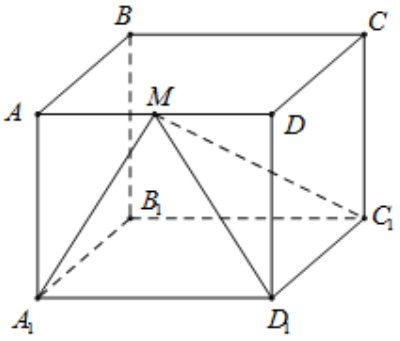
Xét tam giác SAB vuông tại A có $AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37.6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AA_1 = 2a, AD = 4a$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B_1 và C_1M bằng bao nhiêu?

A. $3a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $A_1B_1 // C_1D_1$ suy ra

$d\left(A_1B_1, C_1M\right) = d\left(A_1B_1, \left(C_1D_1M\right)\right) = d\left(A_1, \left(C_1D_1M\right)\right)$

Vì $AA_1 = 2a$, $AD = 4a$ và M là trung điểm AD nên $A_1M \perp D_1M$, suy ra $A_1M \perp \left(C_1D_1M\right)$

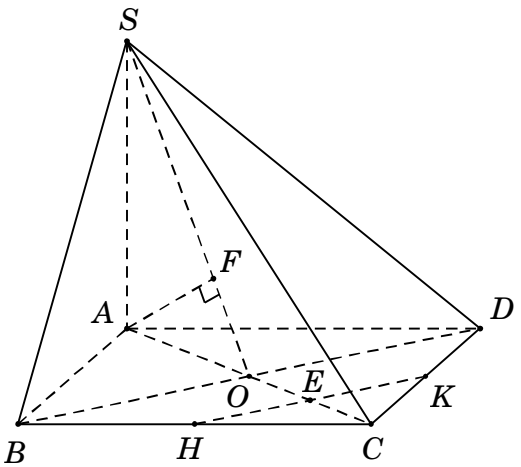
$\Rightarrow d\left(A_1, \left(C_1D_1M\right)\right) = A_1M = 2a\sqrt{2}$.

Câu 37.7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $\left(ABCD\right)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $2a$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi $E = HK \cap AC$. Do $HK // BD \Rightarrow HK // \left(SBD\right)$.

$\Rightarrow d\left(HK, SD\right) = d\left(HK, \left(SBD\right)\right) = d\left(E, \left(SBD\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(A, \left(SBD\right)\right)$.

+ Kẻ $AF \perp SO$. Lại có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow BD \perp AF$.

Suy ra: $AF \perp \left(SBD\right) \Rightarrow d\left(A, \left(SBD\right)\right) = AF$.

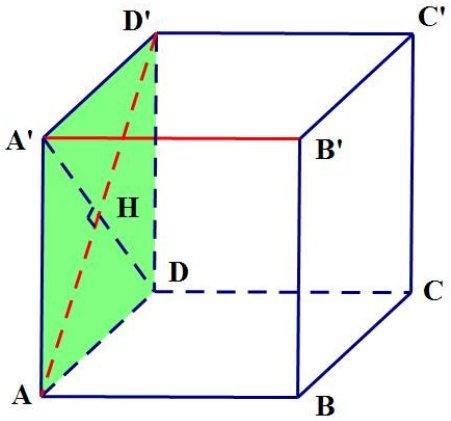
+Xét tam giác vuông SAO có: $AF=\dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\dfrac{2a}{3}$. Vậy $d\left(HK,SD\right)=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{a}{3}$.

Câu 37.8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và $A'B'$ bằng bao nhiêu ?

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases}A'B'\perp A'A\\A'B'\perp A'D'\end{cases}\Rightarrow A'B'\perp\left(ADD'A'\right)$.

Gọi H là giao điểm của AD' với $A'D\Rightarrow A'H\perp AD'$.

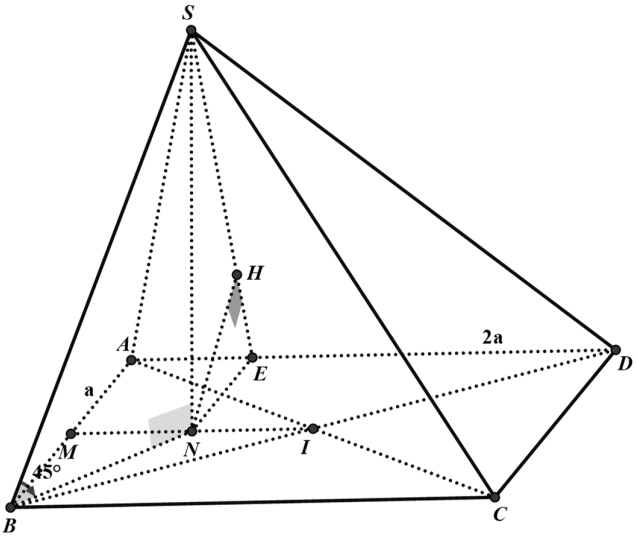
Khi đó: $\begin{cases}A'H\perp AD'\\A'H\perp A'B'\end{cases}\Rightarrow d\left(A'B';AD'\right)=A'H=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37.9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB=a$, $AD=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là trung điểm đoạn MI. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với điểm N. Biết góc tạo bởi đường thẳng SB với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng $45°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SD theo a là:

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Do $MN//AD \Rightarrow MN//(SAD) \Rightarrow d(MN,SD) = d(MN,(SAD)) = d(N,(SAD))$.

Kẻ $NE \perp AD, SN \perp AD \Rightarrow AD \perp (SNE) \Rightarrow (SAD) \perp (SNE) = SE$.

Kẻ $NH \perp SE \Rightarrow NH \perp (SAD) \Rightarrow d(N,(SAD)) = d(MN,(SAD)) = NH$.

Ta có : $\widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBN} = 45°$.

Xét $\Delta BMN \Rightarrow BN = \sqrt{BM^2 + NM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

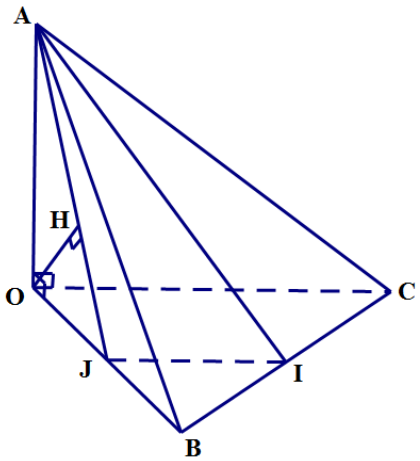
Do $NH = \frac{NE.NS}{\sqrt{NE^2 + NS^2}} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 37.10: Cho tứ diện $OABC$ trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách giữa AI và OC bằng bao nhiêu?

A. a. **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi J là trung điểm $OB \Rightarrow IJ//OC \Rightarrow OC//(AIJ)$.

Suy ra: $d\left(AI,OC\right) = d\left(OC,\left(AIJ\right)\right) = d\left(O,\left(AIJ\right)\right)$.

Kẻ OH vuông góc AJ tại H.

Ta có: $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp \left(OAB\right) \Rightarrow OC \perp OH \Rightarrow IJ \perp OH$.

Khi đó: $\begin{cases} OH \perp AJ \\ OH \perp IJ \end{cases} \Rightarrow OH \perp \left(AIJ\right) \Rightarrow d\left(O,\left(AIJ\right)\right) = OH$.

Vì ΔAOJ vuông tại O, có OH là đường cao.

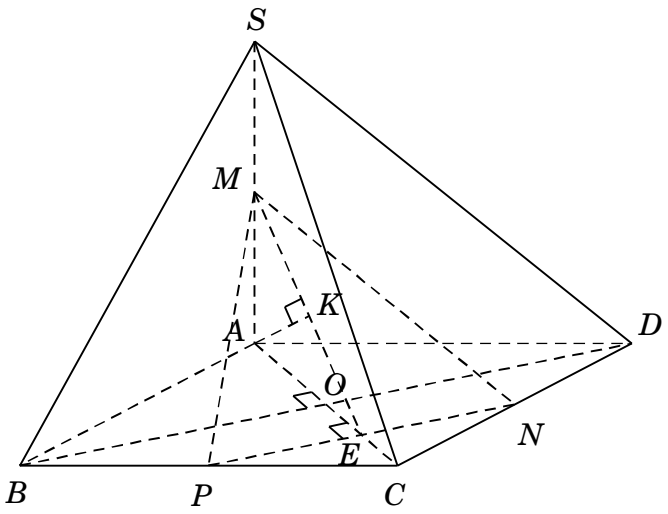
Suy ra: $OH = \dfrac{OA.OJ}{\sqrt{OA^2 + OJ^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Vậy $d\left(AI,OC\right) = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37.11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $10\,\text{cm}$. Biết $SC = 10\sqrt{5}\,\text{cm}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và MN.

A. $3\sqrt{5}\,\text{cm}$. **B.** $\sqrt{5}\,\text{cm}$. **C.** $5\,\text{cm}$. **D.** $10\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$.

Khi đó: $PN // BD \Rightarrow BD // \left(MNP\right)$.

Suy ra: $d\left(BD,MN\right) = d\left(BD,\left(MNP\right)\right) = d\left(O,\left(MNP\right)\right) = \dfrac{1}{3}d\left(A,\left(MNP\right)\right)$.

+ Kẻ $AK \perp ME$.

Lại có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AK \Rightarrow PN \perp AK$.

Suy ra: $AK \perp (MNP) \Rightarrow d(A,(MNP)) = AK$.

+ Xét tam giác vuông SAC có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$.

Tam giác vuông MAE, có $SA = 10\sqrt{3}; AE = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

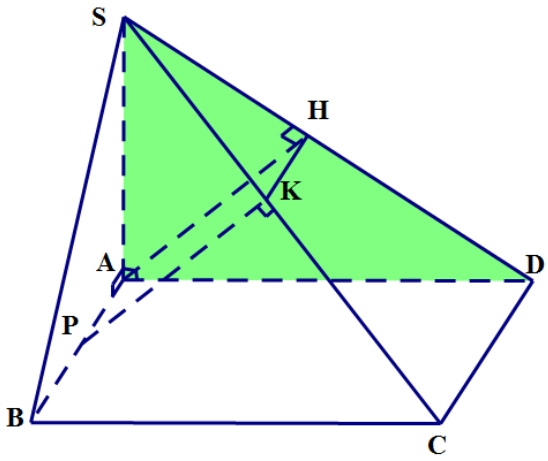
Suy ra: $AK = \frac{MA.AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}(\text{cm})$. Vậy $d(BD,MN) = \frac{1}{3}AK = \sqrt{5}(\text{cm})$.

Câu 37.12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a, AC = a\sqrt{5}$, góc giữa SB và mặt đáy là $30°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC bằng.

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

+ Chọn mặt phẳng (SAD).

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA (do\ SA \perp (ABCD)) \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$

+ Chiếu SC trên (SAD).

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA (do\ SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow SD$ là hình chiếu của SC trên (SAD).

+ Dựng $AH \perp SD = H$.

+ Dựng hình chữ nhật $AHKP$ với $K \in SC, P \in AB$.

Khi đó: PK là đoạn vuông góc chung của AB và SC và $PK = AH$.

+ Tính AH. Ta có:

Góc giữa SB và mặt đáy là $30^0 \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^0$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có: $SA = AB.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a \Rightarrow AD = BC = 2a$.

Xét ΔSAD vuông tại A: $AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.2a}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (2a)^2}} = \dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$.

Vậy đoạn vuông góc chung của AB và SC là $PK = AH = \dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$.

Cách 2:

+ $AB//CD \Rightarrow AB//(SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

+ Kẻ $AH \perp SD$. Chứng minh $AH \perp (SCD)$. Từ đó suy ra: $d(A, (SCD)) = AH$.

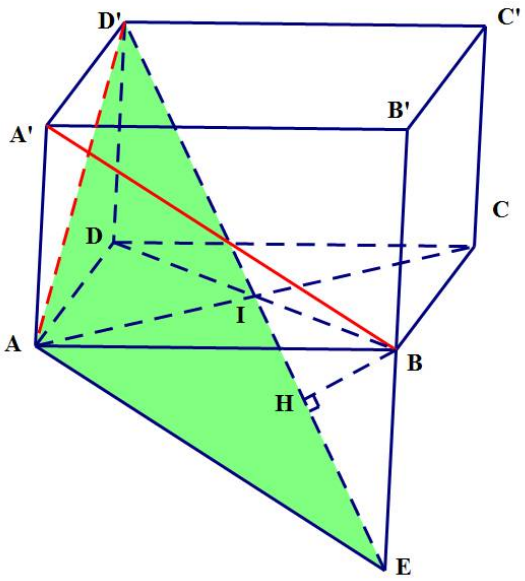
+ Tính AH (như cách 1)

Câu 37.13: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$ và $AD' \perp BA'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BA'.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi E là điểm đối xứng với B' qua B.

Khi đó: $AA'BE$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B//AE \Rightarrow A'B//(AD'E)$.

Suy ra $d(A'B,AD') = d(A'B,(AD'E)) = d(B,(AD'E))$.

+ Gọi $I = AC \cap BD$.

Khi đó: $\begin{cases} AI \perp BD \\ AI \perp DD' \ (do\ DD' \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (DD'B'B)$

$\Rightarrow (AD'E) \perp (DD'B'B) = D'E$

Trong $mp(DD'B'B)$, kẻ $BH \perp D'E$.

Suy ra : $BH \perp (AD'E) \Rightarrow d(B,(AD'E)) = BH$.

+ Tính BH.

Xét tam giác ABA' vuông tại A có $BA' = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}$.

Vì $AD' \perp BA' \Rightarrow BA' \perp BC' \ (AD'//BC') \Rightarrow \Delta A'BC'$ vuông cân tại B.

$\Rightarrow A'C' = 2a\sqrt{3} \Rightarrow AI = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác ABI vuông tại I có : $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

Xét ΔIBE vuông tại B có : $BE = AA' = a\sqrt{2}, BI = a$.

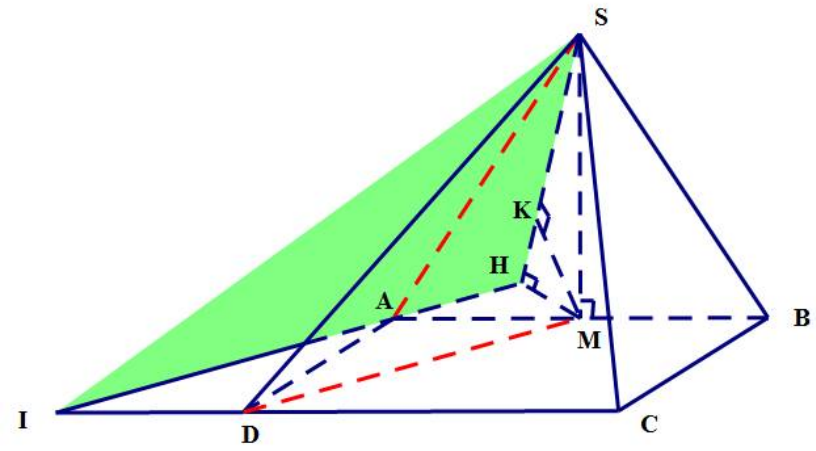
$$\Rightarrow \frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BI^2}+\frac{1}{BE^2}\Rightarrow BH=\frac{BI.BE}{\sqrt{BI^2+BE^2}}=\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 37.14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$, biết $SD=2a\sqrt{5}$, SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.

A. $\frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải

Chọn C



+ Dựng hình bình hành $AMDI$. Khi đó: $MD//AI\Rightarrow MD//(SAI)$.

$\Rightarrow d(MD,AI)=d(MD,(SAI))=d(M,(SAI))$.

+ Dựng $MH\perp AI$ và $MK\perp SH$ (1).

Ta có: $\begin{cases}AI\perp MH\\ AI\perp SM\ (do\ SM\perp(ABCD))\end{cases}\Rightarrow AI\perp(SMH)\Rightarrow AI\perp MK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $MK\perp(SAI)\Rightarrow d(M,(SAI))=MK$.

+ Ta có: $SM\perp(ABCD)\Rightarrow MC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\widehat{SCM}=60°$.

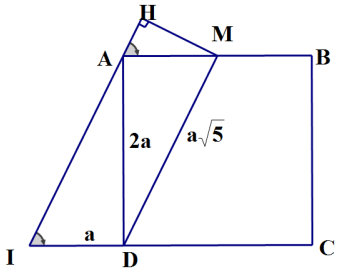
+ Xét tam giác vuông SMC và SMD có: $SM=\sqrt{SD^2-MD^2}=MC.\tan 60°$ (3).

Mặt khác : $MC = MD$ ($ABCD$ là hình vuông).

Suy ra : $(3) \Leftrightarrow SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Leftrightarrow MC = a\sqrt{5} = MD \Rightarrow SM = a\sqrt{15}$.

+ Đặt $MA = x \ \ (x > 0) \Rightarrow AD = 2x$.

Xét tam giác MAD vuông tại A có $MA^2 = MD^2 - AD^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2 - (2x)^2 \Rightarrow x = a$.



Lại có: $\Delta MAH \backsim \Delta AID \Rightarrow MH = \dfrac{AD.MA}{AI} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

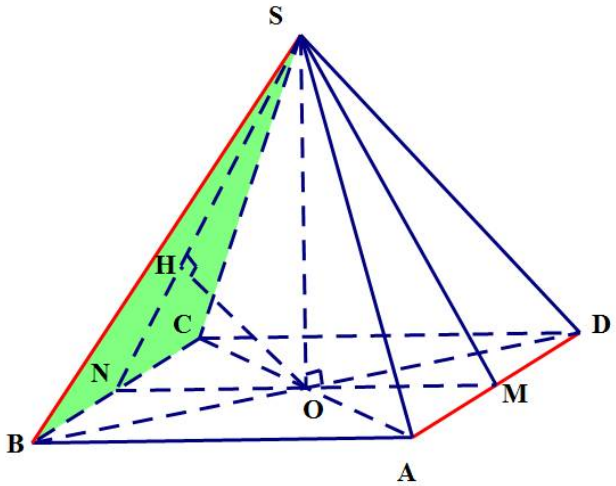
Khi đó: $\dfrac{1}{MK^2} = \dfrac{1}{MH^2} + \dfrac{1}{SM^2} \Rightarrow MK = \dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$.

Câu 37.15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a. Các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa AD và SB ?

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .Trong $mp(SMN)$, kẻ $OH \perp SN$.

+ Ta có: $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$.

$\Rightarrow d\left(AD,SB\right)=d\left(AD,\left(SBC\right)\right)=d\left(M,\left(SBC\right)\right)=2d\left(O,\left(SBC\right)\right)$

+ Vì $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$ suy ra các tam giác $\Delta SAC,\Delta SBD$ là các tam giác cân tại S.

Khi đó: $\begin{cases}SO\perp AC\\SO\perp BD\end{cases}\Rightarrow SO\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SO\perp BC\ \left(1\right)$.

Mặt khác: $BC\perp MN\left(BC\perp AB,AB//MN\right)\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra: $BC\perp OH$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp OH\\SN\perp OH\end{cases}\Rightarrow OH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(O,\left(SBC\right)\right)=OH$.

+ Xét tam giác vuông SOA có: $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{2a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét tam giác vuông SON có: $OH=\frac{ON.SO}{\sqrt{ON^2+SO^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.

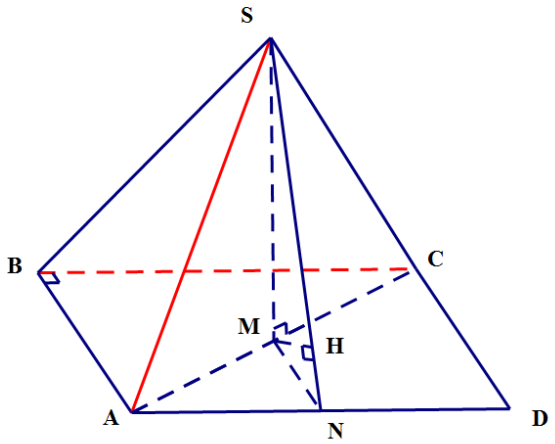
Vậy $d\left(AD,SB\right)=2OH=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Câu 37.16: Cho hình chóp $S.ABC$. Tam giác ABC vuông tại B, $BC=a,AC=2a$, tam giác SAB đều. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm M của AC. Khoảng cách giữa SA và BC là?

A. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{11}$.

Lời giải

Chọn C



+ Dựng hình bình hành $ABCD$.Ta có:

$BC//AD\Rightarrow BC//\left(SAD\right)\Rightarrow d\left(BC,SA\right)=d\left(BC,\left(SAD\right)\right)=d\left(C,\left(SAD\right)\right)=2d\left(M,\left(SAD\right)\right)$.

+ Gọi N là trung điểm của AD. Dựng $MH\perp SN\left(H\in SN\right)$.

Do $\widehat{ABC}=90^\circ\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN\perp AD$.

Lại có: $SM\perp AD\left(do\ SM\perp\left(ABC\right)\right)$ nên $AD\perp\left(SMN\right)\Rightarrow AD\perp MH$.

Khi đó: $\begin{cases}AD\perp MH\\SN\perp MH\end{cases}\Rightarrow MH\perp\left(SAD\right)\Rightarrow d\left(M,\left(SAD\right)\right)=MH$.

+ Tam giác ABC vuông tại $B,BC=a,AC=2a\Rightarrow AB=a\sqrt{3}=SA$ (vì tam giác SAB đều).

Tam giác SAM vuông tại M ,có : $SA = a\sqrt{3}, AM = \frac{1}{2}AC = a \Rightarrow SM = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SMN vuông tại M có $SM = a\sqrt{2}, MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow MH = \frac{SM.MN}{\sqrt{SM^2 + MN^2}} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$$

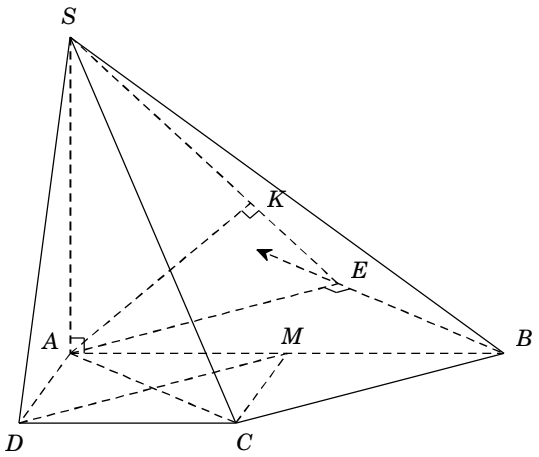
Vậy $d\left(BC, SA\right) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 37.17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = DC = a, AB = 2a$. Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



+ Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ cùng vuông góc với đáy $\Rightarrow SA \perp \left(ABCD\right)$.

Khi đó: $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{\left(SC, AC\right)} = \widehat{SCA} = 60°$ và $SA = AC.tan60° = a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.

Xét tam giác ABC, ta có trung tuyến $CM = a = \frac{1}{2}AB$ nên tam giác ABC vuông tại C.

+ Dựng hình chữ nhật $ACBE$. Ta có: $AC//BE \Rightarrow AC//\left(SBE\right)$.

Suy ra: $d\left(AC, SB\right) = d\left(AC,\left(SBE\right)\right) = d\left(A,\left(SBE\right)\right)$.

+ Kẻ $AK \perp SE$ $\left(1\right)$.

Ta có: $\begin{cases} BE \perp SA \\ BE \perp AE \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AK \ (2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow AK \perp (SBE) \Rightarrow d(A,(SBE)) = AK$.

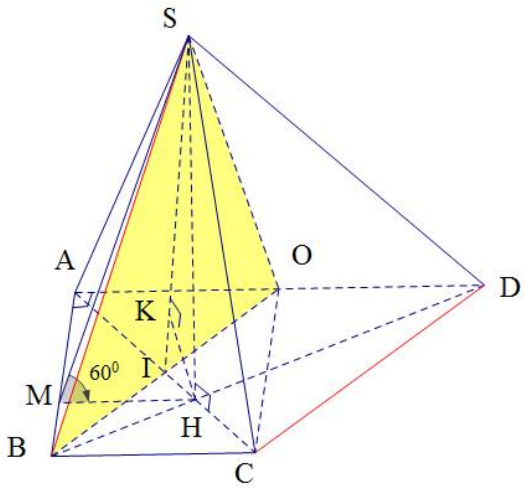
+ Xét tam giác vuông SAE có: $AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}.a\sqrt{2}}{\sqrt{(a\sqrt{6})^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 37.18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SAB) và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow BH = \dfrac{1}{3}BD$.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCD$ là hình vuông cạnh a và $BO // CD \Rightarrow CD // (SBO)$.

Suy ra: $d(CD,SB) = d(CD,(SBO)) = d(D,(SBO)) = 3d(H,(SBO))$.

+ Gọi $I = AC \cap BO$.

Trong (SAC), kẻ $HK \perp SI$.

Lại có: $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SH \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp HK$.

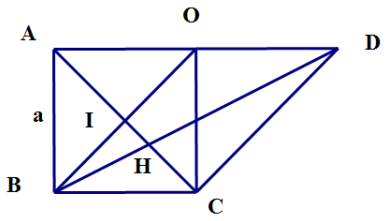
Suy ra: $HK \perp (SBO) \Rightarrow d(H,(SBO)) = HK$.

+ Trong $(ABCD)$ kẻ $HM \perp AB = M$.

Dễ dàng chứng minh được : $AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp SM$.

Khi đó, góc giữa (SAB) và mặt đáy là $(\widehat{SM, HM}) = \widehat{SMH} = 60^0$.

Xét tam giác vuông SHM có: $MH = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = MH.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$



Xét tam giác SHI vuông tại H có: $IH = \frac{1}{3}IC = \frac{1}{6}AC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$; $SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

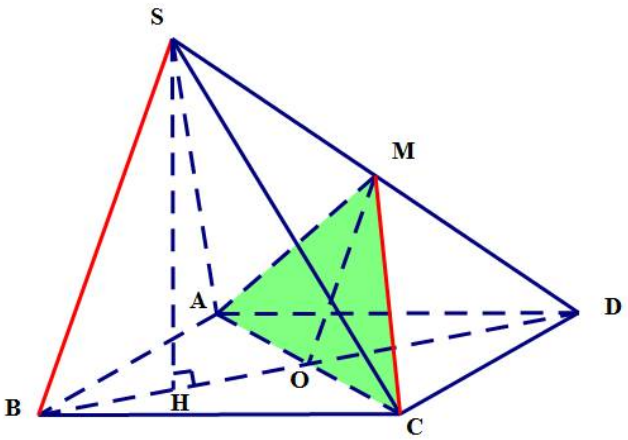
Suy ra: $HK = \frac{IH.SH}{\sqrt{IH^2 + SH^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 37.19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Góc $\widehat{ABC} = 60°$ và $SD = a\sqrt{2}$ .Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{40}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



+ Từ giả thiết có tam giác ABC đều cạnh a.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow HD=\frac{3}{4}BD=\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. Suy ra:

$SH^2=SD^2-HD^2=2a^2-\frac{27a^2}{16}=\frac{5a^2}{16}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

$SB^2=SH^2+HB^2=\frac{5a^2}{16}+\frac{3a^2}{16}\Rightarrow SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\AC\perp SH\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp OM$.

Diện tích tam giác MAC là : $S_{\Delta MAC}=\frac{1}{2}OM.AC=\frac{1}{4}SB.AC=\frac{1}{4}\frac{a\sqrt{2}}{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$.

$SB//OM\Rightarrow SB//(MAC)\Rightarrow d(SB,CM)=d(SB,(MAC))=d(B,(MAC))=d(D,(MAC))$.

Ta có: $V_{M.ACD}=\frac{1}{3}d(M,(ACD)).S_{\Delta ACD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}d(S,(ABCD)).\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{15}}{96}$.

Mặt khác: $V_{M.ACD}=\frac{1}{3}d(D,(MAC)).S_{\Delta MAC}$.

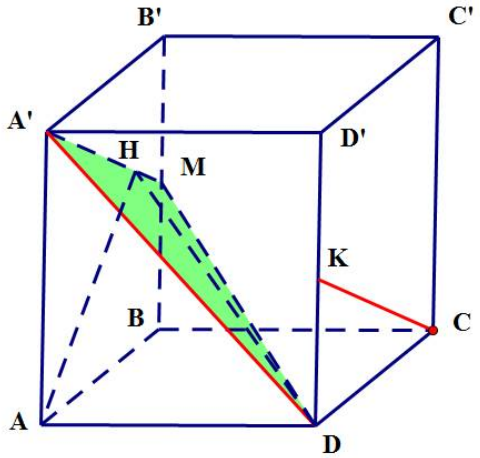
$\Rightarrow d(D,(MAC))=\frac{3V_{M.ACD}}{S_{\Delta MAC}}=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{8}}=\frac{a\sqrt{30}}{8}$.

Câu 37.20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{5}$. **C.** $\frac{a}{4}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BB' thì $A'M//CK\Rightarrow CK//(A'DM)$.

$\Rightarrow d\left(CK,A'D\right)=d\left(CK,\left(A'DM\right)\right)=d\left(K,\left(A'DM\right)\right)=\dfrac{3V_{K.A'DM}}{S_{A'DM}}$.

Ta có: $V_{K.A'DM}=V_{M.KA'D}=V_{B'.KA'D}=\dfrac{1}{3}B'A'.\dfrac{1}{2}A'D'.KD=\dfrac{1}{12}a^3$.

Hạ $DH\perp A'M$. Do $AD\perp\left(ABB'A'\right)$ nên $AD\perp A'M\Rightarrow A'M\perp\left(AHD\right)\Rightarrow A'M\perp AH$.

Vì $AH.A'M=2S_{AMA'}=S_{ABB'A'}=a^2\Rightarrow AH=\dfrac{a^2}{A'M}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Do đó: $DH=\sqrt{AD^2+AH^2}=\dfrac{3a}{\sqrt{5}}\Rightarrow S_{A'MD}=\dfrac{1}{2}DH.A'M=\dfrac{3}{4}a^2$.

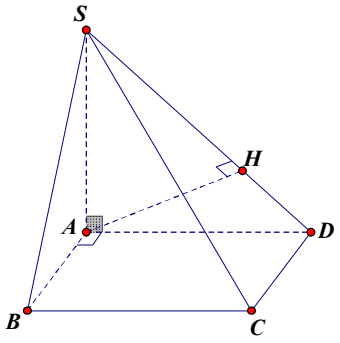
Vậy $d\left(CK,A'D\right)=\dfrac{3V_{K.A'DM}}{S_{A'DM}}=\dfrac{3.\dfrac{a^3}{12}}{\dfrac{3}{4}a^2}=\dfrac{a}{3}$.

Câu 37.21: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AD=2a$, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác SAD kẻ đường cao AH ta có

Dễ thấy AH chính là đường vuông góc chung của AB và SD.

$AD.AS=AH.SD\Rightarrow AH=\dfrac{AD.AS}{SD}=\dfrac{2a.a}{\sqrt{\left(2a\right)^2+a^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

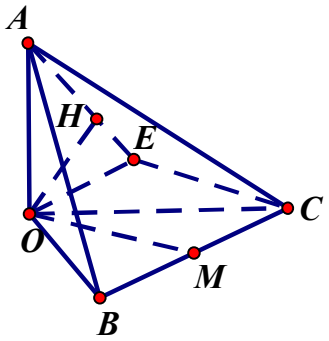
Vậy $d\left(AB,SD\right)=AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37.22: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=a$, $OB=OC=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có được $OA \perp (OBC)$.

Trong mặt phẳng (OBC), dựng điểm E sao cho $OMCE$ là hình bình hành thì $OMCE$ cũng là hình vuông (do OBC là tam giác vuông cân tại O).

Lại có: $\begin{cases} CE \perp OE \\ CE \perp OA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (AOE)$.

Kẻ $OH \perp AE$ tại H thì $OH \perp (AEC)$.

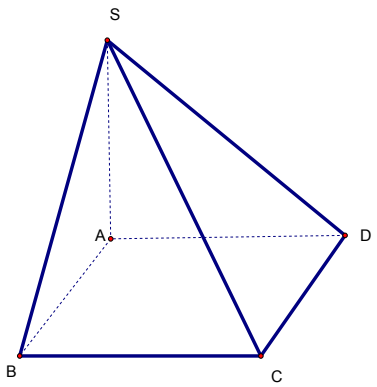
Vì $OM // (AEC)$ nên $d(AC, OM) = d(O, (ACE)) = OH = \dfrac{OA.OE}{\sqrt{OA^2 + OE^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 37.23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Mặt khác $\begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow CD // (SAB)$.

Từ đó suy ra khoảng cách giữa SB và CD bằng khoảng cách giữa (SAB) và CD và bằng DA.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$ suy ra $DA = \sqrt{2}a$.

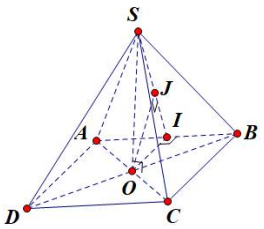
Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là $a\sqrt{2}$.

Câu 37.24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc $30°$. Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $d = \dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$. **B.** $d = \dfrac{3\sqrt{14}a}{5}$. **C.** $d = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $d = \dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Vì SA tạo với đáy một góc $30°$ nên $\widehat{SAO} = 30°$. Do đó: $\tan 30° = \dfrac{SO}{AO} \Rightarrow SO = AO.\tan 30°$

$= a\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Mặt khác, $d = d(SA, CD) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB))$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AB, SI. Ta có $OI = a$.

Xét tam giác SOI: $\dfrac{1}{OJ^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{2a^2} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow OJ^2 = \dfrac{2a^2}{5} \Rightarrow OJ = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

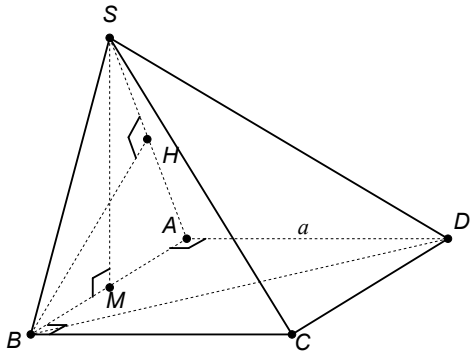
Vậy $d = \dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$.

Câu 37.25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD là

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AB, SA.

Khi đó $SM \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Tam giác SAB đều nên $BH \perp SA$.

Mà $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp BH$.

Do đó $BH \perp (SAD)$.

Mặt khác ta có $BC // (SAD) \Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = BH$.

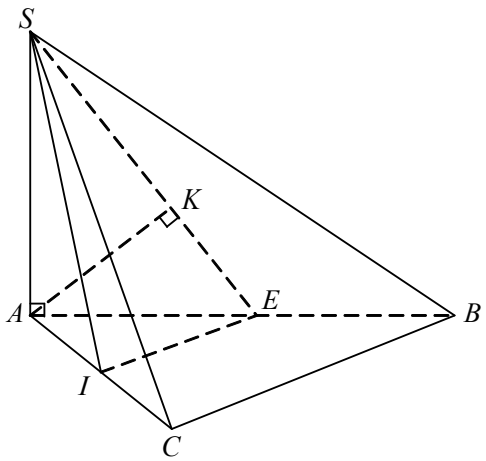
Do đó $d(BC, SD) = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37.26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa đường thẳng SE và đường thẳng BC bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, ta có $EI // BC$ nên $d(BC,SE)=d(BC,(SEI))=d(B,(SEI))$ $=d(A,(SEI))=AK$ (hình vẽ).

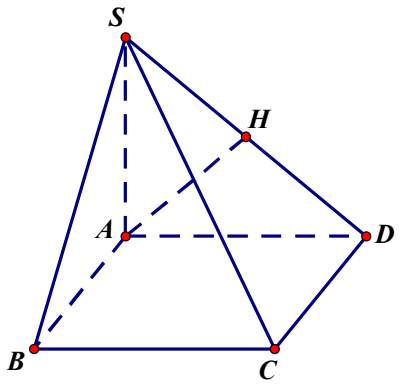
Trong tam giác vuông SAE ta có $AK=\dfrac{AS.AE}{\sqrt{AS^2+AE^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{2a^2+\dfrac{a^2}{4}}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37.27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD=2a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh SD. Ta có

$\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow AB\perp AH$.

Suy ra AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB và SD. Do đó $d(AB,SD)=AH$.

ΔSAD vuông cân tại A có AH là đường cao nên H là trung điểm của SD, suy ra $AH=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{2a\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$.

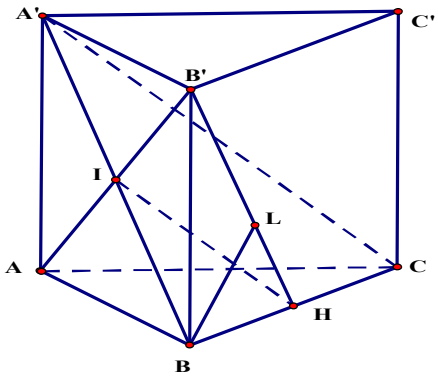
Vậy $d(AB,SD)=a\sqrt{2}$.

Câu 37.28: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$; H là trung điểm của BC.

Ta có IH là đường trung bình trong tam giác $A'BC$ nên $IH // A'C$.

$d\left(AB', A'C\right) = d\left(A'C, \left(AB'H\right)\right) = d\left(C, \left(AB'H\right)\right) = d\left(B, \left(AB'H\right)\right)$

Ta có $\begin{cases} AH \perp BB' \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(BCC'B'\right)$

Từ B kẻ $BL \perp B'H$; mà $BL \subset \left(BCC'B'\right)$ nên $BL \perp AH$ .Suy ra $BL \perp \left(AB'H\right)$

Tam giác $BB'H$ vuông tại B có $BB' = 2a$ và $BH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$ và có BL là đường cao nên

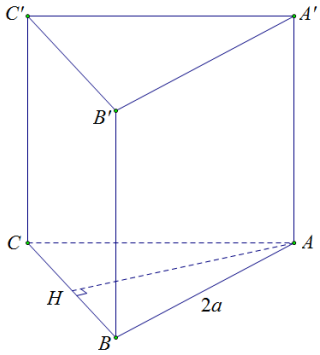
$\dfrac{1}{BL^2} = \dfrac{1}{BB'^2} + \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{17}{4a^2} \Rightarrow BL = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$. Vậy $d\left(AB', A'C\right) = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Câu 37.29: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm BC, vì ABC là tam giác đều nên $AH \perp BC$.

Mặt khác $AH \perp BB'$. Do đó $AH \perp \left(BCC'B'\right) \Rightarrow d\left(A, \left(BCC'B'\right)\right) = AH = a\sqrt{3}$.

Ta có $AA' // BB' \Rightarrow AA' // \left(BCC'B'\right)$

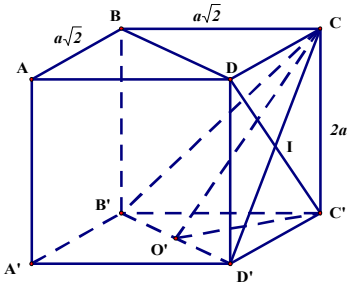
$\Rightarrow d\left(AA',BC\right)=d\left(AA',\left(BCC'B\right)\right)=d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=AH=a\sqrt{3}$.

Câu 37.30: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



+ Ta có $BD//B'D',B'D'\subset\left(CD'B'\right)\Rightarrow BD//\left(CD'B'\right)$

$\Rightarrow d\left(CD',BD\right)=d\left(D,\left(CD'B'\right)\right)$.

+ Gọi $I=DC'\cap D'C\Rightarrow I=DC'\cap\left(CD'B'\right)$ mà I là trung điểm của DC'

$\Rightarrow d\left(D,\left(CD'B'\right)\right)=d\left(C',\left(CD'B'\right)\right)$.

+ Vì $A'B'C'D'$ là hình vuông tâm O' cạnh $a\sqrt{2}\Rightarrow C'O'=a\Rightarrow CO'=\sqrt{CC'^2+C'O'^2}=a\sqrt{5}$

Ta có diện tích $S_{\Delta C'B'D'}=\frac{1}{2}CO'.B'D'=\frac{1}{2}a\sqrt{5}.2a=a^2\sqrt{5}$.

+ Ta $V_{C'.CD'B'}=V_{C.C'B'D'}=\frac{1}{6}CC'.CB.CD=\frac{1}{6}\left(a\sqrt{2}\right)^2.2a=\frac{2}{3}a^3$

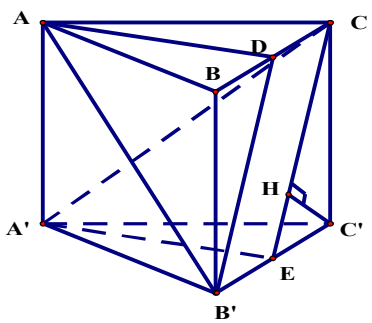
$\Rightarrow d\left(C',\left(CB'D'\right)\right)=\frac{3V_{C.C'B'D'}}{S_{\Delta CB'D'}}=\frac{3.\frac{2}{3}a^3}{a^2\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37.31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là những hình vuông cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và AB'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



+ Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó ta có $AD // A'E; B'D // CE$ $\Rightarrow (CA'E) // (ADB') \Rightarrow d(AB', A'C) = d((ADB'), (CEA')) = d(B', (CEA'))$

+ Do $B'C'$ cắt mặt phẳng $(CA'E)$ tại E là trung điểm của $B'C'$ nên có $d(B', (CA'E)) = d(C', (CA'E))$.

+ Do $\Delta A'B'C'$ đều có E là trung điểm của $B'C'$ nên $A'E \perp B'C'$. Mặt khác các mặt bên của lăng trụ là hình vuông nên $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow A'E \perp CC' \Rightarrow A'E \perp (CC'E)$ $\Rightarrow (CA'E) \perp (CC'E)$ mà $(CA'E) \cap (CC'E) = CE \Rightarrow$ từ C' hạ đường vuông góc xuống CE tại H thì $C'H = d(C', (CA'E))$.

+ Xét tam giác vuông tại $CC'E$ tại C' có

$$CC' = a; C'E = \frac{a}{2} \Rightarrow C'H = \frac{CC'.C'E}{\sqrt{CC'^2 + C'E^2}} = \frac{\frac{a}{2}.a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

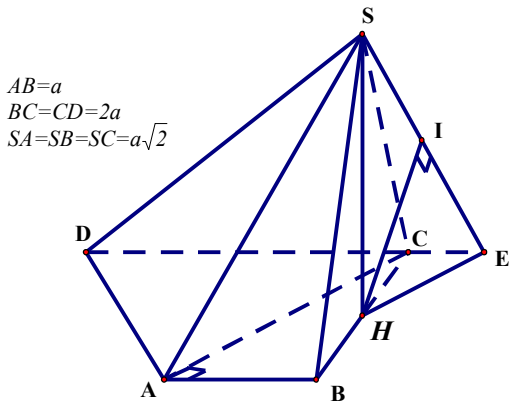
Vậy $d(AB', A'C) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37.32: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $AB // CD$. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC, do ΔABC vuông tại $A \Rightarrow AH = HB = HC$, mặt khác lại có $SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Kẻ $HE // AC, (E \in CD)$

Do $ABCD$ là hình thang $AB // CD, \widehat{BAC} = 90°, HE // AC \Rightarrow CD \perp HE$, $CD \perp SH$ $\Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow (SCD) \perp (SHE)$ hay $(SDE) \perp (SHE) \Rightarrow$ Từ H hạ $HI \perp CE$ $\Rightarrow HI = d(H, (SCD))$

Ta có $SB = SC = a\sqrt{2}, BC = 2a \Rightarrow SH = a$; $HE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $HI=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Ta có $AB//CD, CD\subset(SCD)\Rightarrow AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SC)=d(AB,(SCD))=d(B,(SCD))=2d(H,(SCD))$

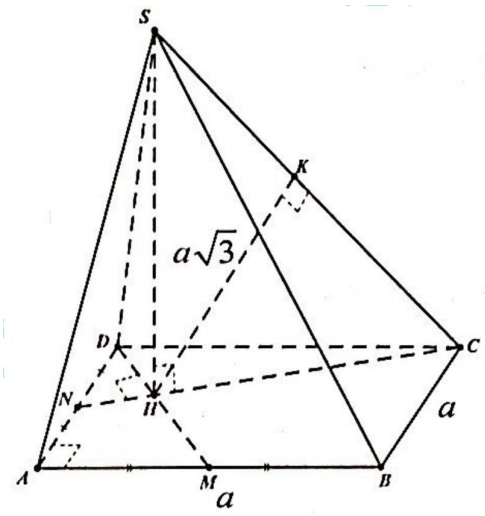
Vậy $d(AB,SC)=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 37.33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa đường thẳng DM và SC là

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{38}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{57}}{38}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\Delta ADM=\Delta DCN(c-g-c)$.

$\Rightarrow \widehat{ADM}=\widehat{DCN}\Rightarrow \widehat{ADM}+\widehat{CDM}=\widehat{DCN}+\widehat{CDM}=90^o\Rightarrow \widehat{DHC}=90^o\Rightarrow DM\perp NC$.

Ta có: $\left.\begin{matrix}CN\perp DM\\SH\perp DM\end{matrix}\right\}\Rightarrow DM\perp(SNC)$.

Kẻ $HK\perp SC(K\in SC)$.

Mặt khác $HK\perp DM$ vì $DM\perp(SNC)$.

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng DM và SC.

$\Rightarrow d(SC;DM)=HK$.

$DC^2 = HC.CN \Leftrightarrow HC = \dfrac{DC^2}{CN}$.

$= \dfrac{DC^2}{\sqrt{DN^2 + DC^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác SHC vuông tại H: $HK = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

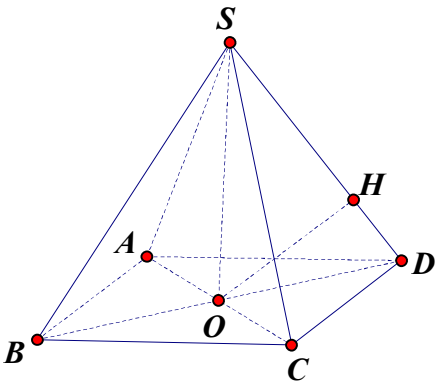
Vậy khoảng cách giữa SC và DM bằng $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 37.34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 2a, SA = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng.

A. $\dfrac{\sqrt{14}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{14}a}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Kẻ $OH \perp SD \Rightarrow \begin{cases} OH \perp SD \\ OH \perp AC \end{cases} \Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của AC, SD.

Ta có $OD = a\sqrt{2}, SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = a\sqrt{14}$

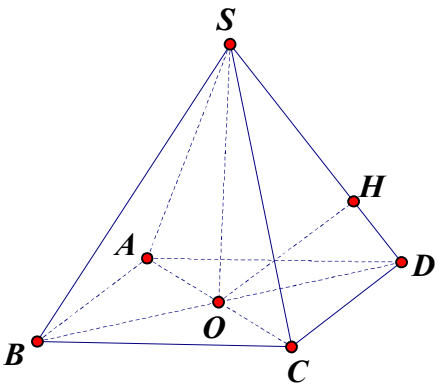
$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{14a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{4}{7a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. Vậy $d(AC; SD) = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 37.35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a ; $SO = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Kẻ $OH \perp SD \Rightarrow \begin{cases} OH \perp SD \\ OH \perp AC \end{cases} \Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của AC, SD.

Ta có $AB = a \Rightarrow BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SO = 2a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{9}{4a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{2a}{3}$.

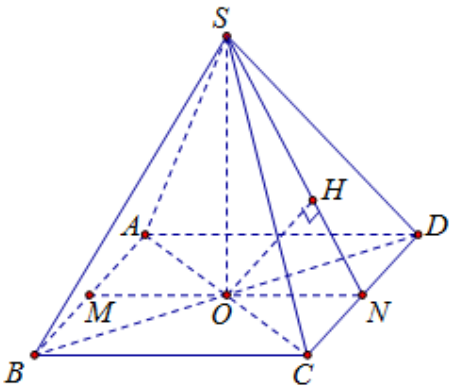
Vậy $d(AC; SD) = \dfrac{2a}{3}$.

Câu 37.36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a ; $SO = a; SO \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD; H$ là hình chiếu của O lên SN.

Vì $AB // CD$ nên $d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = d(M; (SCD)) = 2d(O; (SCD))$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH$.

Khi đó $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(O;(SCD)\right) = OH$.

Tam giác SON vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

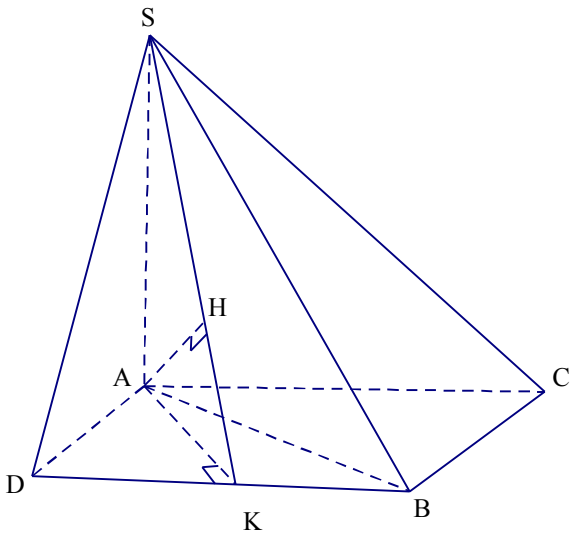
Vậy $d\left(AB;SC\right) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37.37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABC)$, nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\angle SBA = 60^0$.

Lấy điểm D sao cho tứ giác $ACBD$ là hình bình hành. Khi đó
$AC // BD \Rightarrow AC // (SBD) \Rightarrow d(AC,SB) = d(AC,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Kẻ $AK \perp BD, (K \in BD) \Rightarrow BD \perp (SAK) \Rightarrow (SAK) \perp (SBD)$; $(SAK) \cap (SBD) = SK$.

Kẻ $AH \perp SK$, $(H \in SK) \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều nên AK là đường trung tuyến $\Rightarrow AK = AB.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$SA = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SAK ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

$\Rightarrow d(A,(SBD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

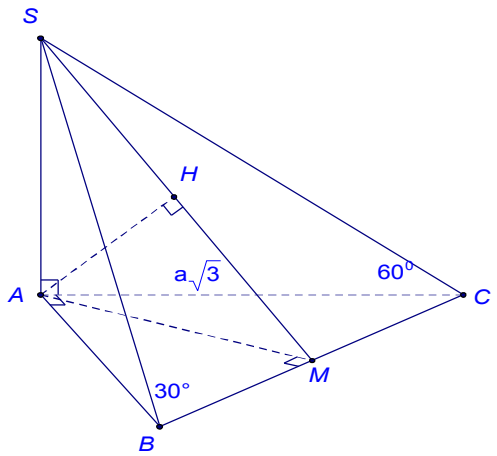
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 37.38: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác vuông tại A, $AC=a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC}=30°$. Góc giữa SC và mặt phẳng ABC bằng $60°$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $AM\perp BC$, $AH\perp SM$. Ta có

$$\left.\begin{array}{l}AM\perp BC\\SA\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow AH\perp BC \text{ và } AH\perp SM\Rightarrow AH\perp(SBC).$$

Do đó $d\left(A,(SBC)\right)=AH$.

Tam giác SAC vuông tại $A\Rightarrow SA=AC.\tan 60°=a\sqrt{3}.\sqrt{3}=3a$.

$\Delta SAC=\Delta BAC$ (g – c – g)$\Rightarrow SA=BA=3a$.

Tam giác ABC vuông tại $A\Rightarrow\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{9a^2}$.

Tam giác SAM vuông tại $A\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{9a^2}+\frac{4}{9a^2}=\frac{5}{9a^2}\Rightarrow AH=\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

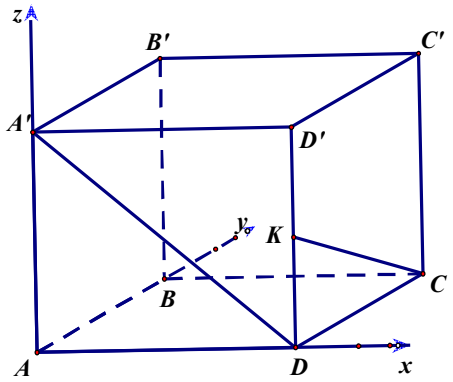
SỬ DỤNG PP TỌA ĐỘ ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH

Câu 37.39: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK, $A'D$.

A. a. **B.** $\frac{3a}{8}$. **C.** $\frac{2a}{5}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó:

$A'(0;0;a)$, $D(a;0;0)$; $C(a;a;0)$, $D'(a;0;a)$ suy ra $K\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'D}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{CK}=\left(0;-a';\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{DK}=\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{CK}\right]=\left(-a^2;-\frac{a^2}{2};-a^2\right)$.

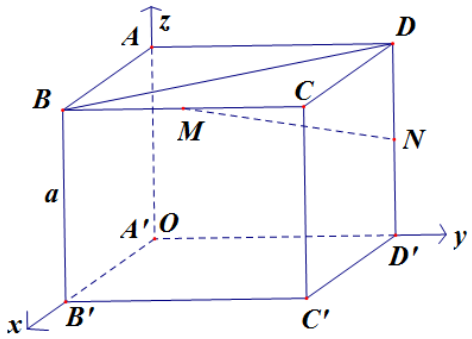
Vậy $d\left(A'D,CK\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{CK}\right].\overrightarrow{DK}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{CK}\right]\right|}=\frac{a}{3}$.

Câu 37.40: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó, $B(a;0;a)$, $D(0;a;a)$, $M\left(a;\frac{a}{2};a\right)$, $N\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{MN}=\left(-a;\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

$\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{MN}\right]=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$; $\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{BM}=-\frac{a^2}{4}$.

$d\left(BD,MN\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{MN}\right]\right\|}=\frac{a^2}{4}:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.