

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Vẽ đẹp lời giải hình học qua các bài toán lượng giác

Ths. HOÀNG MINH QUÂN

GV Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội

Trong chương trình toán THPT, để chứng minh một số hệ thức lượng giác, ta thường sử dụng các biến đổi lượng giác. Câu hỏi đặt ra, ngoài các cách biến đổi lượng giác thì ta có cách tiếp cận nào khác để giải quyết vấn đề không? Để trả lời câu hỏi này, bài viết sau đây mời bạn đọc cùng đến với hướng tiếp cận hình học cho chứng minh một số hệ thức lượng giác.

I. CÁC ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Chứng minh rằng với $x + y < \pi$, ta có

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Chứng minh 1. Gọi z là góc thỏa mãn $x + y + z = \pi$. Ta có x, y, z là ba góc của một tam giác. Không mất tổng quát, giả sử tam giác đó nội tiếp đường tròn bán kính $r = \frac{1}{2}$.

Ta có $\sin z = \frac{c}{2} : \frac{1}{2} = c$, tương tự $\sin x = a$, $\sin y = b$.

Từ công thức $c = a \cos y + b \cos x$, ta có

$$\sin z = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Chứng minh 2.

Vẽ tam giác ABC với H là chân đường cao hạ từ đỉnh A lên cạnh BC . Đặt

$$BAH = x; CAH = y \text{ và}$$

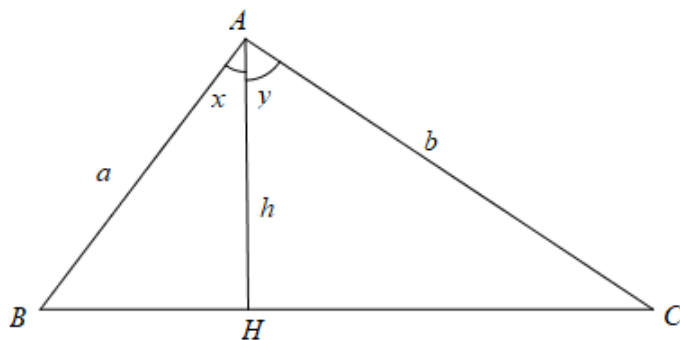
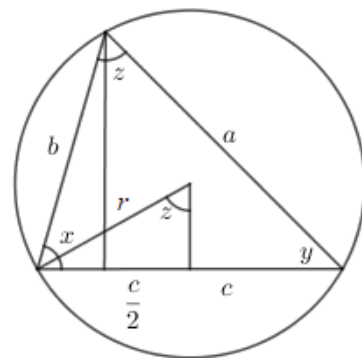
$$AB = a; AC = b; AH = h.$$

Ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ACH}$

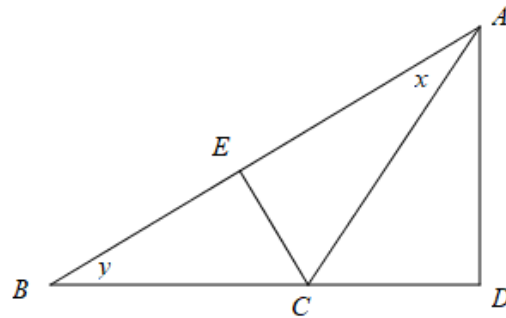
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} ab \sin(x + y) = \frac{1}{2} ah \sin x + \frac{1}{2} bh \sin y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} ab \sin(x + y) = \frac{1}{2} ab \cos y \cdot \sin x + \frac{1}{2} ba \cos x \cdot \sin y$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$



Chứng minh 3.



Vẽ tam giác ABC với D là chân đường cao hạ từ đỉnh A , E là chân đường cao hạ từ đỉnh C , $\widehat{BAC} = x, \widehat{ABC} = y$. Khi đó $\widehat{ACD} = x + y$.

$$\text{Ta có } AD \cdot BC = CE \cdot AB \Leftrightarrow AD = \frac{CE \cdot AB}{BC} = \frac{CE \cdot (AE + EB)}{BC}.$$

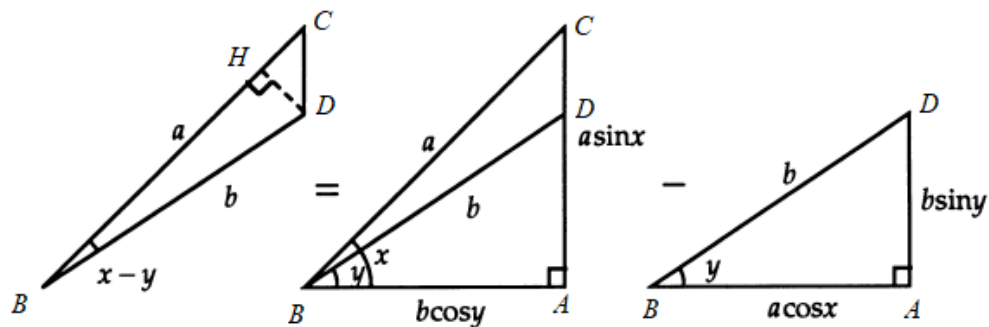
$$\text{Mặt khác, lại có } \sin(x + y) = \sin \widehat{ACD} = \frac{AD}{AC} = \frac{CE \cdot (AE + EB)}{AC \cdot BC} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{CE}{BC} + \frac{CE}{AC} \cdot \frac{EB}{BC}$$

$$\text{hay } \sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $x > y$ ta có

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Chứng minh 1. Dựng tam giác ABC vuông tại A , gọi D là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABC} = x, \widehat{ABD} = y$.



Đặt $BC = a; BD = b$. Ta có $AB = b \cos y = a \cos x; AD = a \sin x = b \sin y$.

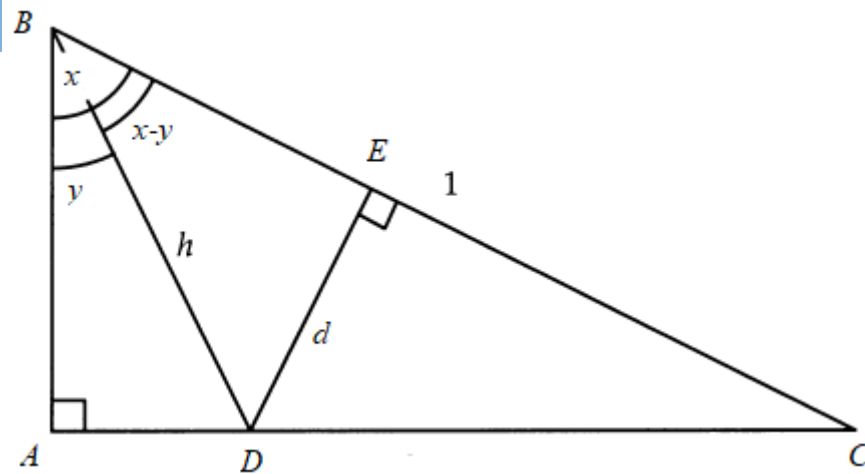
$$\text{Mặt khác ta có } S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AC - \frac{1}{2} AB \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow BD \cdot BC \cdot \sin(x - y) = AB \cdot AC - AB \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow b \cdot a \cdot \sin(x - y) = b \cos y \cdot a \sin x - a \cos x \cdot b \sin y$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = \cos y \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin y.$$

Chứng minh 2.



Vẽ tam giác ABC vuông tại A , độ dài $BC = 1$. Trên cạnh AC lấy điểm D , đặt $\widehat{ABC} = x$; $\widehat{ABD} = y \Rightarrow \widehat{DBC} = x - y$. Gọi E là hình chiếu của D lên cạnh BC . Đặt $BD = h$; $DE = d$.

$$\text{Ta có } \cos x = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB = \cos x; \cos y = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow h = \frac{AB}{\cos y} = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

Trong tam giác vuông EBD có $d = h \sin(x - y)$.

Mặt khác, $CD = CA - AD = \sin x - h \sin y$. Do đó trong tam giác vuông EDC , ta có

$$\sin C = \frac{d}{CD} \Leftrightarrow d = CD \cdot \sin C = CD \cdot \cos x = (\sin x - h \sin y) \cos x.$$

Vậy ta có $d = h \sin(x - y) = (\sin x - h \sin y) \cos x$

$$\Leftrightarrow h \sin(x - y) = (\sin x - h \sin y) \cos x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\cos y} \sin(x - y) = \left(\sin x - \frac{\cos x}{\cos y} \sin y \right) \cos x$$

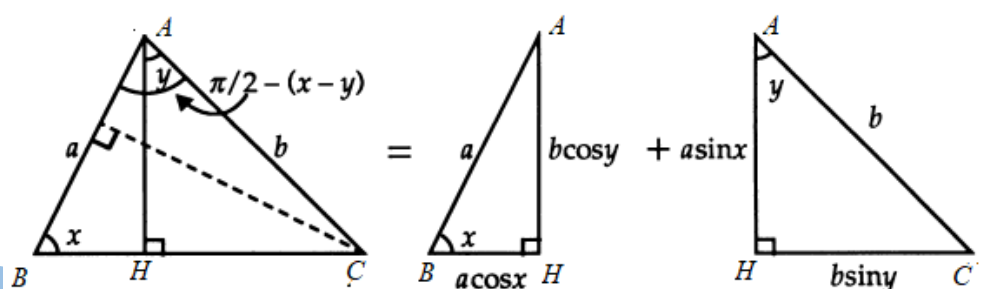
$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = \cos y \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin y.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (3)$$

Chứng minh 1. Dựng tam giác ABC có đường cao AH , đặt $AB = a$; $AC = b$ và góc

$$\widehat{ABC} = x; \widehat{HAC} = y \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} - x + y = \frac{\pi}{2} - (x - y).$$

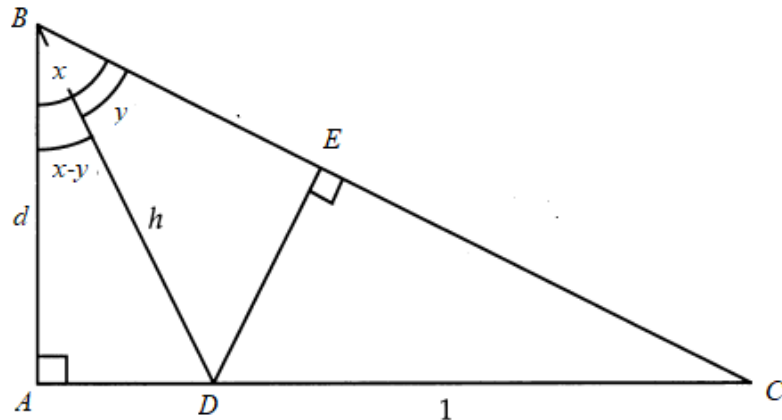


Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} HA.HB + \frac{1}{2} HA.HC$

$$\Leftrightarrow ab \sin \left(\frac{\pi}{2} - (x - y) \right) = a \cos x.b \cos y + a \sin x.b \sin y$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y.$$

Chứng minh 2.



Vẽ tam giác ABC vuông tại A , trên cạnh AC lấy điểm D , đặt $\widehat{ABC} = x$; $\widehat{CBD} = y \Rightarrow \widehat{DBA} = x - y$. Gọi E là hình chiếu của D lên cạnh BC . Đặt $CD = 1$; $BD = h$; $AB = d$.

Trong tam giác BDE vuông, ta có $\cos y = \frac{EB}{BD} \Leftrightarrow BE = h \cos y$.

Trong tam giác CDE vuông, ta có

$$\sin C = \frac{ED}{CD} \Leftrightarrow DE = CD.\sin C = CD.\cos x = \cos x.$$

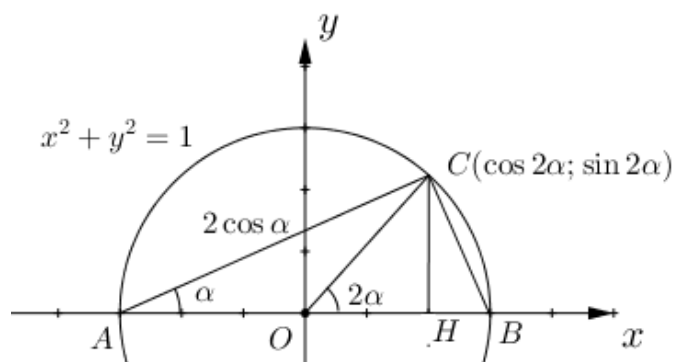
Trong tam giác ABD vuông, ta có $\cos(x - y) = \frac{d}{h} \Leftrightarrow d = h \cos(x - y)$.

Bài 4. Chứng minh công thức nhân đôi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Chứng minh.



Trên đường tròn lượng giác với điểm $A(-1;0)$; $B(1;0)$ và điểm C sao cho $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh C đến cạnh AB . Ta có $CH = OC \cdot \sin 2\alpha = \sin 2\alpha$; $OH = OC \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$.

Khi đó $C(\cos 2\alpha; \sin 2\alpha)$. Vì $\triangle ACH \sim \triangle ABC$ nên ta có

$$\frac{CH}{AC} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Mặt khác, từ $\triangle ACH \sim \triangle ABC$ nên ta cũng có

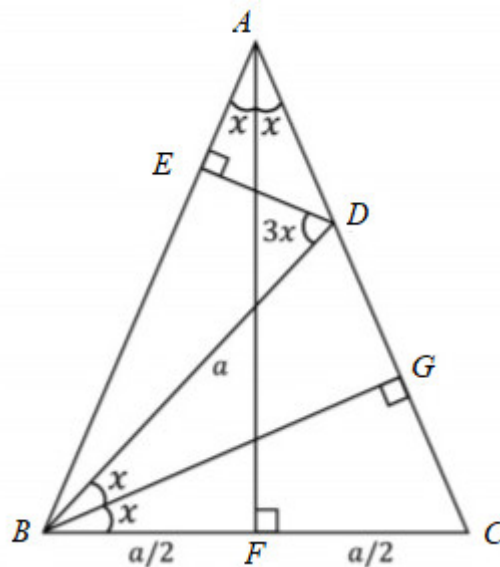
$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Bài 5. Chứng minh công thức nhân ba

a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$;

b) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Chứng minh 1



Vẽ $\triangle ABC$ cân với $AB = AC = 1$, $BC = a$, $\widehat{BAC} = 2x$.

Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $BD = BC = a$. Gọi E là hình chiếu của D lên AB , G là hình chiếu của B lên AC và F là trung điểm cạnh BC .

Ta có $DE = a \cos 3x$, $BE = a \sin 3x \Rightarrow AE = 1 - a \sin 3x$ và

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{(1 - a \sin 3x)^2 + (a \cos 3x)^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2a \sin 3x}.$$

Trong tam giác vuông ADE , có $\sin x = \frac{BF}{AB} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \sin x$. (1)

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Mặt khác, ta có $\sin x = \frac{GC}{BC} = \frac{AC - AD}{2BC} = \frac{1 - \sqrt{1 + a^2 - 2a \sin 3x}}{2a}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có

$$\frac{a}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 + a^2 - 2a \sin 3x}}{2a} \Rightarrow a^2 = 1 - \sqrt{1 + a^2 - 2a \sin 3x}$$

$$\Rightarrow (1 - a^2)^2 = 1 + a^2 - 2a \sin 3x$$

$$\Rightarrow a^4 - 3a^2 + 2a \sin 3x = 0$$

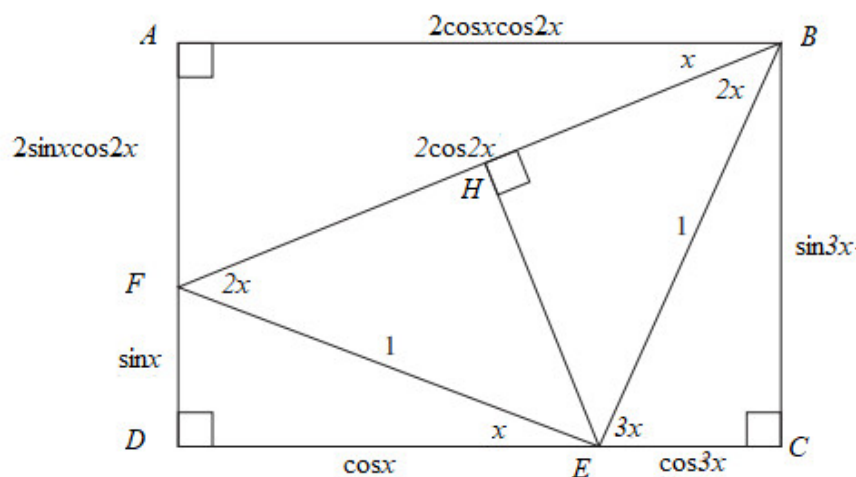
$$\Rightarrow a^3 - 3a + 2 \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow 8 \sin^3 x - 6 \sin x + 2 \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Chứng minh2.

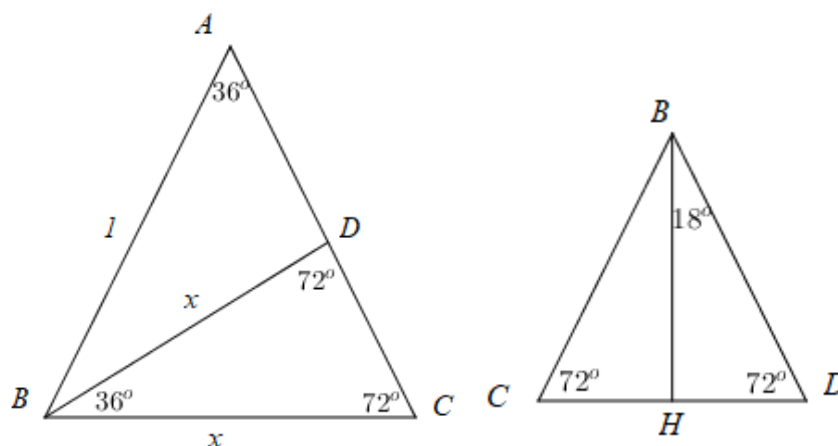
Dựng hình chữ nhật $ABCD$ với các điều kiện như hình vẽ.



Ta có $\sin 3x = 2 \sin x \cos 2x + \sin x = 2 \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

b) $\cos 3x = 2 \cos x \cos 2x - \cos x = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Bài 6. Không sử dụng lượng giác, hãy chứng minh $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.



NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Dựng tam giác cân ABC , với $\widehat{BAC} = 36^\circ$, đặt $AB = 1, BC = x$.

Ta có tam giác ABC đồng dạng tam giác BCD nên

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

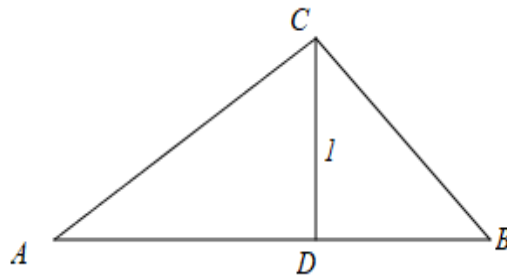
$$\text{Suy ra } CD = 1 - x = 1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow DH = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Ta có } \sin 18^\circ = \frac{DH}{BD} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

I. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 7. Với góc α nhọn. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} > 4$.

Chứng minh



Vẽ tam giác ABC vuông ở C , có $\widehat{ABC} = \alpha, CD = 1$ với D là hình chiếu của C lên cạnh AB .

$$\text{Ta có } BC = \frac{1}{\sin \alpha}; AC = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ suy ra } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Ta có $AB = \frac{2}{\sin 2\alpha} \geq 2$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

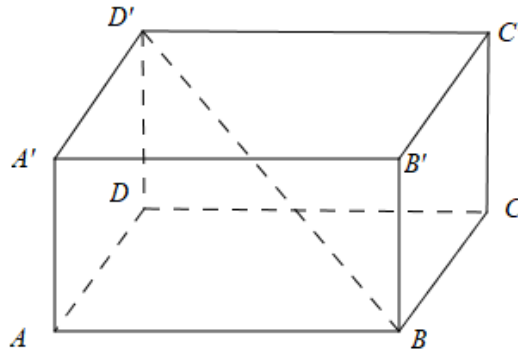
$$BC + AC + AB > 2AB \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} > 2AB \geq 4.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} > 4.$$

Bài 8. Với góc $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Chứng minh rằng

$$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \geq 2\sqrt{2}.$$

Chứng minh



Dựng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = a; AA' = b; BC = c$ và

$$\widehat{ABD'} = \alpha, \widehat{B'BD'} = \beta, \widehat{CBD'} = \gamma$$

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}, \tan \beta = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{b}, \tan \gamma = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{c}.$

Từ đó $\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{c}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{c} \geq \frac{\sqrt{2bc}}{a} \cdot \frac{\sqrt{2ac}}{b} \cdot \frac{\sqrt{2ba}}{c} = 2\sqrt{2}.$$

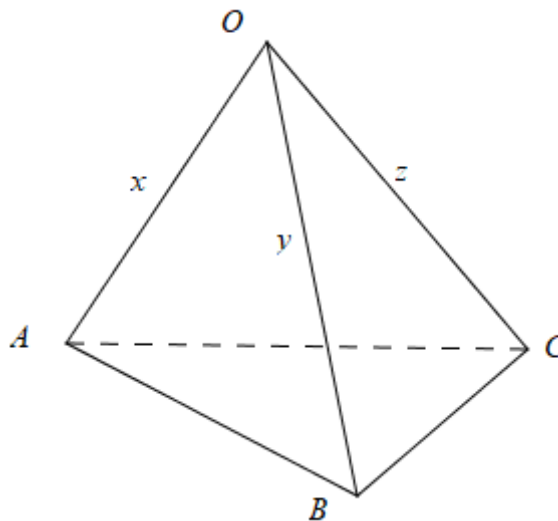
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \arctan \sqrt{2}.$

Bài 9. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, các góc $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi)$ thỏa mãn $0 < \alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ và $|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta.$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xz \cos \beta + z^2} > \sqrt{y^2 - 2yz \cos \gamma + z^2}.$$

Chứng minh



Dựng hình chóp $O.ABC$ với $OA = x, OB = y, OC = z$, đặt $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta, \widehat{BOC} = \gamma.$

Khi đó ta có $AB = \sqrt{x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2}; AC = \sqrt{x^2 - 2xz \cos \beta + z^2}; BC = \sqrt{y^2 - 2yz \cos \gamma + z^2}.$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

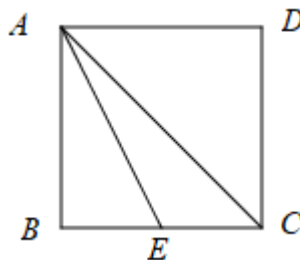
Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $AB + AC > BC$ hay

$$\sqrt{x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xz \cos \beta + z^2} > \sqrt{y^2 - 2yz \cos \gamma + z^2}.$$

Bài 10. Cho góc $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \sqrt{2}.$$

Chứng minh



Dựng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 và lấy điểm E trên cạnh BC , góc $\widehat{AEB} = \alpha$.

Khi đó ta có $AE = \frac{1}{\sin \alpha}$; $BE = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Suy ra $EC = 1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Xét tam giác AEC , theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$AE + EC \geq AC = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \sqrt{2}.$$

Suy ra $\frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không sử dụng biến đổi lượng giác, hãy tính giá trị $S = \frac{1}{\cos 50^\circ} + \tan 10^\circ$.

Bài 2. Sử dụng hình học chứng minh rằng $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$.

Bài 3. Sử dụng hình học, chứng minh $\cot \frac{\pi}{7} + \cot \frac{2\pi}{7} - \cot \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$.

Bài 4. Cho các góc α, β, γ thỏa mãn $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Chứng minh rằng

$$\cot \alpha \cot \beta \cos \gamma \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 5. Cho góc $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\frac{4 - \sqrt{7}}{3} \leq \frac{2 - \sin \alpha}{2 - \cos \alpha} \leq \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$.