

LIÊN HỆ GIỮA ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

1. Bài toán 1. Cho đồ thị của hàm số. Hỏi về nghiệm của phương trình liên quan.

Vấn đề 1. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình

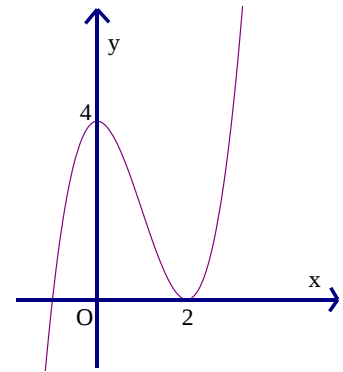
$$af(x) = b, (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)?$$

Bước 1: Đưa phương $af(x) = b$ về dạng $f(x) = \frac{b}{a}$.

Bước 2: Số nghiệm của phương trình $af(x) = b$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{b}{a} // Ox$.

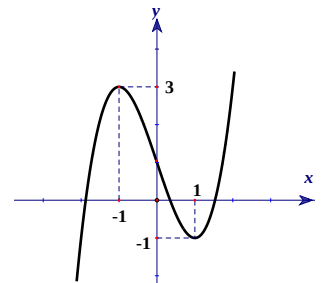
Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 0.



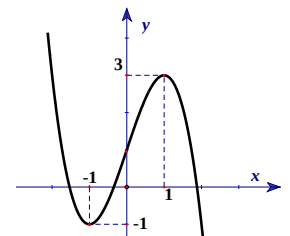
Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 2 = 0$ là

- A. 0.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 3.

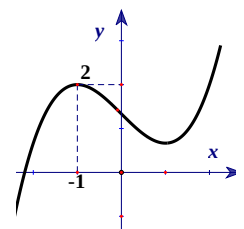


Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 4 = 0$ là

- A. 0.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 3.



Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là



A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

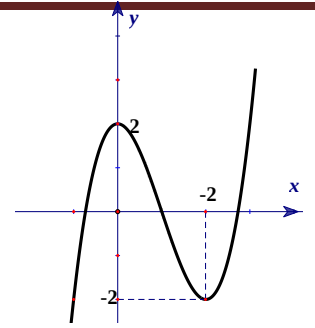
Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 5 = 0$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.



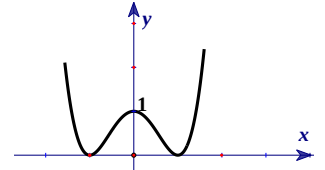
Câu 6. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 2 = 0$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.



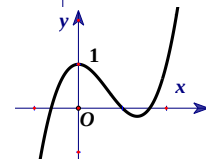
Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 2 = 0$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.



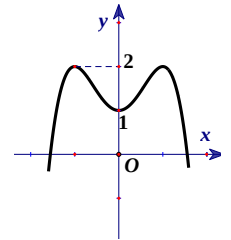
Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2019f(x) - 2020 = 0$ là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.



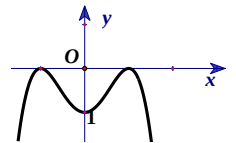
Câu 9. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2020f(x) + 2019 = 0$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.



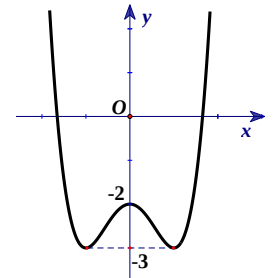
Câu 10. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $\sqrt{3}f(x) + 2\sqrt{3} = 0$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.



Câu 11. (Đề thi THPTQG-mã đề 101-2018). Cho hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

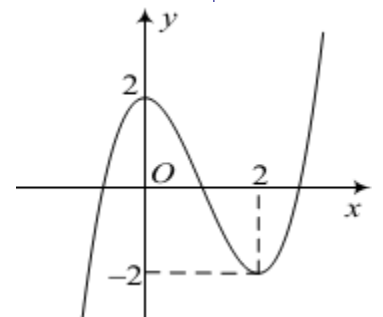
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

A. 3.

B. 0.

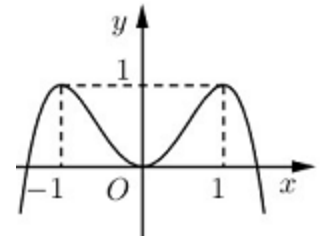
C. 1.

D. 2.



Câu 12. (Đề thi THPTQG-mã đề 102-2018). Cho hàm số

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

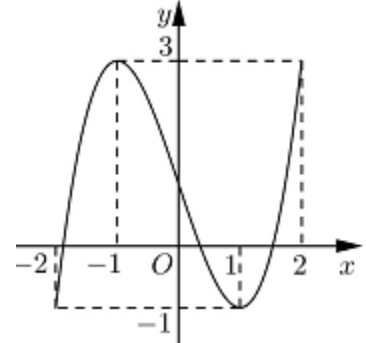


- A. 4. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 13. (Đề thi THPTQG-mã đề 103-2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn

$[-2; 2]$ và có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

$3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

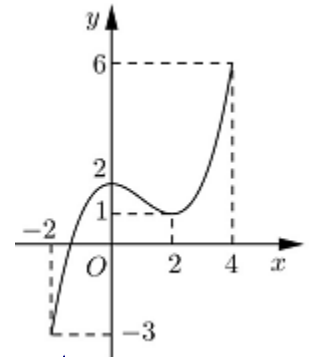


- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 14. (Đề thi THPTQG-mã đề 103-2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn

$[-2; 4]$ và có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

$3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là

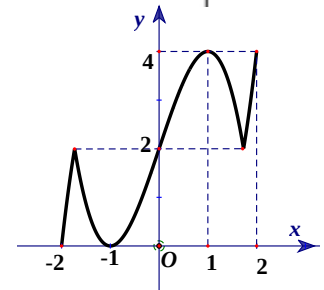


- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình

bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$

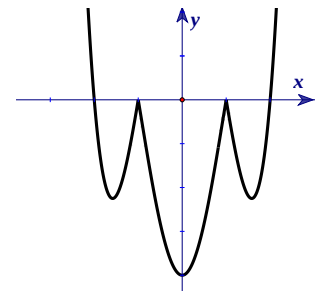
là



- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

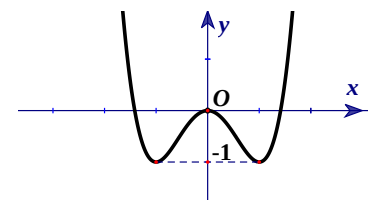
trình $-2f(x) + 1 = 0$ là



- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực

của phương trình $2f(x) + 1 = 0$ là

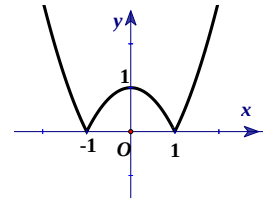


- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

$$2f(x) - 3 = 0 \text{ là}$$

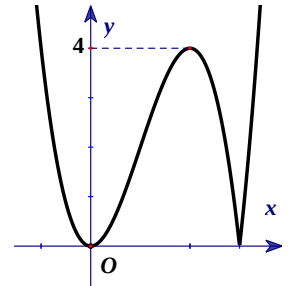
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

$$\text{trình } -2f(x) + 5 = 0 \text{ là}$$

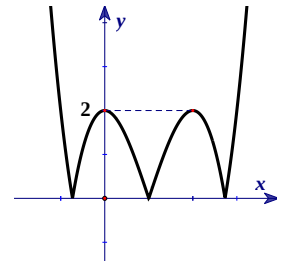
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

$$3f(x) - 1 = 0 \text{ là}$$

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



Vấn đề 2. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình $|af(x) + b| = c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \geq 0)$?

Cách 1. Không mất tính tổng quát ta xem như $a > 0$.

Bước 1: Đưa phương trình $|af(x) + b| = c$ về dạng $\left|f(x) + \frac{b}{a}\right| = \frac{c}{a}$.

Bước 2: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = \left|f(x) + \frac{b}{a}\right|$. Tới đây có thể kết luận được số nghiệm của phương trình ban đầu.

Cách 2.

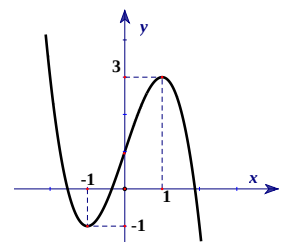
Bước 1: Phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} f(x) = \frac{c-b}{a} & (2) \\ f(x) = \frac{-c-b}{a} & (3) \end{cases}$. Số nghiệm của phương trình

$|af(x) + b| = c$ bằng tổng số nghiệm của phương trình (2) và (3).

Câu 21. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

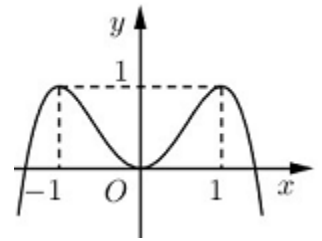
$$\text{trình } |f(x)| = 3 \text{ là}$$

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.



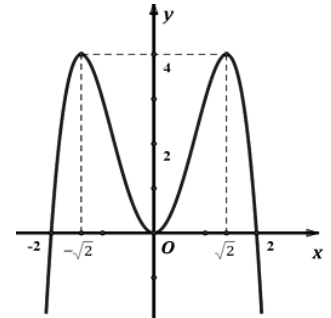
Câu 22. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x)| = 2$ là

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 4.



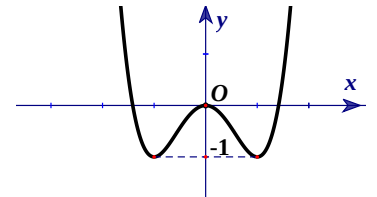
Câu 23. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $|2f(x) + 1| - 2 = 0$ là

- A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.



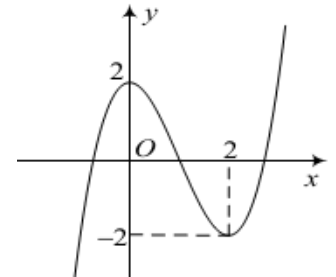
Câu 24. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $|3f(x) - 1| = 4$ là

- A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.



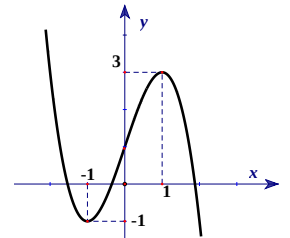
Câu 25. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $|2f(x) + 1| = 5$ là

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.



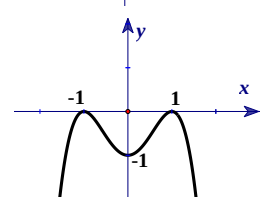
Câu 26. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x) - 2018| = 2019$ là

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.



Câu 27. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $|2020f(x) - 2018| = 2019$ là

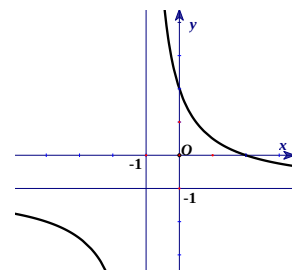
- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.



Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm

thực của phương trình $|2f(x) + 1| = 2$ là

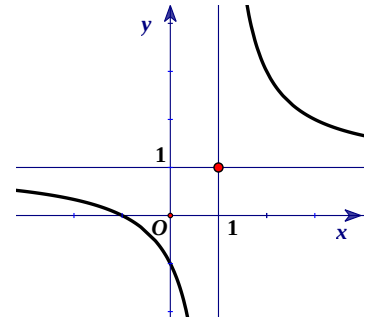
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.



Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm

thực của phương trình $|3f(x) - 1| = 2$ là

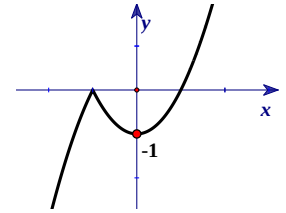
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.



Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

trình $|f(x) - 1| = 2$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



Vấn đề 3. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình $af|x| + b = 0, (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$?

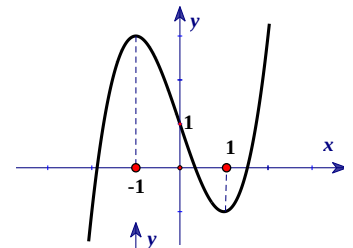
Bước 1: Đưa phương trình $af|x| + b = 0$ về dạng $f|x| = \frac{-b}{a}$.

Bước 2: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = f|x|$. Tới đây có thể kết luận được số nghiệm của phương trình ban đầu.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

trình $2f(|x|) = 1$ là

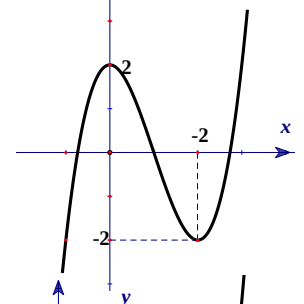
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

$2f(|x|) - 4 = 0$ là

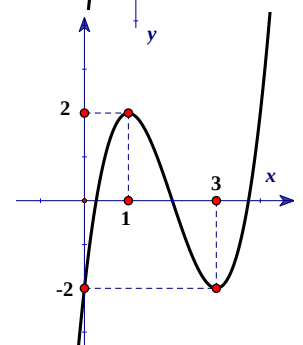
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

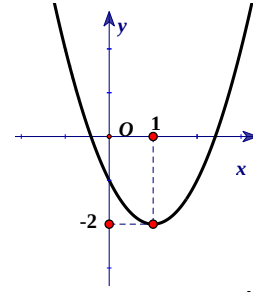
trình $2019f(|x|) - 2020 = 0$ là

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.



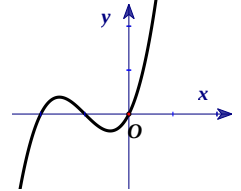
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(|x|) + 4 = 0$ là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 0.



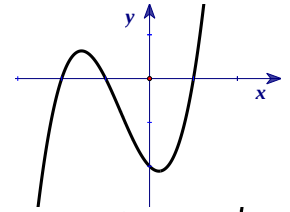
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(|x|) + 1 = 0$ là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 0.



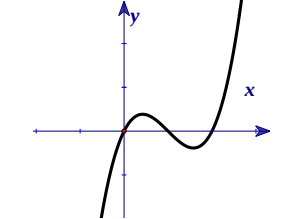
Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $-f(|x|) + 1 = 0$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.



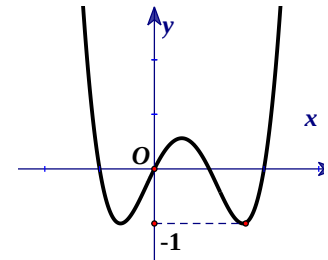
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(|x|) = 0$ là

- A. 3. B. 5. C. 1. D. 4.



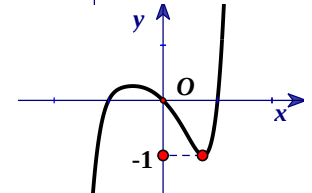
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2020f(|x|) + 2019 = 0$ là

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 3.



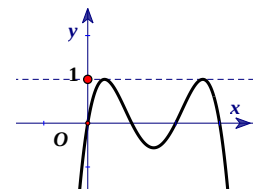
Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2019f(|x|) + 2020 = 0$ là

- A. 4. B. 0. C. 2. D. 3.



Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2019f(|x|) - 2018 = 0$ là

- A. 4. B. 8. C. 6. D. 7.



Vấn đề 4. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình

$$|af(|x|) + b| = c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \geq 0)?$$

Cách 1. Không mất tính tổng quát ta xem như $a > 0$.

Bước 1: Đưa phương trình $|af(|x|) + b| = c$ về dạng $|f(|x|) + \frac{b}{a}| = \frac{c}{a}$.

Bước 2: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(|x|) + \frac{b}{a}|$. Tới đây có thể kết luận được số nghiệm của phương trình ban đầu.

Cách 2.

Bước 1: Phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} f(|x|) = \frac{c-b}{a} & (2) \\ f(|x|) = \frac{-c-b}{a} & (3) \end{cases}$$
 . Số nghiệm của phương trình

$|af(|x|) + b| = c$ bằng tổng số nghiệm của phương trình (2) và (3).

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

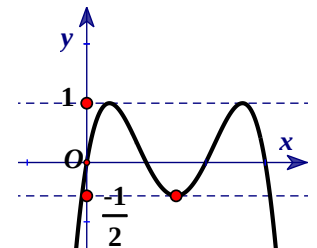
$$|2019f(|x|) - 2018| = 11$$

A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 4.



Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

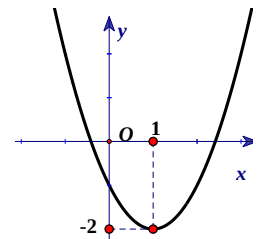
$$\text{trình } |2f(|x|) + 2| = 2 \text{ là}$$

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 0.



Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

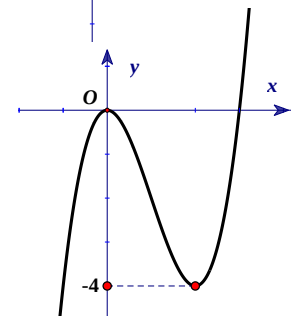
$$\text{trình } |3f(|x|) - 1| = 3 \text{ là}$$

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.



Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

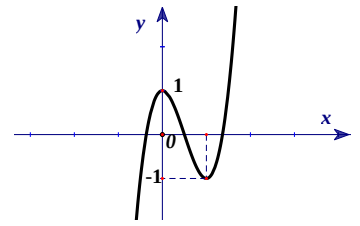
$$|2f(|x|) - 1| = 1 \text{ là}$$

A. 6.

B. 3.

C. 7.

D. 4.



Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

$$\text{trình } |3f(|x|) - 4| = 5 \text{ là}$$

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

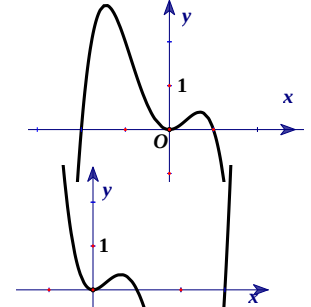
$$|4f(|x|) - 4| = 1 \text{ là}$$

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.



Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

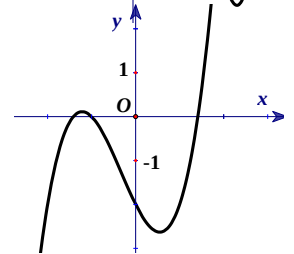
$$\text{trình } |2f(|x|) + 1| = 11 \text{ là}$$

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.



Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

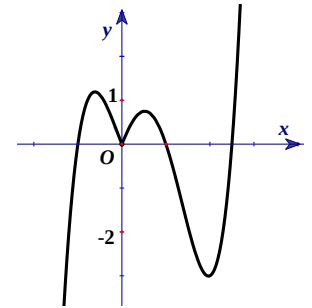
$$\text{phương trình } |2018f(|x|) - 2019| = 2020 \text{ là}$$

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6



Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

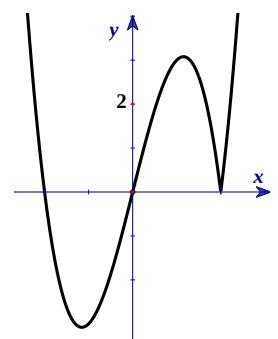
$$\text{phương trình } |2f(|x|) - 2| = 1 \text{ là}$$

A. 12.

B. 6.

C. 8.

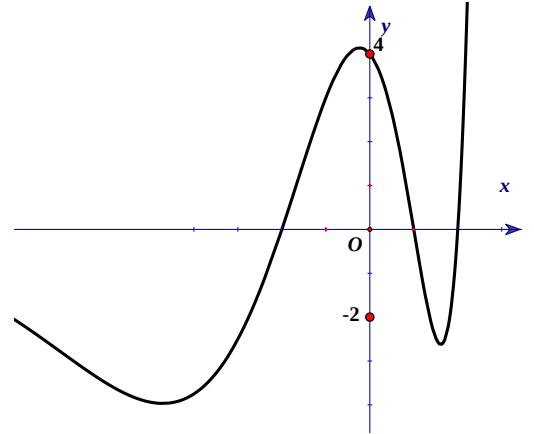
D. 10.



Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực

của phương trình $|2f(|x|) - 2| = 6$ là

- A. 7. B. 9.
C. 5. D. 6.



Vấn đề 5. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình

$$a|u(x)|v(x) + b = 0, (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0), \text{ với } u(x)v(x) = f(x).$$

Bước 1: Đưa phương trình $a|u(x)|v(x) + b = 0$ về dạng $|u(x)|v(x) = \frac{-b}{a}$.

Bước 2: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = |u(x)|v(x)$. Tới đây có thể kết luận được số nghiệm của phương trình ban đầu.

Câu 51. Cho hàm số $y = (x-2)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

trình $|x-2|u(x) = 1$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 52. Cho hàm số $y = (x^2 + x - 2)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

phương trình $2020|x^2 + x - 2|u(x) - 2019 = 0$ là

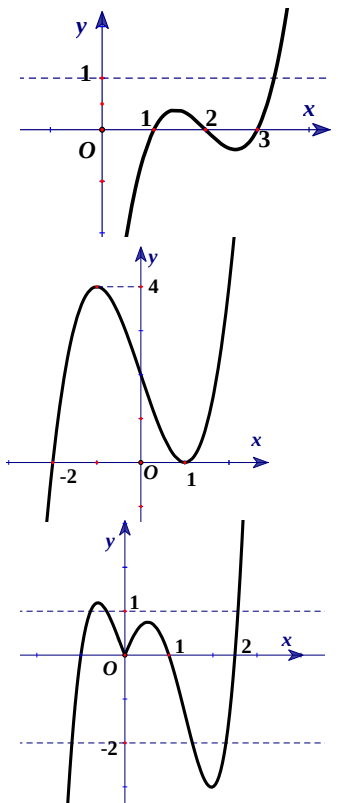
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 53. Cho hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

phương trình $2|x^2 - 3x + 2|u(x) - 4 = 0$ là

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 54. Cho hàm số $y = (x-1)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương



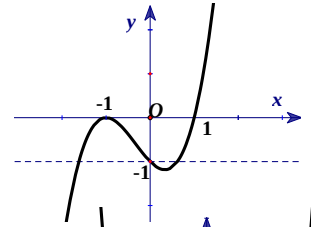
trình $2|x-1|u(x)-1=0$ là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Câu 55. Cho hàm số $y = xu(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

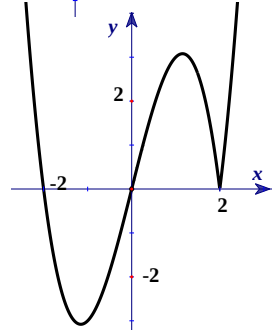
$$2\sqrt{x^2}u(x)+4=0 \text{ là}$$

A. 1.

B. 2.

C. 5.

D. 4.



Câu 56. Cho hàm số $y = (x+2)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

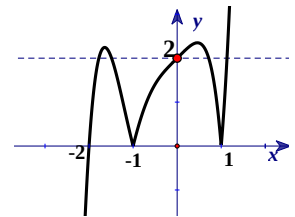
$$\text{phương trình } 3|x+2|u(x)-2=0 \text{ là}$$

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 6.



Câu 57. Cho hàm số $y = (x+3)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

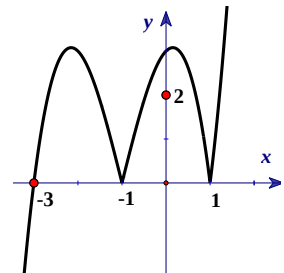
$$\text{phương trình } 3|x+3|u(x)-6=0 \text{ là}$$

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 6.



Câu 58. Cho hàm số $y = xu(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của

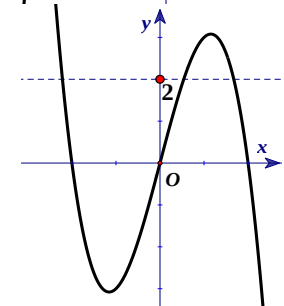
$$\text{phương trình } 3\sqrt{x^2}u(x)+1=0 \text{ là}$$

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.



Câu 59. Cho hàm số $y = (x-3)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

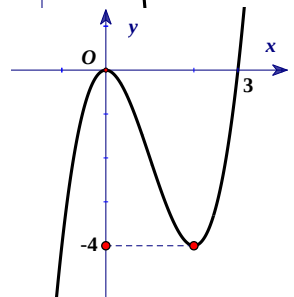
$$\text{trình } 3\sqrt{(x-3)^2}u(x)-\sqrt{5}=0 \text{ là}$$

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.



Câu 60. Cho hàm số $y = (x-1)u(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình

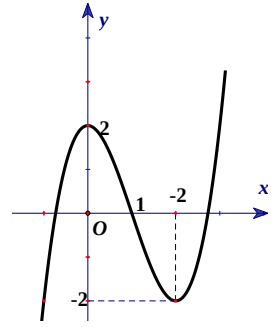
$$2\sqrt{(x-1)^2}u(x)+3=0 \text{ là}$$

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Vấn đề 6. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x, m) = 0$ có n nghiệm.

Bước 1: Đưa phương $f(x, m) = 0$ về dạng $h(x) = g(m)$. Với đường thẳng $y = g(m) // O x$.

Bước 2: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = h(x)$ (ta thực hiện khi $h(x) \neq f(x)$).

Bước 3: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = h(x)$ ta biện luận được số nghiệm của phương trình $f(x, m) = 0$ theo m .

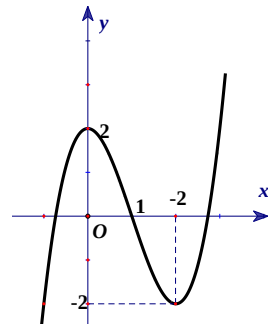
Câu 61. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm.

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



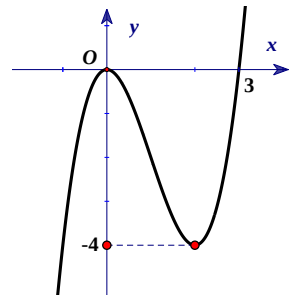
Câu 62. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có hai nghiệm. Tìm S ?

A. -4.

B. -3.

C. -6.

D. 4.



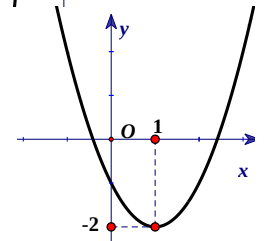
Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(2x-1)| - m + 2 = 0$ có 4 nghiệm thực.

A. $2 < m < 4$.

B. $-2 < m < 1$.

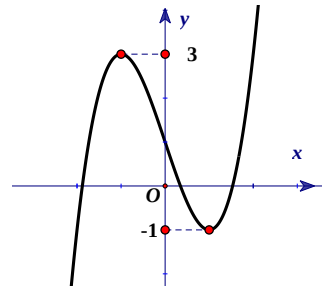
C. $-2 < m < 2$.

D. $m > 2$.



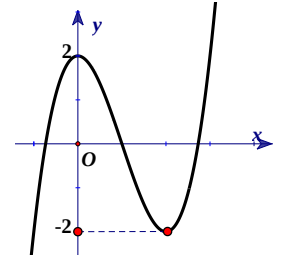
Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2|f(x-1)-2|-4m+8=0$ có 6 nghiệm thực. Khi đó $a+b$ bằng

- A. $\frac{11}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.



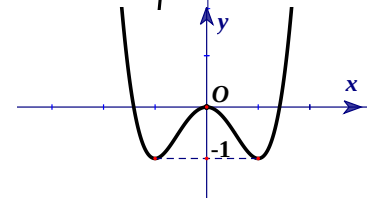
Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khoảng $(-30; 30)$ chứa bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(|2-x|) = m$ có 2 nghiệm thực?

- A. 27. B. 28. C. 26. D. 25.



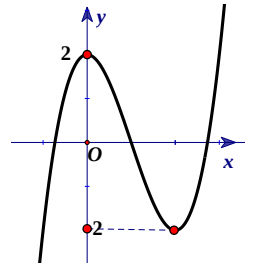
Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x-1)-2|-m+1=0$ có 6 nghiệm thực. Khi đó $a+b$ bằng

- A. 5. B. 3. C. 7. D. 5.



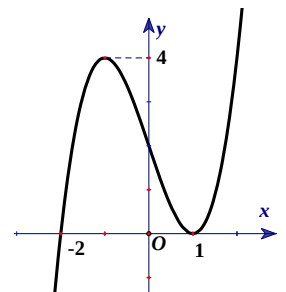
Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(|x-2019|)|-2+m=0$ có 8 nghiệm thực. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.



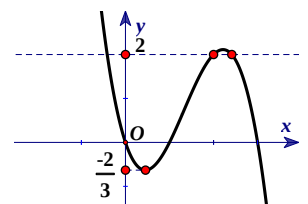
Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|3f(|x|)-3|-12m-3=0$ có 6 nghiệm thực. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{3}{16}$. D. $\frac{4}{9}$.

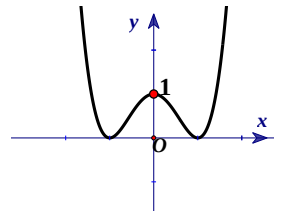


Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|3f(|x|)-4|-2m-3=0$ có 10 nghiệm thực. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{7}{3}$.

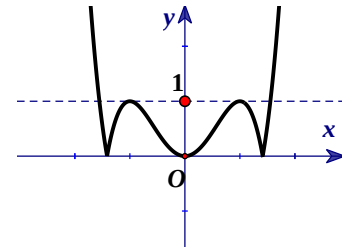


Câu 70. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị như hình bên. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng



- A. -1. B. 5. C. 1. D. 3.

Câu 71. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^2|$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|x^4 - 2x^2| = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

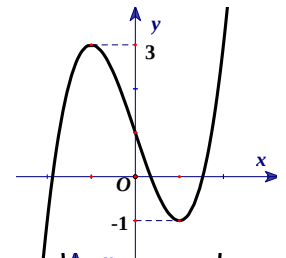


- A. $m = 1$. B. $m = 0$.
C. $m > 1$. D. $0 < m < 1$.

Câu 72. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|2x^3 - 3x^2 + 2| = \frac{m}{4}$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

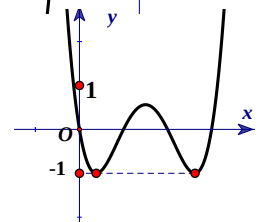
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 73. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.



- A. $-2 < m < 3$. B. $-2 < m < 2$.
C. $-1 < m < 3$. D. $-2 \leq m < 2$.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khoảng $(-30; 30)$ chứa bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|f(|x|) - 1| = m$ có 2 nghiệm thực?



- A. 29. B. 27. C. 28. D. 26.

2. Bài toán 2. Cho bảng biến thiên của hàm số. Hỏi về nghiệm của phương trình liên quan.

Vấn đề 1. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình $af(x) = b, (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$?

Bước 1: Đưa phương $af(x) = b$ về dạng $f(x) = \frac{b}{a}$.

Bước 2: Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng

$y = \frac{b}{a} // Ox$. Đó cũng chính là số nghiệm của phương trình đang xét.

➤ **Chú ý.**

Các Em chú ý đến những số thực không thuộc miền giá trị của hàm số. Hay những điểm mà hàm số không xác định thì hiển nhiên không là nghiệm của phương trình.

Câu 75. (Đề minh họa kỳ thi THPTQG-BGD&ĐT-2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 4 = 0$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$		

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 1 = 0$ là

- A. 0. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		$-\frac{5}{27}$		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

- A. 0. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	1		4		-4		2

Số nghiệm của phương trình $2018f(x) + 4036 = 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 2 = 0$

là

- A. 1. B. 3.
C. 0. D. 2.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-		+	0	-	
y	$+\infty$		-1		2		$-\infty$

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		-	0	+		+	0	-	
y	1		-1		2		5		4

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 4 = 0$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-		+	0	-	
y	$+\infty$		-1	-1	3		$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $2018f(x) + 2018 = 0$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		-6		1	$+\infty$	1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2019f(x) - 2019 = 0$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		4		$-\infty$	$+\infty$	-1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Vấn đề 2. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình $|af(x) + b| = c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \geq 0)$?

Cách giải tương tự “Vấn đề 2” của “Bài toán 1”.

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	1	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|2f(x) - 1| = 1$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0
y	$-\infty$	4	$+\infty$	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|3f(x) + 2| = 4$ là

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0
y	$-\infty$	-6	1	1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|2020f(x) - 1| = 2019$ là

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-1		4		$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $|3f(x) - 4| = 8$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0			2			$+\infty$
y'		$-$				$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2			1	3	$-\infty$	

Số nghiệm của phương trình $|-f(x) + 2| = 3$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	-3	-2	-3	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $|4f(x) + 1| = 2019$ là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	1	-1	2	5	4	

Số nghiệm của phương trình $|f(x) - 1| = 2$ là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		-		-	
y		1	$+\infty$	$-\infty$	1

Số nghiệm của phương trình $|2f(x) - 1| = 1$ là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|5f(x) + 4| = 6$ là

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Vấn đề 3. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm m để phương trình

$f(x, m) = 0$ có n nghiệm.

Câu 95. (Đề minh họa lần 2-BGD&ĐT-2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	-		+	0	-
y	$+\infty$	-1	$-\infty$	2	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-1; 2]$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(-1; 2]$.

D. $(-\infty; 2]$.

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$ -3	$\nearrow$ -2	$\searrow$ -3	$\nearrow$ $+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)+3|=m$ có 4 nghiệm thực.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Câu 97. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 0	$\searrow$ -2	$\nearrow$ $+\infty$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $|f(x)|=m$ có 4 nghiệm thực.

A. 1.

B. 0.

C. Vô số.

D. 2.

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$

Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|)=m$ có 4 nghiệm thực là khoảng $(a;b)$. Khi đó a^2+b^2 bằng

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 8.

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	3	4	$+\infty$
y'	-	0	+	+	0	-	+
y	$+\infty$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ 3	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ -4	$\nearrow$ $+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 4 nghiệm thực.

A. 1.

B. 3.

C. Vô số.

D. 2.

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	1	$+\infty$	-2	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm thực.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+2|+3) = m$ có 3 nghiệm thực.

A. 2.

B. 3.

C. Vô số.

D. 0.

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x+3)| = m$ có 8 nghiệm thực.

A. 1.

B. 3.

C. Vô số.

D. 4.

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$		

Biết tập các giá trị thực của m để phương trình $|f(x)+2| = m$ có nhiều nghiệm thực nhất là khoảng $(a; b)$. Khi đó $a+b$ bằng

A.1 .

B. 3 .

C. 2 .

D. -2 .

Câu 104. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	-3	$+\infty$	

Biết tập các giá trị thực của m để phương trình $|f(x)| = m$ có nhiều nghiệm thực nhất là khoảng $(a; b)$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A.6 .

B. 3 .

C. 18 .

D.9 .

3. Bài toán 3. Tìm m để phương trình $f(x, m) = 0$ có n nghiệm.

Câu 105. Biết tập các giá trị thực của m để phương trình $-x^3 + 3x^2 + m - 1 = 0$ có ba nghiệm thực là khoảng $(a; b)$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A.10 .

B. 5 .

C. 4 .

D.2 .

Câu 106. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2x^3 - 3x^2 - m + 1 = 0$ có ba nghiệm thực.

A. $1 < m < 2$.

B. $0 < m < 1$.

C. $-2 < m < 0$.

D. $m > 1$.

Câu 107. Phương trình $x^4 - 3x^2 - m + 2019 = 0$ có ba nghiệm thực khi

A. $m = 2019$.

B. $m = -2019$.

C. $m = -3$.

D. $m = 3$.

Câu 108. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình $2x^3 - 3x^2 = m - 1$ có hai nghiệm phân biệt bằng

A. 1 .

B. 5 .

C. 3 .

D. -4 .

Câu 109. Biết rằng khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình $3x^2 - m = x^3 - 2$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm dương. Tính $P = a + b$.

A. $P = 8$.

B. $P = 4$.

C. $P = 5$.

D. $P = 3$.

Câu 110. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 < m < 1$.

B. $\frac{3}{4} < m < 1$.

C. $0 < m < \frac{3}{2}$.

D. $-\frac{3}{4} < m < 0$.

Câu 111. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. $\frac{-5}{2} < m < 0$. B. $\frac{1}{3} < m < 2$. C. $0 < m < \frac{2}{3}$. D. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

Câu 112. Biết rằng khoảng $(a;b)$ chứa tất cả các tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt. Tính } P = b - a.$$

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = 6$. D. $P = 4$.

Câu 113. Biết rằng khoảng $(a;b)$ chứa tất cả các tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình

$$\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{3} - m = 0 \text{ có 4 nghiệm phân biệt. Tính } P = b - a.$$

- A. $P = \frac{9}{2}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = \frac{7}{2}$. D. $P = \frac{11}{2}$.

Câu 114. Biết rằng phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi $m = m_0$. Hỏi số nào sau đây gần m_0 nhất khi biểu diễn trên cùng trục số?

- A. 1,02. B. 3,15. C. 4,75. D. 6,25.

Câu 115. Tìm m để phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

- A. $4 < m < 5$. B. $1 < m < 2$. C. $4 < m < 6$. D. $1 < m < 3$.

Câu 116. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $(x-2019)^3 - 6(x-2019)^2 + 9(x-2019) - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt dương.

- A. $1 < m < 5$. B. $-1 < m < 3$. C. $1 < m < 6$. D. $2 < m < 4$.

Câu 117. Biết rằng phương trình $x^2 - 2x - 2 = \frac{m}{|x-1|}$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi m thuộc khoảng $(a;b)$.

$$\text{Tính } p = b^2 + a^2.$$

- A. $P = 2$. B. $P = 6$. C. $P = 4$. D. $P = 3$.

Câu 118. Biết tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 4x + \frac{1}{3} = m$ có 3 nghiệm phân biệt dương là khoảng $(a;b)$. Khi đó $a+b$ bằng

- A. $\frac{11}{3}$. B. $\frac{19}{12}$. C. $\frac{25}{12}$. D. 1.

Câu 119. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $\frac{|x|+1}{-|x|+1} = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

- A. $m < -1 \vee m > 1$. B. $m < -2$. C. $-2 < m < 3$. D. $0 < m < 5$.

Câu 120. Có giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình $\left| |x|^3 - 3x^2 + 2 \right| = \log m$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

- A. 10. B. 98. C. 100. D. 90.

Câu 121. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện phương trình $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ có 4 nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?

- A. 2. B. 5. C. 6. D. 20.

Câu 122. Tìm m để phương trình $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1 = m$ có đúng một nghiệm thực.

- A. $m > 2 \vee m < \frac{1}{3}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m < \frac{-2}{3} \vee m > 10$. D. $m < \frac{2}{3} \vee m > 1$.

Câu 123. Tìm m để phương trình $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x - 1 = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $\frac{-1}{3} < m < 1$. B. $\frac{7}{3} < m < 5$. C. $-2 < m < \frac{5}{2}$. D. $\frac{-7}{3} < m < -1$.

Câu 124. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4 = m \text{ có ba nghiệm thực phân biệt. Khi đó giá trị của biểu thức } b - a \text{ bằng.}$$

- A. $\frac{35}{3}$. B. $\frac{32}{3}$. C. $\frac{37}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

Câu 125. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị thực tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{11}{8} = m \text{ có 3 nghiệm thực phân biệt. Tính giá trị của biểu thức } P = b - a.$$

- A. $P = 3$. B. $P = 4$. C. $P = 2$. D. $P = 5$.

Câu 126. Biết khoảng $(a; b)$ chứa tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn điều kiện phương trình

$$\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{4} = m \text{ có 4 nghiệm thực phân biệt. Tính giá trị của biểu thức } P = b - a.$$

- A. $P = \frac{11}{2}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = \frac{9}{2}$. D. $P = \frac{5}{2}$.