

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP

🚦 Đưa về cùng cơ số.

+ Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

🚦 Đặt ẩn phụ.

🚦 Sử dụng tính đơn điệu:

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D thì $f(u) < f(v) \Rightarrow u < v (\forall u, v \in D)$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D thì $f(u) < f(v) \Rightarrow u > v (\forall u, v \in D)$.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2021; 2021)$ để bất phương trình $27^x - m \cdot 3^{1-x} \leq m \cdot 3^x - 27^{1-x}$ có nghiệm?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Lời giải

Chọn A

Đặt $3^x = t$ điều kiện $t > 0$.

Bất phương trình trở thành:

$$t^3 + \frac{27}{t^3} \leq m \left(\frac{3}{t} + t \right) \quad (*) . \text{ Do } t > 0 \text{ nên } \frac{3}{t} + t > 0 \text{ suy ra } (*) \Leftrightarrow t^2 - 3 + \frac{9}{t^2} \leq m .$$

Xét $f(t) = t^2 - 3 + \frac{9}{t^2} \quad (t > 0)$. Với $t > 0$ ta có $f'(t) = 2t - \frac{18}{t^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$.

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Để (*) có nghiệm thì $m \geq \min_{(0; +\infty)} f(t) = 3$. Vậy có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\sqrt{2^x + 3} + \sqrt{5 - 2^x} \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; \log_2 5)$.

A. $m \geq 4$.

B. $m \geq 2\sqrt{2}$.

C. $m < 4$.

D. $m < 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2^x = t$. Vì $x < \log_2 5 \Rightarrow 0 < 2^x < 2^{\log_2 5} \Rightarrow 0 < t < 5$.

Yêu cầu bài toán trở thành $\sqrt{t+3} + \sqrt{5-t} \leq m, \forall t \in (0;5)$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+3} + \sqrt{5-t}$ với $0 < t < 5$.

$$\text{Có } f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-t}}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t+3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-t}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < t < 5 \\ \sqrt{t+3} = \sqrt{5-t} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	5	
f'		+	0	-
$f(t)$		$\sqrt{3} + \sqrt{5}$	4	$2\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m \geq 4$.

Câu 3. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-30;30]$ để bất phương trình $m(3-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x \geq (m-1) \cdot 2^x$ đúng với $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$?

A. 36.

B. 34.

C. 35.

D. 37.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } m(3-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x \geq (m-1) \cdot 2^x \Leftrightarrow m \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^x \geq m-1$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^x, \text{ do } x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right) \text{ suy ra } t \in \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}; +\infty \right) = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty \right)$$

$$\text{Khi đó } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^x = \frac{1}{t}. \text{ Suy ra bất phương trình:}$$

$$\frac{m}{t} + t \geq m-1 \Leftrightarrow t^2 + t \geq m(t-1) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2+t}{t-1} = f(t) \text{ đúng với } \forall t \in \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty \right)$$

$$\text{Khảo sát nhanh hàm số: } f(t) = \frac{t^2+t}{t-1} \text{ với } \forall t \in \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty \right).$$

$$\text{Suy ra được giá trị nhỏ nhất: } \min f(t) = f(1+\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow m \leq \min f(t) = 3+2\sqrt{2} \approx 5,8.$$

Suy ra: $-30 \leq m \leq 5$ Suy ra có tất cả 36 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 4. Gọi S là tập chứa tất cả những giá trị nguyên $m \in [-20;20]$ để bất phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R} : 3^{\sin^2 x} + (2m-1)3^{1+\cos^2 x} \geq 4$. Số phần tử của tập S là

A. 18.

B. 20.

C. 21.

D. 19.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $t = 3^{\sin^2 x}$, do $x \in \mathbb{R}$ suy ra $t = 3^{\sin^2 x} \in [3^0; 3^1] = [1; 3]$

$$\text{Khi đó: } 3^{1+\cos^2 x} = 3^{2-\sin^2 x} = \frac{9}{3^{\sin^2 x}} = \frac{9}{t}$$

$$\text{Bất phương trình trở thành: } t + (2m-1) \cdot \frac{9}{t} \geq 4 \Leftrightarrow 9(2m-1) \geq 4t - t^2 \quad \forall t \in [1; 3]$$

$$\text{Do đó: } 9(2m-1) \geq \max_{t \in [1; 3]} (f(t)) = \max_{t \in [1; 3]} (4t - t^2) = f(2) = 4$$

$$\text{Suy ra: } 9(2m-1) \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{13}{18} \Rightarrow 1 \leq m \leq 20$$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5. Tìm tất cả các tham số m để bất phương trình $2^{\sqrt{4x^2-4x-8m}} + 4x^2 + 2 > 2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}} + 2x\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m < -\frac{1}{8}$.

B. $m \leq -\frac{1}{8}$.

C. $m < \frac{3}{8}$.

D. $m \leq \frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 2^{\sqrt{4x^2-4x-8m}} + 4x^2 + 2 > 2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}} + 2x\right) \Leftrightarrow 4^{\sqrt{x^2-x-2m}} + 4x^2 + 2 > 2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}} + 2x\right)$$

Để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x , trước hết bất phương trình phải xác định trên

$$\mathbb{R}. \text{ Suy ra } x^2 - x - 2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq g(x) = \frac{x^2 - x}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với

$$4^{\sqrt{x^2-x-2m}} + 4x^2 + 2 > 2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}} + 2x\right), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}} - 1\right)^2 + (2x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$\text{Ta có } \left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}} - 1\right)^2 + (2x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và dấu bằng xảy ra khi}$$

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-x-2m}} - 1 = 0 \\ 2x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{8} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy để } (*) \text{ luôn đúng suy ra } m \neq -\frac{1}{8}. \text{ Kết hợp với điều kiện ban đầu vậy } m < -\frac{1}{8}.$$

Câu 6. Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\ln 120$.

B. $\ln 10$.

C. $\ln 30$.

D. $\ln 14$.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{ Với } a > 1 \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) \cdot \ln a = \ln a.$$

+ Với $a > 1$ xét hàm số $f(x) = \frac{a^x - 1}{x} (x \neq 0)$, ta có $f'(x) = \frac{xa^x \ln a - a^x + 1}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = xa^x \ln a - a^x + 1 \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a + xa^x \ln^2 a - a^x \ln a = xa^x \ln^2 a$.

Với $x > 0$ ta có $g'(x) > 0$ suy ra $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 0$.

Với $x < 0$ ta có $g'(x) < 0$ suy ra $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x < 0$.

Do đó hàm số $f(x) = \frac{a^x - 1}{x} (a > 1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Trở lại bài toán:

+ Xét $x = 0$ bất phương trình thỏa mãn.

+ Xét $x > 0$ ta có: $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx \Leftrightarrow m \leq \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} = h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 = \ln 120$.

+ Xét $x < 0$ ta có: $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx \Leftrightarrow m \geq \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} = h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 = \ln 120$.

Kết hợp lại ta có $m = \ln 120$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với

$$\forall x \in \mathbb{R} : (6 + 2\sqrt{7})^x + (2 - m)(3 - \sqrt{7})^x - (m + 1)2^x \geq 0?$$

A. 10.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$(6 + 2\sqrt{7})^x + (2 - m)(3 - \sqrt{7})^x - (m + 1)2^x \geq 0 \Leftrightarrow 2^x (3 + \sqrt{7})^x + (2 - m)(3 - \sqrt{7})^x > (m + 1)2^x$$

$$\Leftrightarrow (3 + \sqrt{7})^x + (2 - m)\left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)^x > m + 1$$

Đặt $t = (3 + \sqrt{7})^x, t > 0 \Rightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$$t + (2 - m) \cdot \frac{1}{t} > m + 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t + 2}{t + 1} > m.$$

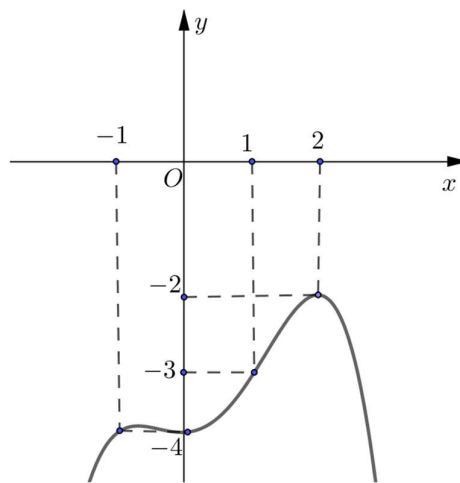
Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 0 \end{cases}$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:

x	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m < 1$. Suy ra trong đoạn $[-10; 10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8.) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$$

A. 10.

B. 4.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$

$$\Leftrightarrow (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq -m^2 + 5m \quad (1)$$

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (4 - f^2(x)) \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Để (1) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $4 \leq -m^2 + 5m \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Câu 9. Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

- A. $(-\infty; 12)$. B. $(-\infty; -1]$. C. $(-\infty; 0]$. D. $(-1; 16]$.

Lời giải

Chọn B

$$4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0, \forall x \geq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2(m+1)2^x + m \geq 0, \forall x \geq 0 \quad (1).$$

Đặt $t = 2^x, (t \geq 1)$. (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0, \forall t \geq 1 \quad (2)$.

Cách 1:

$$(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2t}{2t - 1}, \forall t \geq 1 \quad (3).$$

Xét hàm số $y = f(t) = \frac{t^2 - 2t}{2t - 1}$. Ta có hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{(2t-2)(2t-1) - 2(t^2 - 2t)}{(2t-1)^2} = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1.$$

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	-1		

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \geq m \quad \forall t \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Cách 2:

$t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0$ là một bất phương trình bậc hai.

Tam thức bậc hai ở vế trái luôn có $\Delta' = m^2 + m + 1 > 0, \forall m$ nên tam thức luôn có hai nghiệm là

$$t = m+1 - \sqrt{m^2 + m + 1} \quad \text{và} \quad t = m+1 + \sqrt{m^2 + m + 1}.$$

Suy ra bất phương trình $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0$ có tập nghiệm là

$$(-\infty; m+1 - \sqrt{m^2 + m + 1}] \cup [m+1 + \sqrt{m^2 + m + 1}; +\infty).$$

$$(2) \Leftrightarrow m+1 + \sqrt{m^2 + m + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + m + 1} \leq -m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2 + m + 1 \leq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Câu 10. Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

- A. 28. B. 29. C. 30. D. 31.

Lời giải

Chọn B

$$3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x \cdot 3^m - 3^x + 3^m < 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 3^x(3^x - 3^m) - (3^x - 3^m) < 0 \Leftrightarrow (3^x - 3^m)(9 \cdot 3^x - 1) < 0$$

Ta có $3^x - 3^m = 0 \Leftrightarrow x = m$. Cho $9 \cdot 3^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vì m nguyên dương nên ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	m	$+\infty$
VT	+	0	-	+

Ta có tập nghiệm $S = (-2; m)$. Suy ra tập hợp các nghiệm nguyên là $\{-1; 0; 1; \dots; m-1\}$.

Để có không quá 30 nghiệm nguyên thì $m-1 \leq 28 \Leftrightarrow m \leq 29$.

Câu 11. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình

$$9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0 \text{ có nghiệm đúng với mọi số thực } x \text{ là}$$

A. $m \leq -\frac{3}{2}$.

B. $m \neq 2$.

C. $m < -\frac{3}{2}$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 > (3^x + 1) \cdot 2m$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x - 3) > (3^x + 1) \cdot 2m \Leftrightarrow 3^x - 3 > 2m \Leftrightarrow 3^x > 3 + 2m$$

$$\text{Vậy, để } 9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ khi } 3 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}.$$

Câu 12. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình

$$4^x - 2022m \cdot 2^{x-1} + 3 - 1011m \leq 0 \text{ có nghiệm.}$$

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = -3$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$4^x - 2022m \cdot 2^{x-1} + 3 - 1011m \leq 0 \quad (1). \text{ Đặt } t = 2^x, t > 0.$$

$$\text{Khi đó bất phương trình (1) trở thành } t^2 - 1011mt + 3 - 1011m \leq 0 \Leftrightarrow 1011m \geq \frac{t^2 + 3}{t+1} (*)$$

(Vì $t > 0$).

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 3}{t+1} (t > 0), f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	2	$+\infty$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình (*) có nghiệm $t > 0$

$$\Leftrightarrow 1011m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{1011}.$$

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 1$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng

$$(-2021; 2022) \text{ để bất phương trình } 9^x - (m+2)3^x - 3 - m > 0 \text{ nghiệm đúng với mọi số thực } x ?$$

A. 2020.

B. 2019.

C. 2018.

D. 2017.

Lời giải

Chọn C

$$9^x - (m+2)3^x - 3 - m > 0 \quad (1). \text{ Đặt } t = 3^x, t > 0.$$

$$\text{Khi đó bất phương trình (1) có dạng } t^2 - (m+2)t - 3 - m > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3-m) > 0$$

$$\Leftrightarrow t-3-m > 0 \quad (\text{vì } t > 0) \Leftrightarrow t > 3+m \quad (2).$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi phương trình (2) đúng với mọi $t > 0 \Leftrightarrow 3+m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$.

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-2021; 2022)$ nên $m \in \{-2020; -2019; \dots; -3\}$.

Vậy có 2018 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$12^x + 2(1-m)6^x + 3^x > 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x > 0?$$

A. 6.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$12^x + 2(1-m)6^x + 3^x > 0 \Leftrightarrow 4^x + 2(1-m)2^x + 1 > 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, \text{ với } x > 0 \Rightarrow t > 1.$$

$$\text{Khi đó bất phương trình (1) trở thành } t^2 + 2(1-m)t + 1 > 0 \Leftrightarrow 2mt < t^2 + 2t + 1$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} \quad (\text{vì } t > 1).$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} \text{ với } t > 1, f'(t) = \frac{t^2 - 1}{2t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

t	1	$+\infty$
$g'(t)$		+
$g(t)$	2	$+\infty$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t > 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Tổng các số nguyên m , $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình

$$m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0 \text{ có nghiệm đúng với mọi } x \in (0; 1).$$

A. -34.

B. 34.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0 \Leftrightarrow m.\left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m+1).\left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, x \in (0; 1) \Rightarrow t \in \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành } m.t^2 - (2m+1)t + m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 2t + 1)m - t \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2}$$

Đặt $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2}$, $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ ta có $f'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t-1)^3} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1	1	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$			-
$f(t)$		$+\infty$	6

Từ bảng biến thiên, ta có bất phương trình có nghiệm $t \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq 6$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-10; 10] \Rightarrow m \in \{-10; -9; \dots; 5; 6\}$.

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là -34.

Câu 16. Số các giá trị nguyên m , $m \in [-2021; 2022]$ để bất phương trình

$(3m+1)12^x - (3+m)6^x + 3^x > 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là

A. 2020.

B. 2022.

C. 2021.

D. 4042.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(3m+1)12^x - (3+m)6^x + 3^x > 0 \Leftrightarrow (3m+1)4^x - (3+m)2^x + 1 > 0$

Đặt $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.

Khi đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (3m+1)t^2 - (3+m)t + 1 > 0$, $t > 1$

$\Leftrightarrow (3t^2 - t)m > -t^2 + 3t - 1 \Leftrightarrow m > \frac{-t^2 + 3t - 1}{3t^2 - t}$, do $3t^2 - t > 0, \forall t > 1$.

Đặt $f(t) = \frac{-t^2 + 3t - 1}{3t^2 - t}$, ta có $f'(t) = \frac{-8t^2 + 6t - 1}{(3t^2 - t)^2} < 0$, $\forall t > 1$

Bảng biến thiên

t	1	$+\infty$
$f'(t)$		-
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

Do đó $m \geq \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-2021; 2022] \Rightarrow m \in \{1; 2; \dots; 2022\}$ Từ đó suy ra có 2022 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Cho bất phương trình $-m.3^{x+1} + \left(4m - \frac{5}{3}\right) \cdot (4 - \sqrt{7})^x + (4 + \sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A. $m \geq \frac{2}{3}$.

B. $m > \frac{2}{3}$.

C. $m \leq \frac{5}{12}$.

D. $\frac{5}{12} < m \leq \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-m.3^{x+1} + \left(4m - \frac{5}{3}\right) \cdot (4 - \sqrt{7})^x + (4 + \sqrt{7})^x > 0$

$$\Leftrightarrow -3m.3^x + \left(4m - \frac{5}{3}\right) \cdot (4 - \sqrt{7})^x + (4 + \sqrt{7})^x > 0$$

$$\Leftrightarrow -3m + \left(4m - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(4m - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^x - 3m > 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x$, do $x \in (-\infty; 0] \Rightarrow t \in (0; 1]$.

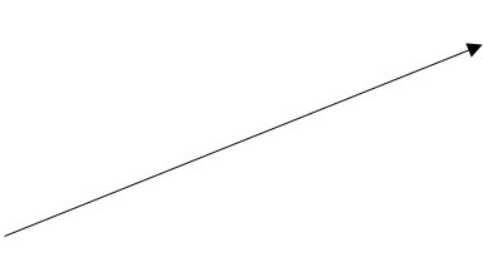
Bất phương trình đã cho trở thành $t + \left(4m - \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{t} - 3m > 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3mt + 4m - \frac{5}{3} > 0 \Leftrightarrow (4 - 3t)m + t^2 - \frac{5}{3} > 0 \Leftrightarrow m > \frac{t^2 - \frac{5}{3}}{3t - 4}.$$

Đặt $f(t) = \frac{t^2 - \frac{5}{3}}{3t - 4}$, $t \in (0; 1]$, ta có $f'(t) = \frac{3t^2 - 8t + 5}{(3t - 4)^2} > 0, \forall t \in (0; 1]$

Bảng biến thiên

t	0	1
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$



Vậy $m \geq \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$	

Biết rằng $f(-2)=1$, $f(3)=1$. Tính tổng các giá trị $m \in (-2021; 2021)$ để bất phương trình $e^{f^3(x)+3f^2(x)-9f(x)+m} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 3)$.

A. 0.

B. 10.

C. 2020.

D. 2041210.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) - 9f(x)$, khi đó bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $e^{g(x)+m} \geq m$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 3)$.

Ta có: $g'(x) = f'(x)[3f^2(x) + 6f(x) - 9]$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \text{ và ta dễ dàng kiểm tra được các nghiệm này đều là}$$

nghiệm bội lẻ nên các điểm $x = \{-2; -1; 0; 2; 3\}$ đều là cực trị của hàm số $g(x)$.

Ta có: $e^{g(x)+m} \geq m \Leftrightarrow e^{g(x)} \geq \frac{m}{e^m}$. Khi đó để có nghiệm trong khoảng $(-2; 3)$ thì

$$\frac{m}{e^m} \leq \max_{(-2; 3)} e^{g(x)} = e^{27}.$$

Xét hàm số $y = \frac{m}{e^m} \Rightarrow y' = \frac{e^m(1-m)}{e^{2m}} = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Ta có BBT của hàm số $y = \frac{m}{e^m}$ như sau:

m	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$+$	$-$
y	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Ta thấy, $\max_{\mathbb{R}} \left(\frac{m}{e^m} \right) = \frac{1}{e} < e^{27} = \max_{(-2; 3)} (e^{g(x)}) \Rightarrow$ Bất phương trình $e^{g(x)+m} \geq m$ có nghiệm với mọi

$m \in \mathbb{R}$. Mà $m \in (-2021; 2021)$ nên suy ra $\sum_{-2020}^{2020} m = 0$

Câu 19. Cho hai hàm số $g(x) = -3x^2 + (m^2 - 6)x + m^2 - 14$ và $f(x) = e^{(x-1)^2}$. Có bao nhiêu giá trị m dương để $f(x) \leq g(x)$ có nghiệm duy nhất?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow e^{(x-1)^2} + 3x^2 + 6x + 14 \leq m^2(x+1) \Leftrightarrow e^{(x-1)^2} + 3(x+1)^2 + 11 \leq m^2(x+1)$

Vì $e^{(x-1)^2} + 3(x+1)^2 + 11 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow VP = m^2(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x > -1 \end{cases}$.

Khi đó, bài toán trở thành tìm $m \neq 0$ để $\frac{e^{(x-1)^2} + 3x^2 + 6x + 14}{(x+1)} \leq m^2$ có nghiệm duy nhất trên

khoảng $(-1; +\infty)$. Điều này xảy ra khi $m^2 = \min_{(-1; +\infty)} (h(x))$ và nếu tồn tại GTNN.

Với $h(x) = \frac{e^{(x-1)^2} + 3x^2 + 6x + 14}{x+1} \Rightarrow h'(x) = \frac{e^{(x-1)^2}(2x^2 - 3) + 3x^2 + 6x - 8}{(x+1)^2}$.

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{(x-1)^2}(2x^2 - 3) + 3x^2 + 6x - 8 = 0$ và ta chỉ lấy nghiệm $x > -1$.

Sử dụng máy tính CASIO $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a < -1 \end{cases}$. Ta lập được bảng biến thiên của $h(x)$ như sau:

x	-1	1	$+\infty$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$				

$\Rightarrow \min_{(-1; +\infty)} (h(x)) = 12 \Rightarrow m^2 = 12 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{12}$ thì thỏa mãn bài toán.

Mà $m \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow m = \sqrt{12}$ là giá trị duy nhất.

Câu 20. Với m là tham số để bất phương trình $2^x + 3^x \geq mx + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, khi đó

A. $m \in (-\infty; 0)$. **B.** $m \in (1; 3)$. **C.** $m \in (3; +\infty)$. **D.** $m \in (0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

+) Với $m \leq 0$, bất phương trình không nhận các giá trị âm của x làm nghiệm.

Thật vậy, khi đó $2^x + 3^x < 2$ mà $mx + 2 \geq 2$. Suy ra $m \leq 0$ loại.

+) Với $m > 0$, ta có $2^x + 3^x \geq mx + 2 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - mx - 2 \geq 0$.

Đặt $f(x) = 2^x + 3^x - mx - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - m$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - m = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 = m$ (1)

Đặt $g(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Suy ra với mỗi giá trị $m > 0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất là x_0 .

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là x_0 .

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -m < 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ nên $f'(x) < 0, \forall x < x_0$ và $f'(x) > 0, \forall x > x_0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$.

Kết hợp điều kiện đề bài là $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0) \geq 0$ mà $f(0) = 0$.

Suy ra $x_0 = 0$ và $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f(x) = 0$.

Suy ra $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f'(x) = 0$. Suy ra $f'(0) = \ln 2 + \ln 3 - m = 0$.

Vậy $m = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.

Câu 21. Tập các giá trị của tham số m để bất phương trình $9^x - m.6^x + m.4^x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là đoạn $[a; b]$. Khi đó $b - a$ có giá trị bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - m.\left(\frac{3}{2}\right)^x + m \geq 0$ (1). Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$.

Bất phương trình (1) trở thành $t^2 - mt + m \geq 0 \Leftrightarrow m(t-1) \leq t^2$ (2)

Bất phương trình (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) đúng với mọi $t > 0$. Với $t = 1$, bất phương trình (2) luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$ (*).

Với $t \neq 1$, bất phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{t^2}{t-1} & (t > 1) \\ m \geq \frac{t^2}{t-1} & (0 < t < 1) \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t-1}$ với $t \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Khi đó $f'(t) = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}$. Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(l) \\ t = 2(n) \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	0	1	2	$+\infty$
$f'(t)$			0	
			-	+
$f(t)$	-1	$+\infty$	4	$+\infty$

Với $0 < t < 1$, bất phương trình (2) tương đương $m \geq f(t)$.

Dựa vào bảng biến thiên, bất phương trình (2) đúng với mọi $0 < t < 1$ khi $m \geq 0$ (**).

Với $t > 1$, bất phương trình (2) tương đương $m \leq f(t)$.

Dựa vào bảng biến thiên, bất phương trình (2) đúng với mọi $t > 1$ khi $m \leq 4$ (***)

Kết hợp (*) (**) (***), bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$(m^2 - 6).2^{\sqrt{4x^2 + 9} - 2x} - 2^{\frac{18}{\sqrt{4x^2 + 9} + 2x}} < 25 \text{ có nghiệm đúng với mọi } x \in (0; 2)?$$

A. 7.

B. 9.

C. 8.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{4x^2 + 9} - 2x \Rightarrow t' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 9}} - 2 < 0, \forall x \in (0; 2)$.

x	0	2
t'		-
t	3	1

Vì $x \in (0; 2) \Rightarrow t \in (1; 3)$

Ta có: $(\sqrt{4x^2 + 9} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 9} + 2x) = 9 \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{4x^2 + 9} + 2x)} = \frac{(\sqrt{4x^2 + 9} - 2x)}{9}$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow (m^2 - 6)2^t - 2^{2t} < 25$ có nghiệm đúng $\forall t \in (1; 3)$

$\Leftrightarrow m^2 - 6 < \frac{2^{2t} + 25}{2^t}$ có nghiệm đúng $\forall t \in (1; 3)$ (*)

Xét hàm số $g(X) = \frac{X^2 + 25}{X}, \forall X \in (2; 8)$ và $X = 2^t$, vì $t \in (1; 3) \Rightarrow X \in (2; 8)$

$g'(X) = 1 - \frac{25}{X^2}, \forall X \in (2; 8)$. Cho $g'(X) = 0 \Rightarrow X = 5 \in (2; 8)$

X	2	5	8
g'	-	0	+
g	$\frac{29}{2}$	10	$\frac{89}{8}$

Từ BBT và kết hợp với (*), ta suy ra: $m^2 - 6 < 10 \Leftrightarrow -4 < m < 4$ và $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = 2^{|x-1|} - 2^{|x+1|}$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x - \sqrt[3]{m+3x}) - 3 \leq 0$ có nghiệm $x \in (0; 2]$.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 21$.

C. $m < 21$.

D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x) = 2^{|x-1|} - 2^{|x+1|}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = 2^{|-x-1|} - 2^{|-x+1|} = -(2^{|x-1|} - 2^{|x+1|}) = -f(x)$ và $f(1) = -3$

$f'(x) = \left(\frac{x-1}{|x-1|} 2^{|x-1|} - \frac{x+1}{|x+1|} 2^{|x+1|} \right) \ln 2 < 0, \forall x \neq \pm 1$.

Mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra, hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

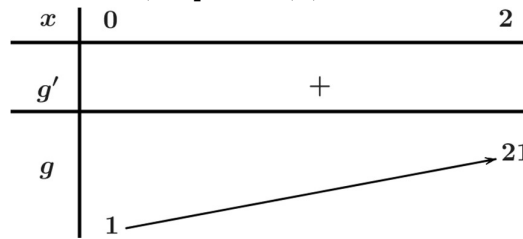
Bpt $f(x - \sqrt[3]{m+3x}) + 3 \leq 0 \Leftrightarrow f(x - \sqrt[3]{m+3x}) \leq -f(1) = f(-1)$ có nghiệm $x \in (0; 2]$

$\Leftrightarrow x - \sqrt[3]{m+3x} \geq -1$ có nghiệm $x \in (0; 2]$.

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 \geq m+3x \text{ có nghiệm } x \in (0; 2]$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 1 \geq m \text{ có nghiệm } x \in (0; 2].$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (0; 2]$ có $g'(x) = 3x^2 + 6x > 0, \forall x \in (0; 2]$



Từ BBT ta suy ra $m \leq 21$.

Câu 24. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để bất phương trình

$$2e^{x^2-mx+4} \leq 2x^2 - 4mx + 10 + (x^2 - 2mx + 4)^2 \text{ có nghiệm ?}$$

A. 4040.

B. 4041.

C. 4042.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 2e^{x^2-mx+4} \leq 2x^2 - 4mx + 10 + (x^2 - 2mx + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-mx+4} \leq 1 + (x^2 - 2mx + 4) + \frac{(x^2 - 2mx + 4)^2}{2}. \text{ Đặt } u = x^2 - 2mx + 4 \text{ suy ra bpt trở thành:}$$

$$\Leftrightarrow e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2} \Leftrightarrow e^u - \left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right) \leq 0$$

$$\text{Đến đây ta xét hàm số } y = f(u) = e^u - \left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right) \text{ có}$$

$$f'(u) = e^u - u - 1; f''(u) = e^u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 0. \text{ Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:}$$

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(u)$	$-$	0	$+$
$f'(u)$	$+$	0	$+$
$f(u)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\text{Suy ra bất phương trình } f(u) = e^u - \left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2mx + 4 \leq 0 \quad (2)$$

Như vậy để bất phương trình (2) luôn có nghiệm thì

$$\Delta' = m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-2022; 2022]} \begin{cases} -2022 \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 2022 \end{cases}. \text{ Như vậy có tất cả 4042 giá trị}$$

nguyên m thỏa mãn

Câu 25. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30;30]$ để bất phương trình

$$x(e^{x+1}-1)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+m \geq 0 \text{ nghiệm đúng với } \forall x \in (-2;3)$$

A. 61.

B. 29.

C. 31.

D. 25.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } g(x) = x(e^{x+1}-1) + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Ta có: } x(e^{x+1}-1) + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + m \geq 0, \forall x \in (-2;3)$$

$$\Leftrightarrow x(e^{x+1}-1) + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \geq -m, \forall x \in (-2;3) \Leftrightarrow \min_{x \in (-2;3)} g(x) \geq -m$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x(e^{x+1}-1) + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = e^{x+1} - 1 + xe^{x+1} + x^4 + 2x^3 + x^2 - x = e^{x+1}(x+1) + x^2(x+1)^2 - (x+1)$$

$$\text{Ta đi chứng minh } e^{x+1}(x+1) - (x+1) > 0, \forall x \in (-2;3). \text{ Đặt } t = x+1, t \in (-1;4)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = te^t - t, t \in (-1;4)$$

$$f'(t) = e^t + te^t - 1; f''(t) = 2e^t + te^t = e^t(t+2) > 0, \forall t \in (-1;4)$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(-1;4)$, do đó phương trình $f'(t) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $(-1;4)$. Mà $f'(0) = 0$ nên $t = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(t) = 0$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	-1	0	4	
$f'(t)$			$-$	0	$+$
$f(t)$		$+\infty$			$+\infty$

The diagram illustrates the behavior of a function $f(t)$ based on its first derivative $f'(t)$. The horizontal axis represents t with critical points at $-\infty$, -1 , 0 , and 4 . The vertical axis represents the function values, with $+\infty$ and 0 marked. The sign of $f'(t)$ is indicated above the t -axis: it is positive for $t < -1$ (indicated by a shaded region), negative for $-1 < t < 0$, and positive for $t > 0$. The function $f(t)$ has vertical asymptotes at $t = -1$ and $t = 4$, where it approaches $+\infty$. The function decreases from $+\infty$ at $t = -1$ to a local minimum at $t = 0$, and then increases back towards $+\infty$ as t approaches 4 . Arrows indicate the direction of the function's path between these points.

Từ đó ta được $f(t) \geq 0, t \in (-1;4)$ hay $e^{x+1}(x+1) - (x+1) > 0, \forall x \in (-2;3)$

$$\text{Do đó } g'(x) \geq 0, \forall x \in (-2;3)$$

$$\text{Ta được } \min_{x \in (-2;3)} g(x) = g(-2) \approx -1,8$$

Vậy có 29 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $(2^x - 3)(2^{x+1} - m) < 0$ có nghiệm nguyên và chứa không quá 6 nghiệm nguyên x ?

A. 506.

B. 507.

C. 505.

D. 512.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có bất phương trình đã cho tương đương: } (2^x - 3)\left(2^x - \frac{m}{2}\right) < 0 \quad (*)$$

Trường hợp 1: Nếu $\frac{m}{2} = 3 \Rightarrow$ Bất phương trình (*) trở thành $(2^x - 3)^2 < 0$ vô nghiệm

Trường hợp 2: Nếu $\frac{m}{2} > 3 \Rightarrow$ Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow 3 < 2^x < \frac{m}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 < x < \log_2 \left(\frac{m}{2}\right)$

Nếu ta chỉ xét các nghiệm nguyên thì $\Leftrightarrow 2 \leq x < \log_2 \left(\frac{m}{2}\right)$. Để có không quá 6 nghiệm nguyên

$$x \text{ thì } \Leftrightarrow 2 < \log_2 \left(\frac{m}{2}\right) \leq 8 \Leftrightarrow 4 < \frac{m}{2} \leq 2^8 \Leftrightarrow 9 \leq m \leq 2^9$$

Kết hợp điều kiện ban đầu suy ra: $8 < m \leq 2^9 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}^*} 9 \leq m \leq 512 \Rightarrow$ có 504 giá trị nguyên m

Trường hợp 3: Nếu $\frac{m}{2} < 3 \Rightarrow$ Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow \frac{m}{2} < 2^x < 3 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{m}{2}\right) < x < \log_2 3$

Nếu ta chỉ xét các nghiệm nguyên thì $\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{m}{2}\right) < x \leq 1$. Để có không quá 6 nghiệm nguyên

$$x \text{ thì } \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{m}{2}\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{m}{2} < 2 \Leftrightarrow m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}^*} 1 \leq m \leq 3$$

Kết hợp điều kiện ban đầu suy ra: $1 \leq m \leq 3 \Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên m

Như vậy, tổng cộng có $504 + 3 = 507$ giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 27. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $3^{\sin x + 3 \cos x + m + 1} + 4^{\sin x + 3 \cos x + m} \leq 6 \sin x + 18 \cos x + 6m + 7$ có nghiệm?

A. 7.

B. 9.

C. 11.

D. 5.

Lời giải

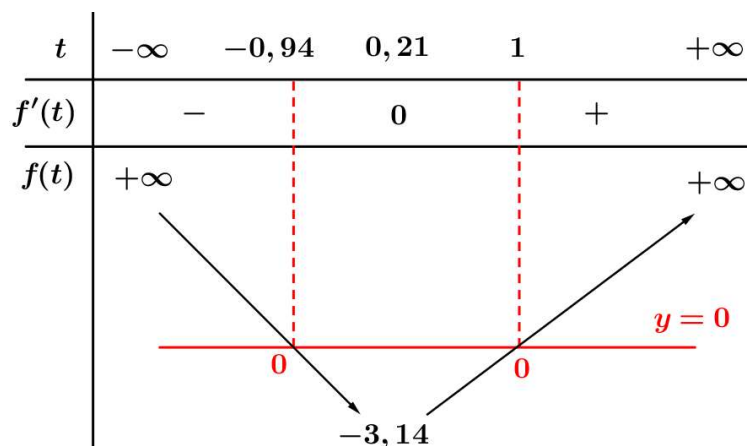
Chọn B

Đặt: $t = \sin x + 3 \cos x + m$. Như vậy bất phương trình ban đầu trở thành:

$$3 \cdot 3^t + 4^t \leq 6t + 7 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^t + 4^t - 6t - 7 \leq 0$$

Xét hàm $y = f(t) = 3 \cdot 3^t + 4^t - 6t - 7 \Rightarrow f'(t) = 3 \cdot 3^t \ln 3 + 4^t \ln 4 - 6$;

$f''(t) = 3 \cdot 3^t \ln^2 3 + 4^t \ln^2 4 > 0$. Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



$$\text{Suy ra bất phương trình } f(t) = 3 \cdot 3^t + 4^t - 6t - 7 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,94 \leq t \leq 1 \\ t = \sin x + 3 \cos x + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -0,94 \leq \sin x + 3 \cos x + m \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sin x - 3 \cos x + 1 \\ m \geq -\sin x - 3 \cos x - 0,94 \end{cases} (*) . \text{ Bất phương trình đã cho có}$$

nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có nghiệm. Suy ra: $\begin{cases} m \leq \max(-\sin x - 3 \cos x + 1) = \max(y_1) \\ m \geq \min(-\sin x - 3 \cos x - 0,94) = \min(y_2) \end{cases}$

$$\text{Ta có: } (\sin x + 3 \cos x)^2 \leq (1^2 + 3^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \leq -\sin x - 3 \cos x \leq \sqrt{10}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (-\sin x - 3 \cos x + 1) \leq \sqrt{10} + 1 \\ (-\sin x - 3 \cos x - 0,94) \geq -\sqrt{10} - 0,94 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq \max(y_1) = \sqrt{10} + 1 \\ m \geq \min(y_2) = -\sqrt{10} - 0,94 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $-4 \leq m \leq 4$. Như vậy có tất cả 9 giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 28. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2^{x^2+2x-2\log_2 5} = 5^{y-\log_5 2} \\ y^3 - |y+2| - 2|y+3| + 10 \leq 0 \end{cases}$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } 2^{x^2+2x-2\log_2 5} = 5^{y-\log_5 2} \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+2x}}{2^{2\log_2 5}} = \frac{5^y}{5^{\log_5 2}} \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+2x}}{5^2} = \frac{5^y}{2} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2}$$

$$\text{Nhận thấy: } \begin{cases} 2^{x^2+2x+1} \geq 2^0 = 1 \\ 2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2} \end{cases} \Rightarrow 5^{y+2} \geq 1 \Leftrightarrow y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -2$$

$$\text{Từ đ1o ta suy ra giả thiết tiếp theo: } y^3 - |y+2| - 2|y+3| + 10 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y - 2 - 2y - 6 \leq -10 \Leftrightarrow y^3 - 3y + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: Với $y = -2$, ta có:

$$2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2} \Rightarrow 2^{x^2+2x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Như vậy trường hợp này có 1 cặp $(x; y)$ thỏa chính là $(-1; -2)$

Trường hợp 2: Với $y = 1$, ta có:

$$2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2} \Rightarrow 2^{x^2+2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3 \log_2 5 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3 \log_2 5}$$

Như vậy trường hợp này có 2 cặp $(x; y)$ thỏa chính là $(-1 \pm \sqrt{3 \log_2 5}; 1)$

Suy ra tổng cộng có tất cả 3 cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên a , $(2 \leq a \leq 2021)$ để có ít nhất 5 số nguyên $5x$ thỏa mãn bất phương trình sau đây:

$$a^{-x} + \frac{1}{2} \leq 2^{-x} + \frac{1}{a}$$

A. 1892.

B. 125.

C. 127.

D. 1893.

Lời giải

Chọn D

Nếu $a = 2$, bất phương trình luôn đúng với mọi giá trị của x .

$$\text{Nếu } a \geq 3 \text{ bất phương trình tương đương với } g(x) = a^{-x} + \frac{1}{2} - 2^{-x} - \frac{1}{a} \leq 0 \quad (2)$$

Ta có $g(1) = 0$; $g'(x) = -a^{-x} \ln a + 2^{-x} \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{-x} = \frac{\ln 2}{\ln a} \Leftrightarrow x = x_0 = -\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{\ln 2}{\ln a}\right)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_0$

Khi $a = 3 \Rightarrow x_0 > 1$; $a = 4 \Rightarrow x_0 = 1$; $a \geq 5 \Rightarrow x_0 < 1$.

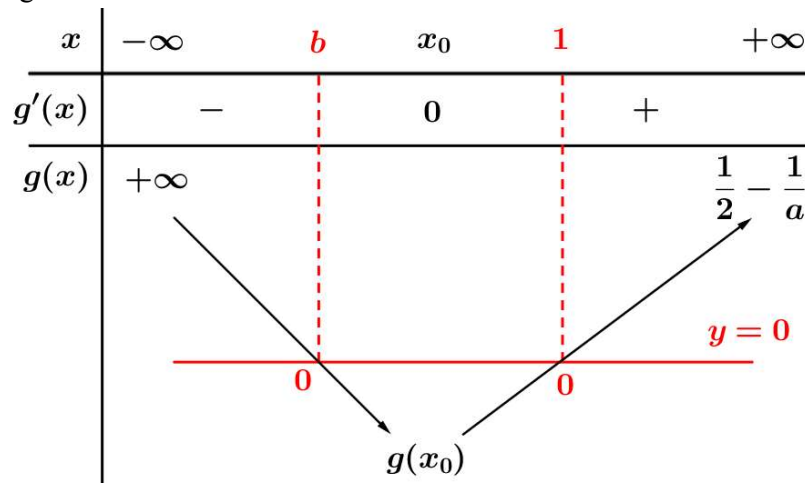
Nếu $a = 4 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$ chứa đúng một số nguyên $5x$ là số 5 (loại).

Nếu $a = 3 \Rightarrow x_0 > 1 \Rightarrow g(x) \leq 0 \Leftrightarrow S_x = [1; 1,28378] \Rightarrow S_{5x} = [5; 6,17]$ chứa đúng hai số nguyên $5x$ là số 5 và số 6 (loại).

Nếu $a > 4 \Rightarrow x_0 < 1 \Rightarrow S_x = [b; 1] \Rightarrow S_{5x} = [5b; 5]$ chứa tối thiểu 5 số nguyên $5x$ là số 1, 2, 3, 4, 5

$\Leftrightarrow b \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{5}\right) \leq 0 \Leftrightarrow a^{-\frac{1}{5}} - 2^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow a \in \{130; \dots, 2021\}$.

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Vậy có $1 + [(2021 - 130) + 1] = 1893$ số nguyên a thỏa mãn

Câu 30. Biết rằng có số thực $a > 0$ sao cho $a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $a \in \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

B. $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

C. $a \in \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

D. $a \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

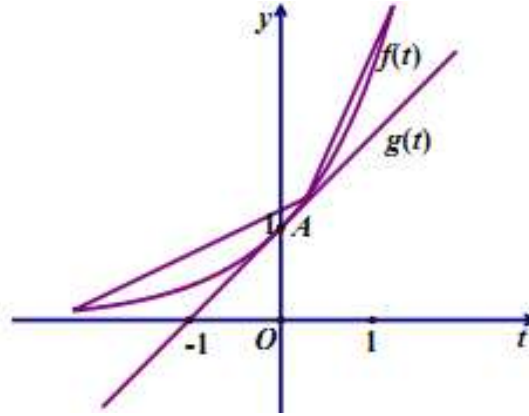
Ta có $a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^{3\cos 2x} \geq 1 + \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = \cos 2x, t \in [-1; 1]$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm a để $a^{3t} \geq t + 1 \forall t \in [-1; 1]$ (1).

Trường hợp 1: Với $a = 1$, bất phương trình $a^{3t} \geq t + 1 \Leftrightarrow 1 \geq t + 1 \Leftrightarrow t \leq 0$, suy ra $a = 1$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Với $0 < a < 1$, khi đó $\forall t > 0$ ta luôn có $a^{3t} < a^0 = 1 < t + 1$, suy ra $0 < a < 1$ không thỏa mãn (1).

Trường hợp 3: Với $a > 1$, xét các hàm số $f(t) = a^{3t}$ và $g(t) = t + 1$ (có đồ thị như hình vẽ)



Nhận xét: Đoạn thẳng $f(t)$ và đoạn thẳng $g(t)$ luôn có điểm chung $A(0;1)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(t) \geq g(t) \forall t \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $g(t)$ tiếp xúc với $f(t)$ tại điểm $A(0;1)$.

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình có nghiệm $t = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{3t} = t+1 \\ 3a^{3t} \ln a = 1 \end{cases} \text{ có nghiệm } t = 0 \Leftrightarrow 3 \ln a = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e} \text{ (thỏa mãn } a > 1)$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt[3]{e} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Cách 2: Xét tương giao sau đây: $\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$

$$\text{Ta có } a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^{3\cos 2x} \geq 1 + \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Đặt $t = \cos 2x, t \in [-1;1]$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm a để $a^{3t} - t - 1 \geq 0 \forall t \in [-1;1]$ (1).

Xét hàm số $f(t) = a^{3t} - t - 1$, có $f'(t) = 3a^{3t} \ln a - 1$

Nhận xét: phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm $t = 0 \in [-1;1]$, do đó để $f(t) \geq 0, \forall t \in [-1;1]$ thì **điều kiện cần** là $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e}$

Điều kiện đủ: Với $a = \sqrt[3]{e}$ ta có $f(t) = e^t - t - 1, f'(t) = e^t - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Hàm $f(t)$ liên tục trên $[-1;1]$, có $f(-1) = \frac{1}{e}, f(1) = e - 2, f(0) = 0$.

Do đó $\min_{[-1;1]} f(t) = 0$, tức là $f(t) \geq 0 \forall t \in [-1;1]$, suy ra $a = \sqrt[3]{e}$ thỏa mãn.

$$\text{Vậy } a = \sqrt[3]{e} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$