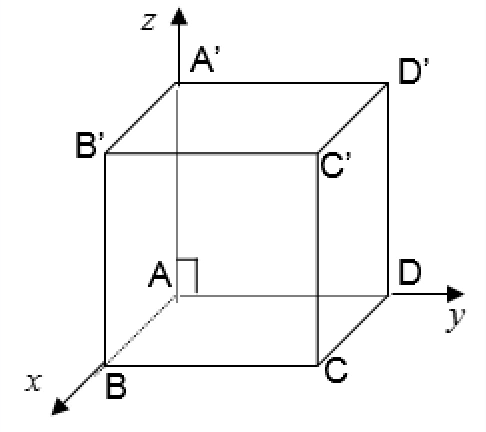
ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz trong không gian

Ta có: Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Do đó, nếu hình vẽ bài toán cho có chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các cạnh đó làm trục tọa độ. Cụ thể:

1. Với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’



Với hình lập phương

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; a; 0); D(0; a; 0)

A’(0; 0; a); B’(a; 0; a); C’(a; a; 0); D’(0; a; a)

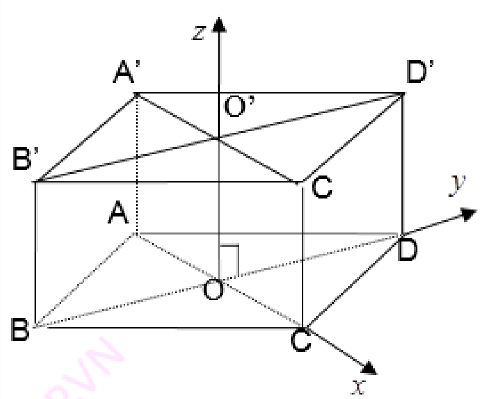
Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; b; 0); D(0; b; 0)

A’(0; 0; c); B’(a; 0; c); C’(a; b; c); D’(0; b; c)

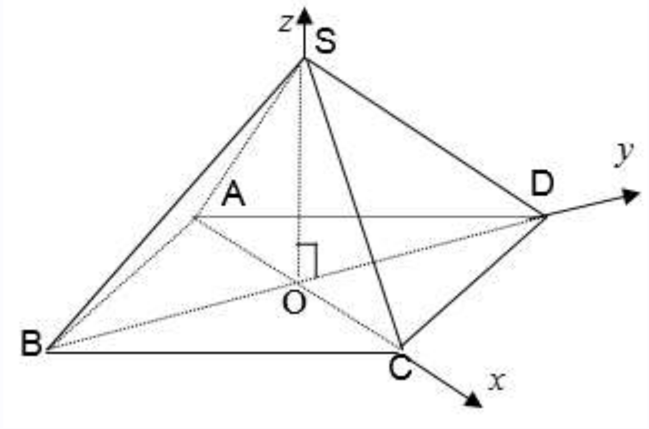
2. Với hình hộp đáy là hình thoi ABCD.A’B’C’D’



Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

- Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi ABCD
- Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

3. Với hình chóp tứ giác đều S.ABCD

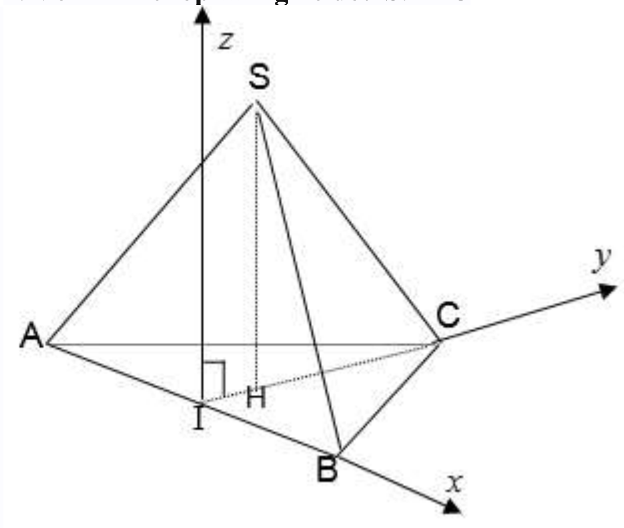


Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ
Giả sử cạnh hình vuông bằng a và đường cao SO = h
Chọn O(0;0;0) là tâm của hình vuông
Khi đó

$A(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0);\quad C(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0);\quad ;B(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0);\quad D(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$

$S(0;0;h)$

4. Với hình chóp tam giác đều S.ABC



cách 1: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ
Giả sử cạnh tam giác đều bằng a và đường cao bằng h. Gọi I là trung điểm của BC
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho I(0;0;0)
Khi đó:

$A(-\frac{a}{2};0;0);B(\frac{a}{2};0;0)$

$C(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0);S(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h)$

cách 2: chọn H trùng với gốc tọa độ O

tính $CI=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{a\sqrt{3}}{2} => CH=\frac{a\sqrt{3}}{3}, HI=\frac{a\sqrt{3}}{6} =>$ suy ra dc tọa độ các đỉnh

$A(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0xy;B(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0xy,C(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0)\in oy;$

$S(0;-\frac{a\sqrt{3}}{6};h)\in 0yz;I(0;-\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0y$

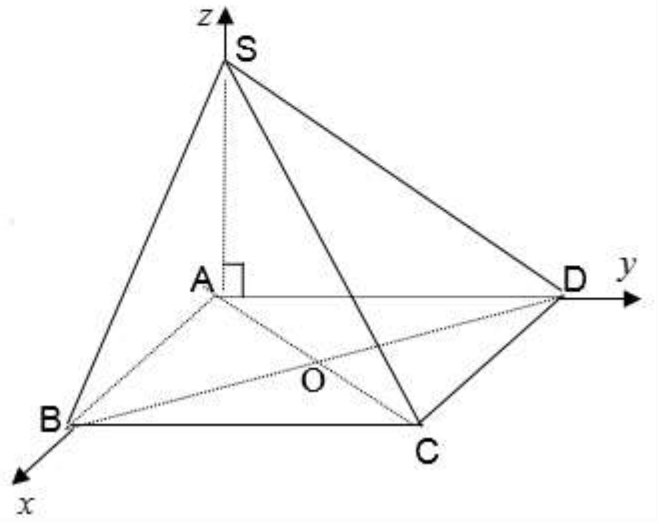
cách 3: từ A ta dựng đường thẳng Az // SH, Ax // BC
chọn hệ trục sao cho A= O (0;0;0),

$B(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0xy;$

$C(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0xy,$

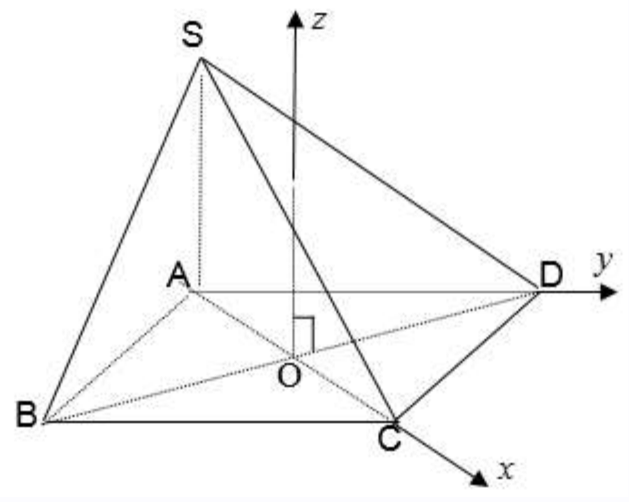
$S(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h)\in oz$

5. Với hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật và SA ⊥ (ABCD)



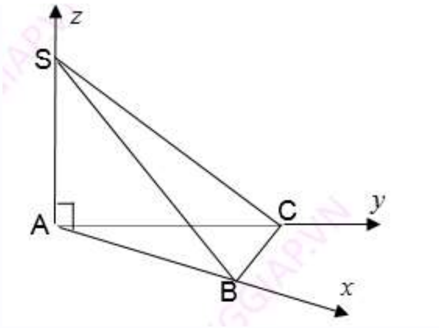
ABCD là hình chữ nhật AB = a; AD = b và chiều cao bằng h
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)
Khi đó: B(a;0;0); C(a;0;0); D(0;b;0); S(0;0;h)

6. Với hình chóp S.ABC có ABCD là hình thoi và SA ⊥ (ABCD)



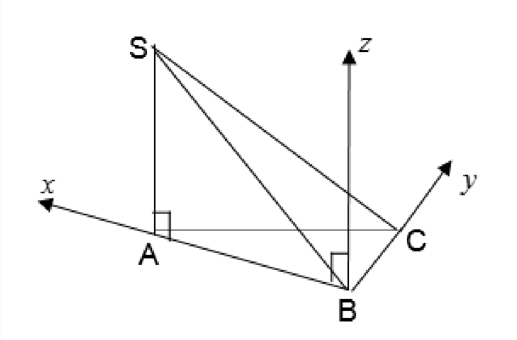
ABCD là hình thoi cạnh a và chiều cao bằng h
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho O(0;0;0)

7. Với hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và Δ ABC vuông tại A



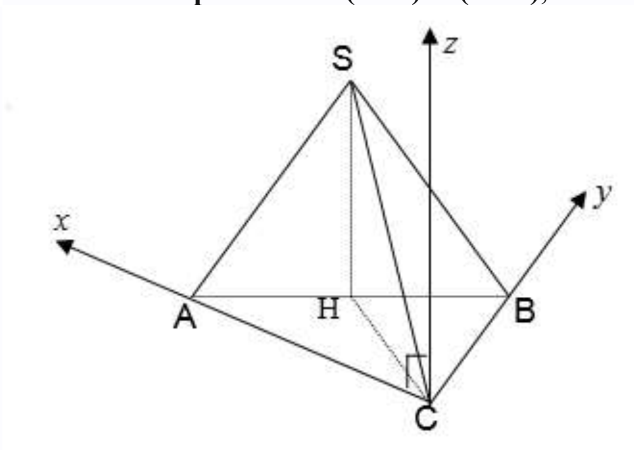
Tam giác ABC vuông tại A có AB = a; AC = b đường cao bằng h.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)
Khi đó: B(a;0;0); C(0;b;0); S(0;0;h)

8. Với hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và Δ ABC vuông tại B



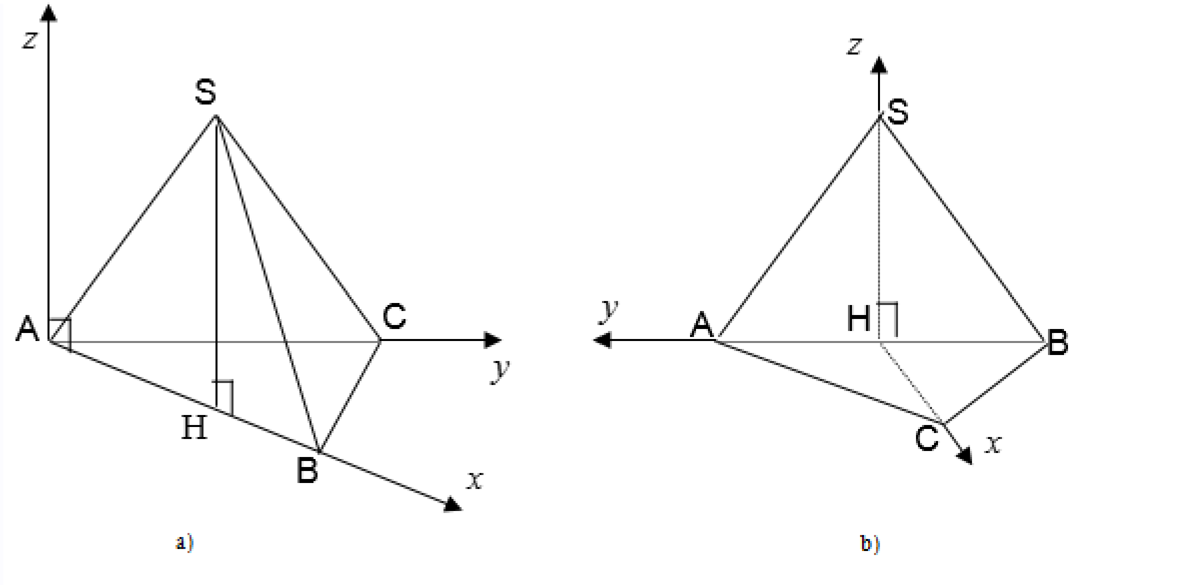
Tam giác ABC vuông tại B có BA = a; BC = b đường cao bằng h.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho B(0;0;0)
Khi đó: A(a;0;0); C(0;b;0); S(a;0;h)

9. Với hình chóp S.ABC có (SAB) ⊥ (ABC), Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại C



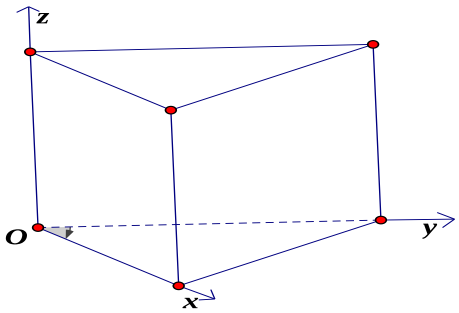
ΔABC vuông tại C với CA = a; CB = b và chiều cao bằng h
H là trung điểm của AB
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho C(0;0;0)
Khi đó: A(a; 0; 0); B (0; b;0); S(a/2; b/2; h)

10. Với hình chóp S.ABC có (SAB) ⊥ (ABC), Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại A



hình a)
ΔABC vuông tại A: AB = a; AC = b và chiều cao bằng h
H là trung điểm của AB
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)
Khi đó: B(a;0;0); C(0;b;0); S(0; a/2; h)

hình b)
Tam giác ABC vuông cân tại C có
CA = CB = a đường cao bằng h.
H là trung điểm của AB
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho H(0;0;0)
Khi đó: $A(0;\frac{a}{\sqrt{2}};0),\quad B(0,-\frac{a}{\sqrt{2}};0);\quad C(\frac{a}{\sqrt{2}};0;0)\quad S(0;0;h)$
11.Hình lăng trụ có đáy là tam giác vuông tại O



Bước 2: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán:

Các dạng câu hỏi thường gặp
1.khoảng cách giữa 2 điểm : (ý phụ)
◇ Khoảng cách giữa hai điểm A(x_A;y_A;z_A) và B(x_B;y_B;z_B) là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2.khoảng cách từ điểm đến đoạn thẳng:
◇ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)
Cách 1:(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Cách 2: Phương

pháp :

- Lập ptmp(α)đi qua M vàvuông gócvới (d)
- Tìm tọa độ giao điểm H của mp(α) và d
- d(M, d) =MH

3. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

◇ Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α): Ax+By+Cz+D=0 cho bởi côngthức

$$d(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4.khoảng cách giữa 2 mặt phẳng //:

Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

5.khoảng cách giữa 2 đường thẳng

A, Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

◇ **Cách 1:** (d) điqua $M(x_0;y_0;z_0)$;cóvtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(d')quaM'(x'$_0$;y'$_0$;z'$_0$)

$$d(d,d')=\frac{|[\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{a},\vec{a'}]|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}$$

◇ **Cách 2**:

d điqua $M(x_0;y_0;z_0)$;có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

d'quaM'(x'$_0$;y'$_0$;z'$_0$) ; vtcp$\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

Phương pháp :

- Lập ptmp(α)chứa d và songsong với d'

d(d,d')= d(M',(α))

ĐẶC BIỆT: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD khi biết tọa độ của chúng $d(AB,CD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$

B. khoảng cách giữa 2 đường thẳng //:

-Khoảng cách giữa 2 đường thẳng // bằng khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia => quay về dạng toán khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng ☺

6. góc giữa 2 đường thẳng

◇ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua M'(x'$_0$;y'$_0$;z'$_0$) có VTCP $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right|=\frac{|\vec{a}.\vec{a'}|}{|\vec{a}|.|\vec{a'}|}=\frac{|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

7.góc giữa 2 mặt phẳng

◇ Gọiφ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0\leq\varphi\leq90^0$)

(P):Ax+By+Cz+D=0 và (Q):A'x+B'y+C'z+D'=0

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

8.góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

(Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mp(α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mp(α)

$$\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

9. diện tích thiết diện

◇ Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$

◇ Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\right|$

10.thể tích khối đa diện

- Thểtích chóp: Vchóp $=\frac{1}{3}S_{đáy}.h$ Hoặc $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$ (nếu biết hết tọa độ các đỉnh)
- Thể tích khối hộp:

$V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC BỔ XUNG

1. Dấu hiệu nhận biết các hình:

1): Dấu hiệu nhận biết hình thang, hình thang vuông, hình thang cân:
- Tứ giác có hai cạnh đối song song.
- Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông
- Hình thang có hai góc kề một đáy là hình thang cân
- Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình thang cân
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân

2): Dấu hiệu nhận biết hình bình hành (Có 5 dấu hiệu nhận biết):
- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song
- Tứ giác có các cặp cạnh đối bằng nhau
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

3): Hình chữ nhật (có 4 dấu hiệu nhận biết):
- Tứ giác có 3 góc vuông
- Hình thang cân có một gócvuông
- Hình bình hành có một góc vuông
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau

4): Hình thoi (có 4 dấu hiệu nhận biết):
- Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau
- Hình bình hành cá hai cạnh kề bằng nhau
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nhau
- Hình bình hành có 1 đường chéo là đường phân giác cùa 1 góc.

5): Hình vuông (có 5 dấu hiệu nhận biết):
- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc
- Hình chứ nhật có đường chéo là đường phân giác của một góc
- Hình thoi có một góc vuông
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

II: Bài tập vận dụng:

Dạng 1: Hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’

Bài 1.(ĐHA-2006) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài các cạnh bằng 1.Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .
A, tính thể tích khối chóp M.A'B'D'
b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN

Đ/S: d = $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

Bài 2: (ĐHB- 2002) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.
A. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'D.
B Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D'. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C'N

Đ/S: Đáp số: A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ B. MP $\perp$C 'N .

Bài 3: (ĐH A – 2003): Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B 'C'D'có AB=a, AD = a, AA' = b (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC' .
a. Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b.
b. Xác định tỷ số a b để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau

Đ/S: a, $v = \dfrac{a^2b}{4}$, b. a:b = 1

Dạng 2: hình hộp đáy là hình thoi ABCD.A'B'C'D'

Bài 1: (ĐH– 2006) Cho hình hộp đứng ABCD. A' B' C' D' có các cạnh AB= AD = a, $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $BAD = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A' D' và A'B'
A,Chứng minh AC ' vuông góc với mặt phẳng (BDM).
B, Tính thể tích khối chóp A. BDMN
C, Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và C'D'

Đ/S: $V = \dfrac{3a^3}{16}$

Dạng 3.Hình chóp tam giác đều S.ABC (Dấu hiệu: Đáy là tam giác đều cạnh a, đường cao vuông góc với đáy)
Bài 1: (ĐH – A 2002) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC .
A,Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC)
B, Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và AB

Bài tập tổng hợp

Câu 1: THPT Đông Sơn 1- lần 2- 2015

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi M là trung điểm của SC. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

Đ/S: V= $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 2: THPT Chuyên ban Hạ Long – 2015

Cho hình chóp S.ABC có ABC, SBC là các tam giác đều cạnh a. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60 độ. Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến (SAC) theo a

Đ/S: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$; d = $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$

Câu 3: THPT Hậu Lộc 2 - 2015

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AB= 2a , $AC = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là H, H là trung điểm của AB. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30 độ. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm M là trung điểm cạnh BC đến (SAC)

Câu 4: THPT Lương Thế Vinh – HN - 2015

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, tam giác SAB cân tại S và nằm tring mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu của S lên ABCD là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABCD) bằng 45 độ. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a thể tích S.ABCD và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC)

Câu 5: THPT Đào Duy Từ - TH - 2015

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SD = $\frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên (ABCD) là trung điểm của AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa HK và SD theo a

CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

GSP 4.06.exe

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* thích hợp. (Quyết định sự thành công của bài toán)

Bước 2: Xác định tọa độ các điểm có liên quan.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán.

Các dạng toán thường gặp:

- Định tính: Chứng minh các quan hệ vuông góc, song song, …
- Định lượng: Độ dài đoạn thẳng,, góc, khoảng cách, tính diện tích, thể tích, diện tích thiết diện, …
- Bài toán cực trị, quỹ tích.

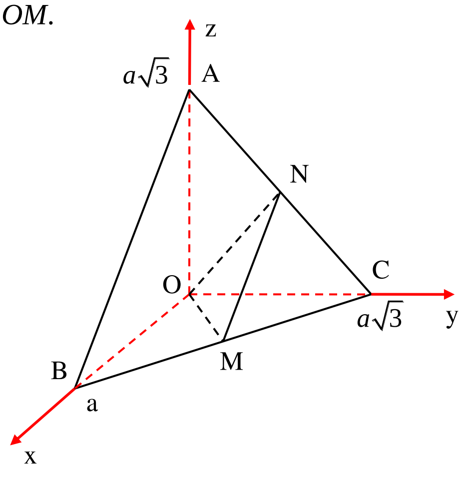
……………

Ta thường gặp các dạng sau

1. Hình chóp tam giác

a. Dạng tam diện vuông

Ví dụ : Cho tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, *OB*=*a*, *OC*=$a\sqrt{3}$, (*a*>0) và đường cao *OA*=$a\sqrt{3}$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.



Cách 1:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó *O*(0;0;0),

$A(0;0;a\sqrt{3});\ B(a;0;0),\ C(0;a\sqrt{3};0),$

$M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, gọi *N* là trung điểm của *AC* $\Rightarrow N\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

MN là đường trung bình của tam giác *ABC* $\Rightarrow AB\ //\ MN$

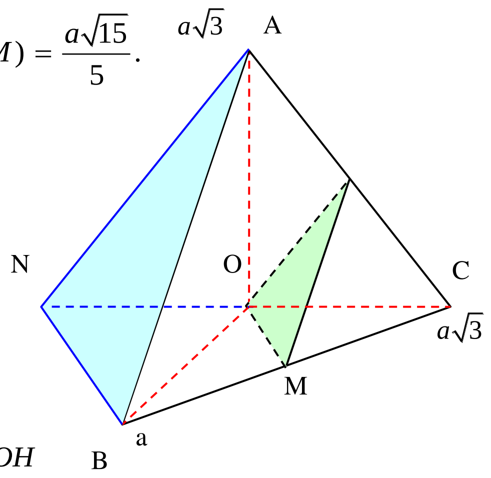
$\Rightarrow AB\ //(OMN) \Rightarrow d(AB;OM) = d(AB;(OMN)) = d(B;(OMN))$.

$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{ON} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}] = \left(\frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}; 1; 1\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\vec{n}$, với $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (OMN) qua O với vectơ pháp tuyến $\vec{n}: \sqrt{3}x + y + z = 0$

Ta có: $d(B; (OMN)) = \frac{\left|\sqrt{3}.a + 0 + 0\right|}{\sqrt{3+1+1}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy, $d(AB; OM) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.



Cách 2:

Gọi N là điểm đối xứng của C qua O.

Ta có: $OM // BN$ (tính chất đường trung bình).

$\Rightarrow OM // (ABN)$

$\Rightarrow d(OM;AB) = d(OM;(ABN)) = d(O;(ABN))$.

Dựng $OK \perp BN$, $OH \perp AK$ $(K \in BN;\ H \in AK)$

Ta có: $AO \perp (OBC);\ OK \perp BN \Rightarrow AK \perp BN$

$BN \perp OK;\ BN \perp AK \Rightarrow BN \perp (AOK) \Rightarrow BN \perp OH$

$OH \perp AK;\ OH \perp BN \Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O; (ABN)) = OH$

Từ các tam giác vuông OAK; ONB có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$ Vậy, $d(OM;\ AB) = OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

b. Dạng khác

Ví dụ 1: Tứ diện $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy và ΔABC vuông tại C. Độ dài của các cạnh là SA =4, AC = 3, BC = 1. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, H là điểm đối xứng của C qua M.

Tính cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SHB) và (SBC).

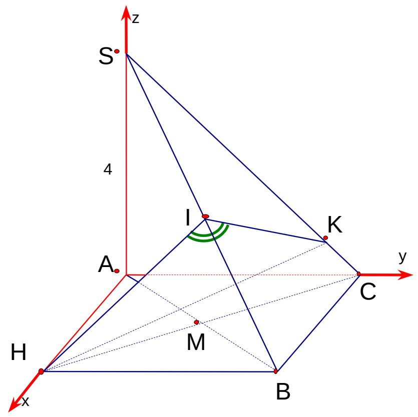
Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

$A(0;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(0;3;0)$, $S(0;0;4)$ và $H(1;0;0)$.

mp(P) qua H vuông góc với SB tại I cắt đường thẳng SC tại K, dễ thấy

$((SHB),(SBC)) = (\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IK})$ (1).



$\overrightarrow{SB} = (-1;-3;\ 4)$, $\overrightarrow{SC} = (0;-3;\ 4)$ suy ra:

ptts SB: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$, SC: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$ và (P): $x + 3y - 4z - 1 = 0$.

$\Rightarrow I\left(\frac{5}{8}; \frac{15}{8}; \frac{3}{2}\right)$, $K\left(0; \frac{51}{25}; \frac{32}{25}\right) \Rightarrow \cos\left[(SHB),(SBC)\right] = \frac{\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}}{IH.IK} = \ldots$

Chú ý: Nếu C và H đối xứng qua AB thì C thuộc (P), khi đó ta không cần phải tìm K.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = AC = a$ ($a > 0$), hình chiếu của S trên đáy trùng với trọng tâm G của ΔABC. Đặt $SG = x$ ($x > 0$). Xác định giá trị của x để góc phẳng nhị diện (B, SA, C) bằng 60^o.

Cách 1:

$BC = a\sqrt{2}$

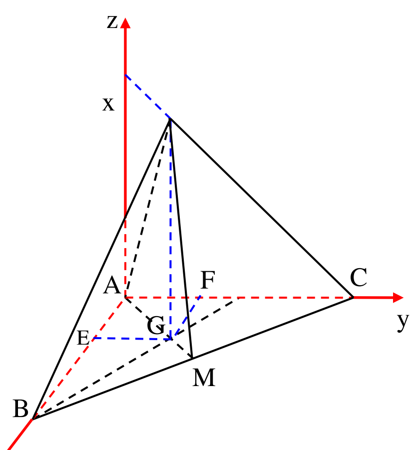
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của G lên AB, AC. Tứ giác $AEGF$ là hình vuông

$\Rightarrow AG = AE\sqrt{2} \Rightarrow AE = AF = \frac{a}{3}$.

Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$,

$C(0; a; 0)$, $G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$, $S\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; x\right)$.



$\overrightarrow{SA} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; x\right)$, $\overrightarrow{SB} = \left(\frac{2a}{3}; -\frac{a}{3}; -x\right)$, $\overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; -x\right)$

$[\overrightarrow{SA};\ \overrightarrow{SB}]=\left(0;\ ax;-\dfrac{a^2}{3}\right)=a\left(0;x;-\dfrac{a}{3}\right)=a.\vec{n}_1$, với $\vec{n}_1=\left(0;x;-\dfrac{a}{3}\right)$

$[\overrightarrow{SA};\ \overrightarrow{SC}]=(-ax;0;\dfrac{a^2}{3})=-a\left(x;0;-\dfrac{a}{3}\right)=-a.\vec{n}_2$, với $\vec{n}_2=\left(x;\ 0;-\dfrac{a}{3}\right)$.

Mặt phẳng (SAB) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB}$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$.

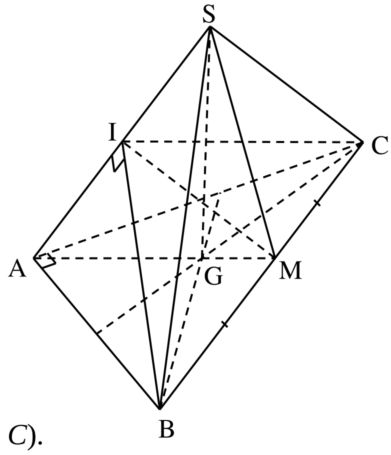
Mặt phẳng (SAC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SC}$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2$.

Góc phẳng nhị diện (B; SA; C) bằng 60°.

$$\Leftrightarrow \cos 60^o=\frac{\left|0.x+x.0+\frac{a}{3}\ \frac{a}{3}\right|}{\sqrt{0+x^2+\frac{a^2}{9}}\sqrt{x^2+0+\frac{a^2}{9}}}=\frac{\frac{a^2}{9}}{\frac{9x^2+a^2}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{a^2}{9x^2+a^2}\Leftrightarrow 9x^2+a^2=2a^2\ \Leftrightarrow\ 9x^2=a^2\ \Leftrightarrow\ x=\frac{a}{3}.$$

Vậy, $x=\dfrac{a}{3}$.



Cách 2:

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM\perp BC$ (ΔABC vuông cân)

Ta có: $SG\perp(ABC)\Rightarrow SG\perp BC$. Suy ra: $BC\perp(SAM)$

Dựng $BI\perp SA\Rightarrow IM\perp SA$ và $IC\perp SA\Rightarrow BIC$ là góc phẳng nhị diện (B; SA; C).

$\Delta SAB=\Delta SAC\ \ (c-c-c)\Rightarrow IB=IC\Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I.

$$BC=a\sqrt{2};\ AM=BM=MC=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \ AG=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\Delta AIM\sim\Delta AGS\Rightarrow IM=SG.\frac{AM}{AS}=x.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{SG^2+AG^2}}=\frac{ax\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2+\frac{2a^2}{9}}}\Leftrightarrow IM=\frac{3ax\sqrt{2}}{2\sqrt{9x^2+2a^2}}.$$

Ta có: $BIC=60^o\ \Leftrightarrow BIM=30^o\Leftrightarrow BM=IM.\tan 30^o\Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}.3ax\sqrt{2}}{2\sqrt{9x^2+2a^2}}$.

$$\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+2a^2}=3x\sqrt{3}\Leftrightarrow 9x^2+2a^2=27x^2\Leftrightarrow 18x^2=2a^2\Leftrightarrow\ 9x^2=a^2\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}.$$

Vậy, $x=\dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 3: (Trích đề thi Đại học khối A – 2002). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

Hướng dẫn giải

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$$AI=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OA=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

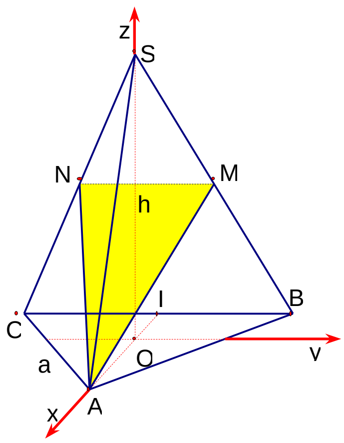
Trong mặt phẳng (ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt $SO=h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

O(0; 0; 0), S(0; 0; h), $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)\Rightarrow I\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$, $B\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\ \dfrac{a}{2};0\right)$,

$C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a}{2};\ 0\right)$, $M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\ \dfrac{a}{4};\ \dfrac{h}{2}\right)$ và $N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\ \dfrac{h}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}=\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]=\left(\frac{ah}{4};0;\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),\ \vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}\right]=\left(-ah;0;\ \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$(AMN)\perp(SBC)\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)}=0\Rightarrow h^2=\frac{5a^2}{12}\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right|=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

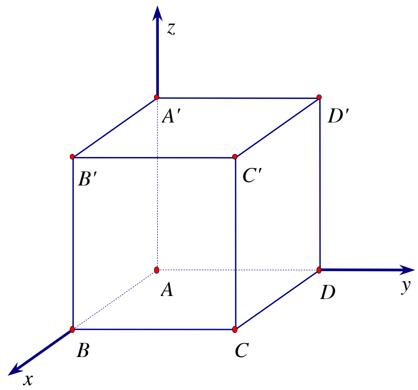


2. Hình chóp tứ giác

a) Hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

b) Hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O đường cao *SO* vuông góc với đáy. Ta chọn hệ trục tọa độ tia OA, OB, OS lần lượt là Ox, Oy, Oz. Giả sử *SO* = *h*, OA = *a*, OB = *b* ta có
O(0; 0; 0), *A*(*a*; 0; 0), *B*(0; *b*; 0), *C*(–*a*; 0; 0), *D*(0;–*b*; 0), *S*(0; 0; *h*).

c) Hình chóp *S.ABCD* có đáy hình chữ nhật *ABCD* và *AB* = *b*. ΔSAD đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi *H* là trung điểm *AD*, trong (*ABCD*) ta vẽ tia *Hy* vuông góc với *AD*. Chọn hệ trục tọa độ *Hxyz* ta có: *H*(0; 0; 0),
$A\left(\frac{a}{2};\,0;\,0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{a}{2};\,\mathrm{b};\,0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\mathrm{b};0\right)$, $D\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.



3. Hình lăng trụ đứng

Tùy theo hình dạng của đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên.

Ví dụ: 1. Cho hình lập phương *ABCD A'B'C'D'* cạnh *a*. Chứng minh rằng *AC'* vuông góc với mặt phẳng (*A'BD*).

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O ≡ *A*; *B* ∈ Ox; *D* ∈ Oy và *A'* ∈ Oz .

⇒ *A*(0;0;0), *B*(*a*;0;0), *D*(0;*a*;0), *A'*(0;0;*a*), *C'*(1;1;1)⇒ Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng(*A'BD*): *x* + *y* + *z* = *a* hay *x* + *y* + *z* –*a* = 0

⇒Pháp tuyến của mặt phẳng (*A'BC*): $\vec{n}_{(A'BC)}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$.

Vậy *AC'* vuông góc với (*A'BC*)

2. Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'* các các mặt bên đều là hình vuông cạnh *a*. Gọi *D*, *F* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC*, *C'B'*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *A'B* và *B'C'*.

Giải

Cách 1:

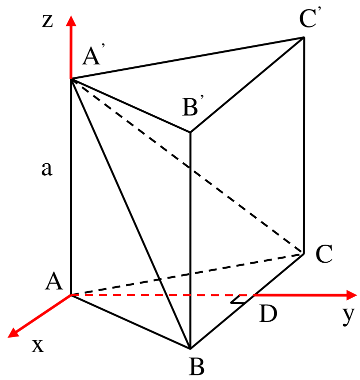
Vì các các mặt bên của lăng trụ đều là hình vuông nên $AB=BC=CA=A'B'=B'C'=C'A'=a$

⇒ các tam giác *ABC*, *A'B'C'* là các tam giác đều.

Chọn hệ trục *Axyz*, với *Ax*, *Ay*, *Az* đôi một vuông góc, *A*(0;0;0),

$B\left(\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{3}}{2};\,0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{3}}{2};\,0\right)$, *A'*(0; 0; *a*),

$B'\left(\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{3}}{2};\,a\right)$, $C'\left(-\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{3}}{2};\,a\right)$



Ta có: $B'C'//BC,\ B'C'//(A'BC)$

$$\Rightarrow d\left(B'C';\,A'B\right)=d\left(B'C';\,\left(A'BC\right)\right)=d\left(B';\left(A'BC\right)\right)$$

$\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{3}}{2};\,-a\right)$, $\overrightarrow{A'C}=\left(-\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{3}}{2};\,-a\right)$

$\left[\overrightarrow{A'B}\wedge\overrightarrow{A'C}\right]=\left(0;\,a^2;\,\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\left(0;\,1;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a^2.\vec{n}$, với $\vec{n}=\left(0;\,1;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Phương trình mặt phẳng (*A'BC*) qua *A'* với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$:

$$0(x-0)+1(y-0)+\frac{\sqrt{3}}{2}(z-a)=0 \Leftrightarrow \left(A'BC\right):\, y+\frac{\sqrt{3}}{2}z-\frac{a\sqrt{3}}{2}=0$$

$$d\left(B'\left(A'BC\right)\right)=\frac{\left|\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.a-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.\ \text{Vậy, } d\left(A'B;B'C'\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

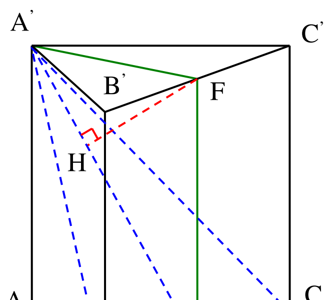
Cách 2:

Vì các các mặt bên của lăng trụ đều là hình vuông nên $AB=BC=CA=A'B'=B'C'=C'A'=a$

⇒ các tam giác *ABC*, *A'B'C'* là các tam giác đều.

Ta có: $B'C'//BC \Rightarrow B'C'//(A'BC)$.

$$\Rightarrow d\left(A'B;\,B'C'\right)=d\left(B'C';\left(A'BC\right)\right)=d\left(F;\left(A'BC\right)\right).$$



Ta có: $\begin{cases} BC \perp FD \\ BC \perp A'D \quad (\Delta A'BC \text{ cân tại } A') \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'BC)$

Dựng $FH \perp A'D$

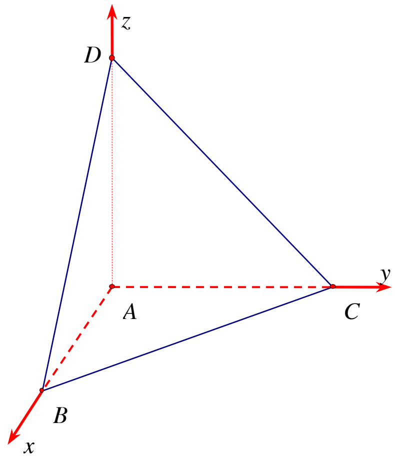
Vì $BC \perp (A'BC) \Rightarrow BC \perp FH \;\Rightarrow H \perp (A'BC)$

$\Delta A'FD$ vuông có: $\dfrac{1}{FH^2} = \dfrac{1}{A'F^2} + \dfrac{1}{FD^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow FH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy, $d\left(A'B;\, B'C'\right) = FH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

3. Tứ diện *ABCD* có *AB*, *AC*, *AD* đôi một vuông góc với nhau, *AB* = 3, *AC*=*AD*=4. Tính khoảng cách từ *A* tới mặt phẳng (*BCD*)

Lời giải



+ Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* sao cho *A* ≡ O.

D ∈Ox; *C* ∈ Oy và *B* ∈ Oz

⇒ *A*(0;0;0); *B*(0;0;3); *C*(0;4;0); *D*(4;0;0)

⇒ Phương trình mặt phẳng (*BCD*) là:

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 4z - 12 = 0.$

Suy ra khoảngr cách từ *A* tới mặt phẳng (*BCD*).

II. Lyuyện tập

Bài 1: Cho hình chóp *SABC* có độ dài các cạnh đề bằng 1, O là trọng tâm của tam giác Δ*ABC*. *I* là trung điểm của *SO*.

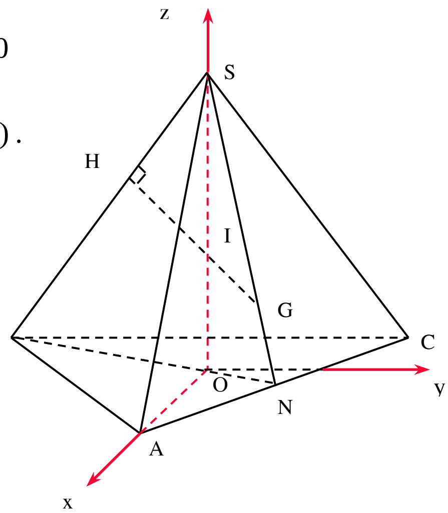
1. Mặt phẳng (*BIC*) cắt *SA* tại *M*. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện *SBCM* và tứ diện *SABC*.
2. *H* là chân đường vuông góc hạ từ *I* xuống cạnh *SB*. Chứng minh rằng *IH* qua trọng tâm *G* của Δ*SAC*.

Lời giải

1. Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* sao cho O là gốc tọa độ. *A*∈O*x*, *S*∈O*z*, *BC*//O*y*

$$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0\right); B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0\right); C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right); S\left(0;0\frac{\sqrt{6}}{3}\right); I\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0;1;0)$; $\overrightarrow{IC} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right); \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IC}\right] = \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6};0;\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$



⇒ Phương trình mặt phẳng (*IBC*) là: $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}(x-0) + 0(y-0) + \dfrac{\sqrt{3}}{6}(z - \dfrac{\sqrt{6}}{6}) = 0$

Hay: $-\sqrt{2} + z - \dfrac{\sqrt{6}}{6} = 0$ mà ta lại có: $\overrightarrow{SA} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};0;-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SA} // \vec{u}_{SA}(1;0;-\sqrt{2})$.

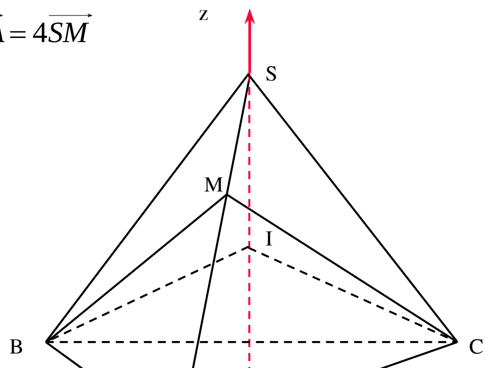
Phương trình đường thẳng *SA*: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + t; y = 0; z = -\sqrt{2}t$.

+ Tọa độ điểm *M* là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ y = -\sqrt{2}t & (3) \\ -\sqrt{2}x + z - \dfrac{\sqrt{6}}{6} = 0 & (4) \end{cases}$.

Thay (1), (2), (3) và (4):

$\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{12}; y = 0; z = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12};0;\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right); \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{12};0;-\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SA} = 4\overrightarrow{SM}$

⇒ M nằm trên đoạn *SA* và $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{V_{(SBCM)}}{V(_{SABC})} = \dfrac{1}{4}$.



2. Do *G* là trọng tâm của tam giác Δ*ASC*

⇒ *SG* đi qua trung điểm *N* của *AC*

⇒ $GI \subset (SNB) \Rightarrow GI$ và *SB* đồng phẳng (1)

Ta lại có $G\left(\frac{\sqrt{3}}{18};\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GI} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{GI} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB} = 0 \Rightarrow GI \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GI \perp SB = H$.

Bài 2: Cho hình chóp O.*ABC* có OA = *a*, OB = *b*, OC = *c* đôi một vuông góc. Điểm *M* cố định thuộc tam giác *ABC* có khoảng cách lần lượt đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) là 1, 2, 3. Tính *a*, *b*, *c* để thể tích O.*ABC* nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

O(0; 0; 0), *A*(*a*; 0; 0), *B*(0; *b*; 0), C(0; 0; *c*).

$d(M, (OAB)) = 3 \Rightarrow z_M = 3$.

Tương tự $\Rightarrow M(1; 2; 3)$.

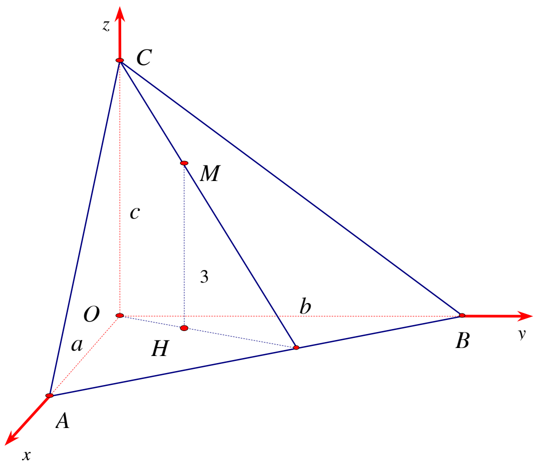
$\Rightarrow (ABC)$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ (1). $V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc$ (2).

$(1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}}$

$\Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27$.

$(2) \Rightarrow V_{\min} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$.



Bài 3: Cho tứ diện *ABCD* có *AD* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*) và tam giác *ABC* vuông tại *A*, *AD=a*, *AC=b*, *B=c*. Tính diện tích của tam giác *BCD* theo *a*, *b*, *c* và chứng minh rằng $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: *A*(0;0;0), *B*(*c*;0;0), *C*(0;*b*;0), *D*(0;0;*a*).

$\overrightarrow{BC} = (-c;b;0), \overrightarrow{BD} = (-c;0;a), \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = (ab;ac;bc)$

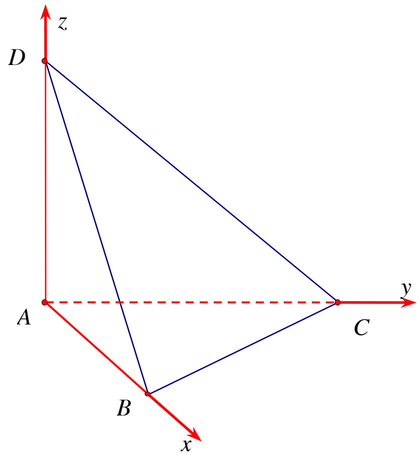
$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

đpcm $\Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

Theo bất đẳng thức Cachy ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a^2b^2+b^2c^2 \geq 2ab^2c \\ b^2c^2+c^2a^2 \geq 2bc^2a \\ c^2a^2+a^2b^2 \geq 2ca^2b \end{array}\right\}$$



Cộng vế : $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

Bài 4: Cho hình lăng trụ *ABC*. $A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đề cạnh *a*. $AA_1 = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *D* là trung điểm của BB_1; *M* di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MC_1D.

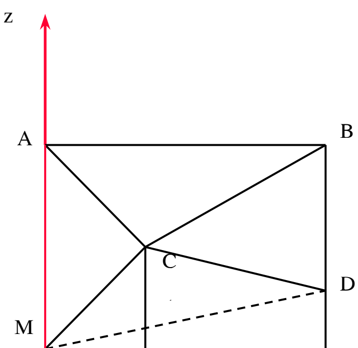
Lời giải

+ Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* sao cho *A*≡O; *B*∈Oy; A_1∈Oz. Khi đó: *A*(0;0;0), *B*(0;*a*;0); A_1 (0;0;2*a*)

$C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a\right)$ và *D*(0;*a*;*a*)

Do M di động trên AA_1, tọa độ *M*(0;0;*t*) với $t \in [0;2a]$

Ta có : $S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{DM}\right]\right|$



Ta có: $\overrightarrow{DC_1} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DM}\right] = \frac{-a}{2}(t-3a; \sqrt{3}(t-a); a\sqrt{3})$

$\overrightarrow{DM} = (0; -a; t-a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DM}\right] = \frac{a}{2}\sqrt{(t-3a)^2 + 3(t-a)^2 + 3a^2}$

$= \frac{a}{2}\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$

$S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$

Giá trị lớn nhất của S_{DC_1M} tùy thuộc vào giá trị của tham số t.

Xét $f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2$

$f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2 \quad (t \in [0;2a])$

$f'(t) = 8t - 12a$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{2}$

Lập bảng biến thiên ta được giá trị lớn nhất của $S_{DC_1M} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ khi $t = 0$ hay $M \equiv A$.

Chú ý

+ Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải bằng đáy. Chân đường cao là trọng tâm của đáy.
+ Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng đáy.
+ Hình hộp có đáy là hình bình hành nhưng không nhất thiết phải là hình chữ nhật.

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TAM GIÁC

Bài 1 (Trích đề thi Đại học khối D – 2002). Cho tứ diện *ABCD* có cạnh *AD* vuông góc (*ABC*), *AC* = *AD* = 4*cm*, *AB* = 3*cm*, *BC* = 5*cm*. Tính khoảng cách từ đỉnh *A* đến (*BCD*).

Bài 2. Cho Δ*ABC* vuông tại *A* có đường cao *AD* và *AB* = 2, *AC* = 4. Trên đường thẳng vuông góc với (*ABC*) tại *A* lấy điểm *S* sao cho *SA* = 6. Gọi *E*, *F* là trung điểm của *SB*, *SC* và *H* là hình chiếu của *A* trên *EF*.

1. Chứng minh *H* là trung điểm của *SD*.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (*ABC*) và (*ACE*).
3. Tính thể tích hình chóp *A.BCFE*.

Bài 3. Cho hình chóp O.*ABC* có các cạnh OA = OB = OC = 3*cm* và vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi *H* là hình chiếu của điểm O lên (*ABC*) và các điểm *A*', *B*', *C*' lần lượt là hình chiếu của *H* lên (O*BC*), (O*CA*), (O*AB*).

1. Tính thể tích tứ diện *HA*'*B*'*C*'.
2. Gọi *S* là điểm đối xứng của *H* qua O. Chứng tỏ *S.ABC* là tứ diện đều.

Bài 4. Cho hình chóp O.*ABC* có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc nhị diện cạnh *AB*, *BC*, *CA*. Gọi *H* là hình chiếu của đỉnh O trên (*ABC*).

1. Chứng minh *H* là trực tâm của Δ*ABC*.
2. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
3. Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
4. Chứng minh $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$.

Bài 5. Cho hình chóp O.*ABC* có O*A* = *a*, O*B* = *b*, O*C* = *c* vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm *BC*, *CA*, *AB*.

1. Tính góc φ giữa (O*MN*) và (O*AB*).
2. Tìm điều kiện *a*, *b*, *c* để hình chiếu của O trên (*ABC*) là trọng tâm ΔANP.
3. Chứng minh rằng góc phẳng nhị diện [*N*, O*M*, *P*] vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài 6. Cho hình chóp *S.ABC* có ΔABC vuông cân tại *A*, *SA* vuông góc với đáy. Biết *AB* = 2, $(ABC),(SBC) = 60^0$.

1. Tính độ dài *SA*.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh *A* đến (*SBC*).

3. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SBC*).

Bài 7. Cho hình chóp O.*ABC* có OA = *a*, OB = *b*, OC = *c* vuông góc với nhau từng đôi một.

1. Tính bán kính *r* của mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Tính bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 8 (trích đề thi Đại học khối D – 2003). Cho hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng (*d*). Trên (*d*) lấy hai điểm *A* và *B* với *AB* = *a*. Trong (*P*) lấy điểm *C*, trong (*Q*) lấy điểm *D* sao cho *AC*, *BD* cùng vuông góc với (d) và *AC* = *BD* = *AB*. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* và khoảng cách từ đỉnh *A* đến (*BCD*) theo *a*.

Bài 9. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *B*, *AB* = *a*, *BC* = 2*a*. Cạnh *SA* vuông góc với đáy và *SA* = 2*a*. Gọi *M* là trung điểm của *SC*.

1. Tính diện tích ΔMAB theo *a*.
2. Tính khoảng cách giữa *MB* và *AC* theo *a*.
3. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBC*).

Bài 10. Cho tứ diện *S.ABC* có Δ*ABC* vuông cân tại *B*, *AB* = *SA* = 6. Cạnh *SA* vuông góc với đáy. Vẽ *AH* vuông góc với *SB* tại *H*, *AK* vuông góc với *SC* tại *K*.

1. Chứng minh *HK* vuông góc với *CS*.
2. Gọi *I* là giao điểm của *HK* và *BC*. Chứng minh *B* là trung điểm của *CI*.
3. Tính sin của góc giữa *SB* và (*AHK*).
4. Xác định tâm *J* và bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp *S.ABC*.

Bài 11. Cho hình chóp *S.ABC* có ΔABC vuông tại *C*, *AC* = 2, *BC* = 4. Cạnh bên *SA* = 5 và vuông góc với đáy. Gọi *D* là trung điểm cạnh *AB*.

1. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng *AC* và SD.
2. Tính khoảng cách giữa *BC* và *SD*.
3. Tính cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (*SBD*) và (*SCD*).

Bài 12. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh *a*. *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh *A* đến (*SBC*).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SC*.

Bài 13. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có độ dài cạnh đáy là *a*, đường cao *SH* = *h*. Mặt phẳng (α) đi qua *AB* và vuông góc với *SC*.

1. Tìm điều kiện của h theo *a* để (α) cắt cạnh *SC* tại *K*.
2. Tính diện tích Δ*ABK*.
3. Tính *h* theo *a* để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TỨ GIÁC

Bài 14. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy hình vuông cạnh *a*, *SA* = *a* và vuông góc với đáy. Gọi *E* là trung điểm *CD*.

1. Tính diện tích Δ*SBE*.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh *C* đến (*SBE*).
3. (*SBE*) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy hình vuông cạnh *a*. Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh *C* đến (*SBD*).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SD* và *AC*.
3. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (*SBC*) và (*SCD*).

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2}$ cm. Mặt phẳng (α) đi qua *A* và vuông góc với *SC* cắt các cạnh *SB*, *SC*, *SD* lần lượt tại *H*, *M*, *K*.

1. Chứng minh *AH* vuông góc với *SB*, *AK* vuông góc với *SD*.
2. Chứng minh *BD* song song với (α).
3. Chứng minh *HK* đi qua trọng tâm *G* của ΔSAC.
4. Tính thể tích hình khối *ABCDKMH*.

Bài 17. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, *AB* = *a*, *AD* = *b*. Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và *SA* = 2*a*. Gọi *M*, *N* là trung điểm cạnh *SA*, *SD*.

1. Tính khoảng cách từ *A* đến (*BCN*).
2. Tính khoảng cách giữa *SB* và *CN*.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (*SCD*) và (*SBC*).
4. Tìm điều kiện của *a* và *b* để $\cos CMN = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Trong trường hợp đó tính thể tích hình chóp *S.BCNM*.

Bài 18. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*. ΔSAD đều và vuông góc với (*ABCD*). Gọi *H* là trung điểm của *AD*.

1. Tính $d(D,(SBC))$, $d(HC,SD)$.
2. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với SC tại I. Chứng tỏ (α) cắt các cạnh SB, SD.
3. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và $SO = 2a\sqrt{3}$, $AC = 4a$, $BD = 2a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D'.
1. Chứng minh $\Delta B'C'D'$ đều.
2. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp $S.ABCD$.

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Đường cao $SA = 2a$. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt $MD = m$ $(0 \le m \le a)$.
1. Tìm vị trí điểm M để diện tích ΔSBM lớn nhất, nhỏ nhất.
2. Cho $m = \dfrac{a}{3}$, gọi K là giao điểm của BM và AD. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAK) và (SBK).

3. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH HỘP – LĂNG TRỤ ĐỨNG

Bài 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$, BB', CD, BC.
1. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
2. Tính khoảng cách giữa IK và AD.
3. Tính diện tích tứ giác $IKNM$.

Bài 22 (Trích đề thi Đại học khối A – 2003). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc phẳng nhị diện $[B,A'C,D]$.

Bài 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tìm điểm M trên cạnh AA' sao cho $(BD'M)$ cắt hình lập phương theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Bài 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.
1. Chứng minh $A'C$ vuông góc với $(AB'D')$.
2. Tính góc giữa $(DA'C)$ và $(ABB'A')$.
3. Trên cạnh AD', DB lấy lần lượt các điểm M, N thỏa $AM = DN = k$ $(0 < k < a\sqrt{2})$.
   a. Chứng minh MN song song $(A'D'BC)$.
   b. Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

Bài 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 4$, $AA' = 6$. Các điểm M, N thỏa $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}\ (0 \le m \le 1)$. Gọi I, K là trung điểm của AB, $C'D'$.
1. Tính khoảng cách từ điểm A đến $(A'BD)$.
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.
4. Tính m để diện tích tứ giác $MINK$ lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là $2cm$. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm hình vuông $ADD'A'$.
1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) qua C, D', M, N.
2. Tính bán kính r của đường tròn (C) là giao của (S) và mặt cầu (S') qua A', B, C', D.
3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (CMN) và hình lập phương.

Bài 27 (trích đề thi Đại học khối B – 2003) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'.
1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Tính AA' theo a để $B'MDN$ là hình vuông.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Cho $AB = a$, $AC = b$, $AA' = c$. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với $B'C$.
1. Tìm điều kiện của a, b, c để (α) cắt cạnh CC' tại I (I không trùng với C và C').
2. Cho (α) cắt CC' tại I.
   a. Xác định và tính diện tích của thiết diện.
   b. Tính góc phẳng nhị diện giữa thiết diện và đáy.

———————————————————

GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Chọn hệ trục toạ độ Oxyz thích hợp (chú ý đến vị trí của gốc O)

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm có liên quan

(có thể xác định toạ độ tất cả các điểm hoặc một số điểm cần thiết)

Khi xác định tọa độ các điểm ta có thể dựa vào :

- Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, mặt phẳng tọa độ).
- Dựa vào các quan hệ hình học như bằng nhau, vuông góc, song song ,cùng phương , thẳng hàng, điểm chia đọan thẳng để tìm tọa độ
- Xem điểm cần tìm là giao điểm của đường thẳng, mặt phẳng.
- Dựa vào các quan hệ về góc của đường thẳng, mặt phẳng.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về toạ độ để giải quyết bài toán

Các dạng toán thường gặp:

- Độ dài đọan thẳng
- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng
- Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng
- Góc giữa hai đường thẳng
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
- Góc giữa hai mặt phẳng
- Thể tích khối đa diện
- Diện tích thiết diện
- Chứng minh các quan hệ song song , vuông góc
- Bài toán cực trị, quỹ tích

Bổ sung kiến thức :

1) Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt phẳng chiếu

$$S' = S.\cos\varphi$$

2) Cho khối chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lấy ba điểm A', B', C' khác với S

Ta luôn có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Ta thường gặp các dạng sau

1. Hình chóp tam giác

a. Dạng tam diện vuông

Ví dụ 1. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:
O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).
d[M, (OAB)] = 3 $\Rightarrow z_M = 3$.
Tương tự $\Rightarrow$ M(1; 2; 3).
pt(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

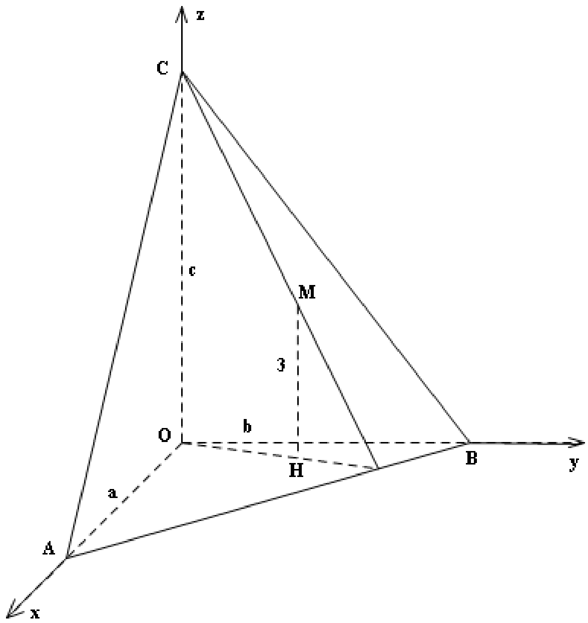
$M\in(ABC)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ (1).

$V_{O.ABC}=\frac{1}{6}abc$ (2).

$(1)\Rightarrow 1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}}$

$\Rightarrow \frac{1}{6}abc\ge 27$.

(2)$\Rightarrow V_{min}=27\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$.



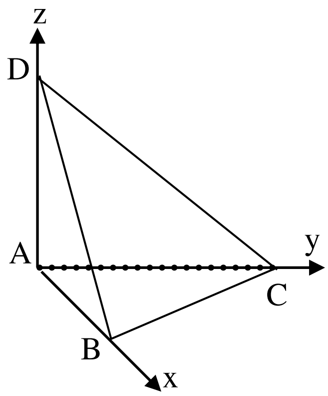
Ví dụ:

1) Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, AD = a, AC = b, AB = c.

Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c và chứng minh rằng : $2S\ge\sqrt{abc(a+b+c)}$

(Dự bị 2 – Đại học khối D – 2003)

Giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm là :A(0;0;0), B(c;0;0), C(0;b;0), D(0;0;a)

$\overrightarrow{BC}=(-c;b;0),\overrightarrow{BD}=(-c;0;a),\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(ab;ac;bc)$

$S_{BCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

đpcm $\Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\ge\sqrt{abc(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\ge abc(a+b+c)$

Theo BĐT Cauchy ta được :

$\left.\begin{matrix} a^2b^2+b^2c^2\ge 2ab^2c \\ b^2c^2+c^2a^2\ge 2bc^2a \\ c^2a^2+a^2b^2\ge 2ca^2b \end{matrix}\right\}$ Cộng vế : $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\ge abc(a+b+c)$

b. Dạng khác

Ví dụ 2. Tứ diện S.ABC có cạnh SA vuông góc với đáy và ΔABC vuông tại C. Độ dài của các cạnh là SA = 4, AC = 3, BC = 1. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, H là điểm đối xứng của C qua M.
Tính cosin góc phẳng nhị diện [H, SB, C]

<u>**Hướng dẫn giải**</u>

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:
$A(0; 0; 0)$, $B(1; 3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $S(0; 0; 4)$ và $H(1; 0; 0)$.
mp(P) qua H vuông góc với SB tại I cắt đường thẳng SC tại K, dễ thấy

$$[H, SB, C] = \overrightarrow{IH},\ \overrightarrow{IK} \quad (1).$$

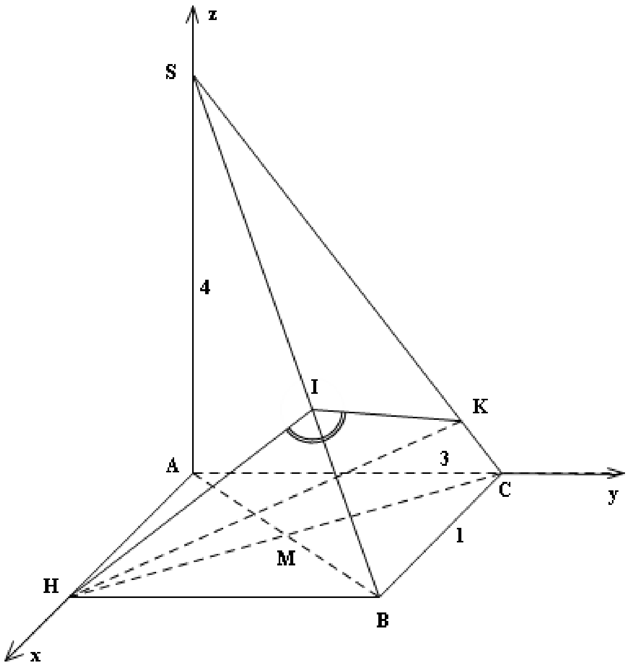
$\overrightarrow{SB} = (-1; -3;\ 4)$, $\overrightarrow{SC} = (0; -3;\ 4)$ suy ra:

$$\text{ptts SB: } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}, \text{ SC: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

và (P): $x + 3y - 4z - 1 = 0$.

$$\Rightarrow I\ \frac{5}{8};\ \frac{15}{8};\ \frac{3}{2}\ ,\ K\ \ 0;\ \frac{51}{25};\ \frac{32}{25}$$

$$\Rightarrow \cos[H,\ SB,\ C] = \frac{\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}}{IH.IK} = \ldots$$



Chú ý: Nếu C và H đối xứng qua AB thì C thuộc (P), khi đó ta không cần phải tìm K.

Ví dụ 3 (trích đề thi Đại học khối A – 2002). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích Δ AMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

<u>Hướng dẫn giải</u>

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

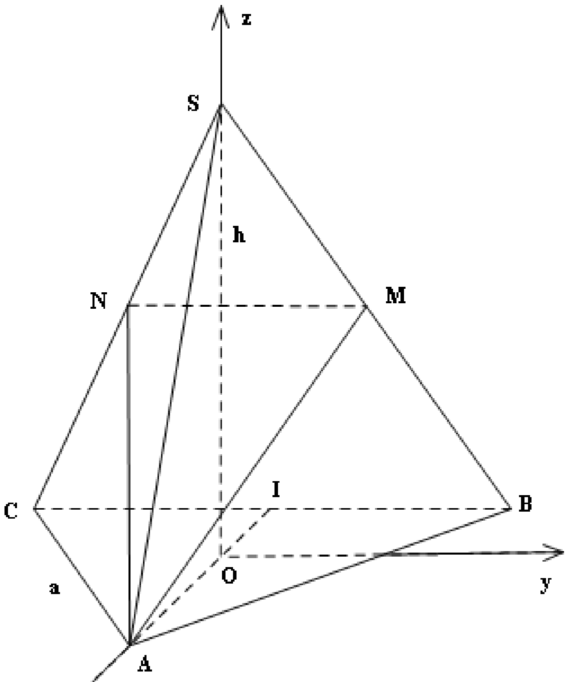
Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt SO = h, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$$O(0; 0; 0),\ S(0; 0; h),\ A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right),\ B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ \frac{a}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right),\ M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\ \frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right)$$

$$\text{và } N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right).$$



$$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4}; 0;\ \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),\ \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah; 0;\ \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

2. Hình chóp tứ giác

a) Hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

b) Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O đường cao SO vuông góc với đáy. Ta chọn hệ trục tọa độ tia OA, OB, OS lần lượt là Ox, Oy, Oz. Giả sử SO = h, OA = a, OB = b ta có

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(–a; 0; 0), D(0;–b; 0), S(0; 0; h).

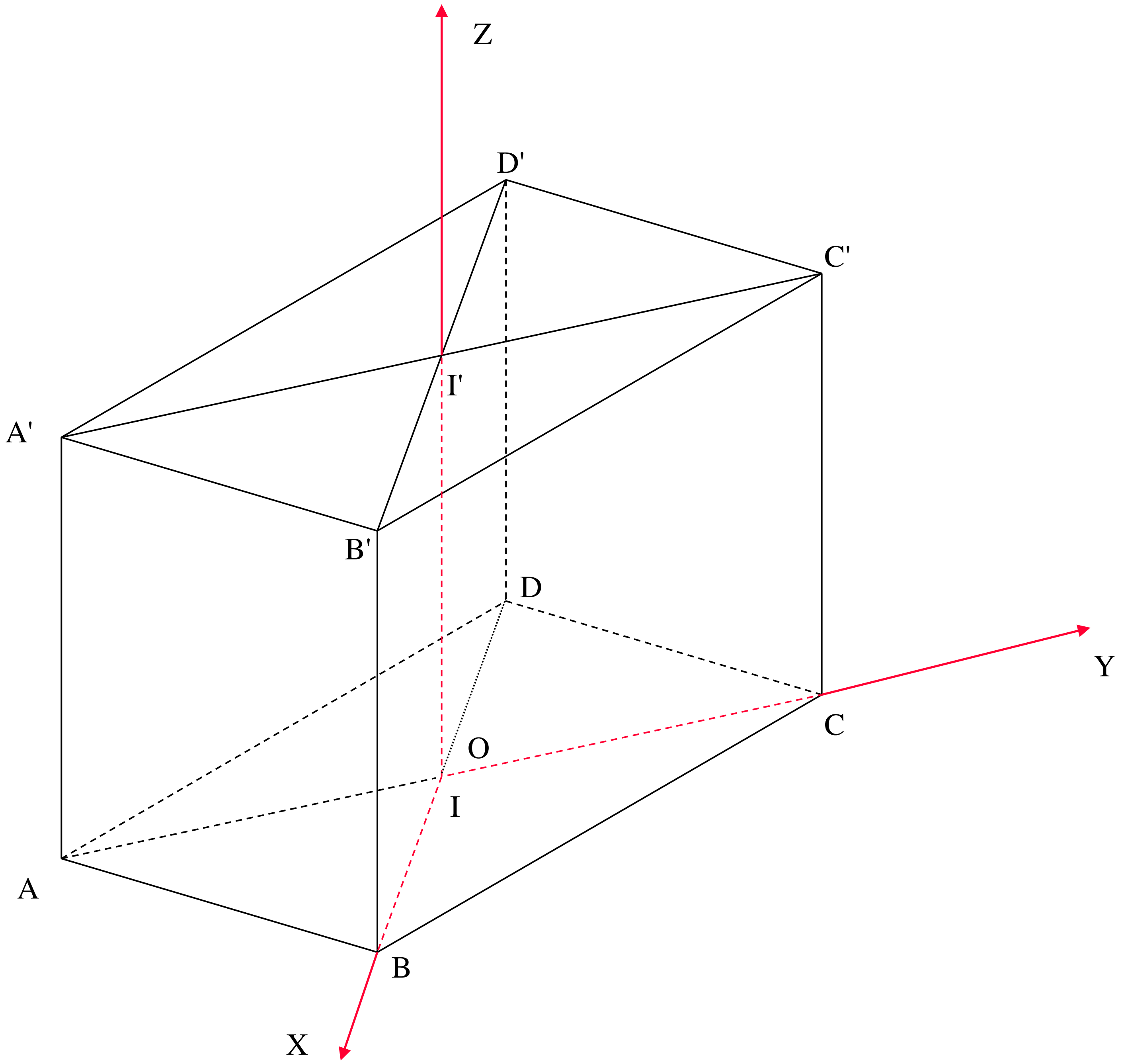
c) Hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật ABCD và AB = b. ΔSAD đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD, trong (ABCD) ta vẽ tia Hy vuông góc với AD. Chọn hệ trục tọa độ Hxyz ta có:

$$H(0;0;0),\ A\ \frac{a}{2};\ 0;\ 0\ ,\ B\ \frac{a}{2};\ b;\ 0\ ,\ C\ -\frac{a}{2};\ b;\ 0\ ,\ D\ -\frac{a}{2};\ 0;\ 0\ ,\ S\left(0;\ 0;\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. Hình lăng trụ đứng

Tùy theo hình dạng của đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên.

Ví dụ: Cho h×nh lËp phư¬ng ABCD A'B'C'D'. CMR AC' vu«ng gãc mp' (A'BD)



<u>Lời giải:</u> Chọn hệ trục tọa độ Oxyz

sao cho O ≡ A; B ∈ Ox; D ∈ Oy

và A' ∈ Oz Giả sử hình lập phơng

ABCD A'B'C'D' có cạnh là a đơn vị

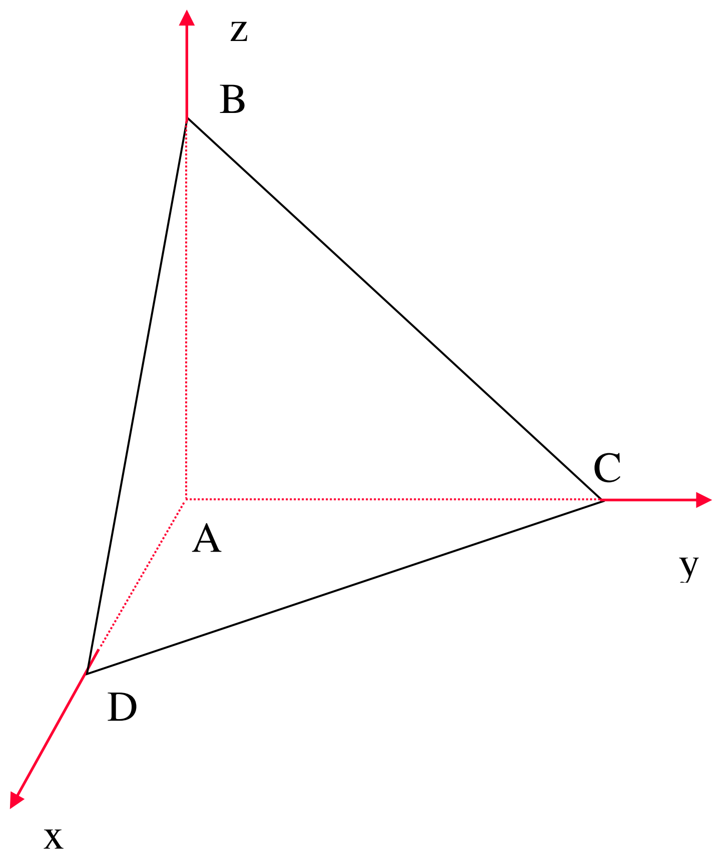
⇒ A(0;0;0), B (a;0;0), D(0;a;0), A' (0;0;a) C'(1;1;1)⇒ Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (A'BD):

x + y + z = a hay x + y + z – a = 0

$\Rightarrow$ Pháp tuyến của mặt phẳng (A'BC): $n_{(A'BC)}$ = (1;1;1) mà AC' = (1;1;1)

Vậy AC' vuông góc (A'BC)

2. Tứ diện ABCD: AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau; AB = 3; AC = AD= 4
Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD)



Lời giải:

+ Chọn hệ trục Oxyz sao cho A ≡ O

D ∈Ox; C ∈ Oy và B ∈ Oz

$\Rightarrow$ A(0;0;0); B(0;0;3); C(0;4;0); D(4;0;0)

$\Rightarrow$ Phương trình đoạn chắn của (BCD) là:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 4z - 12 = 0$$

Khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD) là:

Nhấn mạnh cho học sinh:

II. Ph□ơng pháp giải:

Để giải một bài toán hình học không gian bằng ph□ơng pháp sử dụng tọa độ Đề các trong không gian ta làm nh□sau:

__ B□ớc 1:__* Thiết lập hệ tọa độ thích hợp, từ đó suy ra tọa độ các điểm cần thiết.

__ B□ớc 2:__* Chuyển hẳn bài toán sang hình học giải tích trong không gian. Bằng cách:

+ Thiết lập biểu thức cho giá trị cần xác định.

+ Thiết lập biểu thức cho điều kiện để suy ra kết quả cần chứng minh.

+ Thiết lập biểu thức cho đối t□ợng cần tìm cực trị.

+ Thiết lập biểu thức cho đối t□ợng cần tìm quỹ tích

v.v…

III. Luyện tập.

__Bài 1__: Cho hình chóp SABC, các cạnh đều có độ dài bằng 1, O là tâm của ΔABC. I là trung điểm của SO.

3. Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện SBCM và tứ diện SABC.

2. H là chân đ□ờng vuông góc hạ từ I xuống cạnh SB. CMR: IH đi qua trọng tâm G của ΔSAC.

Lời giải:

Chọn hệ trục Oxyz sao cho O là gốc tọa độ

$A \in Ox$, $S \in Oz$, BC//Oy

Tọa độ các điểm: $A(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0)$; $B(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0)$; $C(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0)$; $S(0;0\frac{\sqrt{6}}{3})$; $I(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6})$

Ta cú: $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)$; $\overrightarrow{IC}=(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{6}}{6})$; $\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IC}\right]=(-\frac{\sqrt{6}}{6};0;\frac{\sqrt{3}}{6})$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (IBC) là:

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}(x-0)+0(y-0)+\frac{\sqrt{3}}{6}(z-\frac{\sqrt{6}}{6})=0$$

Hay: $-\sqrt{2}+z-\frac{\sqrt{6}}{6}=0$ mà ta lại cú: $\overrightarrow{SA}=(\frac{\sqrt{3}}{3};0;-\frac{\sqrt{6}}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{SA}//\vec{u}_{SA}(1;0;-\sqrt{2})$

Phương trình đường thẳng SA: $x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t;\ y=0; z=-\sqrt{2}t$.

+ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t & (1) \\ y=0 & (2) \\ y=-\sqrt{2}t & (3) \\ -\sqrt{2}x+z-\frac{\sqrt{6}}{6}=0 & (4) \end{cases}$ Thay (1) (2) (3) vào (4) có:

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{12}; y=0; z=\frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M(\frac{\sqrt{3}}{12};0;\frac{\sqrt{6}}{4}); \Rightarrow \overrightarrow{SM}=(\frac{\sqrt{3}}{12};0;-\frac{\sqrt{6}}{12}) \Rightarrow \overrightarrow{SA}=4\overrightarrow{SM}$$

$\Rightarrow$ M nằm trên đoạn SA và $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{(SBCM)}}{V(_{SABC})}=\frac{1}{4}$.

2. Do G là trọng tâm của ΔASC

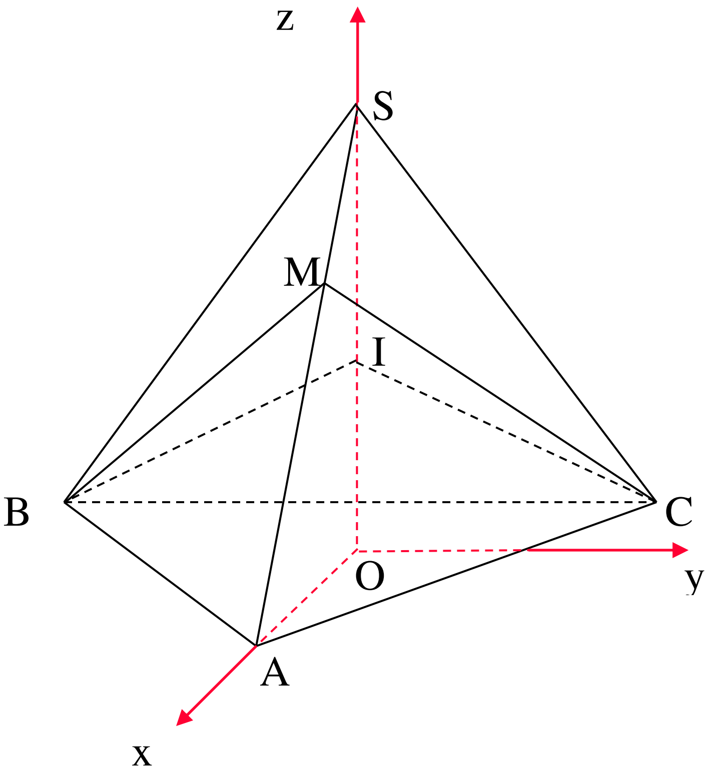
$\Rightarrow$ SG đi qua trung điểm N của AC

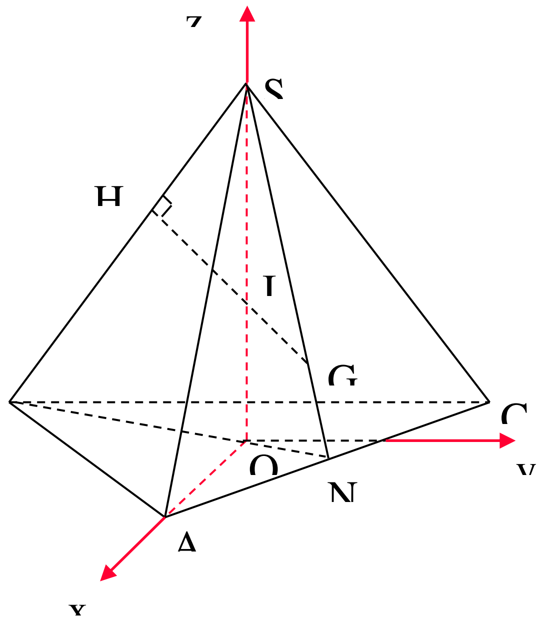
$\Rightarrow$ GI $\subset$ (SNB) $\Rightarrow$ GI và SB đồng phẳng (1)

Ta lại có tọa độ G $(\frac{\sqrt{3}}{18};\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{9}) \Rightarrow \overrightarrow{GI}=(-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18})$

$\Rightarrow \overrightarrow{GI}=(-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18}) \Rightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB}=0 \Rightarrow GI \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GI \perp SB = H$





Bài 2: Cho hình lăng trụ ABCD $A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. AA_1 = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm của BB_1; M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích ΔMC_1D.

Lời giải:

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho A ≡ O; B ∈ Oy; A_1 ∈ Oz. Khi đó.A(0;0;0), B(0;a;0); A_1 (0;0;2a)

$C_1(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a)$ và D(0;a;a)

Do M di động trên AA_1, tọa độ M (0;0;t)với t ∈ [0;2a]

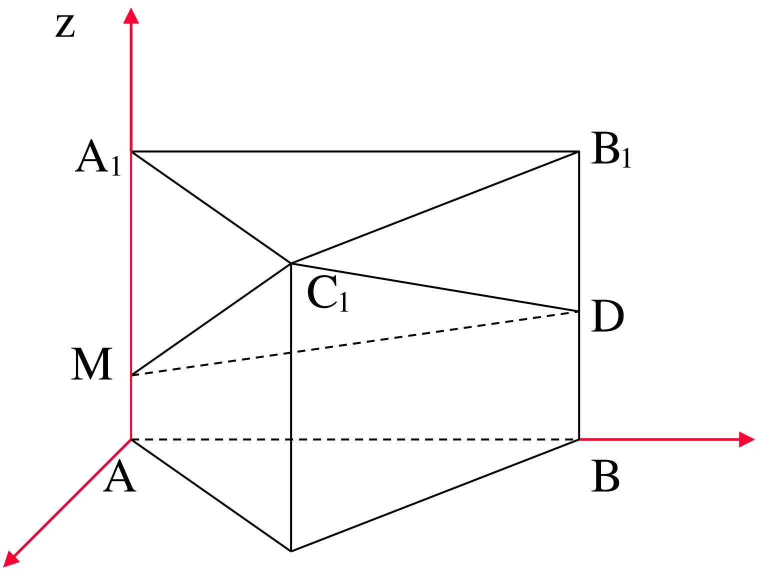
Ta có : $S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{DM}\right]\right|$

Ta có : $\begin{matrix}\overrightarrow{DC_1} = (\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a)\\ \overrightarrow{DM} = (0;-a;t-a)\end{matrix} \Rightarrow \left[\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DM}\right] = = \frac{-a}{2}(t-3a;\sqrt{3}(t-a);a\sqrt{3)}$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DM}\right] = \frac{a}{2}\sqrt{(t-3a)^2+3(t-a)^2+3a^2}$

$= \frac{a}{2}\sqrt{4t^2-12at+15a^2}$

$S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{4t^2-12at+15a^2}$



Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của S_{DC_1M} tùy thuộc vào giá trị hàm số

Xét $f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2$

$f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2 \quad (t \in [0;2a])$

$f'(t) = 8t - 12a$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3a}{2}$

Lập BBT giá trị lớn nhất của $S_{DC_1M} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$ khi t =0 hay M≡ A

Chú ý

+ Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải bằng đáy. Chân đường cao là trọng tâm của đáy.

+ Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng đáy.

+ Hình hộp có đáy là hình bình hành nhưng không nhất thiết phải là hình chữ nhật.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TAM GIÁC

Bài 1 (trích đề thi Đại học khối D – 2002). Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc (ABC), AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD).

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AD và AB = 2, AC = 4. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 6. Gọi E, F là trung điểm của SB, SC và H là hình chiếu của A trên EF.

1. Chứng minh H là trung điểm của SD.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACE).
3. Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

Bài 3. Cho hình chóp O.ABC có các cạnh OA = OB = OC = 3cm và vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên (ABC) và các điểm A', B', C' lần lượt là hình chiếu của H lên (OBC), (OCA), (OAB).

1. Tính thể tích tứ diện HA'B'C'.
2. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O. Chứng tỏ S.ABC là tứ diện đều.

Bài 4. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc nhị diện cạnh AB, BC, CA. Gọi H là hình chiếu của đỉnh O trên (ABC).

1. Chứng minh H là trực tâm của ΔABC.
2. Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
3. Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
4. Chứng minh $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$.

Bài 5. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.

1. Tính góc φ giữa (OMN) và (OAB).
2. Tìm điều kiện a, b, c để hình chiếu của O trên (ABC) là trọng tâm ΔANP.
3. Chứng minh rằng góc phẳng nhị diện [N, OM, P] vuông khi và chỉ khi $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết AB = 2, $(ABC),(SBC) = 60^0$.

1. Tính độ dài SA.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SB, C].

Bài 7. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một.

1. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 8 (trích đề thi Đại học khối D – 2003). Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng (d). Trên (d) lấy hai điểm A và B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với (d) và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC.
1. Tính diện tích ΔMAB theo a.
2. Tính khoảng cách giữa MB và AC theo a.
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SC, B].

Bài 10. Cho tứ diện S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = SA = 6. Cạnh SA vuông góc với đáy. Vẽ AH vuông góc với SB tại H, AK vuông góc với SC tại K.
1. Chứng minh HK vuông góc với CS.
2. Gọi I là giao điểm của HK và BC. Chứng minh B là trung điểm của CI.
3. Tính sin của góc giữa SB và (AHK).
4. Xác định tâm J và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại C, AC = 2, BC = 4. Cạnh bên SA = 5 và vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm cạnh AB.
1. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC và SD.
2. Tính khoảng cách giữa BC và SD.
3. Tính cosin góc phẳng nhị diện [B, SD, C].

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.
1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 13. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a, đường cao SH = h. Mặt phẳng (α) đi qua AB và vuông góc với SC.
1. Tìm điều kiện của h theo a để (α) cắt cạnh SC tại K.
2. Tính diện tích ΔABK.
3. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TỨ GIÁC

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD.
1. Tính diện tích Δ SBE.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBE).
3. (SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.
1. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBD).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2}$ cm. Mp(α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.
1. Chứng minh AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD.
2. Chứng minh BD song song với (α).
3. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của ΔSAC.
4. Tính thể tích hình khối ABCDKMH.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N là trung điểm cạnh SA, SD.
1. Tính khoảng cách từ A đến (BCN).
2. Tính khoảng cách giữa SB và CN.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

4. Tìm điều kiện của a và b để $\cos CMN = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Trong trường hợp đó tính thể tích hình chóp S.BCNM.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. ΔSAD đều và vuông góc với (ABCD). Gọi H là trung điểm của AD.

1. Tính d(D, (SBC)), d(HC, SD).
2. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với SC tại I. Chứng tỏ (α) cắt các cạnh SB, SD.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và $SO = 2a\sqrt{3}$, AC = 4a, BD = 2a. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D'.

1. Chứng minh $\Delta B'C'D'$ đều.
2. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp S.ABCD.

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a. Đường cao SA = 2a. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt MD = m $(0 \le m \le a)$.

1. Tìm vị trí điểm M để diện tích ΔSBM lớn nhất, nhỏ nhất.
2. Cho $m = \frac{a}{3}$, gọi K là giao điểm của BM và AD. Tính góc phẳng nhị diện [A, SK, B].

3. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH HỘP – LĂNG TRỤ ĐỨNG

Bài 21. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của A'D', BB', CD, BC.

1. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
2. Tính khoảng cách giữa IK và AD.
3. Tính diện tích tứ giác IKNM.

Bài 22 (trích đề thi Đại học khối A – 2003). Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc phẳng nhị diện [B, A'C, D].

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tìm điểm M trên cạnh AA' sao cho (BD'M) cắt hình lập phương theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Bài 24. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

1. Chứng minh A'C vuông góc với (AB'D').
2. Tính góc giữa (DA'C) và (ABB'A').
3. Trên cạnh AD', DB lấy lần lượt các điểm M, N thỏa AM = DN = k $(0 < k < a\sqrt{2})$.
   a. Chứng minh MN song song (A'D'BC).
   b. Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

Bài 25. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = 2, AD = 4, AA' = 6. Các điểm M, N thỏa $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}\ (0 \le m \le 1)$. Gọi I, K là trung điểm của AB, C'D'.

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến (A'BD).
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.
4. Tính m để diện tích tứ giác MINK lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 26. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài cạnh là 2cm. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm hình vuông ADD'A'.

1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) qua C, D', M, N.
2. Tính bán kính r của đường tròn (C) là giao của (S) và mặt cầu (S') qua A', B, C', D.
3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (CMN) và hình lập phương.

Bài 27 (trích đề thi Đại học khối B – 2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh a, $BAD = 60^0$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'.

1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Tính AA' theo a để B'MDN là hình vuông.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A. Cho AB = a, AC = b, AA' = c. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với B'C.

1. Tìm điều kiện của a, b, c để (α) cắt cạnh CC' tại I (I không trùng với C và C').
2. Cho (α) cắt CC' tại I.

a. Xác định và tính diện tích của thiết diện.
b. Tính góc phẳng nhị diện giữa thiết diện và đáy.

Bài tập :

MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA=$a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy

1) Tính khỏang cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
2) Tính khỏang cách từ tâm O hình vuông ABCD đến mặt phẳng (SBC).
3) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

Bài 2: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy.Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0

1) Tính MN và SO.
2) Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) .

Bài 3: Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh bằng a và AC=a, Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH$\perp$(ABCD) với SH=a

1) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).
2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 4: Cho góc tam diện Oxyz, trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A,B,C

1) Hãy tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) theo OA=a, OB=b, OC=c
2) Giả sử A cố định còn B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn OA=OB+OC . Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC là lớn nhất.

Bài 5: Cho tứ diện OABC (vuông tại O), biết rằng OA,OB,OC lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ . Chứng minh rằng:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$
2) $S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA} = S^2_{\Delta ABC}$

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, sa vuông góc với đáy. Gọi M,N là hai điểm theo thứ tự thuộc BC,DC sao cho $BM = \dfrac{a}{2}, DN = \dfrac{3a}{4}$. CMR hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, CMR hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Bài 8: Trong không gian cho các điểm A,B,C theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho OA=a , OB=$a\sqrt{2}$. OC=c (a,c>0). Gọi D là điểm đối diện với O của hình chữ nhật AOBD và M là trung điểm của đọan BC. (P) là mặt phẳng qua A,M và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với AM.

a) Gọi E là giao điểm của (P) với OC , tính độ dài đọan OE.
b) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P).
c) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P).

Bài 9: Cho tứ diện SABC có SC=CA=AB=$a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, ΔABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho AM=CN=t (0<t<2a)

1) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị của t để MN ngắn nhất.
2) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi có AC=4, BD=2 và tâm O.SO=1 vuông góc với đáy. Tìm điểm M thuộc đoạn SO cách đều hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD).

Bài 11: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD,CD. Lấy $P \in BB'$ sao cho BP=3PB'. Tính diện tích thiết diện do (MNP) cắt hình lập phương .

Bài 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB=a, AD=2a, AA'=a

1) Tính theo a khoảng cách giữa AD' và B'C.

2) Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỷ số $\frac{AM}{MD} = 3$. Hãy tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB'C).

3) Tính thể tích tứ diện AB'D'C.

Bài 13: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a..Gọi M, N là trung điểm của BC và DD'

1) CMR $AC' \perp (A'BD)$.

2) CMR $MN // (A'BD)$.

3) Tính khoảng cách giữa BD nà MN theo a

Bài 14: Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc A=60^0 . B'O vuông góc với đáy ABCD, cho BB'=a

1) Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

2) Tính khoảng cách từ B, B' đến mặt phẳng (ACD').

Bài 15: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a tâm I . Trên hai tia Ax, By cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M,N . Đặt AM=x, CN=y

1) Tính thể tích hình chóp ABCMN.

2) CMR điều kiện cần và đủ để góc MIN=90^0 là $2xy=a^2$.

Bài 16: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân ABC với cạnh huyền AB = $4\sqrt{2}$
Cạnh bên $SC \perp (ABC)$ và SC = 2 .Gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm AB

1) Tính góc của hai đường thẳng SM và CN

2) Tính độ dài đọan vuông góc chung của SM và CN.

Bài 17: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1

1) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' .Chứng minh rằng $A'C \perp MN$.
Tính độ dài đọan MN

2) Gọi P là tâm của mặt CDD'C' . Tính diện tích ΔMNP .

Bài 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a, biết rằng $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Bài 19: Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA;OB;OC đôi một vuông góc . Gọi $\alpha;\beta;\gamma$ lần lượt là các góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC);(OCA) và (OAB).Chứng minh rằng :

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$$

Bài 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA=a . Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

Bài 21: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB=AC=a và góc BAC = 120^0, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).