TOÁN TỪ TÂM

# Vector


TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

# MỤC LỤC

Chương 05

# Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

## A. Lý thuyết

### 1. Khái niệm vectơ

**Định nghĩa**

» Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.


▶ ***Kí hiệu:***

» Vectơ có điểm đầu $A$ và điểm cuối $B$ được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ $AB$".

» Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y},\ldots$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

▶ ***Độ dài vectơ:***

» Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

» Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.

» Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

### 2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

**Định nghĩa**

▶ ***Giá của vectơ:***

» Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của 1 vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

▶ ***Vectơ cùng phương, cùng hướng:***

» Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

» Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

♨ ***Nhận xét:***

» Ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

## 3. Hai vectơ bằng nhau – đối nhau

### Định nghĩa

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng *cùng hướng* và có *cùng độ dài*.
Kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

♨ ***Chú ý:***

» Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm $O$, thì ta luôn tìm được một điểm $A$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

## 4. Vectơ – không

### Định nghĩa

» Vectơ-không là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.

» Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

» Như vậy $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=...$ và $\overrightarrow{MN}=\vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

# B Các dạng bài tập

## Dạng 1. Xác định vectơ; phương, hướng; độ dài của vectơ

### Phương pháp

(1) **Định nghĩa vectơ:**

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

(2) **Độ dài vectơ:**

- Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

(3) **Vectơ cùng phương – cùng hướng:**

- Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

*Nhận xét:*

» Ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

(4) **Hai vectơ bằng nhau:**

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng *cùng hướng* và có *cùng độ dài*.

Kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

(5) **Vectơ – không:**

- Là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.
- Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.
- Như vậy $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=...$ và $\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv N$.

**Ví dụ 1.1.**

Cho tam giác $ABC$, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh $A$, $B$, $C$?

*Lời giải*

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

**Ví dụ 1.2.**

Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Tìm số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với

(1) Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

(2) Vectơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

*Lời giải*

**Ví dụ 1.3.**

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P$, $Q$, $R$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $AD$. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm số vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AR}$

*Lời giải*

**Ví dụ 1.4.**

Gọi G là trọng tâm tam giác vuông $ABC$ với cạnh huyền $BC = 12$. Tính $\left|\overrightarrow{GM}\right|$ (với $M$ là trung điểm của $BC$ )

*Lời giải*

**Ví dụ 1.5.**

Cho điểm $A$ và véctơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm điểm $M$ sao cho:

(1) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$. (2) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

*Lời giải*

....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................

**Ví dụ 1.6.**

Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

*Lời giải*

....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................
....................................................................................................................................................

## Dạng 2. Hai vectơ bằng nhau

**Phương pháp**

Để chứng minh hai véctơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

| | |
|---|---|
| **Cách 01** | $\left\|\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\|$ và $\vec{a};\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$. |
| **Cách 02** | Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. |
| **Cách 03** | Nếu $\vec{a} = \vec{b} : \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$. |

**Ví dụ 2.1.**

Cho tam giác $ABC$ có $D, E, F$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$.

Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

*Lời giải*

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

**Ví dụ 2.2.**

Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$. Liệt kê tất cả các véctơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông là điểm đầu và điểm cuối.

*Lời giải*

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

### Ví dụ 2.3.

Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

### Ví dụ 2.4.

Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

### Ví dụ 2.5.

Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA$.

Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

**Ví dụ 2.6.**

Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

*Lời giải*

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

**Ví dụ 2.7.**

Cho tam giác $ABC$. Gọi $D,E,F$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC,CA,AB$. Chứng minh $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$.

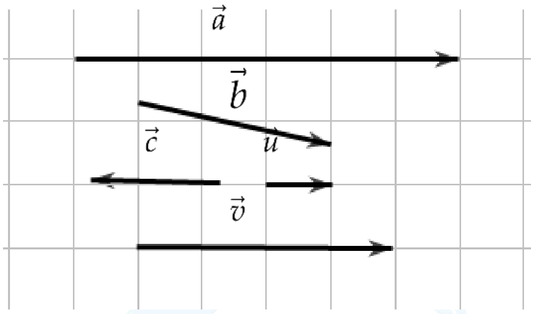
*Lời giải*

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}$ và $\vec{v}$ như trong hình bên.




Hỏi có bao nhiêu vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**» Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và cuối là các đỉnh của hình bình hành?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**» Câu 3.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AC, BC$. Số các vectơ khác vectơ không, bằng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm $M, N, P, A, B, C$ là

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

**» Câu 4.** Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì:

**A.** tam giác $ABC$ là tam giác cân **B.** tam giác $ABC$ là tam giác đều
**C.** $A$ là trung điểm đoạn $BC$ **D.** điểm $B$ trùng với điểm $C$

**» Câu 5.** Cho ba điểm $M$, $N$, $P$ thẳng hàng, trong đó $N$ nằm giữa hai điểm $M$ và $P$. Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$ **C.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$ **D.** $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

**» Câu 6.** Cho tam giác $ABC$, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh $A$, $B$, $C$?

**A.** 4 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12

**» Câu 7.** Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

**» Câu 8.** Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

**A.** $ABCD$ là hình bình hành **B.** $ACBD$ là hình bình hành
**C.** $AD$ và $BC$ có cùng trung điểm **D.** $\overrightarrow{AB} = CD$ và $AB // CD$

**» Câu 9.** Cho hình vuông $ABCD$, câu nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ **D.** $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$

» **Câu 10.** Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ **B.** $\left|\overrightarrow{QP}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$ **C.** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$

» **Câu 11.** Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

**A.** 4 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

» **Câu 12.** Cho 5 điểm $A, B, C, D, E$ có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là $A$ và điểm cuối là một trong các điểm đã cho:

**A.** 4 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 12

» **Câu 13.** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

**A.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau
**B.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành
**C.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau

» **Câu 14.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm $O$ sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

**A.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$

» **Câu 15.** Cho ba điểm $A, B, C$ cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:

**A.** Điểm $B$ thuộc đoạn $AC$ **B.** Điểm $A$ thuộc đoạn $BC$
**C.** Điểm C thuộc đoạn $AB$ **D.** Điểm $A$ nằm ngoài đoạn $BC$

» **Câu 16.** Cho hình thoi tâm $O$, cạnh bằng $a$ và $A=60^\circ$. Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

» **Câu 17.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $AD, BC$ và $AC$. Biết $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$. Chọn câu đúng.

**A.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

» **Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ với trực tâm $H$. $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **B.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{HC}$
**C.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$ **D.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

» **Câu 19.** Cho $\Delta ABC$ với điểm $M$ nằm trong tam giác. Gọi $A',B',C'$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$ và $N, P, Q$ lần lượt là các điểm đối xứng với $M$ qua $A',B',C'$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PC}$
**C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$

» **Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ có $H$ là trực tâm và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua $O$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AH}$

» **Câu 21.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P$, $Q$, $R$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $AD$. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

**A.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$
**C.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

» **Câu 22.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ cạnh $a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

» **Câu 23.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Gọi $O$ là giao điểm của các đường chéo của tứ giác $MNPQ$, trung điểm của các đoạn thẳng $AC$, $BD$ tương ứng là $I$, $J$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ **B.** $MP = NQ$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ **D.** $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

» **Câu 24.** Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm $C$, có bao nhiêu điểm $D$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

**A.** vô số điểm. **B.** $1$ điểm.
**C.** $2$ điểm. **D.** không có điểm nào.

» **Câu 25.** Cho 3 điểm $M, N, P$ thẳng hàng trong đó $N$ nằm giữa $M$ và $P$. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

» **Câu 26.** Cho ba điểm $M, N, P$ thẳng hàng, trong đó điểm $N$ nằm giữa hai điểm $M$ và $P$. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

» **Câu 27.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC$ và $BC$. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm $A, B, C, M, N, P$ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

**A.** $1$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $3$.

» **Câu 28.** Cho hình thoi $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

» **Câu 29.** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

**A.** Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.
**B.** Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
**C.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

» **Câu 30.** Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$.

» **Câu 31.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Ba vectơ bằng với $\overrightarrow{AB}$ là

**A.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$.

» **Câu 32.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là:

**A.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. **D.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$.

**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $AB,AC$ và $BC$. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm $A,B,C,M,N,P$ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

**A.** $1$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $3$

**» Câu 34.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Số vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**» Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $O$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $A$ qua $O$; $E$ là điểm đối xứng với $O$ qua $BC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{HE}$. **B.** $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OE}$. **D.** $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CD}$.

## B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

**» Câu 36.** Cho tam giác $ABC$ có $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$. Lấy điểm $P$ đối xứng với điểm $M$ qua $N$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $MN=BC$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng | | |
| (d) | $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}$ | | |

**» Câu 37.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm $O$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | Vecto $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$ | | |
| (b) | Có 9 vecto khác vecto không và cùng phương với vecto $\overrightarrow{OA}$. | | |
| (c) | Vecto $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{OC}$ | | |
| (d) | Có 3 vecto khác vecto không và cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$. | | |

**» Câu 38.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm $AB,BC,CD,DA$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $MN$ là đường trung bình của tam giác $ACD$ | | |
| (b) | $PQ=\frac{1}{2}AC$ | | |
| (c) | Tứ giác $MNPQ$ là hình thang | | |
| (d) | $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ | | |

**» Câu 39.** Cho $\Delta ABC$ có trực tâm $H$ và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi $B'$ là điểm đối xứng của $B$ qua $O$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $B'C\perp BC$ | | |
| (b) | $B'C//AB$ | | |
| (c) | Tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành | | |
| (d) | $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C};\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{HC}$ | | |

**» Câu 40.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh $a$, trực tâm $H$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $AH \perp BC$ | | |
| (b) | $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ | | |
| (c) | $AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ | | |
| (d) | $\|\overrightarrow{HA}\| = \|\overrightarrow{HB}\| = \|\overrightarrow{HC}\| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. | | |

**» Câu 41.** Cho $\Delta ABC$ có $A', B', C'$ lần lượt là các trung điểm của các cạnh $BC, CA, AB$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $BC' = C'A = A'B' = \frac{AB}{2}$. | | |
| (b) | Hai vectơ $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng | | |
| (c) | $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA'}$ | | |

**» Câu 42.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB = \sqrt{3}, AC = 2\sqrt{3}$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $BC^2 = AB^2 + AC^2$ | | |
| (b) | $\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{\sqrt{15}}{4}$ | | |
| (c) | $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ | | |
| (d) | $\|\overrightarrow{AH}\| = \frac{\sqrt{15}}{5}$ | | |

**» Câu 43.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CA$ và $AB$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $PN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MC}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BM}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NP}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{BM}$ có các vectơ đối là $\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB}$ | | |

**» Câu 44.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và có $AB = AD = \frac{1}{2}DC = a$. Gọi $BF$ là đường phân giác trong của tam giác $ABD$ $(F \in AD)$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $CA^2 = DA^2 + DC^2$ | | |
| (b) | $\|\overrightarrow{CA}\| = a\sqrt{3}$ | | |
| (c) | $ABF = 45^\circ$ | | |
| (d) | $\|\overrightarrow{BF}\| \approx 2,08a$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm | | |

**» Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $G'$ là điểm đối xứng với $G$ qua trung điểm $M$ của $BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | Vectơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng | | |
| **(b)** | $GA = 3GM$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}; \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}; \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}; \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$ | | |

## *C. Câu hỏi – Trả lời ngắn*

**» Câu 46.** Cho hình thoi tâm $O$, cạnh bằng $1$ và $A = 60°$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AO}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 47.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$ có cạnh $AB = \sqrt{3}, AD = 1$. Tìm vectơ $\vec{u}$ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ (khác $\overrightarrow{BD}$), tính độ dài vectơ $\vec{u}$ đó?

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 48.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ được tạo thành mà điểm đầu và điểm cuối lấy từ các đỉnh của hình chữ nhật?

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh 1 và $G$ là trọng tâm. Gọi $I$ là trung điểm của $AG$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BI}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 50.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 1 và $BAD = 60^\circ$. Tìm độ dài véc tơ $\overrightarrow{AC}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 51.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA$. Có bao nhiêu vectơ tạo thành từ các điểm đã cho tìm các vec tơ cùng hướng với vec tơ $\overrightarrow{MN}$

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 52.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $DC, AB.P$ là giao điểm của $AM, DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN, DB$. Có bao nhiêu vecto bằng vectơ $\overrightarrow{DP}$ đúng hay sai?

**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 53.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ cạnh $a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

**Điền đáp số:** ☐

--------------------------------------- Hết ---------------------------------------

Chương 05

# Bài 2. TỔNG HIỆU HAI VECTƠ

## A. Lý thuyết

### 1. Tổng của hai vectơ

**Định nghĩa**

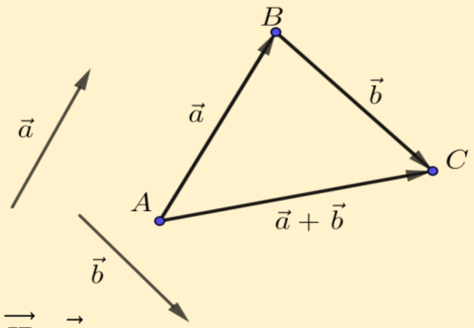
» Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

▫ Lấy một điểm $A$ tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

▫ Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.

▫ Kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

⇒ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.




▶ *Điểm đặc biệt:*

» Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

» Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

### 2. Hiệu của hai vectơ

**Định nghĩa**

» Vectơ đối của vecto $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vecto cùng phương nhưng ngược hướng với vecto $\vec{a}$.

» Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta gọi hiệu của hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vecto $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

**Tính chất**

Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

(1) Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2) Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

(3) Tính chất của vectơ – không $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

### Các quy tắc:

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

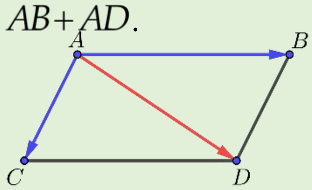
» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hiệu vectơ:***

» Với 3 điểm $O,A,B$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

▶ ***Quy tắc hình bình hành:***

» Tứ giác $A,B,C,D$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.



## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Liên quan tổng vectơ

*Phương pháp*

(1) **Định nghĩa tổng hai vectơ:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Lấy một điểm $A$ tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.
- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.

⇨ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

(2) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(3) **Tính chất:** Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

- Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

**Ví dụ 1.1.**

Cho hình bình hành $ABCD$, xác định các vectơ

(1) $\vec{t}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ (2) $\vec{e}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$

*Lời giải*

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**Ví dụ 1.2.**

Cho tam giác $ABC$, xác định các vectơ

(1) $\vec{g} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{q} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................

**Ví dụ 1.3.**

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, xác định các vectơ.

(1) $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ (2) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD}$

*Lời giải*

.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................

**Ví dụ 1.4.**

Cho $n$ điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, xác định vectơ

$$\vec{h} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + ... + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$$

*Lời giải*

.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................

## Dạng 2. Hiệu hai vectơ – vectơ đối

### Phương pháp

(1) **Định nghĩa tổng hai vectơ:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Lấy một điểm $A$ tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.
- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.

⇨ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

(2) **Định nghĩa hiệu hai vectơ:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vecto $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.
- Vectơ đối của vecto $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vecto $\vec{a}$.

(3) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(4) **Tính chất:** Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

- Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hiệu vectơ:***

» Với 3 điểm $O,A,B$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

**Ví dụ 2.1.**

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh $A$.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

*Lời giải*

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

**Ví dụ 2.2.**

Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$. Chứng minh rằng:

(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì.

*Lời giải*

## Dạng 3. Chứng minh đẳng thức vectơ

### Phương pháp

▶ ***Tính chất:*** Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

- Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hiệu vectơ:***

» Với 3 điểm $O,A,B$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

▶ ***Quy tắc hình bình hành:***

» Tứ giác $A,B,C,D$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

▶ ***Quy tắc trung điểm – trọng tâm:***

» Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

» Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Các phương pháp biến đổi:

» Biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức (xuất phát từ vế phức tạp biến đổi đưa về vế đơn giản).

### Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm bất kỳ $A,B,C$ và $D$. Hãy chứng minh đẳng thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

*Lời giải*

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**Ví dụ 3.2.**

Cho năm điểm $A, B, C, D, E$. Chứng minh rằng:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

*Lời giải*

**Ví dụ 3.3.**

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. $M$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng.
Chứng minh rằng:

(1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

*Lời giải*

**Ví dụ 3.4.**

Cho tam giác $ABC$, gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $I$ là trung điểm của $AM$.

(1) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

(2) Với $O$ là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$

*Lời giải*

**Ví dụ 3.4.**

Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm $O$.

(1) Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

(2) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

(3) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{0}$

*Lời giải*

## Dạng 4. Độ dài vectơ

**Phương pháp**

Áp dụng: tính chất, quy tắc (ba điểm, hình bình hành, hiệu vectơ, trung điểm – trọng tâm)

Để tính $\left|\vec{a}\pm\vec{b}\pm\vec{c}\pm\vec{d}\right|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

» **Bước 1:** Biến đổi và rút gọn biểu thức vécto $\vec{a}\pm\vec{b}\pm\vec{c}\pm\vec{d}=\vec{v}$, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,... sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.

» **Bước 2:** Tính môđun (độ dài) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho

**Ví dụ 3.1.**

Cho bốn điểm bất kỳ $A,B,C$ và $D$. Hãy chứng minh đẳng thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

(1) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

(2) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}\right|$ thì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|$.

(3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

*Lời giải*

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

**Ví dụ 3.2.**

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có $AB = 3(\text{cm})$, $AC = 4(\text{cm})$. Gọi $I$ là trung điểm $BC$. Xác định và tính độ dài các véctơ:

(1) $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{v} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CA}$

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

**Ví dụ 3.3.**

Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, $AB = a$,. Tính theo $a$:

(1) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ (2) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ (3) $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right|$

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................

**Ví dụ 3.3.**

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=3$, $BC=4$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $CD$. Tính

(1) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$   (2) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$

*Lời giải*

..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................................

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho 4 điểm $A,B,C,D$ phân biệt. Chọn phương án **đúng**?

A. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CA}$

**» Câu 2.** Cho tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$.

**» Câu 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$.

**» Câu 4.** Đẳng thức nào dưới đây **sai?**

A. $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. B. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PM}$. D. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

**» Câu 5.** Cho $\Delta ABC$ gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,AC,BC$. Hỏi $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véc tơ nào?

A. $\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{PB}$. D. $\overrightarrow{AP}$.

**» Câu 6.** Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MN}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$.

**» Câu 7.** Cho đoạn thẳng $AB$ có $I$ là trung điểm, $M$ là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. C. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

**» Câu 8.** Chọn khẳng định **sai**

A. Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

B. Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$.

C. Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

D. Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

**» Câu 9.** Cho ba điểm phân biệt $A$, $B$, $C$. Mệnh đề nào sau đây **Sai**?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

**» Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$ và trọng tâm $G$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$. C. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}$. D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.

**» Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

**» Câu 12.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. C. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$.

**» Câu 13.** Cho tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}$. C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

» **Câu 14.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

» **Câu 15.** Cho 3 điểm $M,N,P$ bất kì. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. **C.** $\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NM}$. **D.** $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$.

» **Câu 16.** Cho bốn điểm phân biệt $A,B,C,D$. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

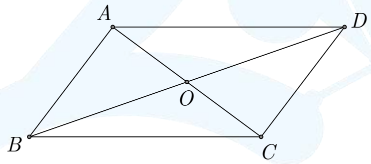
**A.** $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

» **Câu 17.** Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm $I$ tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$. **B.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}$.

**C.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{ID}$. **D.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}$.

» ***Câu 18.*** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm $O$.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.

**C.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

» **Câu 19.** Cho $M, N, P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, CA$ của tam giác $ABC$. Hỏi vectơ $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AP}$ bằng vectơ nào?

**A.** $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{PB}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$.

» **Câu 20.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $\Delta ABC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}$. **D.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

» **Câu 21.** Rút gọn véc tơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

**A.** $\vec{u}=\overrightarrow{MR}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{PR}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{MP}$.

» **Câu 22.** Cho $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$. **C.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG}$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

» **Câu 23.** Trong mặt phẳng, cho năm điểm phân biệt $A, B, C, D, E$. Vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}$ bằng vectơ nào sau đây?

**A.** $\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AE}$. **C.** $\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{BD}$.

» **Câu 24.** Cho $\Delta ABC, D, E, F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC$, $CA$, $A$, $B$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$

**C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$

» **Câu 25.** Cho tam giác đều $ABC$, cạnh $3a$. Mệnh đề nàosau đây đúng:

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=3a$. B. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AC}=3a$.

**» Câu 26.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh $a$ và $BAD=60°$. Độ dài của $\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $2a$. B. $a$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

**» Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

C. $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|$. D. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

**» Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $2a$. B. $a$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}a$.

**» Câu 29.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và $AB=2, AC=3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $5$. B. $40$. C. $\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{10}$.

**» Câu 30.** Giả sử có các lực $\vec{F_1}=\overrightarrow{MA}, \vec{F_2}=\overrightarrow{MB}, \vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$. Cường độ hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ lần lượt là $300N, 400N$ và $AMB=90^0$. Tìm cường độ của lực $\vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ biết vật đứng yên.

A. $700N$. B. $250N$. C. $500N$. D. $1000N$.

**» Câu 31.** Cho tam giác $ABC$. Vị trí của điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. $M$ trùng $B$.
B. $M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.
C. $M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.
D. $M$ trùng $C$.

**» Câu 32.** Cho tam giác $ABC$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M$ là trung điểm $AB$. B. $M$ là trọng tâm tam giác $ABC$.
C. $M$ trùng $B$. D. $A$ là trung điểm $MB$.

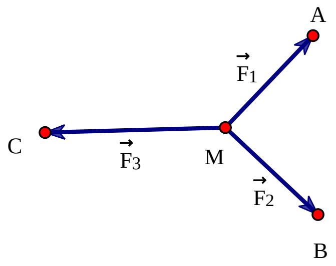
**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$?

A. $M$ là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
B. $M$ là trọng tâm tam giác $ABC$.
C. $M$ là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
D. $M$ thuộc trung trực của $AB$.

**» Câu 34.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{MB}\right|1$

A. Đường tròn tâm $C$, bán kính $AB$. B. Đường tròn tm $B$, bán kính $AB$.
C. Đường trung trực của đoạn $AB$. D. Đường trung trực của đoạn $BC$.

**» Câu 35.** Cho ba lực $\vec{F_1}=\overrightarrow{MA}, \vec{F_2}=\overrightarrow{MB}, \vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $AMB=90°$. Khi đó xác định cường độ của lực $\vec{F_3}$.




**A.** $\left|\vec{F_3}\right| = 100\sqrt{2}N$. **B.** $\left|\vec{F_3}\right| = 2\sqrt{2}N$. **C.** $\left|\vec{F_3}\right| = \sqrt{2}N$. **D.** $\left|\vec{F_3}\right| = 2\sqrt{3}N$.

## *B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai*

**» Câu 36.** Cho bốn điểm $A, B, C, D$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ | | |

**» Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, có trọng tâm $G$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\right\| = 2a$ | | |
| (c) | $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = a\sqrt{3}$ | | |
| (d) | $\left\|\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BC}\right\| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ | | |

**» Câu 38.** Cho sáu điểm $A, B, C, D, E, F$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FA}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$ | | |

**» Câu 39.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$ | | |
| (c) | $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\| = AC$ | | |
| (d) | Nếu $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right\|$ thì $ABCD$ là hình thoi. | | |

**» Câu 40.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC, BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MP}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PC}$ | | |

**» Câu 41.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, có $O$ là giao điểm hai đường chéo. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $O$ là trung điểm của $AC,BD$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right\|=a\sqrt{2}$ | | |
| (c) | $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right\|=a$ | | |
| (d) | $\left\|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right\|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | | |

**» Câu 42.** Gọi $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$ | | |

**» Câu 43.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA$, $AB$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành | | |
| (b) | $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BM}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì | | |

**» Câu 44.** Cho hình bình hành $ABCD$ với $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $AD$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}$ | | |

**» Câu 45.** Cho $ABCD$ là hình vuông tâm $O$ có cạnh $a$. $M$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right\|=AO$ | | |
| (c) | $\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right\|=0$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (d) | Độ dài vectơ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng $DC$ | | |

» **Câu 46.** Cho tam giác $ABC$ đều có cạnh bằng $3a$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $AO=3a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|=2a$ | | |
| (c) | $\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\right\|=0$ | | |
| (d) | $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=a\sqrt{3}$ | | |

## C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 47.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB=1, CD=2$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CN}\right|$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là $O$ và cạnh $1$. Tính $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|+\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 49.** Cho tam giác $ABC(AB<AC), AD$ là phân giác trong của góc $A$. Qua trung điểm $M$ của cạnh $BC$, ta kẻ đường thẳng song song với $AD$, cắt cạnh $AC$ tại $E$ và cắt tia $BA$ tại $F$. Biết rằng $AB=6$ và $4BD=3BM$. Tính: $\left|\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{EM}\right|$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 50.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2, M$ là trung điểm $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2, M$ là trung điểm $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*

**Điền đáp số:** ☐

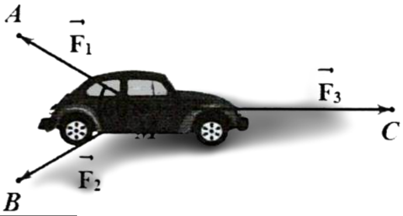
» **Câu 52.** Cho tam giác vuông $ABC$ có các cạnh góc vuông là $AB=1, AC=2$. Điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 53.** Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có điểm đặt $A$ tạo với nhau góc $45^\circ$, biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ lần lượt bằng $60N, 90N$. Tính cường độ tổng hợp của hai lực trên? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

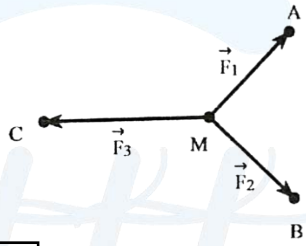
**Điền đáp số:** ☐

**» Câu 54.** Cho ba lực $\vec{F_1}=\overrightarrow{MA}, \vec{F_2}=\overrightarrow{MB}, \vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm $M$ và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $AMB=60°$. Khi đó cường độ $\vec{F_3}$ đạt bao nhiêu niuton? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*




**Điền đáp số:**

**» Câu 55.** Cho ba lực $\vec{F_1}=\overrightarrow{MA}, \vec{F_2}=\overrightarrow{MB}, \vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $AMB=90^{\circ}$. Khi đó tính cường độ của lực $\vec{F_3}$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*




**Điền đáp số:**

------------------------------ Hết ------------------------------

Chương 05

# Bài 3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

## A Lý thuyết

### 1. Tích của một số với một vectơ

**Định nghĩa**

» Cho số $k \neq 0$ và một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc tơ $\vec{a}$ với $k$ là một véc tơ.

▶ **Ký hiệu** $k.\vec{a}$ có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$,

Khi đó $k.\vec{a}$ :

- *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- *Ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

» Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}; \vec{0}.k = \vec{0}$.

**Tính chất**

Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực số $k, h$ ta có

(1) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$

(2) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

(3) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

(4) $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

### 2. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

» Nếu $I$ là trung điểm của $AB$ thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

và $\forall\ M$, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

» Nếu $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

### 3. Điều kiện để hai vecto cùng phương

» Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ là có một số thực $k$ để $\boxed{\vec{a} = k\vec{b}}$.

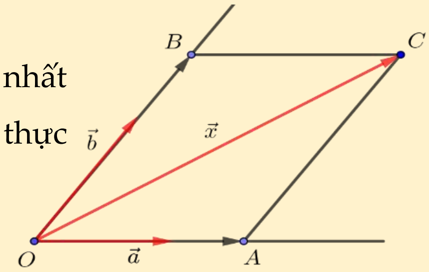
» *Nhận xét:*

Ba điểm phân biệt $A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có một số thực $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

## 4. Phân tích một vectơ theo hai vecto không cùng phương

» Cho hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương.

» Khi đó mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $h,k$ thực duy nhất sao cho $\boxed{\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}}$.



## B. Các dạng bài tập

### Dạng 1. Dựng vectơ

**Phương pháp**

(1) **Dựng vectơ $\vec{m} = k.\vec{a}$ :**

Khi đó $\vec{m} = k.\vec{a}$ :

- *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- *Ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

» Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}; \vec{0}.k = \vec{0}$.

(2) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- Điểm $G$ là trong tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

**Ví dụ 1.1.**

Cho hai điểm phân biệt $A, B$. Xác định điểm $M$ biết

(1) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

*Lời giải*

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

**Ví dụ 1.2.**

Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $AB$ sao cho $AM=\frac{1}{5}AB$. Tìm $k$ trong các đẳng thức sau:

(1) $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$ (3) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{AB}$

*Lời giải*

........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................

**Ví dụ 1.3.**

Cho tam giác đều $ABC$. Xác định

(1) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................

**Ví dụ 1.4.**

Cho tam giác $ABC$.

(1) Tìm điểm $K$ sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

(2) Tìm điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

*Lời giải*

........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................

..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................
..................................................................................................................................................

## Dạng 2. Sự cùng phương của hai vectơ – Ba điểm thẳng hàng

### Phương pháp

(1) **Hai vectơ cùng phương:**

- Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ là có một số thực $k$ để $\boxed{\vec{a} = k\vec{b}}$

(2) **Ba điểm thẳng hàng:**

- Ba điểm phân biệt $A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có một số thực $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

(3) **Hai điểm trùng nhau:**

- Để chứng minh hai điểm $M$, $N$ trùng nhau

$\rightarrow$ chứng minh $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ với $O$ là một điểm nào đó, *hoặc*

$\rightarrow$ chứng minh $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

(4) **Hai đường song song:**

**Ví dụ 2.1.**

Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là trung điểm của $AM$ và $K$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng ba điểm $B$, $I$, $K$ thẳng hàng.

*Lời giải*

**Ví dụ 2.2.**

Cho 4 điểm $O, A, B, C$ sao cho $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng $A, B, C$ thẳng hàng.

*Lời giải*

..........................................................................................................................................................

**Ví dụ 2.3.**

Cho hình bình hành $ABCD$ trên $BC$ lấy điểm $H$, trên $BD$ lấy điểm $K$ sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh $A, K, H$ thẳng hàng.

*Lời giải*

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

**Ví dụ 2.4.**

Cho tam giác $ABC$. Hai điểm $M$, $N$ được xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0} \text{ và } \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Chứng minh rằng $MN \,//\, AC$.

*Lời giải*

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

**Ví dụ 2.5.**

Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là trung điểm $AM$ và $K$ thuộc cạnh $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh $B, I, K$ thẳng hàng.

*Lời giải*

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................................

## Dạng 3. Tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức

### Phương pháp

▶ Để tìm tập hợp điểm $M$ thỏa mãn một đẳng thức véctơ, ta biến đổi đẳng thức véc tơ đó về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:

- Tập hợp các điểm *cách đều hai đầu mút* của một đoạn thẳng là *đường trung trực* của đoạn thẳng đó.
- Tập hợp các điểm *cách đều một điểm cố định* một khoảng không đổi là *đường tròn* có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.

**Ví dụ 3.1.**

Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ (2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

*Lời giải*

**Ví dụ 3.2.**

Cho tam giác $M$ . Tìm tập hợp điểm $\overrightarrow{MN}$ trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

(2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

(3) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$

*Lời giải*

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

**Ví dụ 3.3.**

Cho điểm $O$ cố định và hai vectơ $\vec{u};\vec{v}$ cố định.
Với mỗi số $m$ ta xác định được điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$ .
Tìm tập hợp điểm $M$ khi $m$ thay đổi.

***Lời giải***

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

**Ví dụ 3.4.**

Cho $\Delta ABC$ và ba vectơ cố định $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$. Với mỗi số thực $t$, ta lấy các điểm $A', B', C'$ sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'} = t\vec{v}$, $\overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm $G'$ của $\Delta A'B'C'$ khi $t$ thay đổi

***Lời giải***

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

**Ví dụ 3.5. (*)**

Cho tứ giác $ABCD$. Với mỗi số $k$ tùy ý, lấy các điểm $M$, $N$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm $I$ của đoạn thẳng $MN$ khi $k$ thay đổi.

*Lời giải*

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

## Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo 2 vectơ không cùng phương

### Phương pháp

Mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $h,k$ thực duy nhất sao cho $\boxed{\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}}$.

Ta lưu ý các trường hợp đặc biệt:

(1) Nếu $I$ là trung điểm của $AB$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

(2) Nếu $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

(3) Nếu ba biểm $A,B,C$ thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, với số $k$ xác định.

### Ví dụ 4.1.

Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là một điểm trên cạnh $BC$ sao cho $MB=2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

*Lời giải*

### Ví dụ 4.2.

Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $AM$, $M$ là trung điểm của $BC$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

**Ví dụ 4.3.**

Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$.

Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{GC},\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{GA};\vec{b}=\overrightarrow{GB}$.

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

**Ví dụ 4.4.**

Cho $AK$ và $BM$ là hai trung tuyến của tam giác $ABC$, trọng tâm $G$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AK}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BM}$

*Lời giải*

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

**Ví dụ 4.5.**

Cho $\Delta ABC$ với $I, J, K$ lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC};\overrightarrow{JC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JA};\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$.

(1) Tính $\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$.

(2) Chứng minh ba điểm $I, J, K$ thẳng hàng.

*Lời giải*

........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................
........................................................................................................................................................

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho $\Delta ABC$ với trung tuyến $AM$ và trọng tâm $G$. Khi đó đẳng thức nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

**» Câu 2.** Cho đoạn thẳng $AB$ có trung điểm $I$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. **C.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

**» Câu 3.** Cho tam giác $ABC$ với trung tuyến $AM$ và trọng tâm $G$. Tìm số thực $k$ thỏa mãn $\overrightarrow{GA}=k.\overrightarrow{GM}$.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-2$. **D.** $2$.

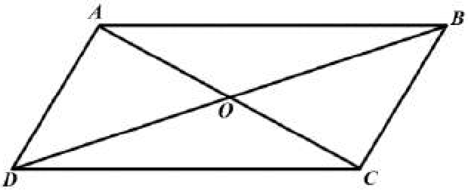
**» Câu 4.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ và $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của $k$ bằng

**A.** $2$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**» Câu 5.** Cho đoạn thẳng $AB$ và $M$ là một điểm nằm trên đoạn $AB$ sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$. Phát biểu nào sau đây là đúng:

**A.** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

**» Câu 6.** Cho hình bình hành $\overrightarrow{BC}$. tâm $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Chọn khẳng định đúng?




**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

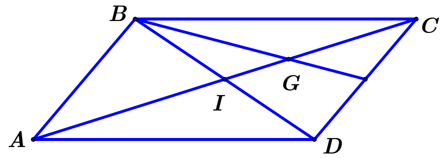
**» Câu 7.** Gọi $\vec{a}$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $\vec{b}$ của tam giác đều $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$. **B.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$. **C.** $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$. **D.** $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

**» Câu 8.** Cho điểm $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ nằm giữa hai điểm $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $AM=\frac{2}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

**» Câu 9.** Cho hình bình hành $\vec{n}=\frac{-5}{2}\vec{a}+5\vec{b}$ tâm $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}=\frac{-2}{5}\left(\frac{-5}{2}\vec{a}+5\vec{b}\right)=\frac{-2}{5}\vec{n}$; $\vec{m}$ là trọng tâm tam giác $\vec{n}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?




A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

B. $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

**» Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có $M$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $CM=2MB$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 11.** Biết tam giác $ABC$ có $AM$ là đường trung tuyến và $G$ là trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 12.** Cho ba điểm $M,N,P$ được xác định như hình vẽ dưới đây. Khi đó véc tơ $\overrightarrow{MN}$ bằng


A. $4\overrightarrow{MP}$.

B. $ABCD$.

C. $O$.

D. $M,N$.

**» Câu 13.** Cho $AG$ và điểm $M$. Gọi $AB$ lần lượt là hai điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{CI}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

**» Câu 14.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $E$ là trung điểm $BC$. Khi đó $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{EC}$ bằng

A. $\overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BD}$.

D. $\overrightarrow{DE}$.

**» Câu 15.** Cho tam giác $ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$ với $G$ là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $a\sqrt{3}$.

**» Câu 16.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $a$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng

A. $3a$.

B. $2a\sqrt{2}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $2a$.

**» Câu 17.** Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $I$ sao cho $3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{IB}$. Tìm $k$ biết $\overrightarrow{AI}=k.\overrightarrow{AB}$

A. $k=\frac{5}{8}$.

B. $k=1$.

C. $k=\frac{5}{3}$.

D. $k=\frac{3}{5}$.

**» Câu 18.** Cho $\Delta ABC$ có $E$ là trung điểm $BC$, trọng tâm $G$. Gọi $I$ là trung điểm $AG$, $M$ thuộc $AB$ sao cho $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
D. $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

**» Câu 19.** Cho hình bình hành $ABCD$, biểu diễn $\overrightarrow{DC}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
B. $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
D. $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

**» Câu 20.** Cho tam giác $ABC$. Lấy điểm $N$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $NB=\frac{5}{6}BC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AN}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 21.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$. Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$

A. $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$.
B. $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.
C. $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.
D. $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

**» Câu 22.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $M,N$ lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh $AB$ và $CD$ sao cho $AM=2BM$, $CD=2CN$. Giả sử $\overrightarrow{BN}=a.\overrightarrow{BA}+b.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MN}=c.\overrightarrow{BA}+d.\overrightarrow{BC}$. Tính tổng $S=a+b+c+d$?

A. $S=\frac{1}{2}$.
B. $S=\frac{8}{3}$.
C. $S=\frac{7}{6}$.
D. $S=\frac{5}{3}$.

**» Câu 23.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $D,E$ lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi $BE$ cắt $AD$ tại $K$. Tỉ số $\frac{AK}{AD}$ bằng

A. $\frac{4}{13}$.
B. $\frac{5}{11}$.
C. $\frac{4}{11}$.
D. $\frac{5}{13}$.

**» Câu 24.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$.
B. $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$.
C. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BG}$.
D. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BG}$.

**» Câu 25.** Cho tứ giác $ABCD$. Điểm $M$ thuộc cạnh $AB$, điểm $N$ thuộc cạnh $CD$ và thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=4$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

**» Câu 26.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $M$ và $N$ là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm $k$ để ba điểm $M,N,G$ thẳng hàng.

A. $k=\frac{5}{3}$. B. $k=\frac{3}{5}$. C. $k=\frac{3}{4}$. D. $k=\frac{3}{7}$.

**» Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $OA$ và $CD$. Biết $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b$.

A. $a+b=1$. B. $a+b=\frac{1}{2}$. C. $a+b=\frac{3}{4}$. D. $a+b=\frac{1}{4}$.

**» Câu 28.** Cho tam giác $ABC$. Có bao nhiêu điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$?

A. $2$. B. $0$. C. $1$. D. vô số.

**» Câu 29.** Cho tam giác $BC$ đều có cạnh bằng $M$. Biết tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|$ là một đường tròn. Hỏi đường tròn đó có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{22}$. B. $\sqrt{19}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\sqrt{21}$.

**» Câu 30.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp tất cả các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. Đường trung trực của $AB$.
B. Đường trung trực của $GE$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, $E$ là trung điểm $AB$.
C. Đường tròn tâm $G$, bán kính $R=AB$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.
D. Đường tròn tâm $G$, bán kính $R=\frac{3}{2}AB$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

**» Câu 31.** Cho tam giác $ABC$, $I$ là trung điểm của đoạn $AB$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MC$ là

A. Đường trung trực của đoạn $IC$. B. Đường tròn tâm $I$ bán kính $IC$.
C. Đường tròn tâm $I$ đường kính $IC$. D. Đường tròn tâm $I$ bán kính $MC$.

**» Câu 32.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N$ là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}$. Tìm $k$ để $M,N,P$ thẳng hàng.

A. $k=-3$. B. $k=4$. C. $k=-4$. D. $k=3$.

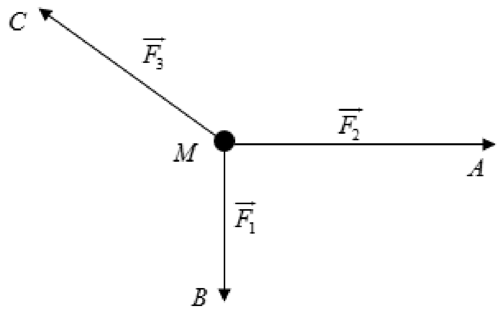
**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$ được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. Xác định $x$ để $A$, $M$, $N$ thẳng hàng.

A. $x=2$. B. $x=-1$. C. $x=\frac{1}{2}$. D. $x=-\frac{1}{2}$.

**» Câu 34.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$, $(d)$ là đường thẳng qua $A$ và song song $BC$. Khi $M$ di động trên $(d)$ thì giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $2a\sqrt{3}$.

**» Câu 35.** Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA},\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB},\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $28N$ và $45N$. Tìm cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ biết $AMB=90^0$.




**A.** $73N$.　　**B.** $53N$.　　**C.** $60N$.　　**D.** $80N$.

## B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

**» Câu 36.** Cho bốn điểm $A,B,C,D$ có $M,N$ là trung điểm của $AB,CD$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$ | | |
| (d) | $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ | | |

**» Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $D$ là điểm đối xứng của $B$ qua $G, M$ là trung điểm của $BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$ | | |

**» Câu 38.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O, H$ là trực tâm tam giác, $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $BD//CH$ | | |
| (b) | $CD//BH$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$ | | |

**» Câu 39.** Cho hình bình hành $ABCD$, tâm $O$. Gọi $M,N$ theo thứ tự là trung điểm của $AB,CD$ và $P$ là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ | | |
| (b) | $3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ | | |
| (c) | Ba điểm $B,P,N$ không thẳng hàng | | |
| (d) | Ba đường thẳng $AC,BD,MN$ đồng quy | | |

**» Câu 40.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AB,BC$. Lấy hai điểm $I,J$ sao cho: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $M,N,J$ thẳng hàng | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{JM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$ | | |
| **(c)** | $J$ là trung điểm của $BI$ | | |
| **(d)** | Gọi $E$ là điểm thuộc $AB$ sao cho $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì $C,E,J$ thẳng hàng | | |

**» Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ có $M$ là trung điểm $BC$. Gọi $G$ là trọng tâm, $H$ là trực tâm, $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, $AA'$ là đường kính của $(O)$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{A'C}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$ | | |

**» Câu 42.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $I$ là điểm trên cạnh $BC$ sao cho $2CI=BI$. $J$ là điểm trên cạnh $BC$ kéo dài sao cho $5JB=JC$. $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{CI}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{AG}=\frac{14}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$ | | |

**» Câu 43.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $I,J$ là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ .Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{IG}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(d)** | 3 điểm $I,J,G$ thẳng hàng | | |

**» Câu 44.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB},\vec{v}=\overrightarrow{AE}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ | | |

» **Câu 45.** Cho tam giác $ABC$. Hai điểm $M,N$ được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}, \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AC}$ | | |
| (b) | Hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương | | |
| (c) | $M$ thuộc đường thẳng $AC$ | | |
| (d) | Hai đường thẳng $MN$ và $AC$ song song | | |

## C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 46.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại $B$ có $\hat{A}=30^\circ, AB=1$. Gọi $I$ là trung điểm của $AC$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ *, kết quả làm tròn đến hàng phần mười*

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $M$ tùy ý không thuộc các đường thẳng $AB,BC,AC$. Gọi $A',B',C'$ theo thứ tự là các điểm đối xứng của $M$ qua các trung điểm $J,K,I$ của cạnh $BC,AC,AB$. Biết ba đường thẳng $AA',BB',CC'$ đồng quy tại một điểm (đặt điểm đó là $N$). Khi đó $MN$ luôn đi qua một điểm cố định khi $M$ di động thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\frac{a}{b}\overrightarrow{MG}$ với $a;b$ là số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b^2$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 48.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BD$. Biết $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{IJ}$, khi đó $k=?$

**Điền đáp số:** ☐

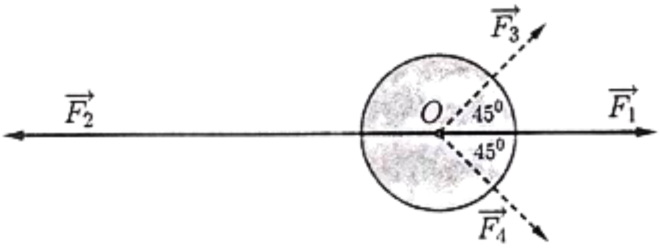
» **Câu 49.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. Các điểm $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$ và $I$ là giao điểm của $AD$ và $EF$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE},\vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta thu được kết quả dạng $a.\vec{u}+b.\vec{v}$ với $a;b$ là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S=a+b$.

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 50.** Nếu $G$ và $G'$ lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ thì $k\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$, khi đó $k=?$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 51.** Một vật đang ở vị trí $O$ chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$, trong đó độ lớn lực $\vec{F_2}$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F_1}$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F_3},\vec{F_4}$ có phương hợp với lực $\vec{F_1}$ các góc $45^\circ$ như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $20N$. Tính tổng độ lớn của các lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*




Điền đáp số:

» **Câu 52.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AF}$. Vậy $k=?$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*

Điền đáp số:

» **Câu 53.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Lấy các điểm $I$, $J$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}; \overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IO}$, vậy $k=?$

Điền đáp số:

» **Câu 54.** Cho $\Delta ABC$. Gọi J là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $JA=\frac{2}{3}JC$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ta thu được kết quả dạng $a.\overrightarrow{BA}+b.\overrightarrow{BC}$ với $a;b$ là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S=a+b$.

Điền đáp số:

» **Câu 55.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng $DC, AB$ theo thứ tự lấy các điểm $M,N$ sao cho $DM=BN$. Gọi $P$ là giao điểm của $AM, DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN, DB$. Khi đó $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{QB}$. Vậy $k=?$

Điền đáp số:

----------------------------- Hết -----------------------------

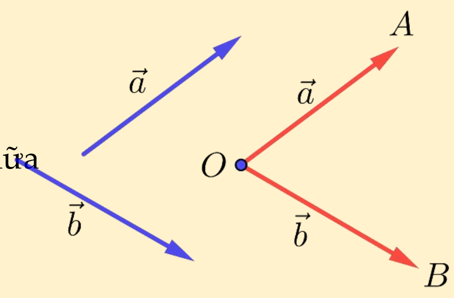
Chương 05

# Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

## A Lý thuyết

### 1. Góc giữa hai vectơ

**Định nghĩa**




» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

» Từ một điểm $O$ bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ $0^0$ đến $180^0$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

» Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

♨ *Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.*

### 2. Tích vô hướng hai vectơ

**Định nghĩa**

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▸ **Kí hiệu** là $\vec{a}\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước

**Chú ý**

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

⇨ Ta có $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2$

## 3. Tính chất của tích vô hướng

### Các tính chất:

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

(1) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).

(2) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

(3) $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$.

(4) $\vec{a}^2\ge 0, \vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

(5) $\vec{a}.\vec{b}>0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc nhọn.

(6) $\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc tù.

▶ **Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

TVH

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2.$$

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2.$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2.$$

▶ **Chú ý:**

$\Delta ABC$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AB^2+AC^2-BC^2.$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}BA^2+BC^2-AC^2.$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}CA^2+CB^2-AB^2.$$

## B. Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính tích vô hướng hai vectơ

**Phương pháp**

(1) **Dựa vào định nghĩa:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▶ **Kí hiệu** là $\vec{a}\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$.

(2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

**1.** $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).

**2.** $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

**3.** $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

**4.** $\vec{a}^2\geq 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

(3) **Chú ý:**

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\vec{b}=0$.

Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

**Ví dụ 1.1.**

Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ với $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120°$. Tính

(1) $\vec{a}\vec{b}$ (2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$ (3) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

*Lời giải*

.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................
.................................................................................................................................

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

**Ví dụ 1.2.**

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ (3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

**Ví dụ 1.3.**

Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $AB = 2a$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ (2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

*Lời giải*

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

## Dạng 2. *Xác định góc giữa hai vectơ*

### *Phương pháp*

(1) Tính góc: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

(2) Tính độ dài: $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$

### Ví dụ 2.1.

Cho $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$. Định góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ biết:

(1) $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$

(2) $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$

(3) $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}|.|\vec{b}|$

(4) $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3};\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

*Lời giải*

.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

**Ví dụ 2.2.**

Cho tam giác đều $ABC$. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

*Lời giải*

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

**Ví dụ 2.1.**

Cho tam giác $ABC$ có $AB=5$, $BC=7$, $CA=8$.

(1) Tính $\cos A, \cos B, \cos C$

(2) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

(3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh $BC$ của tam giác $ABC$.

*Lời giải*

..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................
..............................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................
.......................................................................................................................................................

## Dạng 3. *Chứng minh đẳng thức liên quan tích vô hướng*

### *Phương pháp*

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▸ **Kí hiệu** là $\vec{a}\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})}$.

(2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

**1.** $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).

**2.** $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

**3.** $(k.\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$

**4.** $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

(3) **Chú ý:** $\vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$

**Ví dụ 3.1.**

Cho tam giác $\Delta ABC$, Chứng minh rằng: với điểm $M$ tuỳ ý ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}=0$$

*Lời giải*

..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................

**Ví dụ 3.2.**

Cho $O$ là trung điểm của $AB$ và $M$ là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-OA^2$$

*Lời giải*

..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................
..........................................................................................................................

**Ví dụ 3.3.**

Cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ và $M$ là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$$

*Lời giải*

**Ví dụ 3.4.**

Cho $\Delta ABC$ có 3 trung tuyến $AD, BE, CF$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$$

*Lời giải*

**Ví dụ 3.5.**

Cho nửa đường tròn đường kính $AB$.

Có $AC$ và $BD$ là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại $E$.

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = AB^2$$

*Lời giải*

................................................................................................................................................................

................................................................................................................................................................

## Dạng 4. Tập hợp điểm

### Phương pháp

- **Loại 1:** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k\quad(1)$ $(A,B$ cố định)
  - Với $k=0$: Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn đường kính $AB$
  - Với $k\neq 0$: Gọi $I$ là trung điểm $AB$:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=k\Leftrightarrow IM^2-IA^2=k\Leftrightarrow IM^2=k+IA^2=\frac{AB^2}{4}+k$$

(1) Nếu $\frac{AB^2}{4}+k>0\Leftrightarrow k>-\frac{AB^2}{4}$. Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $I$; $R=\sqrt{\frac{AB^2}{4}+k}$.

(2) Nếu $\frac{AB^2}{4}+k=0\Leftrightarrow IM=0$. Tập hợp các điểm $M$ là một điểm $I$

(3) Nếu $\frac{AB^2}{4}+k<0$ : Tập hợp các điểm $M$ là $\varnothing$ .

- **Loại 2:** $\overrightarrow{AM}.\vec{v}=k\quad(2)$ $(A$ cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định)
  - Với $k=0$: Tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng qua $A$, có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$
  - Với $k\neq 0$: $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{A'M'}.\vec{v}=k$ với $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của $\vec{v}$ $\Rightarrow M'$ cố định.

  Tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng qua $M'$, có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$.

- **Loại 3:** $aMA^2+bMB^2=k\quad(3)$ $(A,B$ cố định; $a,b$ hằng số, $a+b\neq 0)$
  - Gọi $I$ thoả $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I$ cố định.

$$(3)\Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+b\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=k$$

$$\Leftrightarrow(a+b)MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}\right)+aIA^2+bIB^2=k\Leftrightarrow(a+b)MI^2=k-aIA^2-bIB^2$$

(1) Nếu $\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}>0$. Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $I$; $R=\sqrt{\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}}$.

(2) Nếu $\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}=0$. Tập hợp các điểm $M$ là một điểm $I$

(3) Nếu $\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}<0$: Tập hợp các điểm $M$ là $\varnothing$ .

- **Loại 4:** $aMA^2+bMB^2+cMC^2=k\quad(4)$ $(A,B,C$ cố định; $a,b,c$ hằng số, $a+b+c\neq 0)$
  - Gọi $I$ thoả $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I$ cố định.
  - Tương tự $MI^2=\frac{k-aIA^2-bIB^2-cIC^2}{a+b+c}$

**Ví dụ 4.1.**

Cho $\Delta ABC$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$

(2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

*Lời giải*

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**Ví dụ 4.2.**

Cho hai điểm $A, B$ cố định có độ dài bằng $a$, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực $k$ cho trước. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$ (2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2$

***Lời giải***

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................

**Ví dụ 4.3.**

Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$.
Tìm tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $MA^2+MB^2+MC^2=3MD^2$.

*Lời giải*

.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................

## Dạng 5. Chứng minh vuông góc dùng tích vô hướng

### Phương pháp

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▸ **Kí hiệu** là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

(2) **Tính chất:**

Với ba vecto $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

**1.** $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).

**2.** $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

**3.** $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

**4.** $\vec{a}^2\ge 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

(3) **Chú ý:** $\vec{a}^2=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$

▫ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

**Ví dụ 5.1.**

Cho $\vec{a}\perp\vec{b},|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2}$. Biết $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b};\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$. Chứng minh rằng:

$$\vec{u}\perp\vec{v}.$$

*Lời giải*

..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................

**Ví dụ 5.2.**

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AC\perp BD\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+AD^2.$$

*Lời giải*

..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................

**Ví dụ 5.3.**

Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $3a$. Lấy các điểm $M,N,P$ lần lượt trên các cạnh $BC,CA,AB$ sao cho $BM=a$, $CN=2a$, $AP=x$. $0<x<3a$. Xác định $x$ để $AM$ và $PN$ vuông góc với nhau.

*Lời giải*

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$.
**B.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.
**C.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}.\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.
**D.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

**» Câu 2.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

**A.** $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

**» Câu 3.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$.

**» Câu 4.** Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.
**B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
**C.** $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2=|\vec{a}.\vec{b}|^2$.
**D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

**» Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có $\hat{A}=90^0$, $\hat{B}=60^0$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

**A.** $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

**» Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh bằng $a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2}{2}$.

**» Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a; AC=a\sqrt{3}$ và $AM$ là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

**A.** $\frac{a^2}{2}$. **B.** $a^2$. **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

**» Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $BAD=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**» Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $BAD=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-1$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

**» Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $BAD=60°$. Độ dài đường chéo $AC$ bằng

**A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $5$. **D.** $\frac{7}{2}$.

**» Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $BAD=60°$. Độ dài đường chéo $BD$ bằng

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**» Câu 12.** Cho các véc tơ $\vec{a};\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ và $|\vec{c}|=z$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$.

Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

**A.** $A=\dfrac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. **B.** $A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. **C.** $A=\dfrac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. **D.** $A=\dfrac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.

**» Câu 13.** Cho $\Delta ABC$ đều; $AB=6$ và $M$ là trung điểm của $BC$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

**A.** $-18$. **B.** $27$. **C.** $18$. **D.** $-27$.

**» Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $B$, $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

**A.** $3a^2$. **B.** $\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

**» Câu 15.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

**A.** $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

**» Câu 16.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

**A.** $-a^2$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{-a^2}{2}$.

**» Câu 17.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a; BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

**» Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

**A.** $16$. **B.** $0$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4$.

**» Câu 19.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $B=30°, AC=2$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

**A.** $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

**» Câu 20.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, BAD=60°$. Điểm $K$ thuộc $AD$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $0$. **D.** $a^2$.

**» Câu 21.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.

**» Câu 22.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc $\alpha$ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

**A.** $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=45^0$. **D.** $\alpha=180^0$.

**» Câu 23.** Cho hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

**A.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=45^0$. **B.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0^0$. **C.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=180^0$. **D.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90^0$.

**» Câu 24.** Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4; \left|\vec{b}\right|=3; \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

**A.** $\alpha=60^0$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$.

**» Câu 25.** Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left|-\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là

**A.** $60°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

**» Câu 26.** Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

**» Câu 27.** Cho hai điểm $B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $BC$. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

**C.** Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

**» Câu 28.** Cho ba điểm $A,B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $AB$.
**B.** Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.
**C.** Đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với $AC$.
**D.** Đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$.

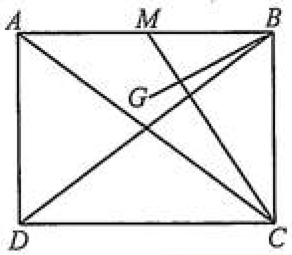
**» Câu 29.** Cho tam giác $ABC$, điểm $J$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, $I$ là trung điểm của cạnh $AB$, điểm $K$ thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Một điểm $M$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$. Tập hợp điểm $M$ là đường nào trong các đường sau.

**A.** Đường tròn đường kính $IJ$. **B.** Đường tròn đường kính $IK$.

**C.** Đường tròn đường kính $JK$. **D.** Đường trung trực đoạn $JK$.

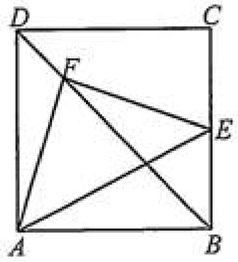
## B. *Câu hỏi – Trả lời đúng/sai*

**» Câu 30.** Cho hình chữ nhật $ABCD, AB=4a, AD=3a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB, G$ là trọng tâm tam giác $ACM$



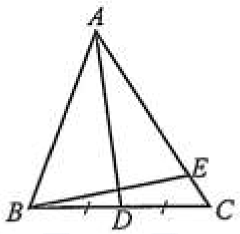

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. | | |
| (c) | $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CM}=-a^2$. | | |

**» Câu 31.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Lấy $E$ là trung điểm của $BC$, điểm $F$ thoả mãn $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ Khi đó:




| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$ | | |
| **(d)** | Tam giác $AEF$ vuông cân | | |

**» Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ có có $AB=4\sqrt{2}, AC=6, BAC=45^\circ$. Gọi $D$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Điểm $E$ thoả mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}(k\in\mathbb{R})$ (Hình). Khi đó:




| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $BC=3\sqrt{5}$ | | |
| **(d)** | $AD\perp BE$ khi $k=\frac{14}{15}$ | | |

**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ đều, đường cao $AH$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=30^\circ$ | | |
| **(b)** | $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$ | | |
| **(c)** | $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=130^\circ$ | | |

**» Câu 34.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc $B$ bằng $60^\circ$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$ | | |
| **(b)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=30^\circ$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$ | | |

**» Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a, BC=2a$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $ACB=60^\circ$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(b)** | $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$. | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$ | | |

**» Câu 36.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$, có cạnh $a$. Biết $M$ là trung điểm của $AB,G$ là trọng tâm tam giác $ADM$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{3}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a^2$ | | |

**» Câu 37.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$, cạnh bằng $a$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=a^2$ | | |

**» Câu 38.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $B$, biết $AD=a,BC=3a$ và cạnh $AB=2a$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$ | | |
| **(d)** | Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AB,CD$. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$ | | |

**» Câu 39.** Cho tam giác đều $ABC$, đường cao $AH$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$ | | |
| **(b)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$ | | |
| **(c)** | $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ$ | | |

**» Câu 40.** Cho tam giác $ABC$ đều có cạnh $a$, có trọng tâm $G$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{4}$ | | |
| **(c)** | $AGB=120^\circ$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$ | | |

**» Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2a,AC=3a,BAC=60^\circ$. Gọi $I$ là trung điểm đoạn thẳng $BC$. Điểm $J$ thuộc đoạn $AC$ thỏa mãn: $12AJ=7AC$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(b)** | $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(d)** | $AI\perp BJ$ | | |

## C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 42.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8$; đáy nhỏ $CD=4$; đường cao $AD=6$; $I$ là trung điểm của $AD$. Tính $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{ID}$.

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 43.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=1, AC=2\sqrt{3}$ và $AM$ là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 44.** Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AM^2-kBC^2$. Vậy $k=?$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A; M$ là trung điểm của $BC, H$ là hình chiếu của $M$ trên $AC; E$ là trung điểm của $MH$. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 46.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a, CA=b, AB=c$. Biết $M$ là trung điểm của $BC$. Tính $\overrightarrow{AM}^2$ ta thu được kết quả $\frac{m\left(b^2+c^2\right)-a^2}{n}$, với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m^n$

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 47.** Cho nửa đường tròn đường kính $AB$. Biết rằng $AC$ và $BD$ là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại $E$. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$ biết $AB=2$.

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $AC$ sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi $N$ là trung điểm $CD$. Khi đó $BMN$ là tam giác vuông và $MB=k\cdot MN$, với $k$ là số tự nhiên. Xác định $k$.

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Gọi $H$ là trung điểm của $BC, D$ là hình chiếu của $H$ trên $AC, M$ là trung điểm của $HD$. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

**Điền đáp số:** ☐

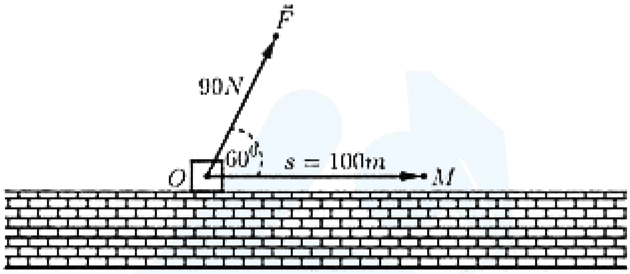
» **Câu 50.** Cho hai điểm $A,B$ cố định có khoảng cách bằng 1. Tập hợp điểm $M$ sao cho: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

**Điền đáp số:** ☐

» **Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ và số thực $k$. Tập hợp điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính dạng $R=n\cdot\sqrt{\dfrac{k+a^2}{m}}$, với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m+n$

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 52.** Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc $60^\circ$. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là bao nhiêu Jun?




✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 53.** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo $AC$ và $BD$ cắt nhau tại $O$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là trực tâm các tam giác $ABO$ và $CDO$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$. Tính $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}$?

✍ **Điền đáp số:**

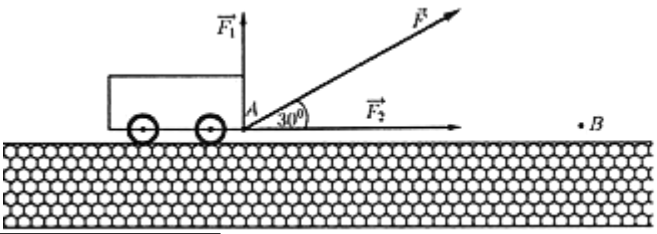
» **Câu 54.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK\perp AC, K\in AC$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AK$ và $CD$. Tìm số đo góc $BMN$.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 55.** Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm $M$ sao cho $T=3MA^2+2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 56.** Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ $A$ đến $B$ có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng $30^\circ$ và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$. Gọi $m;n;k$ lần lượt là các công sinh ra bởi các lực $\vec{F},\vec{F_1},\vec{F_2}$. Khi đó tính $S=m-n-k$.




✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có cạnh $AC=7cm$ và $BC=14cm$. Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

✍ **Điền đáp số:**

**» Câu 58.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$ sao cho $BM = 1$, trên cạnh $CD$ lấy điểm $N$ sao cho $DN = 1$ và $P$ là trung điểm $BC$. Tính $\cos MNP$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 59.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, E$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$. Tính: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 60.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh 1 nội tiếp đường tròn $(O)$ bán kính $R, M$ là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn $(O)$. Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 61.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, trên hai cạnh $AB$ và $AC$ lần lượt lấy hai điểm $B'$ và $C'$ sao cho $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 62.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = \sqrt{2}$. Gọi $K$ là trung điểm của cạnh $AD$. Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**✍ Điền đáp số:**

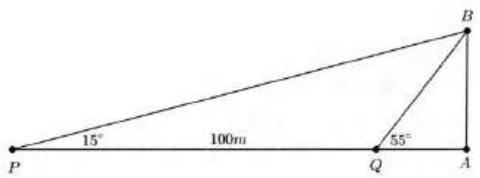
**» Câu 63.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 64.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1. Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 1^2$ là đường tròn bán kính $R = ?$

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 65.** Hai chiếc tàu thủy $P$ và $Q$ trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân $A$ của tháp hải đăng $AB$ ở trên bờ biển. Từ $P$ và $Q$ người ta nhìn chiều cao $AB$ của tháp dưới các góc $BPA = 15^\circ$ và $BQA = 55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).*




**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 66.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm $O$ có cạnh bằng 1 và $ABD = 60^\circ$. Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI}$.

**✍ Điền đáp số:**

**» Câu 67.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh là 3. Điểm $M$ thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm $M$ thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» **Câu 68.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh là 3. Điểm $M$ thỏa mãn: $MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm $M$ thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» **Câu 69.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh là 3. Điểm $M$ thỏa mãn: $2MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm $M$ thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» **Câu 70.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $H$ là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=kBC^2$. Khi đó $k=?$

Điền đáp số:

» **Câu 71.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Điền đáp số:

------------------------------------ Hết ------------------------------------

Chương 05

# Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

## A Lý thuyết

### 1. Khái niệm vectơ

**Định nghĩa**

» Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.


▶ *Kí hiệu:*

» Vectơ có điểm đầu $A$ và điểm cuối $B$ được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ $AB$".

» Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

▶ *Độ dài vectơ:*

» Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

» Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

» Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

### 2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

**Định nghĩa**

▶ *Giá của vectơ:*

» Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của 1 vectơ được gọi là *giá của vectơ* đó.

▶ *Vectơ cùng phương, cùng hướng:*

» Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

» Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

♨ *Nhận xét:*

» Ba điểm phân biệt $A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

## 3. Hai vectơ bằng nhau – đối nhau

### Định nghĩa

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng *cùng hướng* và có *cùng độ dài*.

Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

♨ ***Chú ý:***

» Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm $O$, thì ta luôn tìm được một điểm $A$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

## 4. Vectơ – không

### Định nghĩa

» Vectơ-không là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.

» Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

» Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ và $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

## B. Các dạng bài tập

### Dạng 1. Xác định vectơ; phương, hướng; độ dài của vectơ

*Phương pháp*

(1) **Định nghĩa vectơ:**

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

(2) **Độ dài vectơ:**

- Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

(3) **Vectơ cùng phương – cùng hướng:**

- Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

***Nhận xét:***

» Ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

(4) **Hai vectơ bằng nhau:**

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng *cùng hướng* và có *cùng độ dài*.

Kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

(5) **Vectơ – không:**

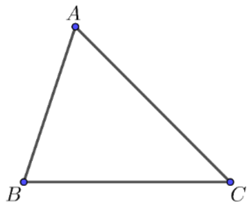
- Là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.
- Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.
- Như vậy $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\ldots$ và $\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv N$.

**Ví dụ 1.1.**

Cho tam giác *ABC*, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh *A, B, C*?

***Lời giải***

Ta có 6 vectơ: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AC}$.



**Ví dụ 1.2.**

Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Tìm số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với

(1) Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

(2) Vectơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

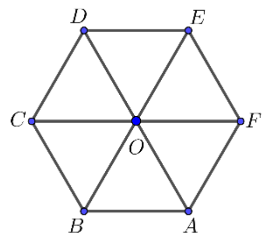
*Lời giải*

(1) Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

Các vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ là: $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$.

(2) Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

Các vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OC}$ là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$

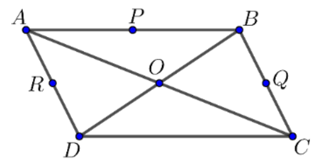



**Ví dụ 1.3.**

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P$, $Q$, $R$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $AD$. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm số vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AR}$

*Lời giải*

Có 3 vectơ là $\overrightarrow{RD}$; $\overrightarrow{BQ}$; $\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{PO}$.



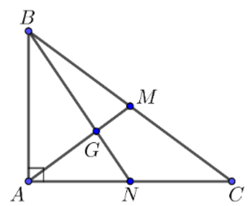

**Ví dụ 1.4.**

Gọi G là trọng tâm tam giác vuông $ABC$ với cạnh huyền $BC = 12$. Tính $\left|\overrightarrow{GM}\right|$ (với $M$ là trung điểm của $BC$)

*Lời giải*

Ta có $M$ là trung điểm $BC$.
Gọi $N$ là trung điểm $AC$.
Khi đó giao điểm của $BC \cap AC = G$

Vì $\left|\overrightarrow{GM}\right| = GM = \frac{1}{3}.AM = \frac{1}{3}.6 = 2$




**Ví dụ 1.5.**

Cho điểm $A$ và véctơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm điểm $M$ sao cho:

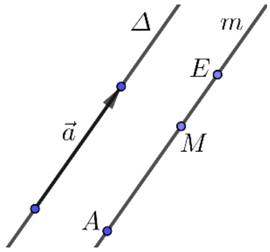
(1) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.

(2) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

*Lời giải*

Gọi $\Delta$ là giá của $\vec{a}$.

(1) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.




Nếu $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$ thì đường thẳng $AM$ song song với $\Delta$. Do đó $M$ thuộc đường thẳng $m$ đi qua $A$ và song song với $\Delta$.

Ngược lại, mọi điểm $M$ thuộc đường thẳng $m$ thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.

*Chú ý rằng* nếu $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ thì $m$ trùng với $\Delta$.

(2) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

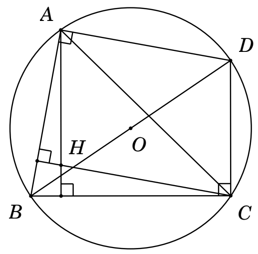
Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm $M$ thuộc một nửa đường thẳng gốc $A$ của đường thẳng $m$.

Cụ thể, đó là nửa đường thẳng chứa điểm $E$ sao cho $\overrightarrow{AE}$ và $\vec{a}$ cùng hướng.

**Ví dụ 1.6.**

Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

***Lời giải***




Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AH // DC$.

Tương tự ta cũng có $CH // AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

## Dạng 2. Hai vectơ bằng nhau

**Phương pháp**

Để chứng minh hai véctơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

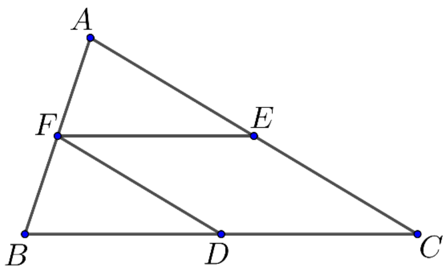
| | |
|---|---|
| **Cách 01** | $\left\|\vec{a}\right\|=\left\|\vec{b}\right\|$ và $\vec{a};\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$. |
| **Cách 02** | Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. |
| **Cách 03** | Nếu $\vec{a}=\vec{b};\vec{b}=\vec{c}$ thì $\vec{a}=\vec{c}$. |

**Ví dụ 2.1.**

Cho tam giác $ABC$ có $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$.

Chứng minh $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$.

*Lời giải*




- Ta có: $D,E,F$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$.

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình $\Delta ABC$ và $EF=\frac{1}{2}BC\ (1)$.

- Lại có $D$ là trung điểm $BC \Rightarrow CD=\frac{1}{2}CB\ (2)$.

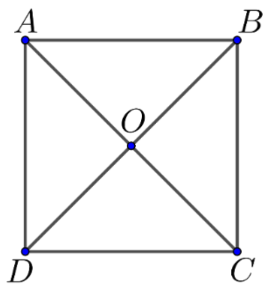
- Dễ thấy $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}\ (3)$

Từ $(1);(2);(3) \Rightarrow \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$.

**Ví dụ 2.2.**

Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$. Liệt kê tất cả các véctơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông là điểm đầu và điểm cuối.

*Lời giải*




- Ta có các cặp véctơ sau:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC};$

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC};$

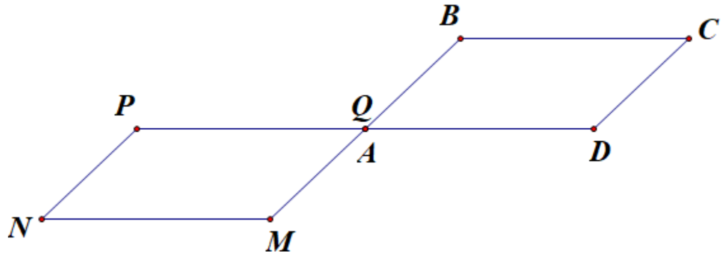
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO};\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO};\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}.$

**Ví dụ 2.3.**

Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA},\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.

*Lời giải*




Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}\end{cases}$.

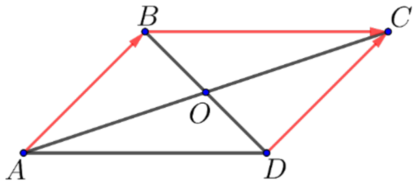
Ta có: $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$ .

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

**Ví dụ 2.4.**

Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$

***Lời giải***




- Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow AB=DC$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{DC}$

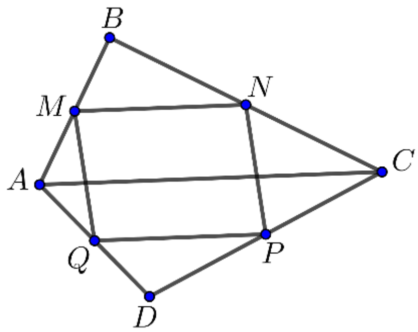
$\Leftrightarrow \begin{cases}AB=DC\\ AB//DC\end{cases}$

- Nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (1)
- Vì $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow AB=BC$ (2)
- Nên $ABCD$ là hình thoi.

**Ví dụ 2.5.**

Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi $M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,BC,CD,DA$. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

***Lời giải***




Ta có $\begin{cases}MN//AC\\ MN=\dfrac{1}{2}AC\end{cases}$;

$\begin{cases}PQ//AC\\ PQ=\dfrac{1}{2}AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MN//PQ\\ MN=PQ\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

**Ví dụ 2.6.**

Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

***Lời giải***

Ta có:

• $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\begin{cases}AB\,//\,CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow\begin{cases}AB\,//\,CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ là $ABCD$ là hình bình hành.

**Ví dụ 2.7.**

Cho tam giác $ABC$. Gọi $D,E,F$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC,CA,AB$. Chứng minh $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$.

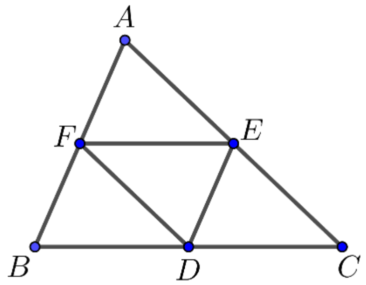
***Lời giải***

*Cách 1:*

Vì $EF$ là đường trung bình của tam giác $ABC$

Nên $EF\,//\,CD$ nên

$EF=\frac{1}{2}CB\Rightarrow EF=CD\Rightarrow\left|\overrightarrow{EF}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$ (1).




Mặt khác: $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$.

*Cách 2:* Chứng minh $EFCD$ là hình bình hành

Dễ chứng minh được $EF=\frac{1}{2}BC=CD$ và $EF\,//\,CD\Rightarrow EFCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$

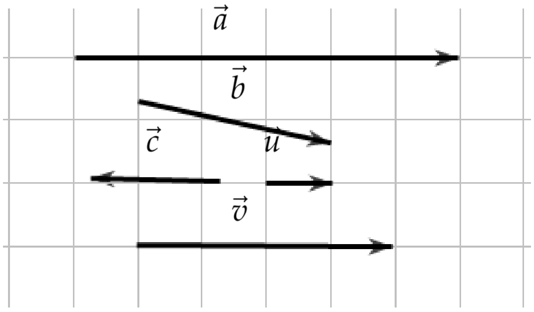
Chương 05

# Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{u}$ và $\vec{v}$ như trong hình bên.




Hỏi có bao nhiêu vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

*Lời giải*

**Chọn B**

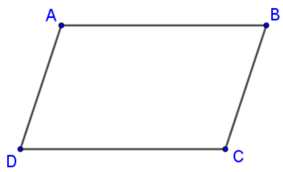
Các vetơ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$ là vectơ $\vec{a}$ và $\vec{v}$.

**» Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và cuối là các đỉnh của hình bình hành?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

*Lời giải*

**Chọn C**



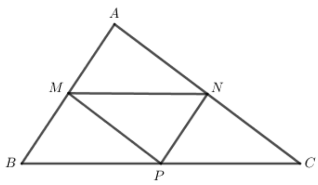

Vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với các vectơ $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DC}$

**» Câu 3.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,AC,BC$. Số các vectơ khác vectơ không, bằng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm $M,N,P,A,B,C$ là

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

*Lời giải*

**Chọn B**



Các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PC}$.

**» Câu 4.** Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì:

**A.** tam giác $ABC$ là tam giác cân
**B.** tam giác $ABC$ là tam giác đều
**C.** $A$ là trung điểm đoạn $BC$
**D.** điểm $B$ trùng với điểm $C$

*Lời giải*

**Chọn D**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B \equiv C$

**» Câu 5.** Cho ba điểm $M$, $N$, $P$ thẳng hàng, trong đó $N$ nằm giữa hai điểm $M$ và $P$. Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$
**B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$
**C.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$
**D.** $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

*Lời giải*

**Chọn A**

**» Câu 6.** Cho tam giác $ABC$, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh $A$, $B$, $C$?

**A.** 4
**B.** 6
**C.** 9
**D.** 12

*Lời giải*

**Chọn B**

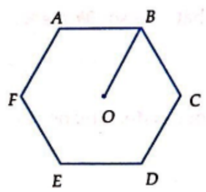
Ta có các vecto: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

**» Câu 7.** Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 4
**B.** 6
**C.** 8
**D.** 10

*Lời giải*

**Chọn B**




Các vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ là: $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$.

**» Câu 8.** Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

**A.** $ABCD$ là hình bình hành
**B.** $ACBD$ là hình bình hành
**C.** $AD$ và $BC$ có cùng trung điểm
**D.** $\overrightarrow{AB} = CD$ và $AB // CD$

*Lời giải*

**Chọn C**

**» Câu 9.** Cho hình vuông $ABCD$, câu nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
**B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
**C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
**D.** $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$

*Lời giải*

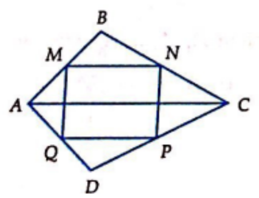
**Chọn D**

**» Câu 10.** Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$
**B.** $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$
**C.** $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$
**D.** $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$

*Lời giải*

Chọn D




Ta có $\begin{cases} MN//PQ \\ MN = PQ \end{cases}$.

Do đó MNPQ là hình bình hành.

» **Câu 11.** Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

**A.** 4 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

*Lời giải*

Chọn D

Một vectơ khác vectơ không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Do đó có 12 cách chọn 2 điểm trong 4 điểm của tứ giác.

» **Câu 12.** Cho 5 điểm $A, B, C, D, E$ có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là $A$ và điểm cuối là một trong các điểm đã cho:

**A.** 4 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 12

*Lời giải*

Chọn A

» **Câu 13.** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

**A.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau

**B.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành

**C.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều

**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau

*Lời giải*

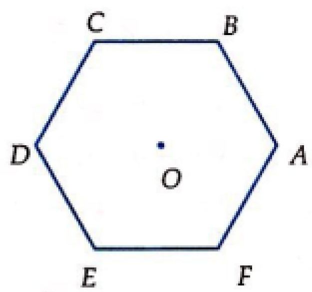
Chọn D

» **Câu 14.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm $O$ sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

**A.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

*Lời giải*

Chọn D




Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

$\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

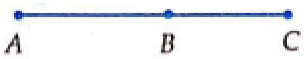
» **Câu 15.** Cho ba điểm $A, B, C$ cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:

**A.** Điểm $B$ thuộc đoạn $AC$ **B.** Điểm $A$ thuộc đoạn $BC$

**C.** Điểm $C$ thuộc đoạn $AB$ **D.** Điểm $A$ nằm ngoài đoạn $BC$

*Lời giải*

**Chọn A**

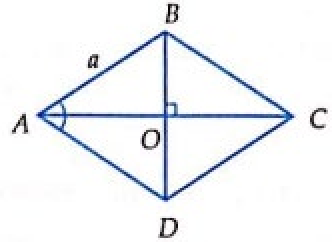



**» Câu 16.** Cho hình thoi tâm $O$, cạnh bằng $a$ và $\widehat{A}=60°$. Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

*Lời giải*

**Chọn A**



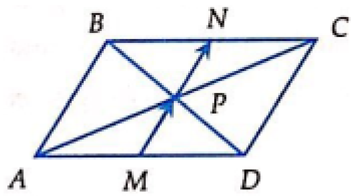

Vì $\widehat{A}=60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

**» Câu 17.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $AD$, $BC$ và $AC$. Biết $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$. Chọn câu đúng.

**A.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

*Lời giải*

**Chọn C**




Ta có: $MP//DC, MP=\dfrac{1}{2}DC$, $PN//AB, PN=\dfrac{1}{2}AB$. Mà $MP=PN$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

**» Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ với trực tâm $H$. $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **B.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{HC}$

**C.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$ **D.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

*Lời giải*

**Chọn C**

Ta có $BD$ là đường kính $\Rightarrow \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$.

$AH\perp BC, DC\perp BC \Rightarrow AH//DC$

Ta lại có $CH\perp AB, DA\perp AB \Rightarrow CH//DA$

Từ và $\Rightarrow$ tứ giác $HADC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

**» Câu 19.** Cho $\Delta ABC$ với điểm $M$ nằm trong tam giác. Gọi $A', B', C'$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $CA$, $AB$ và $N$, $P$, $Q$ lần lượt là các điểm đối xứng với $M$ qua $A', B', C'$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

**C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

*Lời giải*

**Chọn B**

Ta có $AMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có $AQBM$ và $BMCN$ là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

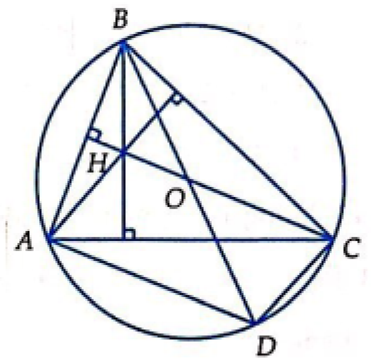
$\Rightarrow AQNC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$.

**» Câu 20.** Cho tam giác $ABC$ có $H$ là trực tâm và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua $O$. Câu nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

*Lời giải*

**Chọn A**




Ta có thể chỉ ra được $ADCH$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

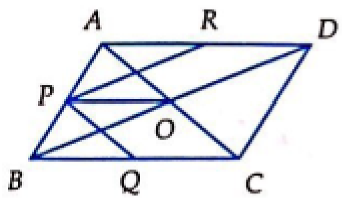
**» Câu 21.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Gọi $P$, $Q$, $R$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $AD$. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

**A.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$

**C.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

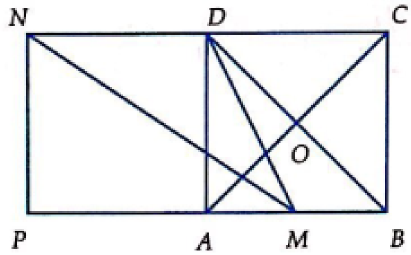
$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QB}$

**» Câu 22.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ cạnh $a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

**A.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$

*Lời giải*

**Chọn C**




Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $MAD$ ta có:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Qua $N$ kẻ đường thẳng song song với $AD$ cắt $AB$ tại $P$.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $NPM$ ta có:

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

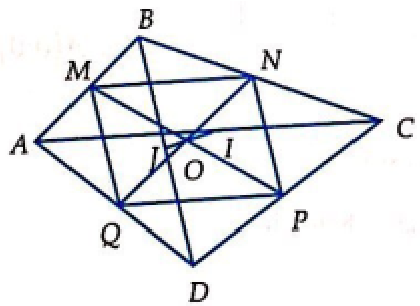
Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

**» Câu 23.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CD, DA$. Gọi $O$ là giao điểm của các đường chéo của tứ giác $MNPQ$, trung điểm của các đoạn thẳng $AC, BD$ tương ứng là $I, J$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ **B.** $MP = NQ$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ **D.** $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có: $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ta có:

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$$

**» Câu 24.** Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm $C$, có bao nhiêu điểm $D$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

**A.** vô số điểm. **B.** 1 điểm.

**C.** 2 điểm. **D.** không có điểm nào.

*Lời giải*

**Chọn A**

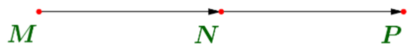
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right| \Rightarrow AB=CD$. Mà $AB$ là hằng số dương và $C$ cố định cho trước nên $D$ thuộc đường tròn tâm $C$ bán kính là $AB$.

**» Câu 25.** Cho 3 điểm $M$, $N$, $P$ thẳng hàng trong đó $N$ nằm giữa $M$ và $P$. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




**» Câu 26.** Cho ba điểm $M,N,P$ thẳng hàng, trong đó điểm $N$ nằm giữa hai điểm $M$ và $P$. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

**A.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

*Lời giải*

**Chọn D**

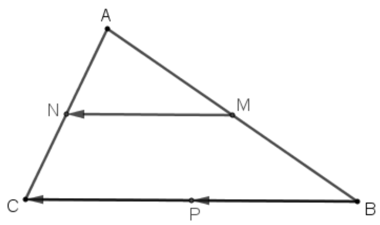

Cặp vectơ cùng hướng là $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

**» Câu 27.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC$ và $BC$. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm $A,B,C,M,N,P$ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

*Lời giải*

**Chọn C**




Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm $A,B,C,M,N,P$ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ là: $\overrightarrow{BP}$ và $\overrightarrow{PC}$

**» Câu 28.** Cho hình thoi $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}.$ **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$

*Lời giải*

**Chọn D**

**» Câu 29.** Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

**A.** Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.
**B.** Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
**C.** Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
**D.** Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

*Lời giải*

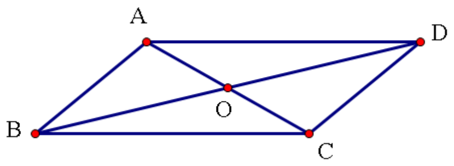
**Chọn D**

**» Câu 30.** Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$.

*Lời giải*

**Chọn D**



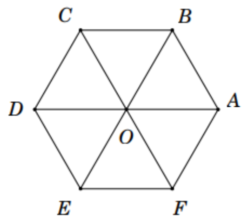

Ta có: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\neq\overrightarrow{AD}$

**» Câu 31.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Ba vectơ bằng với $\overrightarrow{AB}$ là

**A.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Ba vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$.

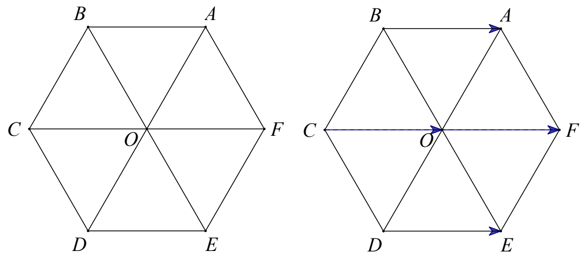
**» Câu 32.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là:

**A.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Giả sử lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$ có hình vẽ như sau




Dựa vào hình vẽ và tính chất của lục giác đều ta có các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$.

**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $AB,AC$ và $BC$. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm $A,B,C,M,N,P$ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

*Lời giải*

**Chọn C**

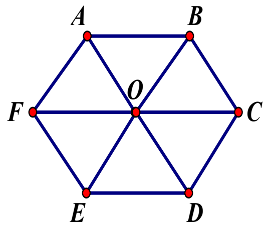
Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm $A,B,C,M,N,P$ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ là: $\overrightarrow{BP}$ và $\overrightarrow{PC}$

**» Câu 34.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm $O$. Số vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

**A.** 6 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 4 .

*Lời giải*

**Chọn C**



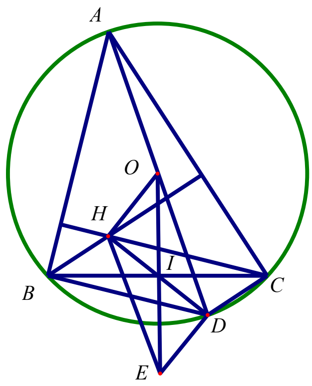

Các vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ mà điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

**» Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $O$. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $A$ qua $O$; $E$ là điểm đối xứng với $O$ qua $BC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HE}$. **B.** $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$. **D.** $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Gọi $I$ là trung điểm của $BC$.

Do $E$ là điểm đối xứng với $O$ qua $BC$ nên $I$ là trung điểm của $OE$.

Ta có, $CH // DB$

Tương tự, $BH // DC$

Từ đó suy ra $BHCD$ là hình bình hành nên $I$ là trung điểm của $HD$.

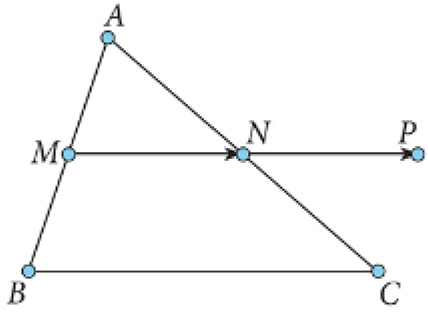
Từ và suy ra, $OHED$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$.

## B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

**» Câu 36.** Cho tam giác $ABC$ có $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$. Lấy điểm $P$ đối xứng với điểm $M$ qua $N$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $MN = BC$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng | | |
| (d) | $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$ | | |

*Lời giải*




*(a)* $MN = BC$

Do $MN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ nên $MN = \frac{1}{2}BC$.

» **Chọn** SAI.

*(b)* $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$

Điểm $P$ đối xứng với điểm $M$ qua $N$ nên $MP = 2MN = BC$, do đó $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{MP}\right|$. (1)

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{MN}$ *và* $\overrightarrow{BC}$ *ngược hướng*

Xét nửa mặt phẳng bờ $AB$ chứa $C$, ta có $N$ là trung điểm $AC$

Nên $N$ và $C$ cùng phía $AB$ hay cùng phía $MB$ do đó $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Lại có $P$ đối xứng $M$ qua $N$ nên $MP$ và $MN$ cùng hướng,

Dễ thấy $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ nên $MP$ và $BC$ cùng hướng. (2)

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 37.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm $O$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | Vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$ | | |
| (b) | Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$. | | |
| (c) | Vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{OC}$ | | |
| (d) | Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$. | | |

***Lời giải***

*(a) Vectơ* $\overrightarrow{OA}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{OD}$

Vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b) Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ* $\overrightarrow{OA}$.

Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$:

$\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c) Vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *ngược hướng* $\overrightarrow{OC}$

Vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{OC}$

» **Chọn** SAI.

*(d) Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.*

Có 4 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{ED}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 38.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm $AB, BC, CD, DA$. Khi đó:

| | **Mệnh đề** | **Đúng** | **Sai** |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $MN$ là đường trung bình của tam giác $ACD$ | | |
| **(b)** | $PQ = \frac{1}{2}AC$ | | |
| **(c)** | Tứ giác $MNPQ$ là hình thang | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ | | |

**Lời giải**

*(a) $MN$ là đường trung bình của tam giác $ACD$*

Ta có $MN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ nên: $\begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \frac{1}{2}AC \end{cases} (1)$

» **Chọn** SAI.

*(b) $PQ = \frac{1}{2}AC$*

Tương tự, $PQ$ là đường trung bình của tam giác $ACD$ nên: $\begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \frac{1}{2}AC \end{cases} (2)$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c) Tứ giác $MNPQ$ là hình thang*

Từ (1), (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

» **Chọn** SAI.

*(d) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$*

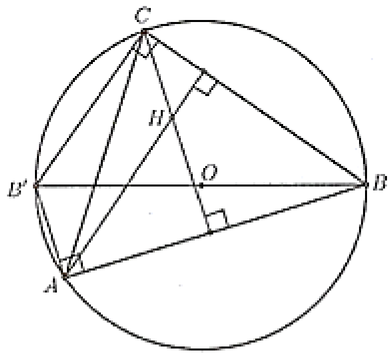
Nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 39.** Cho $\Delta ABC$ có trực tâm $H$ và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi $B'$ là điểm đối xứng của $B$ qua $O$. Khi đó:

| | **Mệnh đề** | **Đúng** | **Sai** |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $B'C \perp BC$ | | |
| **(b)** | $B'C // AB$ | | |
| **(c)** | Tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}; \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$ | | |

**Lời giải**




*(a)* $B'C \perp BC$

Ta có $BB'$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ nên $\widehat{BCB'} = 90^\circ$
$\Rightarrow B'C \perp BC$.

**» Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $B'C\,//\,AB$

Mặt khác $AH \perp BC$, suy ra $B'C\,//\,AH$ (1).

**» Chọn** SAI.

*(c) Tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành.*

Tương tự: $\widehat{BAB'} = 90^\circ$ hay $AB' \perp AB$ mà $CH \perp AB$ nên $CH\,//\,AB'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành.

**» Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}; \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$

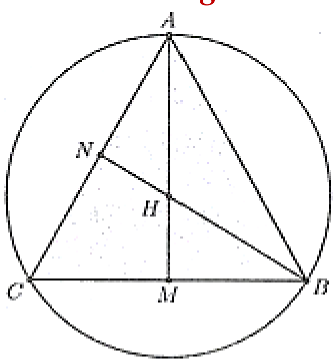
Vì vậy: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}; \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

**» Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 40.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh $a$, trực tâm $H$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $AH \perp BC$ | | |
| **(b)** | $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ | | |
| **(c)** | $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ | | |
| **(d)** | $\left\lvert\overrightarrow{HA}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{HB}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{HC}\right\rvert = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. | | |

*Lời giải*




*(a)* $AH \perp BC$

$\Delta ABC$ đều có trực tâm $H$ nên $AH \perp BC$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm cạnh $BC,AB$.
Do tam giác $ABC$ đều nên $AM,BN$ cũng là các đường cao của tam giác $ABC$;
Vì vậy $H$ vừa là trực tâm vừa là trọng tâm tam giác này.

Áp dụng định lí Py-tha-go cho $\Delta ABM$, ta có: $AM^2=AB^2-BM^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $AH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Theo tính chất trọng tâm, ta có: $AH=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

» **Chọn** SAI.

(d) $\left|\overrightarrow{HA}\right|=\left|\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{HC}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dễ thấy ba vecto $\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}$ có độ dài bằng nhau: $\left|\overrightarrow{HA}\right|=\left|\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{HC}\right|=AH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 41.** Cho $\Delta ABC$ có $A',B',C'$ lần lượt là các trung điểm của các cạnh $BC,CA,AB$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $BC'=C'A=A'B'=\frac{AB}{2}$. | | |
| (b) | Hai vecto $\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng | | |
| (c) | $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{A'B'}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{CA'}$ | | |

*Lời giải*

(a) $BC'=C'A=A'B'=\frac{AB}{2}$.

Ta có $C'$ là trung điểm của $AB$ và $A'B'$ là đường trung bình của tam giác ứng với cạnh đáy $AB$ nên: $BC'=C'A=A'B'=\frac{AB}{2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Hai vecto $\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng*

Mặt khác, ba vecto $\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng.

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{A'B'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{A'B'}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{CA'}$.

Ta xác định được: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{A'B}$; $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{B'C}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 42.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=\sqrt{3}, AC=2\sqrt{3}$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $BC^2=AB^2+AC^2$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ | | |
| (c) | $AB\cdot AC=AH\cdot BC$ | | |
| (d) | $\left\|\overrightarrow{AH}\right\|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ | | |

*Lời giải*

*(a)* $BC^2=AB^2+AC^2$

Áp dụng định lí Py-ta-go trong $\Delta ABC$ vuông tại $A$, ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2=\sqrt{3}^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=15\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=BC=\sqrt{15}.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Ta có: $AM$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền $BC$ $\Rightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

» **Chọn** SAI.

*(c)* $AB\cdot AC=AH\cdot BC$

Ta có: $AB\cdot AC=AH\cdot BC$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

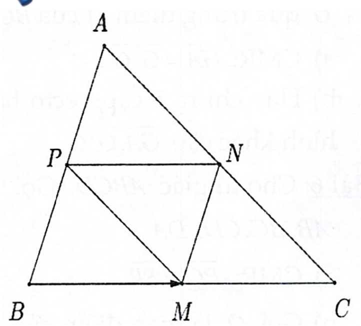
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AH}\right|=AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 43.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,CA$ và $AB$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $PN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{PN},\overrightarrow{MC}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{BM}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{NP}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{BM}$ có các vecto đối là $\overrightarrow{NP},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MB}$ | | |

*Lời giải*




*(a)* $PN$ *là đường trung bình của tam giác* $ABC$

Do $N, P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $CA$ và $AB$

Nên $PN$ là đường trung bình của tam giác $ABC$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MC}$ *cùng hướng với vecto* $\overrightarrow{BM}$

Do đó ta có $\begin{cases} PN = \dfrac{1}{2}BC = BM = MC \\ PN \parallel BC \end{cases}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NP}$

Suy ra: Các vecto $\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MC}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{BM}$ và $\left|\overrightarrow{PN}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{BM}\right|$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{BM}$ *có các vecto đối là* $\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB}$.

Do đó: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MC}$.

Mặt khác các vecto $\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng và có cùng độ dài với vecto $\overrightarrow{BM}$.

Vecto $\overrightarrow{BM}$ có các vecto đối là $\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 44.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và có $AB = AD = \dfrac{1}{2}DC = a$. Gọi $BF$ là đường phân giác trong của tam giác $ABD$ $(F \in AD)$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $CA^2 = DA^2 + DC^2$ | | |
| (b) | $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a\sqrt{3}$ | | |
| (c) | $\widehat{ABF} = 45^\circ$ | | |
| (d) | $\left\|\overrightarrow{BF}\right\| \approx 2,08a$ kết quả làm tròn đến hàng phần trăm | | |

*Lời giải*

*(a)* $CA^2 = DA^2 + DC^2$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left|\overrightarrow{CA}\right| = a\sqrt{3}$

Ta có: $CA^2 = DA^2 + DC^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$ (Theo định lí Py-ta-go)

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{CA}\right| = CA = a\sqrt{5}$.

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\widehat{ABF} = 45^\circ$

Tương tự: $\left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Dễ thấy $\Delta ABD$ vuông cân tại $A$, do đó: $\widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ABF} = 22.5^\circ$.

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\left|\overrightarrow{BF}\right| \approx 2,08a$ *kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*

Xét $\Delta ABF$ vuông tại $A$, ta có: $\left|\overrightarrow{BF}\right| = BF = \dfrac{AB}{\cos ABF} = \dfrac{a}{\cos 22.5^\circ} \approx 1.08a$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $G'$ là điểm đối xứng với $G$ qua trung điểm $M$ của $BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | Vectơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng | | |
| (b) | $GA = 3GM$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}; \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}; \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}; \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$ | | |

***Lời giải***

*(a) Vectơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng*

Dễ thấy hai vectơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng (1).

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $GA = 3GM$

Mặt khác, ta có:

$GA = 2GM$ (do $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$)

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$

$G'G = 2GM$ (do $G'$ là điểm đối xứng với $G$ qua $M$).

Suy ra: $GA = G'G \Rightarrow \left|\overrightarrow{GA}\right| = \left|\overrightarrow{G'G}\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}; \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}; \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}; \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$.

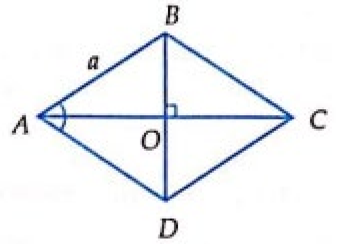
» **Chọn** ĐÚNG.

## C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 46.** Cho hình thoi tâm $O$, cạnh bằng $1$ và $\widehat{A} = 60°$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AO}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

***Lời giải***

✓ ***Trả lời: 0,9***




Vì $\widehat{A} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AO = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**» Câu 47.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$ có cạnh $AB = \sqrt{3}, AD = 1$. Tìm vectơ $\vec{u}$ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ (khác $\overrightarrow{BD}$), tính độ dài vectơ $\vec{u}$ đó?

*Lời giải*

***✓Trả lời: 1***

Ta có $\vec{u}$ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ nên $\vec{u}$ là một trong hai vectơ $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác $ABD$: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 1^2 = 4 \Rightarrow BD = 2$.

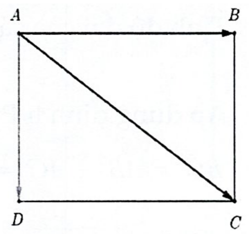
Vì vậy: $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right| = \frac{BD}{2} = a$.

**» Câu 48.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ được tạo thành mà điểm đầu và điểm cuối lấy từ các đỉnh của hình chữ nhật?

*Lời giải*

***✓Trả lời: 16***

Dễ thấy có 4 Vectơ-không là: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \overrightarrow{DD}$.




Từ mỗi đỉnh của hình chữ nhật, ta lập được 3 vectơ khác vectơ-không nhận đỉnh đó làm điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh còn lại.

Chẳng hạn với đỉnh $A$ ta có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

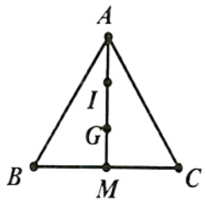
Suy ra có 12 vectơ khác $\vec{0}$.

Như vậy có tất cả 16 vectơ thỏa mãn.

**» Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh 1 và $G$ là trọng tâm. Gọi $I$ là trung điểm của $AG$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BI}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

*Lời giải*

***✓Trả lời: 0,7***




Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$,

Ta có $\left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{1^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\left|\overrightarrow{BI}\right| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$

**» Câu 50.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 1 và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tìm độ dài véc tơ $\overrightarrow{AC}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1,7***

Theo qui tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

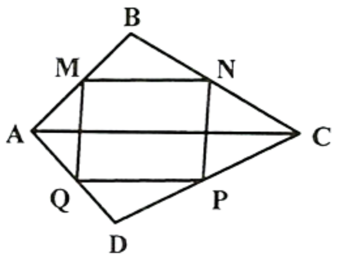
Tam giác $ABD$ đều canh $a$, nên $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2AO = \sqrt{3} \approx 1,7$

**» Câu 51.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA$. Có bao nhiêu vectơ tạo thành từ các điểm đã cho tìm các vec tơ cùng hướng với vec tơ $\overrightarrow{MN}$

***Lời giải***

***✓Trả lời: 2***




Ta có $MN // PQ, MN = PQ$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$ ).

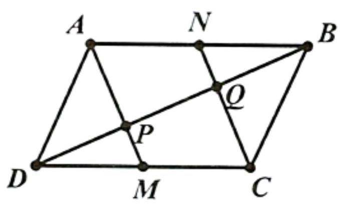
Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Vậy các vec tơ cùng hướng với vec tơ $\overrightarrow{MN}$ là: $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{AC}$

**» Câu 52.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $DC, AB.P$ là giao điểm của $AM, DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN, DB$. Có bao nhiêu vecto bằng vectơ $\overrightarrow{DP}$ đúng hay sai?

***Lời giải***

***✓Trả lời: 2***




Ta có tứ giác $DMBN$ là hình bình hành vì $DM = NB = \frac{1}{2}AB, DM // NB$.

Suy ra $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

Xét tam giác $CDQ$ có $M$ là trung điểm của $DC$ và $MP // QC$

Do đó $P$ là trung điểm của $DQ$.

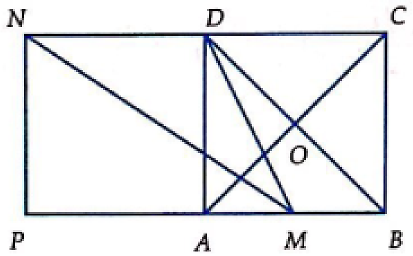
Tương tự xét tam giác $ABP$ suy ra được $Q$ là trung điểm của $PB$

Vì vậy $DP = PQ = QB$ từ đó suy ra $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$

**» Câu 53.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$ cạnh $a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, $N$ là điểm đối xứng với $C$ qua $D$. Độ dài của vecto $\overrightarrow{MN}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1,8***




Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $MAD$ ta có:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Qua $N$ kẻ đường thẳng song song với $AD$ cắt $AB$ tại $P$.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $NPM$ ta có:

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

-------------------------------------- Hết --------------------------------------

# Chương 05
# Bài 2. TỔNG HIỆU HAI VECTƠ

## A Lý thuyết

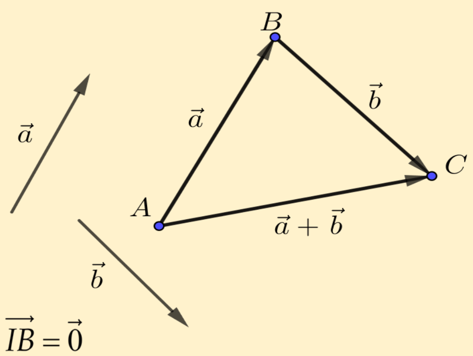
### 1. Tổng của hai vectơ

**Định nghĩa**

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Lấy một điểm $A$ tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.
- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.
- Kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

⇨ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.




▶ ***Điểm đặc biệt:***

» Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

» Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

### 2. Hiệu của hai vectơ

**Định nghĩa**

» Vectơ đối của vecto $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vecto $\vec{a}$.

» Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta gọi hiệu của hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vecto $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

**Tính chất**

Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

(1) Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2) Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

(3) Tính chất của vectơ – không $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

**Các quy tắc:**

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

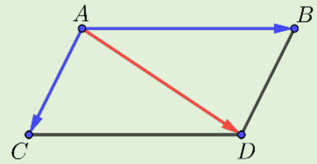
» Với 3 điểm $A, B, C$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hiệu vectơ:***

» Với 3 điểm $O, A, B$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

▶ ***Quy tắc hình bình hành:***

» Tứ giác $A, B, C, D$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Liên quan tổng vectơ

**Phương pháp**

(1) **Định nghĩa tổng hai vectơ:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Lấy một điểm $A$ tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.
- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.

⇨ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

(2) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(3) **Tính chất:** Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

- Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hình bình hành:***

» Tứ giác $A,B,C,D$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

**Ví dụ 1.1.**

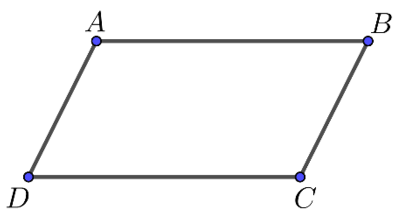
Cho hình bình hành $ABCD$, xác định các vectơ

(1) $\vec{t}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ (2) $\vec{e}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$

*Lời giải*

(1) $\vec{t}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$

Áp dụng quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$




(2) $\vec{e}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$

Áp dụng tính chất giao hoán: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

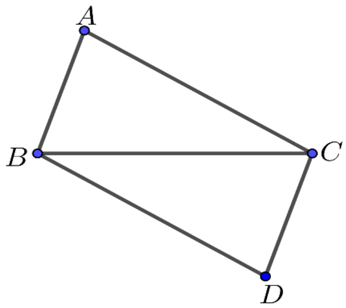
**Ví dụ 1.2.**

Cho tam giác $ABC$, xác định các vectơ

(1) $\vec{g}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{q}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

(1) $\vec{g} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$




$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}\right) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

(2) $\vec{q} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Gọi $D$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

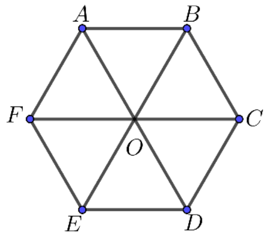
**Ví dụ 1.3.**

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, xác định các vectơ.

(1) $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ (2) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD}$

***Lời giải***

(1) $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$




$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(2) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}.$$

**Ví dụ 1.4.**

Cho $n$ điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, xác định vectơ

$$\vec{h} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + ... + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$$

***Lời giải***

$$\vec{h} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + ... + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$$

$$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

Thấy rằng: $\begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3} \\ \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_1A_4} \\ \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_1A_5} \\ ... \\ \overrightarrow{A_1A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n} \end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + ... + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

## Dạng 2. Hiệu hai vectơ – vectơ đối

**Phương pháp**

(1) **Định nghĩa tổng hai vectơ:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Lấy một điểm $A$ tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.
- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.

⇨ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

(2) **Định nghĩa hiệu hai vectơ:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vecto $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.
- Vectơ đối của vecto $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vecto $\vec{a}$.

(3) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(4) **Tính chất:** Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

- Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hiệu vectơ:***

» Với 3 điểm $O,A,B$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

▶ ***Quy tắc hình bình hành:***

» Tứ giác $A,B,C,D$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

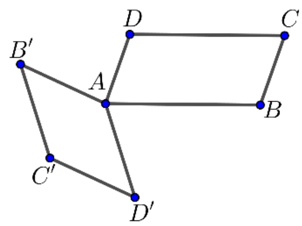
**Ví dụ 2.1.**

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh $A$.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

***Lời giải***

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có




$$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\right)+\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\right)+\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

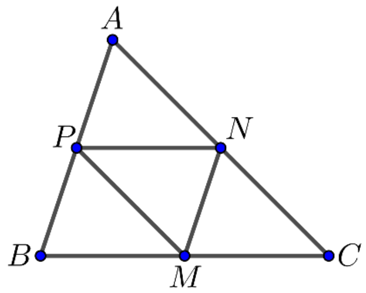
**Ví dụ 2.2.**

Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$. Chứng minh rằng:

(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì

***Lời giải***




(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành

Nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do $M$ là trung điểm của $BC$.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$$

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

## Dạng 3. Chứng minh đẳng thức vectơ

*Phương pháp*

▶ ***Tính chất:*** Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

- Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

▶ ***Quy tắc ba điểm:***

» Với 3 điểm $A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

▶ ***Quy tắc hiệu vectơ:***

» Với 3 điểm $O,A,B$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

▶ ***Quy tắc hình bình hành:***

» Tứ giác $A,B,C,D$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

▶ ***Quy tắc trung điểm – trọng tâm:***

» Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

» Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Các phương pháp biến đổi:

» Biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức (xuất phát từ vế phức tạp biến đổi đưa về vế đơn giản).

» Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về tương đương với một đẳng thức luôn đúng.

» Xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng để biến đổi về đẳng thức cần chứng minh.

**Ví dụ 3.1.**

Cho bốn điểm bất kỳ $A,B,C$ và $D$. Hãy chứng minh đẳng thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

*Lời giải*

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (Đúng).

**Ví dụ 3.2.**

Cho năm điểm $A,B,C,D,E$. Chứng minh rằng:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ (2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

*Lời giải*

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

Biến đổi vế trái ta có

$VT = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{CD} + \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}\right)$

$= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP$.

(2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Đẳng thức tương đương với

$\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ (đúng).

**Ví dụ 3.3.**

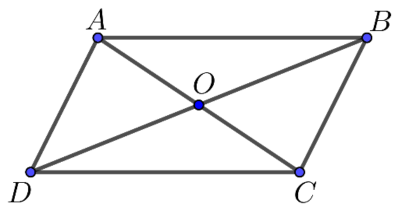
Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. $M$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

(1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

***Lời giải***




(1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

(3) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

*Cách 1:*

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

*Cách 2:*

Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành).

**Ví dụ 3.4.**

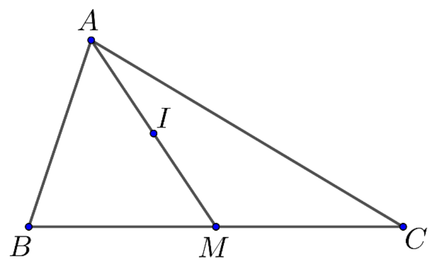
Cho tam giác $ABC$, gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $I$ là trung điểm của $AM$.

(1) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

(2) Với $O$ là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

***Lời giải***

(1) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.




- Ta có: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$

$=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IM}$ ($\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}$ do $M$ là trung điểm $BC$)

$=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}\right)$

$=\vec{0}$ ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}=\vec{0}$ do $I$ là trung điểm của $AM$) (đpcm).

(2) Với $O$ là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

- Ta có: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IO}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IO}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-4\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$ (đpcm).

**Ví dụ 3.4.**

Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm $O$.

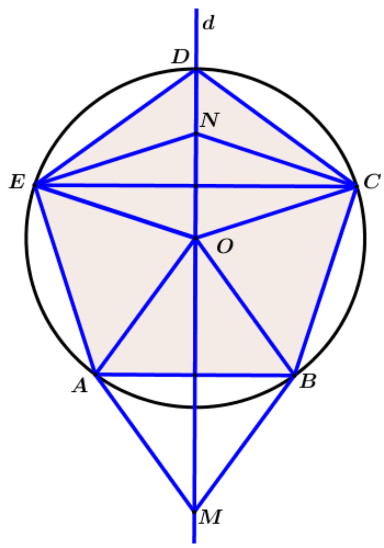
(1) Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

(2) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

(3) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

***Lời giải***

(1) Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.




- Gọi $d$ là đường thẳng chứa $OD$
- Thì $d$ là một trục đối xứng của ngũ giác đều.
- Ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$, trong đó $M$ là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và $M\in d$.

- Tương tự $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{ON}$, trong đó $N$ là đỉnh của hình thoi $OENC$ và $N\in d$.
- Do đó hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều có giá là đường thẳng $d$
- Nên hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ cùng phương với nhau và cùng phương với véctơ $\overrightarrow{OD}$.

(2) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

• Ta có: $OAMB$ và $OENC$ là các hình thoi nên ta có: $\begin{cases} EC \perp d \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow AB // EC$.

• Do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

(3) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

• Theo câu (1) ta có:

$\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$

• Nên $\vec{v}$ có giá là đường thẳng $d$.

• Mặt khác: $\vec{v}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OE}$ thì $\vec{v}$ có giá là đường thẳng $OE$.

• Vì $\vec{v}$ có 2 giá khác nhau nên $\vec{v}=\vec{0}$.

⇨ Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$ (đpcm).

## Dạng 4. Độ dài vectơ

**Phương pháp**

Áp dụng: tính chất, quy tắc (ba điểm, hình bình hành, hiệu vectơ, trung điểm – trọng tâm)

Để tính $\left|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}\right|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

» **Bước 1:** Biến đổi và rút gọn biểu thức véctơ $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,… sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.

» **Bước 2:** Tính môđun (độ dài) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

**Ví dụ 3.1.**

Cho bốn điểm bất kỳ $A, B, C$ và $D$. Hãy chứng minh đẳng thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

(1) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

(2) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $\left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}\right|$ thì $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$.

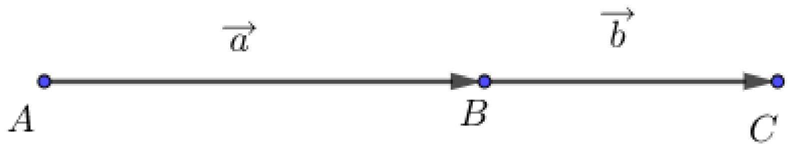
(3) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

*Lời giải*

Giả sử: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

(1) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

• Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì 3 điểm $A, B, C$ cùng thuộc một đường thẳng và $B$ nằm giữa $A, C$.

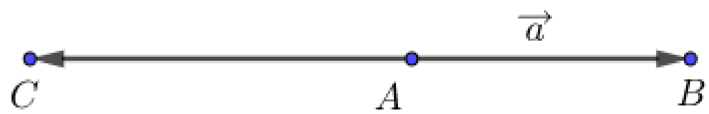



• Do đó $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AB + BC = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

⇨ Vậy $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

(2) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $\left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}\right|$ thì $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$.

• Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $\left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}\right|$ thì ba điểm $A, B, C$ cùng thuộc một đường thẳng và $A$ nằm giữa $B, C$.




• Do đó $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = AC = BC - AB = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$.

⇨ Vậy $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$.

(3) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Từ chứng minh ở câu (1) và (2):

$\Rightarrow$ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ hoặc $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

$\Rightarrow$ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì $A, B, C$ không thẳng hàng.

- Xét $\Delta ABC$ có hệ thức $AC < AB + BC$. Do đó $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

- Như vậy, trong mọi trường hợp ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$, đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

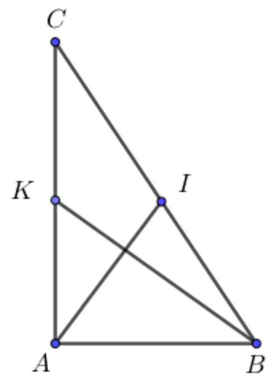
### Ví dụ 3.2.

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có $AB=3(\text{cm})$, $AC=4(\text{cm})$. Gọi $I$ là trung điểm $BC$. Xác định và tính độ dài các véctơ:

(1) $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{v}=2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{CA}$

**Lời giải**

(1) $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$




- Gọi $K$ là trung điểm $AC$

Khi đó $2\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ với $B$ là điểm bất kỳ.

- Nên $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|2\overrightarrow{BK}\right|=2\left|\overrightarrow{BK}\right|$.

- Xét $\Delta ABK: BK=\sqrt{AK^2+AB^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$.

$\Rightarrow$ Vậy $\left|\vec{u}\right|=2\left|\overrightarrow{BK}\right|=2\sqrt{13}$.

(2) $\vec{v}=2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{CA}$

- Theo giả thiết: $I$ là trung điểm $BC$ khi đó $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ với $A$ là điểm bất kỳ.

$$\vec{v}=2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{CA}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\underbrace{-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}=-\overrightarrow{AB}.$$

- Khi đó: $\left|\vec{v}\right|=\left|-\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$.

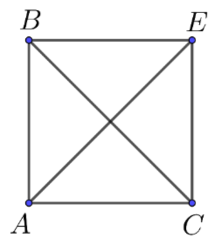
### Ví dụ 3.3.

Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, $AB=a$,. Tính theo $a$:

(1) $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ (2) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ (3) $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|$

**Lời giải**

- Ta có $BC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$




(1) $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$

- $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a\sqrt{2}$.

(2) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$

• $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=AE=BC=a\sqrt{2}$, với $ABEC$ là hình vuông.

(3) $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|$

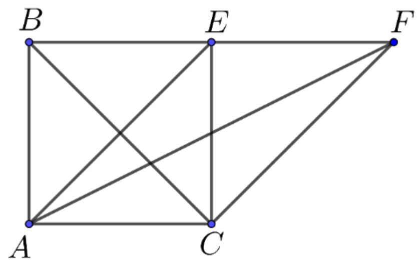
• $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|=AF$,

với $AEFC$ là hình bình hành.

• Do $\Delta ABF$ vuông tại $B$ và $BF=BE+EF=BE+AC=2a$

Nên ta có $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=a\sqrt{5}$.

• Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{5}$.



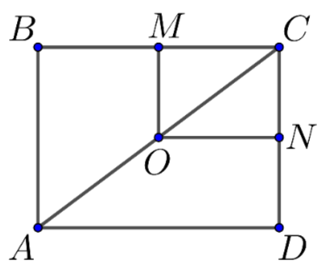

**Ví dụ 3.3.**

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=3$, $BC=4$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $CD$. Tính

(1) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$ (2) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$

***Lời giải***

(1) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$




• Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AC$.

• Xét $\Delta ABC$ vuông tại $A$:

$$AC^2=AB^2+BC^2\Leftrightarrow AC^2=25\Rightarrow AC=5$$

⇨ Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=2AC=10$

(2) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$

• Ta có: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}\right)=\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OC}$

⇨ Vậy $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OC}\right|=AC+\dfrac{AC}{2}=\dfrac{15}{2}$ ($\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$ là hai vec tơ cùng hướng)

Chương 05

# Bài 2. TỔNG HIỆU HAI VECTƠ

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho 4 điểm $A,B,C,D$ phân biệt. Chọn phương án **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CA}$

*Lời giải*

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}$

**» Câu 2.** Cho tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$.

*Lời giải*

Chọn B

Áp dụng quy tắc 3 điểm ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$.

*Lời giải*

Chọn C

Theo quy tắc hình bình hành $ABCD$ ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 4.** Đẳng thức nào dưới đây **sai?**

**A.** $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PM}$. **D.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

*Lời giải*

Chọn A

Theo quy tắc trừ ba điểm, ta có $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$.

**» Câu 5.** Cho $\Delta ABC$ gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,AC,BC$. Hỏi $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véc tơ nào?

**A.** $\overrightarrow{AM}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{PB}$. **D.** $\overrightarrow{AP}$.

*Lời giải*

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}$.

**» Câu 6.** Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MN}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$.

*Lời giải*

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ nên đáp án đúng là đáp án **C.**

» **Câu 7.** Cho đoạn thẳng $AB$ có $I$ là trung điểm, $M$ là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

**A.** $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Đoạn thẳng $AB$ có $I$ là trung điểm nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Vậy **B** sai.

» **Câu 8.** Chọn khẳng định **sai**

**A.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

**B.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$.

**C.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

**D.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn $AB$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn A**

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$.

» **Câu 9.** Cho ba điểm phân biệt $A$, $B$, $C$. Mệnh đề nào sau đây **Sai**?

**A.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Mệnh đề $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ sai phải sửa là $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

» **Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$ và trọng tâm $G$. Khẳng định nào sau đây là đúng

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$. **B.** $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$. **C.** $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Ta có: $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ nên:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BG}$

» **Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

» **Câu 12.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Ta có $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$ nên $O$ là trung điểm của $AC$ và $BD$. Do đó:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

» **Câu 13.** Cho tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}$. **C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

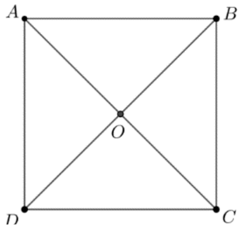
Hiển nhiên $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}\Leftrightarrow\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ luôn đúng.

» **Câu 14.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Vì $O$ là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $O$ là trung điểm của $AC$ và $BD$ nên theo qui tắc trung điểm ta có: $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

**» Câu 15.** Cho 3 điểm $M,N,P$ bất kì. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. **C.** $\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NM}$. **D.** $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MN}$ do đó khẳng định C sai.

**» Câu 16.** Cho bốn điểm phân biệt $A,B,C,D$. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

**A.** $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

**» Câu 17.** Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm $I$ tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$. **B.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}$.

**C.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{ID}$. **D.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}$.

*Lời giải*

**Chọn D**

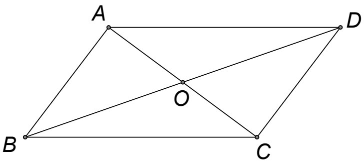
$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

**» Câu 18.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm $O$.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.

**C.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

∗ Áp dụng quy tắc trừ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

∗ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$ vô lý

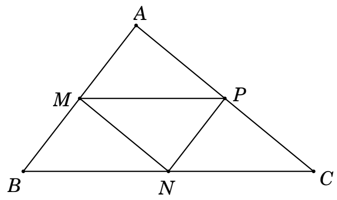
$*\ \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ luôn luôn đúng

**» Câu 19.** Cho $M, N, P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, CA$ của tam giác $ABC$. Hỏi vectơ $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AP}$ bằng vectơ nào?

**A.** $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{PB}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB} \rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$.

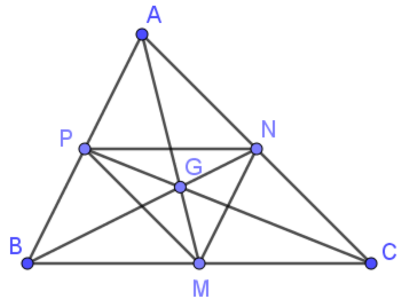
**» Câu 20.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $\Delta ABC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

**C.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}$. **D.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có:

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}\right)+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}\right)=\vec{0}$.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$.

$\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

**» Câu 21.** Rút gọn véc tơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

**A.** $\vec{u}=\overrightarrow{MR}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{PR}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{MP}$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:

$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\right)+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}\right)$

$=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{MR}$

**» Câu 22.** Cho $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

**A.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$. **C.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG}$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Do $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$. Vậy A, D đúng.

Lại có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG}$. Vậy C đúng, B sai.

**» Câu 23.** Trong mặt phẳng, cho năm điểm phân biệt $A, B, C, D, E$. Vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}$ bằng vectơ nào sau đây?

**A.** $\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AE}$. **C.** $\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{BD}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}$.

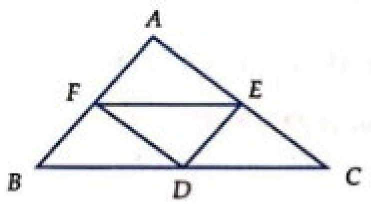
**» Câu 24.** Cho $\Delta ABC, D, E, F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, A, B. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$

**C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

**Chọn C**




$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

**» Câu 25.** Cho tam giác đều $ABC$, cạnh $3a$. Mệnh đề nàosau đây đúng:

**A.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=3a$. **B.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=3a$.

*Lời giải*

**Chọn A**

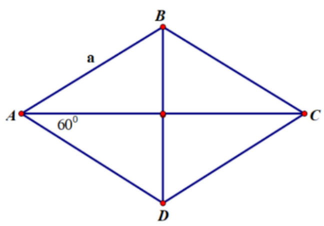
Vì tam giác đều $ABC$, cạnh $3a$ nên $\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=3a$.

**» Câu 26.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh $a$ và $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài của $\overrightarrow{BD}$ bằng

**A.** $2a$. **B.** $a$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Ta có hình thoi $ABCD$ cạnh $a$ và $\widehat{BAD}=60°$, suy ra tam giác $ABD$ đều cạnh $a$ nên độ dài $\overrightarrow{BD}$ bằng $a$.

**» Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

**C.** $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD$ và $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC=BD$.

Vậy mệnh đề đúng là $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

**» Câu 28.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

**A.** $2a$. **B.** $a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}a$.

*Lời giải*

**Chọn A**

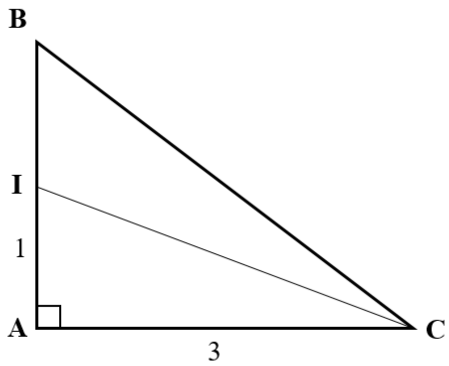
Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=2a$.

**» Câu 29.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và $AB=2, AC=3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ bằng

**A.** $5$. **B.** $40$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{CI}$ với $I$ là trung điểm $AB$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{CI}\right|=2.\sqrt{1^2+3^2}=2\sqrt{10}$.

**» Câu 30.** Giả sử có các lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$. Cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300N$, $400N$ và $\widehat{AMB}=90^0$. Tìm cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ biết vật đứng yên.

**A.** $700N$. **B.** $250N$. **C.** $500N$. **D.** $1000N$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Vật đứng yên nên ta có: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=0$.

$\Leftrightarrow \vec{F_3} = -\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right) \Rightarrow \left|\vec{F_3}\right| = \left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right|$. Do $\widehat{AMB} = 90^0 \Leftrightarrow \vec{F_1} \perp \vec{F_2}$.

$\Rightarrow \left|\vec{F_3}\right| = \left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$.

**» Câu 31.** Cho tam giác $ABC$. Vị trí của điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

**A.** $M$ trùng $B$.

**B.** $M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.

**C.** $M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.

**D.** $M$ trùng $C$.

*Lời giải*

**Chọn D**

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$.

Do $A, B, C$ không thẳng hàng suy ra $M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.

**» Câu 32.** Cho tam giác $ABC$, $M$ là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $M$ là trung điểm $AB$.

**B.** $M$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

**C.** $M$ trùng $B$.

**D.** $A$ là trung điểm $MB$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$ với $M$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$?

**A.** $M$ là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

**B.** $M$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

**C.** $M$ là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

**D.** $M$ thuộc trung trực của $AB$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Suy ra $M$ là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

**» Câu 34.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MB}\right|$ l

**A.** Đường tròn tâm $C$, bán kính $AB$.

**B.** Đường tròn tm $B$, bán kính $AB$.

**C.** Đường trung trực của đoạn $AB$.

**D.** Đường trung trực của đoạn $BC$.

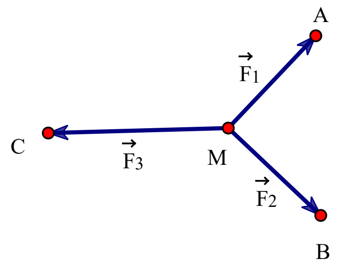
*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có: $\left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow AB = CM$.

Do $A, B, C$ cố định nên tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $C$, bán kính $AB$.

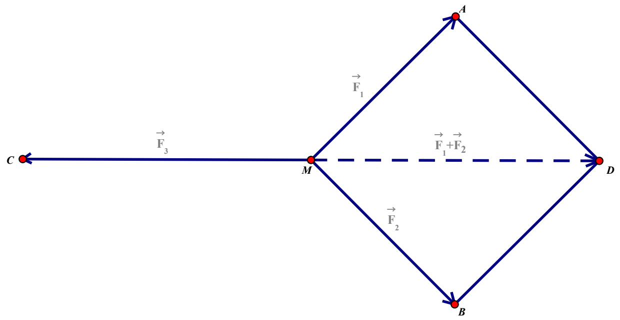
**» Câu 35.** Cho ba lực $\vec{F_1} = \overrightarrow{MA}, \vec{F_2} = \overrightarrow{MB}, \vec{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $\widehat{AMB} = 90°$. Khi đó xác định cường độ của lực $\vec{F_3}$.




**A.** $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = 100\sqrt{2}N$. **B.** $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = 2\sqrt{2}N$. **C.** $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \sqrt{2}N$. **D.** $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = 2\sqrt{3}N$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$ ($D$ là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MADB$)

Do vật đứng yên nên

$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_3} = -\left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|-\left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right)\right| = \left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = MD = 100\sqrt{2}N$

Vậy $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = 100\sqrt{2}N$ cùng phương và ngược hướng với $\overrightarrow{MD}$.

## *B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai*

**» Câu 36.** Cho bốn điểm $A, B, C, D$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ | | |

*Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$

**» Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

**» Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (luôn đúng).

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ (luôn đúng)

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, có trọng tâm $G$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(b)** | $\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right\|=2a$ | | |
| **(c)** | $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=a\sqrt{3}$ | | |
| **(d)** | $\left\|\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BC}\right\|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right|=2a$;

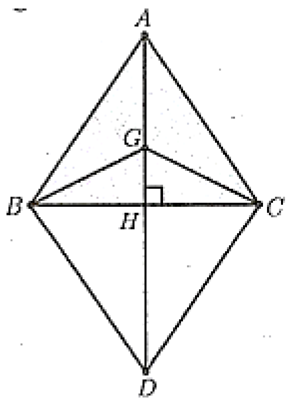
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a$.

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$;

Vẽ hình bình hành $ABDC$, gọi $H$ là giao điểm $AD$ và $BC$

Suy ra $H$ là trung điểm của cả $AD$ và $BC$.




Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Ta có $AH$ là đường cao của tam giác $ABC$ nên $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $AD = 2AH = a\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = a\sqrt{3}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\left|\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CG}$.

Dễ thấy $CG = AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CG}\right| = CG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 38.** Cho sáu điểm $A, B, C, D, E, F$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FA}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DE}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}$ | | |

✍ *Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FA}$.

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

» **Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DE}$.

Ta có : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}$.

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 39.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}$ | | |
| (c) | $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|=AC$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(d)** | Nếu $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right\|$ thì $ABCD$ là hình thoi. | | |

*Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AD}$

» **Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành).

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=AC$

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$ (vì $ABCD$ là hình bình hành).

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d) Nếu* $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right|$ *thì* $ABCD$ *là hình thoi.*

Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|\Leftrightarrow AC=BD$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

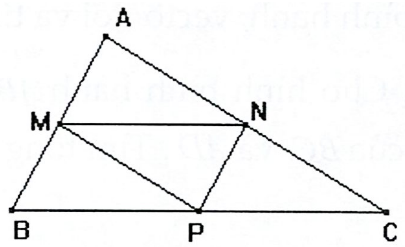
» **Chọn** SAI.

» **Câu 40.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $AB,AC,BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MP}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PC}$ | | |

*Lời giải*

Dễ thấy tứ giác $AMPN,MNCP$ là hình bình hành




*(a)* $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$

$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$ $\left(\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}\right)$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 41.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, có $O$ là giao điểm hai đường chéo. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $O$ là trung điểm của $AC, BD$ | | |
| **(b)** | $\left\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right\|=a\sqrt{2}$ | | |
| **(c)** | $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right\|=a$ | | |
| **(d)** | $\left\|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right\|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | | |

*Lời giải*

*(a)* *$O$ là trung điểm của $AC, BD$*

$O$ là giao điểm hai đường chéo nên $O$ là trung điểm của $AC, BD$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=a\sqrt{2}$

$$\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BO}\right|=BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=a$

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{AB}\right|=2a$$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=a\sqrt{2}$$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 42.** Gọi $O$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$ | | |

*Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$.

Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$.

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$

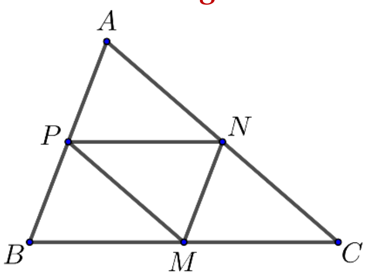
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 43.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA$, $AB$. Khi đó:

| | **Mệnh đề** | **Đúng** | **Sai** |
|---|---|---|---|
| **(a)** | Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BM}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với $O$ là điểm bất kì | | |

***Lời giải***




*(a) Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành*

Ta có $\begin{cases}BP//MN; BP=MN\\ NP//MB; NP=MB\end{cases}\Rightarrow BMNP$ là hình bình hành

Ta có $\begin{cases}AP//MN; AP=MN\\ AN//MP; AN=MP\end{cases}\Rightarrow APMN$ là hình bình hành

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

$BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$.

Vì $N$ là trung điểm của $AC\Rightarrow \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ $(*)$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BM}$.

Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$,

Kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$.

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do $M$ là trung điểm của $BC$.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ *với $O$ là điểm bất kì.*

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$

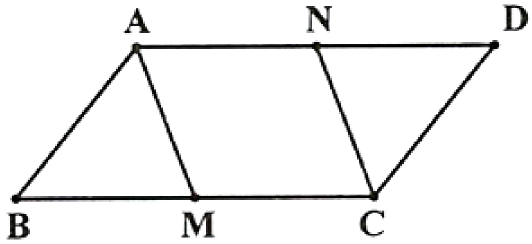
Lại có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ $(*)$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 44.** Cho hình bình hành $ABCD$ với $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $AD$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}$ | | |

*Lời giải*




*(a)* $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$

Theo qui tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Do $AMCN$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}$

Suy ra $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Do $AMCN$ là hình bình hành, ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}$

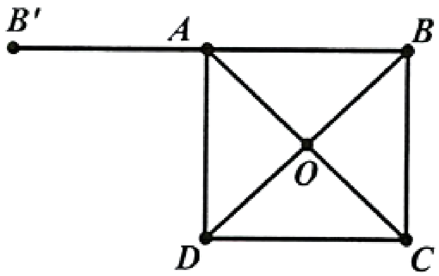
Do $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$, suy ra $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM}$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 45.** Cho $ABCD$ là hình vuông tâm $O$ có cạnh $a$. $M$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$ | | |
| (b) | $\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right\rvert=AO$ | | |
| (c) | $\left\lvert\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right\rvert=0$ | | |
| (d) | Độ dài vecto $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng $DC$ | | |

*Lời giải*




*(a)* $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|=AO$

Ta có $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}$

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}\right|=\left|\overrightarrow{AO}\right|=AO$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=0$

Ta có $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=0$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d) Độ dài vectơ* $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ *bằng* $DC$

Áp dụng quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}$

Lấy $B'$ là điểm đối xứng của $B$ qua $A$

Khi đó $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}$

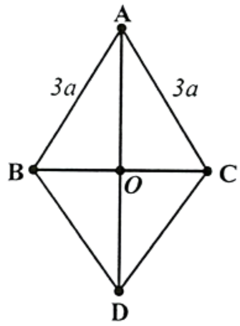
Suy ra $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=BB'$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 46.** Cho tam giác $ABC$ đều có cạnh bằng $3a$. Khi đó:

| | **Mệnh đề** | **Đúng** | **Sai** |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $AO=3a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | | |
| **(b)** | $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=2a$ | | |
| **(c)** | $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\right|=0$ | | |
| **(d)** | $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$ | | |

*Lời giải*




(a) $AO = 3a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có: tam giác $ABC$ đều có cạnh bằng $3a$ do đó $AO = 3a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = 2a$

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = 3a$

» **Chọn** SAI.

(c) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right| = 0$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\right| = 0$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}$

Dựng hình bình hành $ABDC$, Theo qui tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Gọi $O$ là giao điểm của $AD$ và $BC$,

Ta có $AO = 3a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = 2AO = 3a\sqrt{3}$

» **Chọn** SAI.

## *C. Câu hỏi – Trả lời ngắn*

**» Câu 47.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = 1, CD = 2$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CN}\right|$

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1,5***

Ta có: $\left|\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CN}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}\right|$

$= \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{3}{2} \approx 1,5$

**» Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là $O$ và cạnh 1. Tính $\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}\right| + \left|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\right|$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 2,1***

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$ suy ra $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BO}$

Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BO}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ suy ra $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

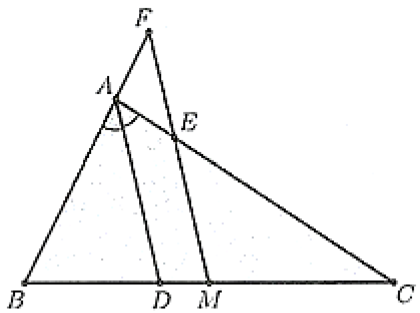
Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2}$ suy ra $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=\sqrt{2}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|+\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\approx 2{,}1$

**» Câu 49.** Cho tam giác $ABC(AB<AC), AD$ là phân giác trong của góc $A$. Qua trung điểm $M$ của cạnh $BC$, ta kẻ đường thẳng song song với $AD$, cắt cạnh $AC$ tại $E$ và cắt tia $BA$ tại $F$. Biết rằng $AB=6$ và $4BD=3BM$. Tính: $\left|\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{EM}\right|$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 8*




Ta có: $\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{CE}$

Ta có: $ME\ /\!/ AD \Rightarrow \dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CM}{CD}(1)$; $AD\ /\!/ MF \Rightarrow \dfrac{BA}{BF}=\dfrac{BD}{BM}(2)$

Nhân theo vế (1), (2) với $BM=CM$, ta được: $\dfrac{CE}{BF}\cdot\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}(3)$.

Theo giả thiết, $AD$ là phân giác của góc $A$ nên $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{CE}{BF}=1\Rightarrow CE=BF$ (5).

Từ (2): $\dfrac{BA}{BF}=\dfrac{BD}{BM}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow BF=\dfrac{4}{3}BA=\dfrac{4}{3}\cdot 6=8$ (6).

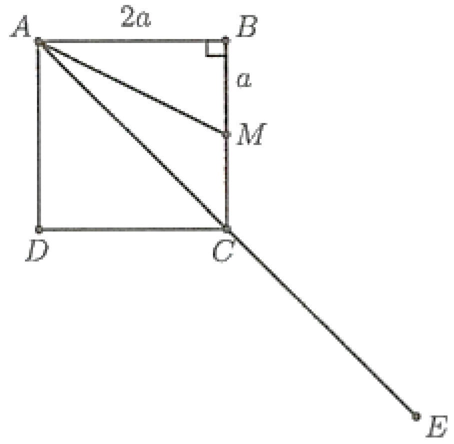
Từ (5) và (6) suy ra $CE=BF=8$.

Vậy $\left|\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{EM}\right|=\left|\overrightarrow{CE}\right|=CE=8$.

**» Câu 50.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2, M$ là trung điểm $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

*Lời giải*

*✓Trả lời: 2*




Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM$.

Theo định lí Py-ta-go: $AM^2=AB^2+BM^2=2^2+1^2=5\Rightarrow AM=a\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|=AM=\sqrt{5}\approx 2$

**» Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2, M$ là trung điểm $BC$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 6***

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$

Gọi $E$ đối xứng với $A$ qua $C$, suy ra $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.

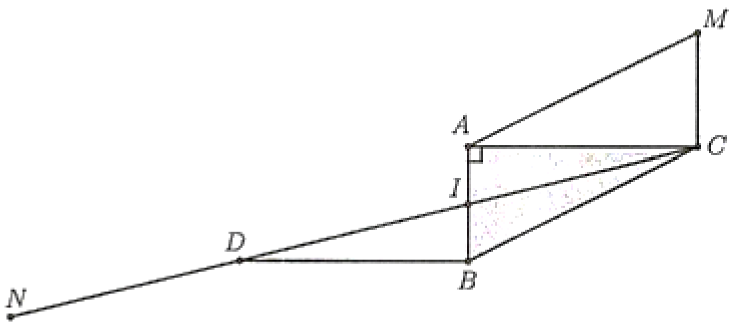
Ta có: $AE=2AC=2.2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ (do $AC$ là đường chéo của hình vuông cạnh $2a$ ).

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=AE=4\sqrt{2}\approx 6$.

**» Câu 52.** Cho tam giác vuông $ABC$ có các cạnh góc vuông là $AB=1, AC=2$. Điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 2,2***




Ta có: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}$.

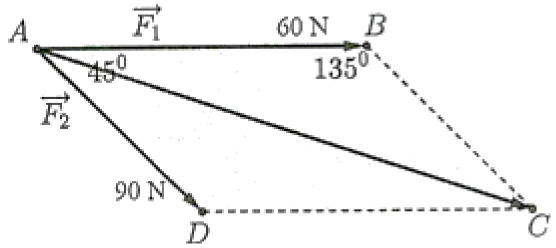
Vẽ hình bình hành $ABCM$, ta có điểm $M$ thỏa mãn.

Ta có: $\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM=BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\approx 2,2$.

**» Câu 53.** Cho hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ có điểm đặt $A$ tạo với nhau góc $45^{\circ}$, biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ lần lượt bằng $60N, 90N$. Tính cường độ tổng hợp của hai lực trên? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 139***




Đặt $\vec{F_1} = \overrightarrow{AB}, \vec{F_2} = \overrightarrow{AD}$.

Vẽ hình bình hành $ABCD$.

Ta có: $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vì $\widehat{BAD} = 45^{\circ} \Rightarrow \widehat{ABC} = 135^{\circ}$; $AD = 90 = BC$

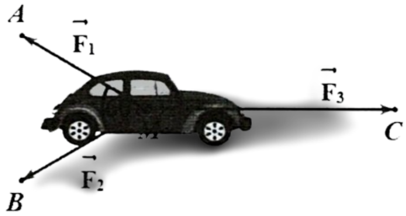
Theo định lí cosin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^{\circ}$$

$$= 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \approx 19336,75 \Rightarrow AC \approx 139$$

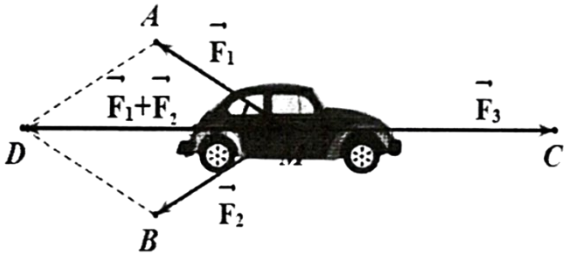
Vậy vectơ hợp lực của $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ có độ lớn là: $\left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right| \approx 139N$.

**» Câu 54.** Cho ba lực $\vec{F_1} = \overrightarrow{MA}, \vec{F_2} = \overrightarrow{MB}, \vec{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm $M$ và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60°$. Khi đó cường độ $\vec{F_3}$ đạt bao nhiêu niutơn? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*




***Lời giải***

***✓Trả lời: 43,3***




Ta có: $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$ (với $D$ là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành)

Ta có: $MA = |\overrightarrow{MA}| = \left|\vec{F_1}\right| = 25N$ và $MB = |\overrightarrow{MB}| = \left|\vec{F_2}\right| = 25N$

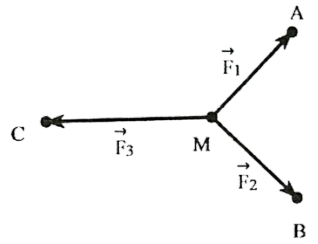
Do $\widehat{AMB} = 60^{\circ}$ nên $\Delta MAB$ là tam giác đều. Khi đó: $MD = 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}(N)$

Do ô tô đứng yên nên cường độ lực tác dụng lên ô tô bằng 0 hay $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$

Suy ra: $\vec{F_3}=-\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}\right)\Rightarrow\left|\vec{F_3}\right|=\left|-\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}\right)\right|=|\overrightarrow{DM}|=MD=25\sqrt{3}(N)$

Vậy cường độ của $\vec{F_3}$ là $25\sqrt{3}\ (N)\approx 43,3(N)$

**» Câu 55.** Cho ba lực $\vec{F_1}=\overrightarrow{MA},\vec{F_2}=\overrightarrow{MB},\vec{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm $M$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F_1},\vec{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $\widehat{AMB}=90^{\circ}$. Khi đó tính cường độ của lực $\vec{F_3}$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*



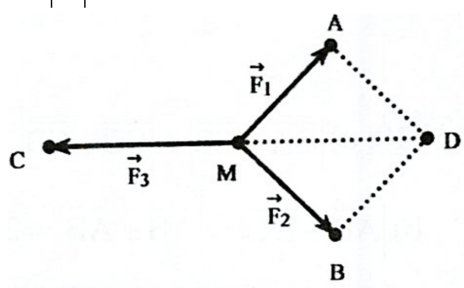

*Lời giải*

***✓Trả lời: 141***

Vẽ hình vuông $ADBM$, cạnh $MA=100$ thì $MD=100\sqrt{2}$.

Theo qui tắc hình bình hành có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$. Vật đứng yên khi $\vec{F_3}=-\overrightarrow{MD}$.

Suy ra cường độ của lực $\vec{F_3}$ là: $\left|\vec{F_3}\right|=100\sqrt{2}N$.




------------------------------ Hết ------------------------------

Chương 05

# Bài 3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

## A Lý thuyết

### 1. Tích của một số với một vectơ

**Định nghĩa**

» Cho số $k \neq 0$ và một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc tơ $\vec{a}$ với $k$ là một véc tơ.

▶ **Ký hiệu** $k.\vec{a}$ có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$,

Khi đó $k.\vec{a}$:

- *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- *Ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

» Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}; \vec{0}.k = \vec{0}$.

**Tính chất**

Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực số $k, h$ ta có

(1) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (2) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

(3) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ (4) $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

### 2. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

» Nếu $I$ là trung điểm của $AB$ thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

» Nếu $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

### 3. Điều kiện để hai vecto cùng phương

» Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) là có một số thực $k$ để $\boxed{\vec{a} = k\vec{b}}$.

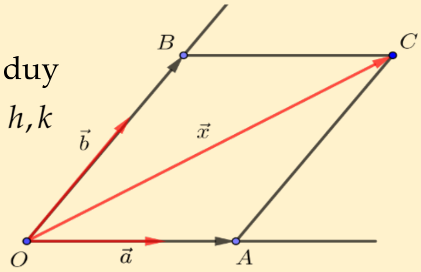
» *Nhận xét:*

Ba điểm phân biệt $A, B, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có một số thực $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

## 4. Phân tích một vectơ theo hai vecto không cùng phương

» Cho hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương.

» Khi đó mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $h,k$ thực duy nhất sao cho $\boxed{x = h\vec{a} + k\vec{b}}$.



## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Dựng vectơ

**Phương pháp**

(1) **Dựng vectơ $\vec{m} = k.\vec{a}$ :**

Khi đó $\vec{m} = k.\vec{a}$ :

- *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- *Ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

» Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}; \vec{0}.k = \vec{0}$.

(2) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- Điểm $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

**Ví dụ 1.1.**

Cho hai điểm phân biệt $A, B$. Xác định điểm $M$ biết

(1) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

***Lời giải***

(1) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$


Ta có: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM = \dfrac{2}{3}AB$.

(2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$


Ta có: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM = 3AB$.

**Ví dụ 1.2.**

Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $AB$ sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm $k$ trong các đẳng thức sau:

(1) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ (3) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

***Lời giải***


(1) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM = \frac{1}{5}AB$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$.

(2) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{4}MB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$.

(3) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

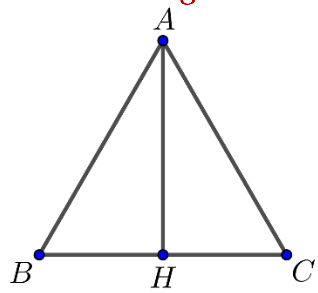
Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{5}AB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$.

**Ví dụ 1.3.**

Cho tam giác đều $ABC$. Xác định

(1) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ (2) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

***Lời giải***




(1) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$.

(2) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Gọi $H$ là trung điểm của $BC$.

Ta có: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$

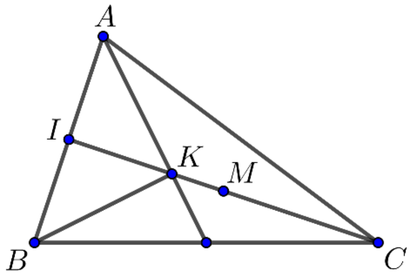
**Ví dụ 1.4.**

Cho tam giác $ABC$.

(1) Tìm điểm $K$ sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

(2) Tìm điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

*Lời giải*




**(1)** Tìm điểm $K$ sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác $ABC$.

**(2)** Tìm điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của $IC$.

## Dạng 2. Sự cùng phương của hai vectơ - Ba điểm thẳng hàng

### Phương pháp

(1) **Hai vectơ cùng phương:**

▫ Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ là có một số thực $k$ để $\boxed{\vec{a}=k\vec{b}}$

(2) **Ba điểm thẳng hàng:**

▫ Ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có một số thực $k\neq 0$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

(3) **Hai điểm trùng nhau:**

▫ Để chứng minh hai điểm $M,N$ trùng nhau

$\rightarrow$ chứng minh $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$ với $O$ là một điểm nào đó, *hoặc*

$\rightarrow$ chứng minh $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

(4) **Hai đường song song:**

▫ Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng $AB$ và $CD$ phân biệt thì $AB//CD$.

**Ví dụ 2.1.**

Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là trung điểm của $AM$ và $K$ là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng ba điểm $B,\ I,\ K$ thẳng hàng.

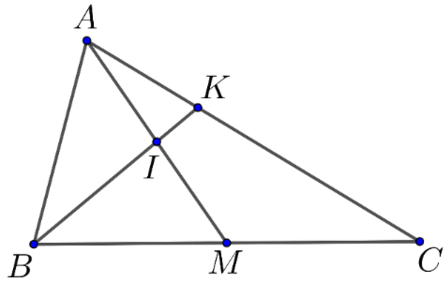
*Lời giải*

• Ta có $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)$ (Do $BI$ là đường trung tuyến $\Delta ABM$)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$ (Do $M$ là trung điểm của $BC$)

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KA}\right)+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{KC}$




• Mà $AK=\frac{1}{3}AC$ nên $KC=2KA \Rightarrow \overrightarrow{KC}=-2\overrightarrow{KA}\Leftrightarrow\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KA}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\overrightarrow{KC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}=\vec{0}$.

• Do đó $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}+\vec{0}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. Vậy ba điểm $B,\ I,\ K$ thẳng hàng.

**Ví dụ 2.2.**

Cho 4 điểm $O,A,B,C$ sao cho $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Chứng tỏ rằng $A,B,C$ thẳng hàng.

*Lời giải*

• Ta có: $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

⇨ Vậy: $A,B,C$ thẳng hàng.

**Ví dụ 2.3.**

Cho hình bình hành $ABCD$ trên $BC$ lấy điểm $H$, trên $BD$ lấy điểm $K$ sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh $A,K,H$ thẳng hàng.

***Lời giải***

- Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}\end{cases}$

Mà: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\right)$

- Khi đó: $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AH}$ ⇨ Vậy $A,K,H$ thẳng hàng.

**Ví dụ 2.4.**

Cho tam giác $ABC$. Hai điểm $M, N$ được xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0} \text{ và } \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Chứng minh rằng $MN // AC$.

***Lời giải***

- Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{BC}$ nên $MA // BC$.
- Do đó $M \notin AC$ $(1)$.
- Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA}\right)-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

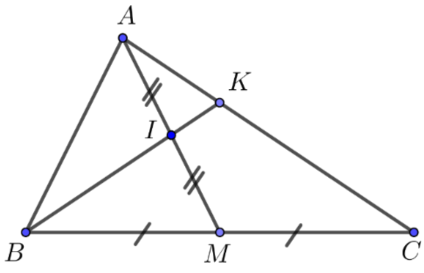
$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AC}$ $(2)$.

- Từ $(1),(2)$ ta có $MN // AC$.

**Ví dụ 2.5.**

Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là trung điểm $AM$ và $K$ thuộc cạnh $AC$ sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh $B,I,K$ thẳng hàng.

***Lời giải***




• Ta có: $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\left(1\right)$.

• Ta có: $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$ hay $B,I,K$ thẳng hàng.

## Dạng 3. Tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức

### Phương pháp

- Để tìm tập hợp điểm $M$ thỏa mãn một đẳng thức véctơ, ta biến đổi đẳng thức véc tơ đó về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:
  - Tập hợp các điểm *cách đều hai đầu mút* của một đoạn thẳng là *đường trung trực* của đoạn thẳng đó.
  - Tập hợp các điểm *cách đều một điểm cố định* một khoảng không đổi là *đường tròn* có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.

**Ví dụ 3.1.**

Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ (2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

**Lời giải**

(1) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

- Ta có $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

⇨ Vì $A$ và $B$ là hai điểm phân biệt nên không tồn tại điểm $M$.

(2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

- Gọi $G$ là điểm thoản mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (hay $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$).
- Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}=\vec{0}\Rightarrow M\equiv G$.

⇨ Vậy tập hợp điểm $M$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

**Ví dụ 3.2.**

Cho tam giác $ABC$. Tìm tập hợp điểm $M$ trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

(2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

(3) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$

**Lời giải**

(1) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

- $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=AB$ (1).
- Gọi $I$ là trung điểm $AB$, khi đó (1) $\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right|=AB\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=AB\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}$.

⇨ Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$.

(2) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ $(*)$

- Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$, và $I$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Biểu thức $(*)\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|3\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow 3MG=3MI\Leftrightarrow MG=MI$.

⇨ Vậy tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của đoạn $GI$.

(3) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|\ (*)$

- Gọi $I$ và $J$ lần lượt là các điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0},\ \overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$.
- Biểu thức $(*)\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MI}\right|=\left|3\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow 3MJ=3MJ\Leftrightarrow MI=MJ$.

⇨ Vậy tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của đoạn $IJ$.

**Ví dụ 3.3.**

Cho điểm $O$ cố định và hai vecto $\vec{u};\vec{v}$ cố định.

Với mỗi số $m$ ta xác định được điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{OM}=m\vec{u}+(1-m)\vec{v}$.

Tìm tập hợp điểm $M$ khi $m$ thay đổi.

*Lời giải*

- Từ $O$ dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ thì $A,B$ cố định.

$\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=m\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=m\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BA}$.

- Từ đó suy ra $A,B,M$ thẳng hàng.

Vậy tập hợp điểm M chính là đường thẳng $AB$.

**Ví dụ 3.4.**

Cho $\Delta ABC$ và ba vecto cố định $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$. Với mỗi số thực $t$, ta lấy các điểm $A', B', C'$ sao cho $\overrightarrow{AA'}=t\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'}=t\vec{v}$, $\overrightarrow{CC'}=t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm $G'$ của $\Delta A'B'C'$ khi $t$ thay đổi.

*Lời giải*

- Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, khi đó:

$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}$

$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}$

$$=\Big(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\Big)+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=t.\vec{u}+t.\vec{v}+t.\vec{w}=t\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)$$

- Đặt $\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ thì vecto $\vec{\alpha}$ cố định và $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}t.\vec{\alpha}$.

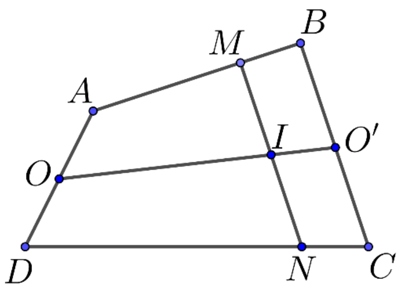
⊙ *Trường hợp 1:* Nếu $\vec{\alpha}=\vec{0}$ thì các điểm $G'$ trùng với điểm $G$.

⊙ *Trường hợp 2:* Nếu $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ thì quỹ tích các điểm $G'$ là đường thẳng đi qua $G$ và song song với giá của vecto $\vec{\alpha}$.

**Ví dụ 3.5. (*)**

Cho tứ giác $ABCD$. Với mỗi số $k$ tùy ý, lấy các điểm $M, N$ sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm $I$ của đoạn thẳng $MN$ khi $k$ thay đổi.

***Lời giải***




- Gọi $O, O'$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$.
- Khi đó:

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

- Vì $O$ và $I$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $MN$

Nên $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}\right) = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) = k\overrightarrow{OO'}$

- Do đó: khi $k$ thay đổi, tập hợp các điểm $I$ là đường thẳng $OO'$.

## Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo 2 vectơ không cùng phương

**Phương pháp**

Mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $h,k$ thực duy nhất sao cho $\boxed{x=h\vec{a}+k\vec{b}}$.

Ta lưu ý các trường hợp đặc biệt:

(1) Nếu $I$ là trung điểm của $AB$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

(2) Nếu $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$ thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
và $\forall M$, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

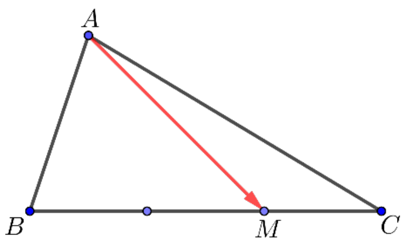
(3) Nếu ba biểm $A,B,C$ thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, với số $k$ xác định.

(4) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

**Ví dụ 4.1.**

Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là một điểm trên cạnh $BC$ sao cho $MB=2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

***Lời giải***




Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).

**Ví dụ 4.2.**

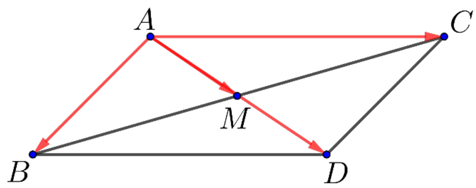
Cho $\Delta ABC$ có trung tuyến $AM$, $M$ là trung điểm của $BC$. Hãy biểu diễn vecto $\overrightarrow{AM}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

***Lời giải***

**⊙ Cách 1:**

Vì $M$ là trung điểm của $BC$

Nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.




**⊙ Cách 2:**

Do $M$ là trung điểm của $BC$ nên $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

- Áp dụng quy tắc 3 điểm, ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ $(1)$

- Lại có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\ (2)$
- Cộng vế với vế của $(1),(2)$ ta được:

$$2\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

**⊙ Cách 3:**

Xét hình bình hành $ABDC$ có $M$ là trung điểm của $BC$ nên $M$ cũng là trung điểm của $AD\Rightarrow \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$ (1)

- Áp dụng quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\ (2)$
- Từ $(1)(2)\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

**Ví dụ 4.3.**

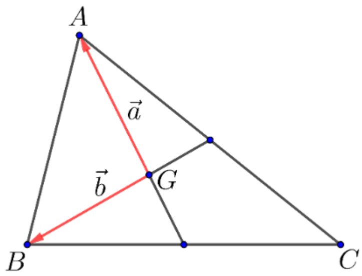
Gọi $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$.
Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{GC},\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{GA};\vec{b}=\overrightarrow{GB}$.

***Lời giải***

- Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\vec{b}-\vec{a}$.
- Vì $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$

Nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$.

- Ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=-\vec{b}+\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=-\vec{a}-2\vec{b}$.
- Ta có: $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}-\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}+\vec{b}$




**Ví dụ 4.4.**

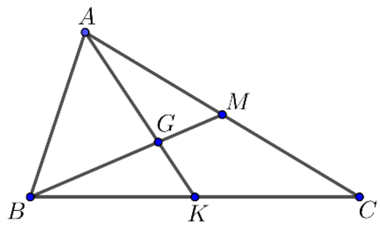
Cho $AK$ và $BM$ là hai trung tuyến của tam giác $ABC$, trọng tâm $G$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AK}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BM}$

***Lời giải***

* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

* $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BK}=2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GK}\right)=2.\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$

* $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}\right)=-\left(\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$




**Ví dụ 4.5.**

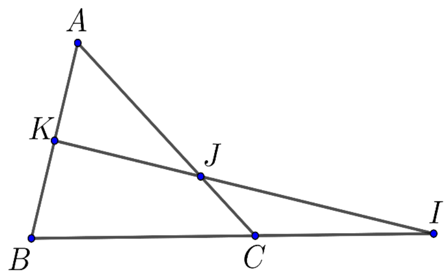
Cho $\Delta ABC$ với $I,J,K$ lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC};\overrightarrow{JC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JA};\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$.

(1) Tính $\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$.

(2) Chứng minh ba điểm $I,J,K$ thẳng hàng.

***Lời giải***

(1) Tính $\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$.




- Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

(2) Chứng minh ba điểm $I,J,K$ thẳng hàng.

- Theo câu (1): $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}\right)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{IK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$

⇨ Vậy $I,J,K$ thẳng hàng.

# Chương 05

## Bài 3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

### C Luyện tập

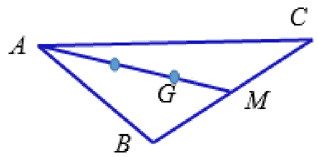
*A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm*

**» Câu 1.** Cho $\Delta ABC$ với trung tuyến $AM$ và trọng tâm $G$. Khi đó đẳng thức nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

*Lời giải*

**Chọn C**



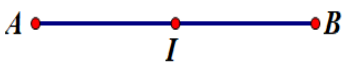

Vì G là trọng tâm $\Delta ABC$ nên $ABC$

**» Câu 2.** Cho đoạn thẳng $AB$ có trung điểm $I$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. **C.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

*Lời giải*

**Chọn C**



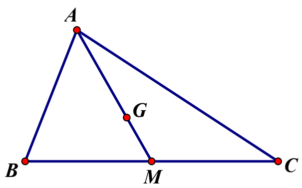

Do $I$ là trung điểm $AB$ nên $ABC$ và hai vectơ $AM$ và $G$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

**» Câu 3.** Cho tam giác $ABC$ với trung tuyến $AM$ và trọng tâm $G$. Tìm số thực $k$ thỏa mãn $\overrightarrow{GA}=k.\overrightarrow{GM}$.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-2$. **D.** $2$.

*Lời giải*

**Chọn C**




Vì $GA=2GM$, $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$. Vậy $k=-2$.

**» Câu 4.** Nếu $I$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ và $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của $k$ bằng

**A.** $2$.  **B.** $\frac{1}{2}$.  **C.** $1$.  **D.** $3$.

*Lời giải*

**Chọn C**

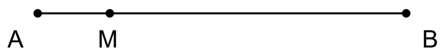
Ta có $k$ và $\overrightarrow{AI}=k.\overrightarrow{AB}$, $k=\frac{5}{8}$ ngược hướng. Vậy $k=1$

**» Câu 5.** Cho đoạn thẳng $AB$ và $M$ là một điểm nằm trên đoạn $AB$ sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$. Phát biểu nào sau đây là đúng:

**A.** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.  **B.** $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.  **C.** $\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.  **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

*Lời giải*

**Chọn D**



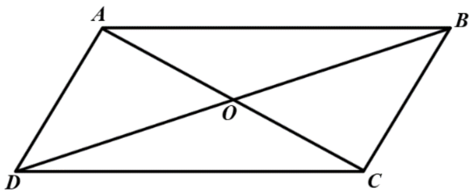

Vì $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$ mà $AM=\frac{1}{4}AB$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì $\overrightarrow{MA}$ ngược hướng $\overrightarrow{MB}$ mà $MA=\frac{1}{3}MB$ nên $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

Vì $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng $\overrightarrow{AB}$ mà $MB=\frac{3}{4}AB$ nên $\overrightarrow{MB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

Vì $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng $\overrightarrow{MA}$ mà $MB=3MA$ nên $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

**» Câu 6.** Cho hình bình hành $\overrightarrow{BC}$. tâm $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Chọn khẳng định đúng?




**A.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.  **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.  **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.  **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

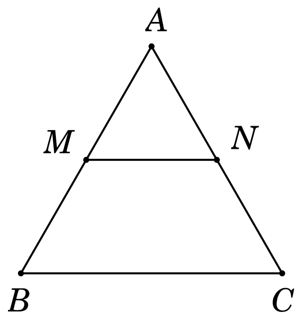
Có $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CA}$ ngược hướng và $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|$ nên $\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

**» Câu 7.** Gọi $\vec{a}$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $\vec{b}$ của tam giác đều $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.  **B.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$.  **C.** $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$.  **D.** $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$ là đường trung bình của tam giác $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

Do đó $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

**» Câu 8.** Cho điểm $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ nằm giữa hai điểm $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $AM=\frac{2}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

*Lời giải*

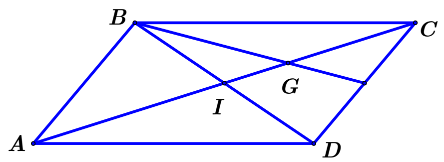
**Chọn D**

Do điểm nằm giữa hai điểm $a$ và $ABC$ nên $D$ ngược hướng.

$BC$, $DC=2DB$ $\overrightarrow{AD}=m\overleftrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $\frac{m}{n}$

Vậy: $\frac{1}{3}$.

**» Câu 9.** Cho hình bình hành $\vec{n}=\frac{-5}{2}\vec{a}+5\vec{b}$ tâm $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}=\frac{-2}{5}\left(\frac{-5}{2}\vec{a}+5\vec{b}\right)=\frac{-2}{5}\vec{n}$; $\vec{m}$ là trọng tâm tam giác $\vec{n}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?




**A.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$. **B.** $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$.

**C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

*Lời giải*

**Chọn C**

+ Có là $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$ nên áp dụng tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$ nên A đúng.

+ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD;\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=DB$ nên B đúng.

+ Áp dụng tính chất trung điểm ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên D đúng.

+ Có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ nên C sai.

**» Câu 10.** Cho tam giác $ABC$ có $M$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $CM=2MB$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

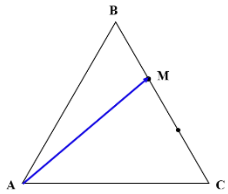
**B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

***Lời giải***

**Chọn C**




Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 11.** Biết tam giác $ABC$ có $AM$ là đường trung tuyến và $G$ là trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

**B.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

**C.** $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

**D.** $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

***Lời giải***

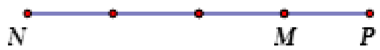
**Chọn B**

Ta có: $M$ là trung điểm $BC$ nên với điểm $G$ là trọng tâm, ta có:

$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}.\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

hay $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 12.** Cho ba điểm $M,N,P$ được xác định như hình vẽ dưới đây. Khi đó véc tơ $\overrightarrow{MN}$ bằng




**A.** $4\overrightarrow{MP}$.

**B.** $ABCD$.

**C.** $O$.

**D.** $M,N$.

***Lời giải***

**Chọn C**

Ta có $OA$ và $CD$ là các véc tơ cùng hướng và $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$ $a+b$ $a+b=1$.

Vậy $a+b=\frac{1}{2}$.

**» Câu 13.** Cho $AG$ và điểm $M$. Gọi $AB$ lần lượt là hai điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{CI}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

**B.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

**C.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

**D.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

***Lời giải***

**Chọn C**

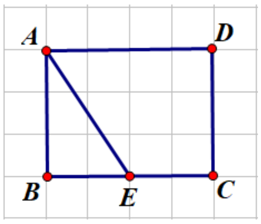
Ta có $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

» **Câu 14.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $E$ là trung điểm $BC$. Khi đó $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{EC}$ bằng

**A.** $\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

*Lời giải*

**Chọn C**



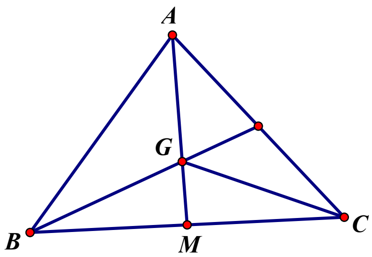

Ta có: $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

» **Câu 15.** Cho tam giác $ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$ với $G$ là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$

**A.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Gọi $M$ là trung điểm của $BC$.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$

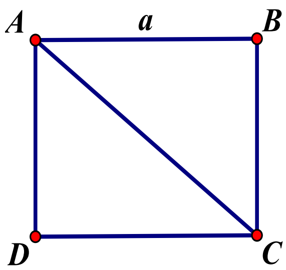
$\Rightarrow\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=GA=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.2a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

» **Câu 16.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $a$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng

**A.** $3a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|2\overrightarrow{AC}\right|=2a\sqrt{2}$.

» **Câu 17.** Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $I$ sao cho $3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{IB}$. Tìm $k$ biết $\overrightarrow{AI}=k.\overrightarrow{AB}$

**A.** $k=\frac{5}{8}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{5}{3}$. **D.** $k=\frac{3}{5}$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có $3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=5\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=\frac{5}{8}$.

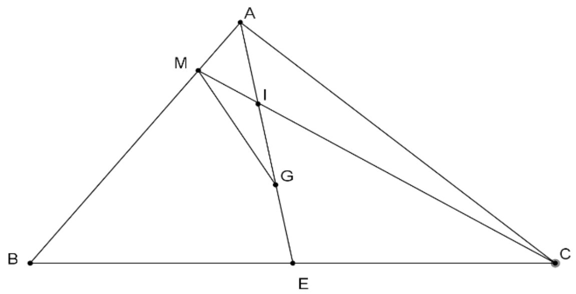
**» Câu 18.** Cho $\Delta ABC$ có $E$ là trung điểm $BC$, trọng tâm $G$. Gọi $I$ là trung điểm $AG$, $M$ thuộc $AB$ sao cho $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

**A.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

**C.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)-\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

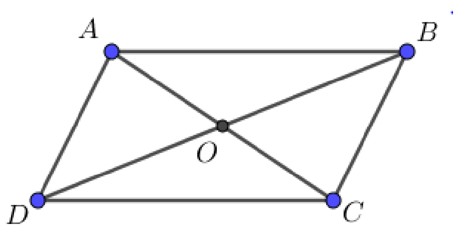
**» Câu 19.** Cho hình bình hành $ABCD$, biểu diễn $\overrightarrow{DC}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

**A.** $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

**C.** $\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ **D.** $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

**» Câu 20.** Cho tam giác $ABC$. Lấy điểm $N$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $NB=\frac{5}{6}BC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AN}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

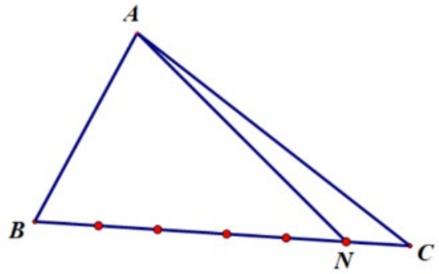
**A.** $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

*Lời giải*

**Chọn C**




Ta có $N$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $MB=\frac{5}{6}BC\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}.$

Vậy $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

**» Câu 21.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$. Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$

A. $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$.

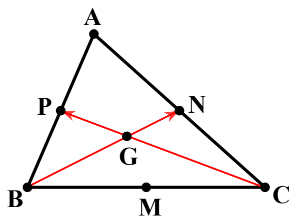
B. $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

C. $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

D. $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

Mà $\overrightarrow{GB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN};\overrightarrow{GC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

Do đó $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

**» Câu 22.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $M,N$ lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh $AB$ và $CD$ sao cho $AM=2BM$, $CD=2CN$. Giả sử $\overrightarrow{BN}=a.\overrightarrow{BA}+b.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MN}=c.\overrightarrow{BA}+d.\overrightarrow{BC}$. Tính tổng $S=a+b+c+d$?

A. $S=\frac{1}{2}$.

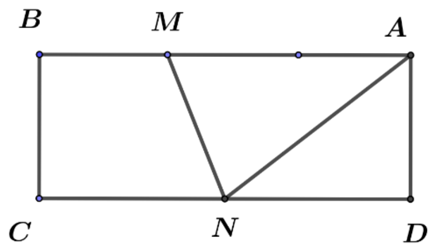
B. $S=\frac{8}{3}$.

C. $S=\frac{7}{6}$.

D. $S=\frac{5}{3}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Ta có:

+) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow a=\frac{1}{2};\ b=1$.

+) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow c=\frac{1}{6};d=1$.

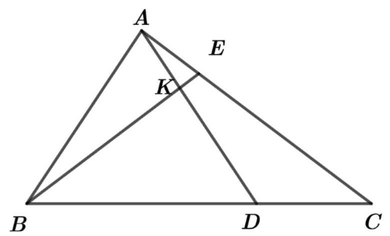
Vậy $S=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{6}+1=\frac{8}{3}$.

**» Câu 23.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $D,E$ lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi $BE$ cắt $AD$ tại $K$. Tỉ số $\frac{AK}{AD}$ bằng

**A.** $\frac{4}{13}$. **B.** $\frac{5}{11}$. **C.** $\frac{4}{11}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Vì $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\ (1)$.

Giả sử $\overrightarrow{AK}=x.\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=x.\overrightarrow{BD}+(1-x).\overrightarrow{BA}$.

Mà $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BK}=\frac{3x}{4}.\overrightarrow{BC}+(1-x).\overrightarrow{BA}$.

Vì $B,K,E$ thẳng hàng ($B$ không trùng $E$) nên có $m$ sao cho $\overrightarrow{BK}=m.\overrightarrow{BE}$.

Do đó ta có: $\frac{3x}{4}.\overrightarrow{BC}+(1-x).\overrightarrow{BA}=\frac{m}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3m}{4}\overrightarrow{BA}$. Hay $\left(\frac{m}{4}-\frac{3x}{4}\right)\overrightarrow{BC}+\left(\frac{3m}{4}+x-1\right)\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

Do $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên ta có: $\begin{cases}\frac{m}{4}-\frac{3x}{4}=0\\ \frac{3m}{4}+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{12}{13}\\ x=\frac{4}{13}\end{cases}$.

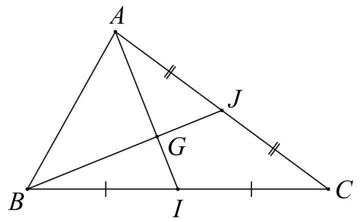
Vậy $\frac{AK}{AD}=\frac{4}{13}$.

**» Câu 24.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $I$ là trung điểm của $BC$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$. **C.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BG}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BG}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Vì $I$ là trung điểm của $BC$ nên $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Gọi $J$ là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BG}$.

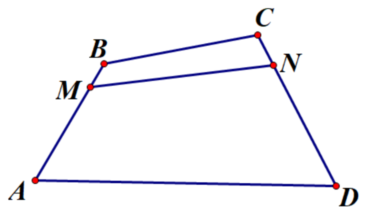
**» Câu 25.** Cho tứ giác $ABCD$. Điểm $M$ thuộc cạnh $AB$, điểm $N$ thuộc cạnh $CD$ và thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=4$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$?

**A.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.

**C.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Vì điểm $M$ thuộc đoạn $AB$, $N$ thuộc đoạn $CD$ và thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=4$ nên suy ra $\overrightarrow{MA}=-4\overrightarrow{MB}$ hay $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}=-4\overrightarrow{CN}$ hay $\overrightarrow{DN}+4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CN}$.

Cộng và vế theo vế ta được

$$5\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DN}+4\overrightarrow{CN}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MN}=\vec{0}+\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{BC}+\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$$

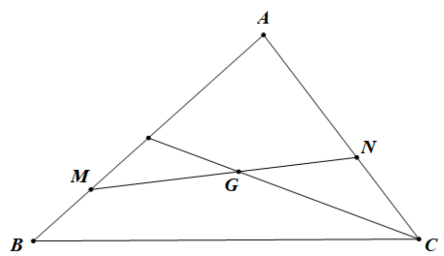
Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.

**» Câu 26.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $M$ và $N$ là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm $k$ để ba điểm $M,N,G$ thẳng hàng.

**A.** $k=\frac{5}{3}$. **B.** $k=\frac{3}{5}$. **C.** $k=\frac{3}{4}$. **D.** $k=\frac{3}{7}$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GM}+3\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GM}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{GB}$.

Lại có $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}-\overrightarrow{GA}=k\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}=(1-k)\overrightarrow{GA}+k\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}=(1-k)\overrightarrow{GA}+k\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}=(1-2k)\overrightarrow{GA}-k\overrightarrow{GB}$.

Ba điểm $M,N,G$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{GN}$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng phương.

Suy ra $\dfrac{1-2k}{\frac{1}{4}}=\dfrac{-k}{\frac{3}{4}}\Leftrightarrow k=\frac{3}{5}$.

**Cách 2:**

Nếu $k=0$ thì $N\equiv A$. Khi đó ba điểm $M, G, N$ không thẳng hàng. Suy ra $k\neq 0$.

Ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{k}\overrightarrow{AN}\right)=\frac{4}{9}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3k}\overrightarrow{AN}$

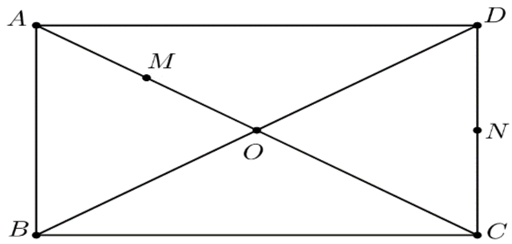
Ba điểm $G, M, N$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{4}{9}+\frac{1}{3k}=1\Leftrightarrow k=\frac{3}{5}$.

**» Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $O$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $OA$ và $CD$. Biết $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b$.

**<u>A</u>.** $a+b=1$. **B.** $a+b=\frac{1}{2}$. **C.** $a+b=\frac{3}{4}$. **D.** $a+b=\frac{1}{4}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Xét $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Do $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow a+b=1$.

**» Câu 28.** Cho tam giác $ABC$. Có bao nhiêu điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **<u>D</u>.** vô số.

*Lời giải*

**Chọn D**

Vì điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ nên $M$ cách $A$ một khoảng bằng độ dài cạnh $BC$.

Như thế tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $A$ bán kính $BC$.

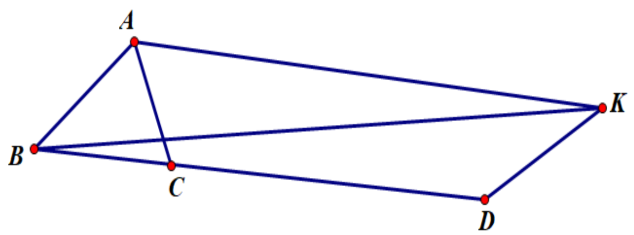
Suy ra có vô số điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

**» Câu 29.** Cho tam giác $BC$ đều có cạnh bằng $M$. Biết tập hợp các điểm $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|$ là một đường tròn. Hỏi đường tròn đó có bán kính bằng bao nhiêu?

**A.** $\sqrt{22}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **<u>D</u>.** $\sqrt{21}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BK}\right|=BK=10\sqrt{21}$ với $K$ là điểm sao cho tứ giác $ABDK$ là hình bình hành và $D$ điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BC}$.

Gọi $I$ là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|10\overrightarrow{MI}\right|=10MI$.

Từ đó: $\left|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow 10MI=10\sqrt{21}\Leftrightarrow MI=\sqrt{21}$.

Tức tập hợp các điểm $M$ là một đường tròn tâm $I$ bán kính bằng $\sqrt{21}$.

**» Câu 30.** Cho tam giác $ABC$. Tập hợp tất cả các điểm $M$ thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ là

**A.** Đường trung trực của $AB$.
**B.** Đường trung trực của $GE$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, $E$ là trung điểm $AB$.
**C.** Đường tròn tâm $G$, bán kính $R=AB$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.
**D.** Đường tròn tâm $G$, bán kính $R=\frac{3}{2}AB$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, $E$ là trung điểm $AB$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\frac{3}{2}\left|2\overrightarrow{ME}\right|\Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{MG}\right|=\frac{3}{2}.2\left|\overrightarrow{ME}\right|$

$\Leftrightarrow MG=ME$

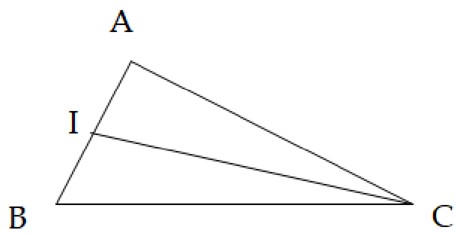
Suy ra, tập hợp điểm $M$ là đường trung trực của $GE$.

**» Câu 31.** Cho tam giác $ABC$, $I$ là trung điểm của đoạn $AB$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MC$ là

**A.** Đường trung trực của đoạn $IC$.
**B.** Đường tròn tâm $I$ bán kính $IC$.
**C.** Đường tròn tâm $I$ đường kính $IC$.
**D.** Đường tròn tâm $I$ bán kính $MC$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2MI$.

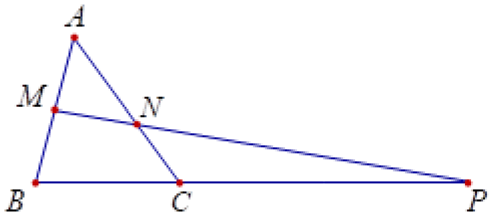
Nên ta được: $2MI=2MC\Rightarrow MI=MC$, trong đó các điểm $I,C$ cố định. Khoảng cách từ điểm $M$ tới các điểm $I,C$ bằng nhau nên $M$ thuộc đường trung trực của đoạn $IC$.

**» Câu 32.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N$ là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}$. Tìm $k$ để $M,N,P$ thẳng hàng.

**A.** $k=-3$.
**B.** $k=4$.
**C.** $k=-4$.
**D.** $k=3$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\left(k-\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AB}$. (2)

Khi đó $M,N,P$ thẳng hàng thì $\exists m\in\mathbb{R}:\overrightarrow{NP}=m\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}k-\frac{3}{5}=\frac{3m}{5}\\1-k=\frac{-m}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\m=4\end{cases}$

Vậy $k=3$.

» **Câu 33.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M,\ N$ được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. Xác định $x$ để $A,\ M,\ N$ thẳng hàng.

**A.** $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=-\frac{1}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn D**

Ta có:

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$

Và $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{BC}+(x+1)\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BC}+(x+1)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=(x+1)\overrightarrow{AB}+x.\overrightarrow{BC}$

Vậy $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AN}=x.\overrightarrow{BC}+(x+1)\overrightarrow{AB}\end{cases}$.

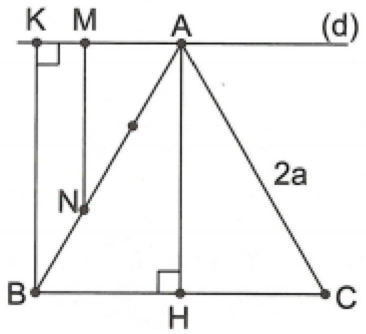
Để $A,\ N,\ M$ thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AN},(k\neq0)\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{-1}{x+1}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

» **Câu 34.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $2a,(d)$ là đường thẳng qua $A$ và song song $BC$. Khi $M$ di động trên $(d)$ thì giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Chọn điểm $N$ thuộc đoạn $AB$ sao cho $NA = 2NB \Rightarrow 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + 2\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}\right)\right| = \left|3\overrightarrow{MN} + \left(2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA}\right)\right| = \left|3\overrightarrow{MN}\right| = 3MN$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $N$ trên đường thẳng $(d)$.

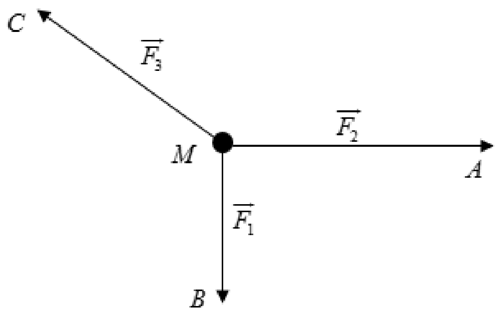
Gọi $H$ là trung điểm $BC$, $K$ là hình chiếu vuông góc của điểm $B$ trên đường thẳng $(d)$.

Theo định lý Talet ta có $\dfrac{MN}{BK} = \dfrac{AN}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{MN}{AH} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \dfrac{2}{3}AH \Leftrightarrow MN = \dfrac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BH^2}$

$\Leftrightarrow MN = \dfrac{2}{3}\sqrt{(2a)^2 - a^2} \Leftrightarrow MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3MN$ và bằng $2a\sqrt{3}$.

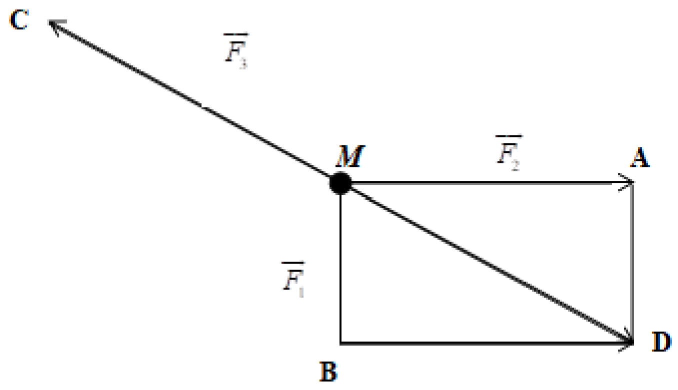
**» Câu 35.** Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $28N$ và $45N$. Tìm cường độ của lực $\overrightarrow{F_3}$ biết $\widehat{AMB} = 90^0$.




**A.** $73N$. **B.** $53N$. **C.** $60N$. **D.** $80N$.

*Lời giải*

**Chọn B**




Do vật đứng yên nên ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)$.

Dựng hình chữ nhật $AMBD$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$

Suy ra $\overrightarrow{F_3}=-\overrightarrow{MD}$ nên $F_3=MD=\sqrt{MA^2+MB^2}=\sqrt{28^2+45^2}=53(N)$

## B. *Câu hỏi – Trả lời đúng/sai*

**» Câu 36.** Cho bốn điểm $A,B,C,D$ có $M,N$ là trung điểm của $AB,CD$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$ | | |
| (d) | $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ | | |

*Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$M$ là trung điểm của $AB$ nên ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

$N$ là trung điểm của $CD$ nên ta có: $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Ta lại có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

Cộng hai đẳng thức trên vế theo vế, ta chứng minh được $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

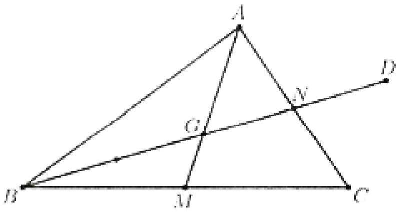
» **Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 37.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $D$ là điểm đối xứng của $B$ qua $G, M$ là trung điểm của $BC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (b) | $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$ | | |

***Lời giải***




*(a)* $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$

Ta có: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Ta có: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\right)$

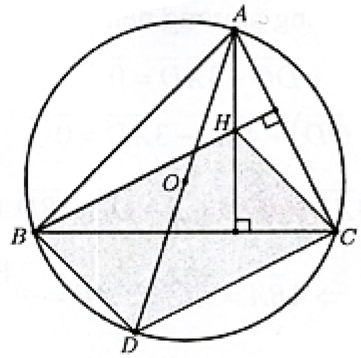
$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 38.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O,H$ là trực tâm tam giác, $D$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $BD//CH$ | | |
| (b) | $CD//BH$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$ | | |

***Lời giải***




*(a)* $BD//CH$

Xét tam giác $ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AD$ nên $AB \perp BD$;

Mặt khác $AB \perp CH$ nên $BD//CH$ (1).

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $CD//BH$

Tương tự, tam giác $ACD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AD$ nên $AC \perp CD$;

Mặt khác $AC \perp BH$ nên $CD//BH$ (2).

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$;

Từ (1) và (2) suy ra $BDCH$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (vì $O$ là trung điểm $AD$).

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}$

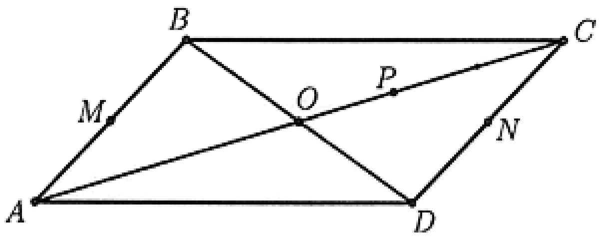
$=3\overrightarrow{OH}+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OH}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 39.** Cho hình bình hành $ABCD$, tâm $O$. Gọi $M,N$ theo thứ tự là trung điểm của $AB,CD$ và $P$ là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ | | |
| **(b)** | $3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ | | |
| **(c)** | Ba điểm $B,P,N$ không thẳng hàng | | |
| **(d)** | Ba đường thẳng $AC,BD,MN$ đồng quy | | |

***Lời giải***




*(a)* $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OP}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

**(b)** $3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Khi đó: $3\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AC}=3\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)-2.2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

» **Chọn** SAI.

**(c)** *Ba điểm $B,P,N$ không thẳng hàng*

Ta có: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác $BCD$,

Do vậy trung tuyến $BN$ của tam giác $BCD$ đi qua trọng tâm $P$ đó.

Vậy ba điểm $B,P,N$ thẳng hàng.

» **Chọn** SAI.

**(d)** *Ba đường thẳng $AC,BD,MN$ đồng quy*

Nhận xét: $AC$ và $BD$ cắt nhau tại tâm $O$ là trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$.

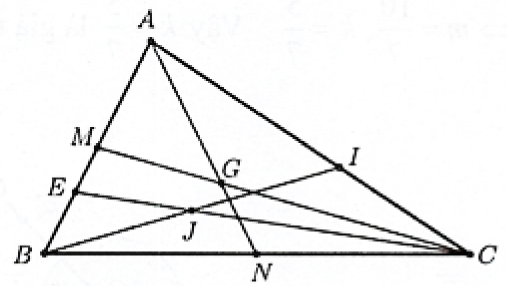
Do đó $O$ là trung điểm của $MN$ hay $AC,BD,MN$ đồng quy tại $O$.

» **Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 40.** Cho tam giác $ABC$ có $G$ là trọng tâm. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AB,BC$. Lấy hai điểm $I,J$ sao cho: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $M,N,J$ thẳng hàng | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{JM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$ | | |
| **(c)** | $J$ là trung điểm của $BI$ | | |
| **(d)** | Gọi $E$ là điểm thuộc $AB$ sao cho $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì $C,E,J$ thẳng hàng | | |

*Lời giải*




**(a)** *$M,N,J$ thẳng hàng.*

Ta có: $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right)+3\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)=4\overrightarrow{JM}+6\overrightarrow{JN}=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$. Do đó $J,M,N$ thẳng hàng.

» **Chọn** ĐÚNG.

**(b)** $\overrightarrow{JM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$

Và điểm $J$ thuộc đoạn $MN$ và thỏa mãn $JM=\frac{3}{2}JN$.

Do $J$ nằm trong $MN$ nên $\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $J$ *là trung điểm của* $BI$.

Ta có: $\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MN}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{5}{2}\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{MN}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$

Khi đó: $\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\left(-\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{JB}$( do (1)).

Vậy $J$ là trung điểm của $BI$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d) Gọi* $E$ *là điểm thuộc* $AB$ *sao cho* $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ *thì* $C,E,J$ *thẳng hàng.*

$\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{7}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Mặt khác: $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}$.

Để $C,E,J$ thẳng hàng thì: $\exists m\in\mathbb{R},\overrightarrow{CE}=m\cdot\overrightarrow{CJ}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}=-\frac{7m}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1=-\frac{7m}{10}\\ k=\frac{m}{2}\end{cases}\Rightarrow m=\frac{10}{7},k=\frac{5}{7}\Rightarrow k=\frac{5}{7}$

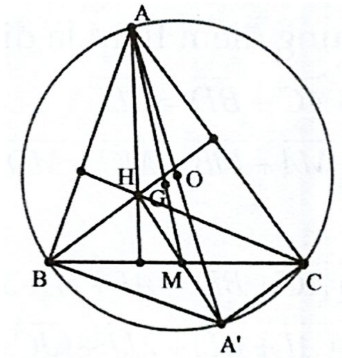
Vậy $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$

» **Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ có $M$ là trung điểm $BC$. Gọi $G$ là trọng tâm, $H$ là trực tâm, $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, $AA'$ là đường kính của $(O)$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{A'C}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$ | | |

*Lời giải*




*(a)* $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$

Do tứ giác $BHCA'$ có $BH // A'C (\perp AC)$ và $CH // BA' (\perp AB)$

Nên $BHCA'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$

**» Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

Lại có $M$ là trung điểm của đường chéo $BC$

Nên $M$ là trung điểm của $HA'$ hay $H, M, A'$ thẳng hàng.

Do $OM$ là đường trung bình của $\Delta AHA'$

Nên $AH = 2OM$, mà $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

**» Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HO}$

(Tứ giác $AHCA'$ là hình bình hành $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$)

**» Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

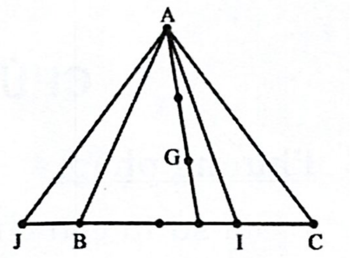
$= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$.

**» Chọn** SAI.

**» Câu 42.** Cho $\Delta ABC$. Gọi $I$ là điểm trên cạnh $BC$ sao cho $2CI = BI$. $J$ là điểm trên cạnh $BC$ kéo dài sao cho $5JB = JC$. $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{AG} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$ | | |

***Lời giải***




*(a)* $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{CI}$

Vì $BI=2CI$ và $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{CI}$ cùng hướng $\Rightarrow \overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{CI}$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Vì $5JB=JC$ và $\overrightarrow{JB}$ và $\overrightarrow{JC}$ cùng hướng

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ}\right)=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{AG}=\frac{14}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$

Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Ta có hệ: $\begin{cases}\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AJ}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AJ}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=8\overrightarrow{AJ}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=5\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}-4\overrightarrow{AJ}\right)+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=\frac{13}{9}\overrightarrow{AI}-20\overrightarrow{AJ}\end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

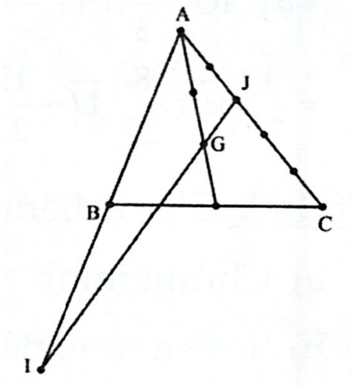
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{13}{9}\overrightarrow{AI}-\frac{20}{9}\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{1}{27}\overrightarrow{AI}+\frac{8}{27}\overrightarrow{AJ}+\frac{13}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{20}{3}\overrightarrow{AJ}=\frac{14}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 43.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. Gọi $I,J$ là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{IG}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ | | |
| (d) | 3 điểm $I,J,G$ thẳng hàng | | |

*Lời giải*




*(a)* $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AI}=2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow-\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$$

» **Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$$3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow-3\overrightarrow{AJ}+2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow5\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{IG}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Gọi $M$ là trung điểm $BC$

$$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-2\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d) 3 điểm $I,J,G$ thẳng hàng.*

Xét hệ: $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{IG}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\\ \frac{3}{5}\overrightarrow{IG}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IG}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$

$\Rightarrow\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{IG}$ cùng phương $\Rightarrow I,J,G$ thẳng hàng.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 44.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB},\vec{v}=\overrightarrow{AE}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$ | | |
| (b) | $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ | | |
| (c) | $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ | | |
| (d) | $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$

Gọi $O$ là tâm lục giác đều $ABCDEF$

Tứ giác $ABDE1$ hình chữ nhật $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

Tứ giác $ABCO$ là hình thoi

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}$ (tứ giác $ABOF$ là hình thoi nên $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BA}$ )

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}.$$

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

Tứ giác $AOEF$ là hình thoi nên

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}.$$

» **Chọn** SAI.

**» Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ . Hai điểm $M,N$ được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}, \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Khi đó:

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| (a) | $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AC}$ | | |
| (b) | Hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương | | |
| (c) | $M$ thuộc đường thẳng $AC$ | | |
| (d) | Hai đường thẳng $MN$ và $AC$ song song | | |

***Lời giải***

*(a)* $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-3\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$.

» **Chọn** SAI.

**(b)** *Hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương*

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương (1).

» **Chọn** ĐÚNG.

**(c)** *$M$ thuộc đường thẳng $AC$*

Xét: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$.

Do đó $M$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCM$

Hay $M$ không thuộc đường thẳng $AC(2)$

» **Chọn** SAI.

**(d)** *Hai đường thẳng $MN$ và $AC$ song song.*

Từ (1) và (2) suy ra hai đường thẳng $MN$ và $AC$ song song.

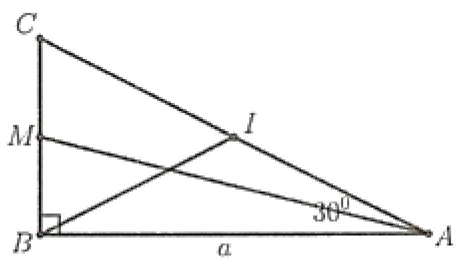
» **Chọn** ĐÚNG.

## C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

**» Câu 46.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại $B$ có $\hat{A}=30^{\circ}, AB=1$. Gọi $I$ là trung điểm của $AC$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$, *kết quả làm tròn đến hàng phần mười*

*Lời giải*

***✓Trả lời: 2,1***




Xét $\Delta ABC$ vuông tại $B$: $\tan A=\dfrac{BC}{AB}\Rightarrow BC=AB\cdot\tan A=1.\tan 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

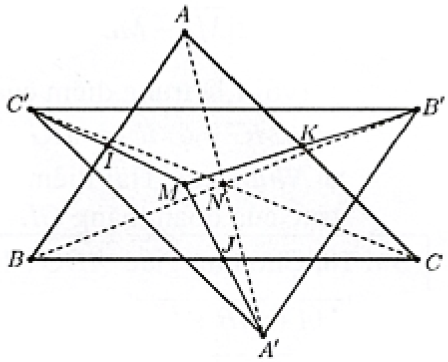
Gọi $M$ là trung điểm của $BC$, ta có:

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=2AM=2\sqrt{AB^2+BM^2}=2\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{3}\approx 2{,}1$$

**» Câu 47.** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $M$ tùy ý không thuộc các đường thẳng $AB, BC, AC$. Gọi $A', B', C'$ theo thứ tự là các điểm đối xứng của $M$ qua các trung điểm $J, K, I$ của cạnh $BC, AC, AB$. Biết ba đường thẳng $AA', BB', CC'$ đồng quy tại một điểm (đặt điểm đó là $N$). Khi đó $MN$ luôn đi qua một điểm cố định khi $M$ di động thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\dfrac{a}{b}\overrightarrow{MG}$ với $a;b$ là số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b^2$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 7*



Xét tứ giác $MBA'C$ có hai đường chéo $BC, A'M$ cắt nhau tại trung điểm $J$ của mỗi đường nên $MBA'C$ là hình bình hành, suy ra: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA'}$ (1); mặt khác $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MN}$ (2).

Cộng theo vế (1) và (2):

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MN}$ (3).

Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $2\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$.

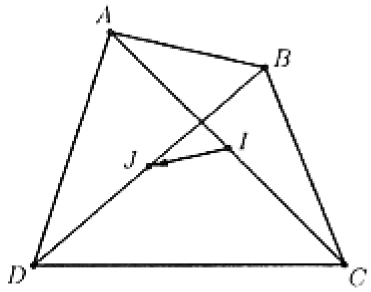
Vậy $MN$ luôn đi qua điểm $G$ cố định khi $M$ di động.

Khi đó $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \to S=a+b^2=7$

**» Câu 48.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BD$. Biết $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{IJ}$, khi đó $k=?$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 2*



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\,(1) \\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ}\,(2) \end{cases}$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$2\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$

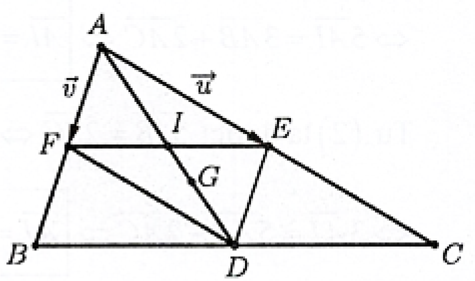
Suy ra $k=2$

**» Câu 49.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm $G$. Các điểm $D, E, F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CA, AB$ và $I$ là giao điểm của $AD$ và $EF$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE}, \vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$

theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta thu được kết quả dạng $a.\vec{u}+b.\vec{v}$ với $a;b$ là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S=a+b$.

*Lời giải*

***✓Trả lời: 1***




Theo tính chất đường trung bình thì $\begin{cases} DE//AB \\ DF//AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE//AF \\ DF//AE \end{cases}$

Suy ra: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AD=AE+AF$.

Từ giả thiết ta có $I$ là tâm của hình bình hành $AEDF$.

Khi đó: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow S=1$;

**» Câu 50.** Nếu $G$ và $G'$ lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ thì $k\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$, khi đó $k=?$

*Lời giải*

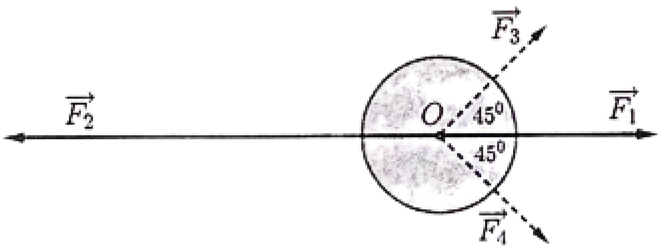
***✓Trả lời: 3***

Ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$

$=3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}+\vec{0}+\vec{0}=3\overrightarrow{GG'}$.

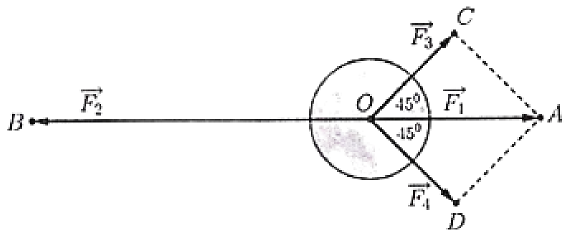
Suy ra $k=3$

**» Câu 51.** Một vật đang ở vị trí $O$ chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$, trong đó độ lớn lực $\vec{F_2}$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F_1}$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F_3},\vec{F_4}$ có phương hợp với lực $\vec{F_1}$ các góc $45^\circ$ như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $20N$. Tính tổng độ lớn của các lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*




*Lời giải*

***✓Trả lời: 85***




Ta có: $\vec{F_2} = -2\vec{F_1}$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$\Leftrightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F_1} - 2\vec{F_1} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{F_1}$.

Đặt $\vec{F_1} = \overrightarrow{OA}, \vec{F_2} = \overrightarrow{OB}, \vec{F_3} = \overrightarrow{OC}, \vec{F_4} = \overrightarrow{OD}$.

Ta có: $\vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{F_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$. Do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $\widehat{COD} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông.

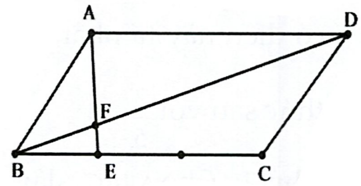
Khi đó: $\left|\vec{F_1}\right| = OA = 20\sqrt{2}\,N, \left|\vec{F_2}\right| = 2\left|\vec{F_1}\right| = 40\sqrt{2}\,N$.

Vậy $\left|\vec{F_1}\right| + \left|\vec{F_2}\right| = 20\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 80\sqrt{2} \approx 85$

**» Câu 52.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Khi đó $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$. Vậy $k = ?$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1,3***




Ta phân tích $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Xét hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \frac{4}{3}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$

**» Câu 53.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm $O$. Lấy các điểm $I$, $J$ sao cho $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}; \overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IO}$, vậy $k = ?$

***Lời giải***

***✓Trả lời: 4***

» $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

» $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} + 2\left(\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AD}$

» $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

» $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IO} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{IJ} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\overrightarrow{IO} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} \\ \dfrac{3}{2}\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow 6\overrightarrow{IO} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IO}$

**» Câu 54.** Cho $\Delta ABC$. Gọi J là điểm trên cạnh $AC$ sao cho $JA = \dfrac{2}{3}JC$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ta thu được kết quả dạng $a.\overrightarrow{BA} + b.\overrightarrow{BC}$ với $a;b$ là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S = a + b$.

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1***

*Cách 1.* $JA = \dfrac{2}{3}JC \Leftrightarrow 3JA = 2JC$ mà $\overrightarrow{JA}$ và $\overrightarrow{JC}$ ngược hướng

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ}\right) + 2\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BJ}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

*Cách 2:* J thuộc cạnh AC và $JA = \dfrac{2}{3}JC \Rightarrow \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow AJ = \dfrac{2}{5}AC$

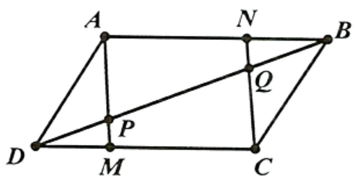
$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

Khi đó $a = \dfrac{3}{5}; b = \dfrac{2}{5} \Rightarrow S = a + b = 1$

**» Câu 55.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng $DC, AB$ theo thứ tự lấy các điểm $M, N$ sao cho $DM = BN$. Gọi $P$ là giao điểm của $AM, DB$ và $Q$ là giao điểm của $CN, DB$. Khi đó $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{QB}$. Vậy $k = ?$

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1***




Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác $AN$ song song với $MC$

Do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác $\Delta DMP$ và $\Delta BNQ$ ta có $DM = NB$ (giả thiết), $\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị)

Suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 05

# Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

## A Lý thuyết

### 1. Góc giữa hai vectơ

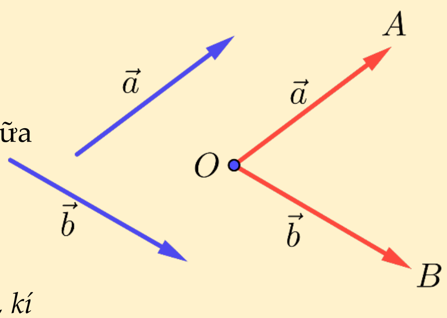
**Định nghĩa**

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

» Từ một điểm $O$ bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ $0^0$ đến $180^0$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

» Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.




♨ *Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.*

▶ **Chú ý.** Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

### 2. Tích vô hướng hai vectơ

**Định nghĩa**

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▶ **Kí hiệu** là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$.

**Chú ý**

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

⇨ Ta có $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2$

## 3. Tính chất của tích vô hướng

### Các tính chất:

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

(1) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).

(2) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

(3) $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$.

(4) $\vec{a}^2\geq 0, \vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

(5) $\vec{a}.\vec{b}>0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc nhọn.

(6) $\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc tù.

(7) $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc vuông.

▶ **Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

TVH

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2.$$

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2.$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2.$$

▶ **Chú ý:**

$\Delta ABC$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AB^2+AC^2-BC^2.$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}BA^2+BC^2-AC^2.$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}CA^2+CB^2-AB^2.$$

## B Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính tích vô hướng hai vectơ

*Phương pháp*

(1) **Dựa vào định nghĩa:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▶ **Kí hiệu** là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$.

(2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

1. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).
2. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).
3. $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$
4. $\vec{a}^2\geq 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

(3) **Chú ý:**

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

⇨ Ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$

**Ví dụ 1.1.**

Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ với $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120°$. Tính

(1) $\vec{a}.\vec{b}$ (2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$ (3) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

*Lời giải*

(1) $\vec{a}.\vec{b}$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=3.2.\cos120°=-3.$$

(2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$

$$\begin{cases}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}=3^2+2^2+2.(-3)=7\\ \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=3^2+2^2-2.(-3)=19\end{cases}\Rightarrow 7+19=26$$

(3) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\vec{a}.\vec{b}+4\vec{a}.\vec{b}-2\vec{b}^2=2.3^2-(-3)+4.(-3)-2.2^2=1.$$

**Ví dụ 1.2.**

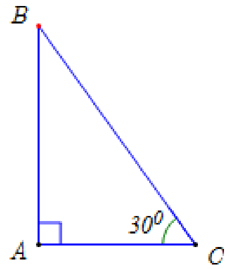
Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30°$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ (3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

- Ta có: $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\tan\widehat{ACB}} = a\sqrt{3}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

(1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$




- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = a.a\sqrt{3}.\cos 30° = \dfrac{3}{2}a^2$.

(2) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = 2a.a\sqrt{3}\cos 30° = 3a^2$.

(3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = a.2a.\cos 90° = 0$.

**Ví dụ 1.3.**

Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $AB = 2a$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ (2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

*Lời giải*

(1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = 2a.2a.\cos 120° = -2a^2$

(2) $\overrightarrow{BA}\left(3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}\right)$

- $\overrightarrow{BA}\left(3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}\right) = 3\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}$

$= 3BA.AC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right) - 2\overrightarrow{AB}^2 = 3.2a.2a.\cos 120° + 2.(2a)^2 = 2a^2$.

## Dạng 2. Xác định góc giữa hai vectơ

*Phương pháp*

(1) Tính góc: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

(2) Tính độ dài: $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$

**Ví dụ 2.1.**

Cho $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$. Định góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ biết:

(1) $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

(2) $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

(3) $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

(4) $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3};\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$

*Lời giải*

(1) $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

- Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0$.

(2) $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

- Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$.

(3) $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

- Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^0$.

(4) $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3};\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$

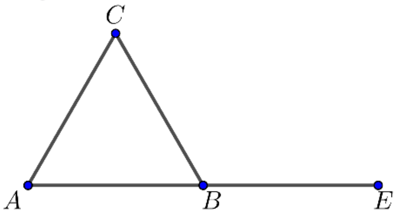
$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=3\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}.\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=3\Leftrightarrow1^2+4\vec{a}.\vec{b}+4.1^2=3\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$$

Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^0$.

**Ví dụ 2.2.**

Cho tam giác đều $ABC$. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

*Lời giải*




Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=180-\widehat{CBA}=120^0$

$\longrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos 120^0=-\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2.1.**

Cho tam giác $ABC$ có $AB=5,\ BC=7,\ CA=8$.

(1) Tính $\cos A,\cos B,\cos C$

(2) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

(3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh $BC$ của tam giác $ABC$.

***Lời giải***

(1) Tính $\cos A,\cos B,\cos C$

- Áp dụng định lý Cosin trong tam giác, ta có: $\begin{cases}\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{1}{2}\\ \cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{1}{7}\\ \cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2.AC.BC}=\dfrac{11}{14}\end{cases}$.

(2) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

- Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180°-B\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\left(180°-B\right)=-\dfrac{1}{7}\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180°-C\Rightarrow\text{Cos}\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=\cos\left(180°-C\right)=-\dfrac{11}{14}\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=180°-A\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=\cos\left(180°-A\right)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

- Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$

$=5.7.\left(-\frac{1}{7}\right)+7.8.\left(-\frac{11}{14}\right)+8.5.\left(-\frac{1}{2}\right)=-69$.

(3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh $BC$ của tam giác $ABC$.

- Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$m_a^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{129}{4}\Rightarrow m_a=\frac{\sqrt{129}}{4}$$

## Dạng 3. Chứng minh đẳng thức liên quan tích vô hướng

### Phương pháp

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▶ **Kí hiệu** là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

(2) **Tính chất:**

Với ba vecto $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

**1.** $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).

**2.** $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

**3.** $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

**4.** $\vec{a}^2\geq 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

(3) **Chú ý:** $\vec{a}^2=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$

**Ví dụ 3.1.**

Cho tam giác $\Delta ABC$, Chứng minh rằng: với điểm $M$ tuỳ ý ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}=0$$

*Lời giải*

- Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}$.

$=\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)$

$=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$.

**Ví dụ 3.2.**

Cho $O$ là trung điểm của $AB$ và $M$ là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-OA^2$$

*Lời giải*

- Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right).\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OM}^2$

$=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}^2=\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OA}^2=OM^2-OA^2$, (do $O$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$).

**Ví dụ 3.3.**

Cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ và $M$ là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=IM^2-IA^2$$

*Lời giải*

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2$

Sử dụng quy tắc ba điểm: $VT=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$=\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2=VP$ (đpcm).

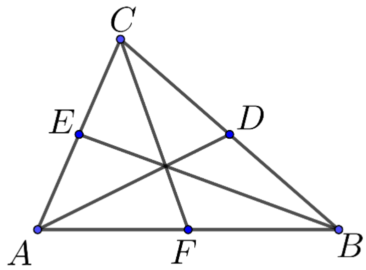
**Ví dụ 3.4.**

Cho $\Delta ABC$ có 3 trung tuyến $AD, BE, CF$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0$$

*Lời giải*

- Do $\Delta ABC$ có 3 trung tuyến $AD, BE, CF$ nên ta có:




$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right).$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}\right).$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right)=0.$

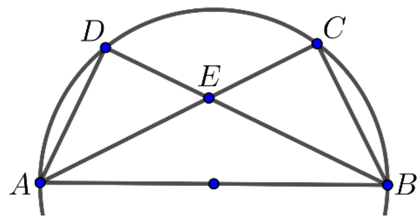
**Ví dụ 3.5.**

Cho nửa đường tròn đường kính $AB$.

Có $AC$ và $BD$ là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại $E$.

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$$

*Lời giải*




Ta có $VT=\overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BE}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$

Vì $AB$ là đường kính nên $\widehat{ADB}=90^0$, $\widehat{ACB}=90^0$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=0$

Do đó $VT=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{AB}^2=VP$ (đpcm).

## Dạng 4. Tập hợp điểm

### Phương pháp

- **Loại 1:** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k \quad (1)$ $(A,B$ cố định)

  - Với $k=0$: Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn đường kính $AB$
  - Với $k\neq 0$: Gọi $I$ là trung điểm $AB$:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=k\Leftrightarrow IM^2-IA^2=k\Leftrightarrow IM^2=k+IA^2=\frac{AB^2}{4}+k$$

(1) Nếu $\frac{AB^2}{4}+k>0\Leftrightarrow k>-\frac{AB^2}{4}$. Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $I$; $R=\sqrt{\frac{AB^2}{4}+k}$.

(2) Nếu $\frac{AB^2}{4}+k=0\Leftrightarrow IM=0$. Tập hợp các điểm $M$ là một điểm $I$

(3) Nếu $\frac{AB^2}{4}+k<0$ : Tập hợp các điểm $M$ là $\varnothing$ .

- **Loại 2:** $\overrightarrow{AM}.\vec{v}=k \quad (2)$ $(A$ cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định)

  - Với $k=0$: Tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng qua $A$, có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$
  - Với $k\neq 0$: $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{A'M'}.\vec{v}=k$ với $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của $\vec{v}$ $\Rightarrow M'$ cố định.

    Tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng qua $M'$, có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$.

- **Loại 3:** $aMA^2+bMB^2=k \quad (3)$ $(A,B$ cố định; $a,b$ hằng số, $a+b\neq 0)$

  - Gọi $I$ thoả $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I$ cố định.

$$(3)\Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+b\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=k$$

$$\Leftrightarrow(a+b)MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}\right)+aIA^2+bIB^2=k\Leftrightarrow(a+b)MI^2=k-aIA^2-bIB^2$$

(1) Nếu $\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}>0$. Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn tâm $I$; $R=\sqrt{\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}}$.

(2) Nếu $\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}=0$. Tập hợp các điểm $M$ là một điểm $I$

(3) Nếu $\frac{k-aIA^2-bIB^2}{a+b}<0$: Tập hợp các điểm $M$ là $\varnothing$ .

- **Loại 4:** $aMA^2+bMB^2+cMC^2=k \quad (4)$ $(A,B,C$ cố định; $a,b,c$ hằng số, $a+b+c\neq 0)$

  - Gọi $I$ thoả $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I$ cố định.
  - Tương tự $MI^2=\frac{k-aIA^2-bIB^2-cIC^2}{a+b+c}$

**Ví dụ 4.1.**

Cho $\Delta ABC$. Tìm tập hợp các điểm $M$ sao cho

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ (2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

*Lời giải*

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}\right)=0\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}=0$

Do $A,B,C$ cố định nên tập hợp các điểm $M$ là đường thẳng qua $C$ và vuông góc với đường thẳng $AB$ .

(2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI}=0$ (với $I$ là trung điểm $BC$ )

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0\Leftrightarrow M\in$ đường tròn đường kính $AI$ .

**Ví dụ 4.2.**

Cho hai điểm $A,B$ cố định có độ dài bằng $a$, vecto $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực $k$ cho trước. Tìm tập hợp điểm $M$ sao cho

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$ (2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2$

*Lời giải*

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\dfrac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI^2-IA^2=\dfrac{3a^2}{4}$ (Do $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ ) $\Leftrightarrow MI^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}\Leftrightarrow MI=a$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $R=a$.

(2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}^2\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng $AB$ tại $A$.

**Ví dụ 4.3.**

Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$.

Tìm tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $MA^2+MB^2+MC^2=3MD^2$.

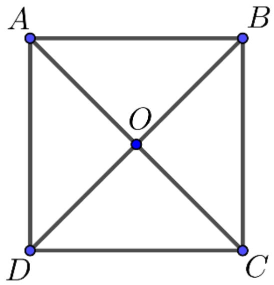
*Lời giải*

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2=3MD^2$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OD}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}.2\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{MO}=\vec{0}\\ MO\perp BD\end{array}\right.$.




Vậy tập hợp điểm $M$ là đường thẳng $AC$.

## Dạng 5. Chứng minh vuông góc dùng tích vô hướng

*Phương pháp*

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

▶ **Kí hiệu** là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

(2) **Tính chất:**

Với ba vecto $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực $k$ ta có:

1. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ( tính chất giao hoán).
2. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).
3. $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$
4. $\vec{a}^2\ge 0,\vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

(3) **Chú ý:** $\vec{a}^2=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$

▫ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

**Ví dụ 5.1.**

Cho $\vec{a}\perp\vec{b},|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2}$. Biết $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}\,;\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$. Chứng minh rằng:

$$\vec{u}\perp\vec{v}.$$

*Lời giải*

- Ta có $\vec{u}.\vec{v}=\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}^2+\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}^2$
- Với $\begin{cases}\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=1\\ \vec{b}^2=|\vec{b}|^2=2\\ \vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\end{cases}\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=2\vec{a}^2+\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}^2=2+0-2=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.

**Ví dụ 5.2.**

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AC\perp BD\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+AD^2.$$

*Lời giải*

$AB^2+CD^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$

$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)^2+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)^2$

$=AD^2+2DB^2+BC^2+2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CB}$

$=BC^2+AD^2+2\overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}\right)$

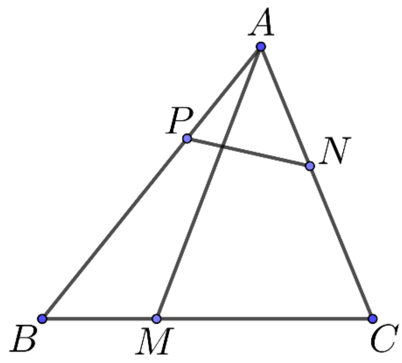
$=BC^2+AD^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Do đó $AC\perp BD\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

**Ví dụ 5.3.**

Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $3a$. Lấy các điểm $M,N,P$ lần lượt trên các cạnh $BC,CA,AB$ sao cho $BM=a$, $CN=2a$, $AP=x$. $0<x<3a$. Xác định $x$ để $AM$ và $PN$ vuông góc với nhau.

***Lời giải***




- Ta có $\begin{cases} BM=a\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) \\ CN=2a\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ AP=x\Rightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} \end{cases}$

- Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} \end{cases}$

- $AM$ và $PN$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}AC^2-\frac{x}{9a}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{2x}{9a}AB^2=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}.9a^2-\frac{2x}{9a}.9a^2+\left(\frac{2}{9}-\frac{x}{9a}\right).3a.3a.\cos 60^\circ=0$

$\Leftrightarrow a^2-2ax+\left(2a-x\right)a.\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2a^2-4ax+2a^2-ax=0\Leftrightarrow 4a^2=5ax\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}a$ .

Chương 05

# Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

## C Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

**» Câu 1.** Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$.
**B.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.
**C.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}.\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.
**D.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a};\vec{b})$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ.

**» Câu 2.** Cho tam giác đều $ABC$ có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

**A.** $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ $=4a.4a.\cos 60°$ $=4a.4a.\frac{1}{2}=8a^2$.

**» Câu 3.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB\perp CD$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.

**» Câu 4.** Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.
**B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
**C.** $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2=|\vec{a}.\vec{b}|^2$.
**D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

*Lời giải*

**Chọn C**

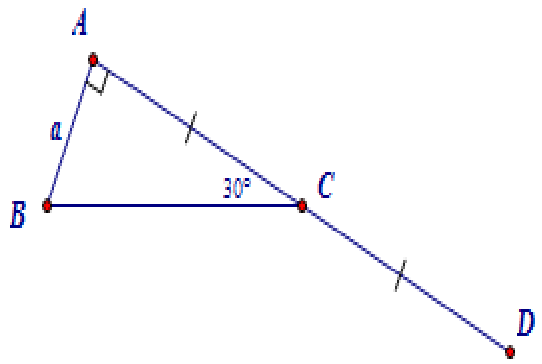
$|\vec{a}.\vec{b}|^2=\left[|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})\right]^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\cos^2(\vec{a},\vec{b})$ nên C sai.

**» Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ có $\hat{A}=90^0$, $\hat{B}=60^0$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

**A.** $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Gọi $D$ là điểm đối xứng với $A$ qua $C$.

Khi đó: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=CD.CB.\cos 150°=a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3a^2$.

**» Câu 6.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh bằng $a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn D**

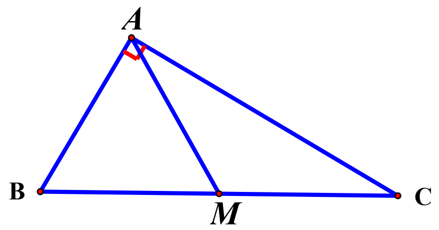
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos 120°=-\frac{a^2}{2}$.

**» Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a; AC=a\sqrt{3}$ và $AM$ là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

**A.** $\frac{a^2}{2}$. **B.** $a^2$. **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và có $AM$ là trung tuyến nên $AM=\frac{BC}{2}$.

$$AM=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+AC^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+3a^2}}{2}=a.$$

Tam giác $AMB$ có $AB=BM=AM=a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB}=60°$.

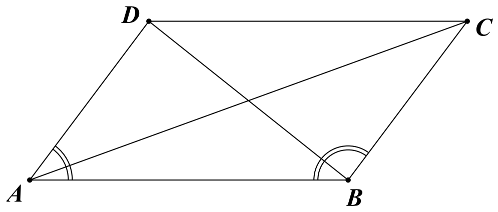
Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=-a.a.\cos 60°=-\frac{a^2}{2}$.

**» Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

*Lời giải*

Chọn B



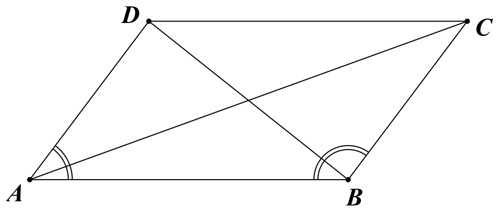

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=2.1.\cos 60°=1$.

» **Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-1$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

*Lời giải*

Chọn D




Theo giả thiết: $\widehat{BAD}=60°\Rightarrow\widehat{ABC}=120°$.

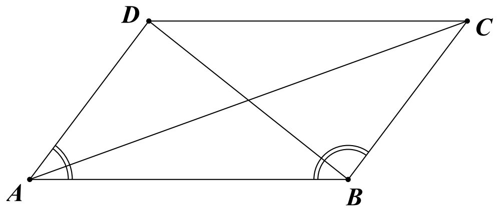
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=AB.BC.\cos\widehat{ABC}=2.1.\cos 120°=-1$.

» **Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo $AC$ bằng

**A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $5$. **D.** $\frac{7}{2}$.

*Lời giải*

Chọn B




Ta có:

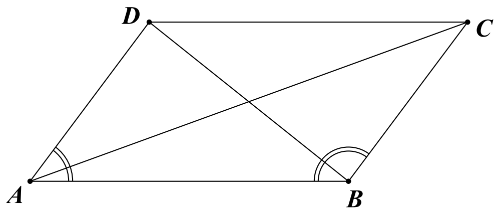
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow AC^2=2^2+1^2+2.1\Rightarrow AC=\sqrt{7}$.

» **Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo $BD$ bằng

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $5$. **D.** $3$.

*Lời giải*

Chọn A




$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2.(-1)$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3}$.

**» Câu 12.** Cho các véc tơ $\vec{a};\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = x$, $|\vec{b}| = y$ và $|\vec{c}| = z$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính $A = \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$.

**A.** $A = \dfrac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. **B.** $A = \dfrac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$. **C.** $A = \dfrac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. **D.** $A = \dfrac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

$\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c}$.

$\Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2A = 4\vec{c}^2$.

$\Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \left(-2\vec{c}\right)^2$.

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

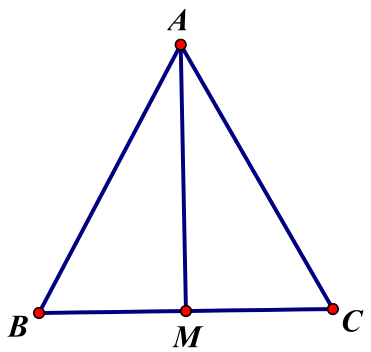
$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \dfrac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$.

**» Câu 13.** Cho $\Delta ABC$ đều; $AB = 6$ và $M$ là trung điểm của $BC$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

**A.** $-18$. **B.** $27$. **C.** $18$. **D.** $-27$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \widehat{BAM} = 30°$.

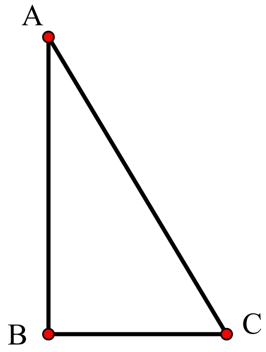
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = -6.\dfrac{6\sqrt{3}}{2}.\cos 30° = -27$.

**» Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $B$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

**A.** $3a^2$. **B.** $\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-AC.CB.\cos\widehat{ACB}=-AC.CB.\dfrac{CB}{AC}=-BC^2=-3a^2$.

**» Câu 15.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

**A.** $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

*Lời giải*

**Chọn B**

Ta có: $\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,

$\Rightarrow\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=4+3+2.2.\sqrt{3}.\cos30^0=13\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

**» Câu 16.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

**A.** $-a^2$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{-a^2}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=AD^2-2AB^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

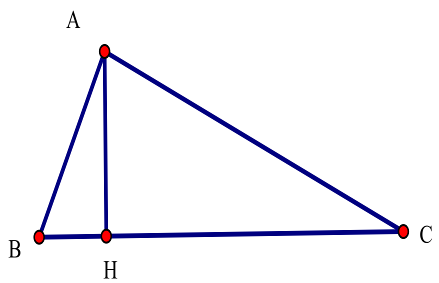
$=AD^2-2AB^2=-a^2$.

**» Câu 17.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a; BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

**A.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Vẽ $AH\perp BC, H\in BC$.

Có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH.BC=BA^2=a^2$.

**» Câu 18.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

**A.** $16$. **B.** $0$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4$.

*Lời giải*

**Chọn A**

Vì $\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{ABC}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{BC}$.

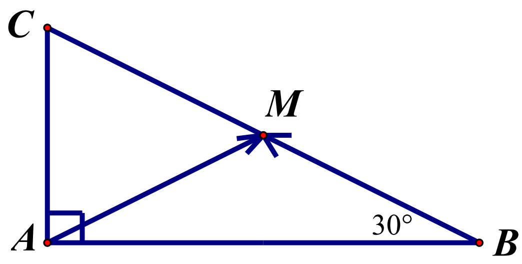
Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=AB.BC.\dfrac{4}{BC}=4.4=16$

**» Câu 19.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $\widehat{B}=30°, AC=2$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

**A.** $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

*Lời giải*

**Chọn A**




Ta có: $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}).\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM}^2$

$BC=\dfrac{AC}{\sin 30°}=4;\ AB=AC.\cot 30°=2\sqrt{3};BM=2$

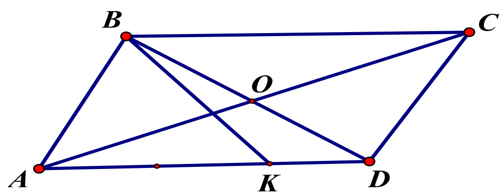
$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2=4;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=2\sqrt{3}.2.\cos 150°=-6\ \Rightarrow P=-2$

**» Câu 20.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60°$. Điểm $K$ thuộc $AD$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

**A.** $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $0$. **D.** $a^2$.

*Lời giải*

**Chọn D**




Ta có $\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-AB^2+\dfrac{2}{3}AD^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}$

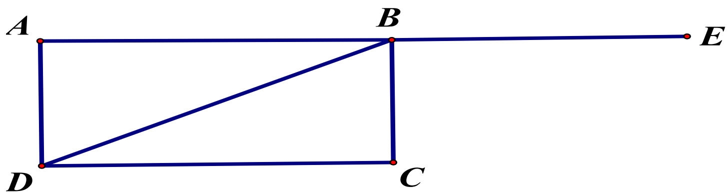
$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-4a^2+\dfrac{2}{3}.9a^2-\dfrac{1}{3}2a.3a.cos60°=a^2$

**» Câu 21.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

**A.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.

*Lời giải*

Chọn B




Giả sử $E$ là điểm đối xứng với $A$ qua $B$ ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

Xét $\Delta ABD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét $\Delta ABD$ có $cos\widehat{ABD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}\right) = cos\widehat{DBE} = -cos\widehat{ABD} = -\dfrac{8}{\sqrt{89}}$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}\right) = 8.\sqrt{89}.\left(\dfrac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64$

**» Câu 22.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc $\alpha$ giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

**A.** $\alpha = 90^0$. **B.** $\alpha = 0^0$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $\alpha = 180^0$.

*Lời giải*

Chọn D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\alpha$. Mà $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ nên $\cos\alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^0$.

**» Câu 23.** Cho hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng:

**A.** $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = 45^0$. **B.** $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = 0^0$. **C.** $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = 180^0$. **D.** $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = 90^0$.

*Lời giải*

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \\ \vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\vec{a}; \vec{b}\right) = 180^0$.

**» Câu 24.** Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right| = 4; \left|\vec{b}\right| = 3; \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 4$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

**A.** $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$.

*Lời giải*

Chọn D

Ta có

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 4 \Leftrightarrow \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \Leftrightarrow 4^2 - 2.4.3.\cos\alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{8}$

**» Câu 25.** Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left|-\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là

**A.** $60°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

*Lời giải*

Chọn A

Ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|-\vec{a}\right|$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left|-\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60°$.

**» Câu 26.** Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**A.** $120°$. **B.** $60°$. **<u>C</u>.** $90°$. **D.** $30°$.

*Lời giải*

**Chọn C**

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2.\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2.\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2 + \sqrt{2}.2.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90°$.

**» Câu 27.** Cho hai điểm $B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

**<u>A</u>.** Đường tròn đường kính $BC$. **B.** Đường tròn $\left(B;BC\right)$.

**C.** Đường tròn $\left(C;CB\right)$. **D.** Một đường khác.

*Lời giải*

**Chọn A**

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường tròn đường kính $BC$.

**» Câu 28.** Cho ba điểm $A,B,C$ phân biệt. Tập hợp những điểm $M$ mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

**A.** Đường tròn đường kính $AB$.

**<u>B</u>.** Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.

**C.** Đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với $AC$.

**D.** Đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$.

*Lời giải*

**Chọn B**

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = 0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $BC$.

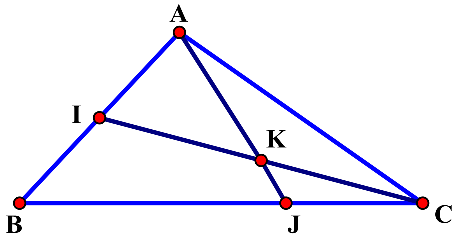
**» Câu 29.** Cho tam giác $ABC$, điểm $J$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, $I$ là trung điểm của cạnh $AB$, điểm $K$ thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Một điểm $M$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) = 0$. Tập hợp điểm $M$ là đường nào trong các đường sau.

**A.** Đường tròn đường kính $IJ$. **B.** Đường tròn đường kính $IK$.

**<u>C</u>.** Đường tròn đường kính $JK$. **D.** Đường trung trực đoạn $JK$.

*Lời giải*

**Chọn C**




Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm $J$ thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}}{4}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$ nên $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $J$ là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng $BC$ xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KJ}=3\overrightarrow{MJ}$.

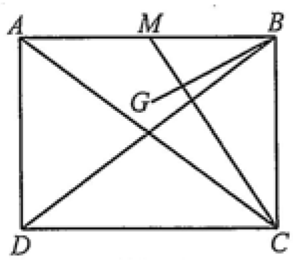
Như vậy $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MJ}\right).\left(4\overrightarrow{MK}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK}=0$.

Từ đó suy ra điểm $M$ thuộc đường tròn đường kính $JK$.

Vì $J$, $K$ là các điểm cố định nên điểm $M$ luôn thuộc một đường tròn đường kính $JK$ là đường tròn cố định.

## B. *Câu hỏi – Trả lời đúng/sai*

**» Câu 30.** Cho hình chữ nhật $ABCD, AB=4a, AD=3a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB,G$ là trọng tâm tam giác $ACM$




| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CM}=-a^2.$ | | |

*Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$

Ta có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

**» Chọn** SAI.

(b) $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

Vì $G$ là trọng tâm của tam giác $ACM$ nên

$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC=AD=3a,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

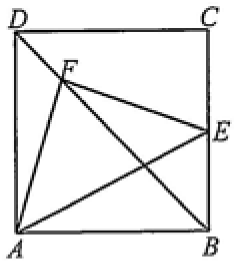
(d) $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CM}=-a^2.$

Ta có: $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{4}(4a)^2-\frac{1}{3}\cdot4a\cdot3a-\frac{1}{3}(3a)^2=-3a^2.$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 31.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Lấy $E$ là trung điểm của $BC$, điểm $F$ thoả mãn $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ Khi đó:




| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$ | | |
| **(d)** | Tam giác $AEF$ vuông cân | | |

*Lời giải*

(a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)-\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

**» Chọn** ĐÚNG.

*(d) Tam giác $AEF$ vuông cân.*

Ta có: $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{-3}{16}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2=0\Rightarrow AF\perp EF.$

Ta có: $\overrightarrow{AF}^2=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

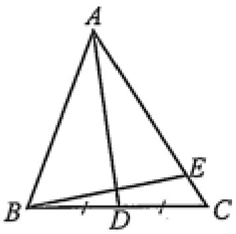
Và $\overrightarrow{EF}^2=\left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$\Rightarrow AF^2=EF^2=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2\Rightarrow AF=EF$. Vậy tam giác $AEF$ vuông cân tại $F$.

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác $AEF$ vuông bằng định lí Pythagore.

**» Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 32.** Cho tam giác $ABC$ có có $AB=4\sqrt{2}, AC=6, \widehat{BAC}=45^\circ$. Gọi $D$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Điểm $E$ thoả mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}(k\in\mathbb{R})$ (Hình). Khi đó:




| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $BC=3\sqrt{5}$ | | |
| **(d)** | $AD\perp BE$ khi $k=\frac{14}{15}$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=4\sqrt{2}\cdot 6\cdot\cos 45^\circ=24$.

**» Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

**» Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $BC=3\sqrt{5}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Khi đó:

$\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=6^2-2\cdot24+\left(4\sqrt{2}\right)^2=20\Rightarrow BC=2\sqrt{5}$.

» **Chọn** SAI.

*(d)* $AD\perp BE$ *khi* $k=\dfrac{14}{15}$.

Ta có: $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Từ đó, ta có: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(k\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\left[24k+6^2\cdot k-\left(4\sqrt{2}\right)^2-24\right]=30k-28.$

Khi đó $AD\perp BE\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=0\Leftrightarrow30k-28=0\Leftrightarrow k=\dfrac{14}{15}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 33.** Cho tam giác $ABC$ đều, đường cao $AH$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=30°$ | | |
| **(b)** | $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$ | | |
| **(c)** | $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=120°$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=130°$ | | |

*Lời giải*

*(a)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=30°$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=60^\circ$.

» **Chọn** SAI.

*(b)* $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$ do $AH\perp BC$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=120°$

*Cách giải 1:* Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua $C$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$.

Khi đó: $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=\widehat{ACD}=120^\circ$.

*Cách giải 2:* Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ-\left(-\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ-\left(\vec{a},-\vec{b}\right)$, ta được:

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=180^\circ-\widehat{ACB}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=130°$

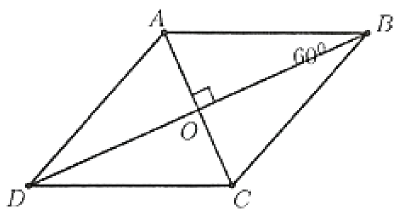
Ta có: $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)=180^\circ-\widehat{BAH}=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 34.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc $B$ bằng $60^\circ$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$ | | |
| **(b)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=30^\circ$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$ | | |

***Lời giải***




*(a)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$

Xét hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=60^\circ\Rightarrow\widehat{BAD}=120^\circ$;

Tam giác $ABC$ có $AB=BC=2,\widehat{ABC}=60^\circ\Rightarrow\Delta ABC$ đều cạnh $2\Rightarrow OB=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=60^\circ$,

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=30^\circ$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=180^\circ-\widehat{BAD}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)=DA\cdot DC\cdot\cos\widehat{ADC}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2$;

» **Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=-\left|\overrightarrow{BO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\widehat{ABO}=-BO\cdot BA\cdot\cos30^\circ=-\sqrt{3}\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-3.$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 35.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=a,BC=2a$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\widehat{ACB}=60^\circ$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$. | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\widehat{ACB}=60^\circ$

Xét tam giác vuông $ABC$: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$, $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABC}=60^\circ \Rightarrow \widehat{ACB}=30^\circ$.

**» Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$

Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}=a\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}=a^2$.

**» Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$.

Ta có: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\widehat{ACB}$

$=-CB\cdot CA\cdot\cos 30^\circ=-2a\cdot a\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-3a^2$.

**» Chọn** SAI.

*(d)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$

Vì tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

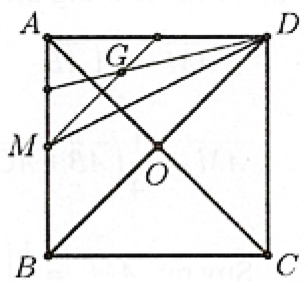
Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2, \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-a^2-3a^2=-4a^2$.

**» Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 36.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$, có cạnh $a$. Biết $M$ là trung điểm của $AB, G$ là trọng tâm tam giác $ADM$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{3}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a^2$ | | |




*Lời giải*

*(a)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$

Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ là $AC=BD=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$=-AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=-a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=-a^2$

**» Chọn** SAI.

(b) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{3}$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)=AM\cdot AC\cdot\cos\widehat{CAM}=\frac{a}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\frac{a^2}{2}.$$

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=DA\cdot DB\cdot\cos\widehat{ADB}-\dfrac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\cos\widehat{CAD}$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ-\dfrac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=a^2-\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^2.$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a^2$

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó: $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}_{0}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\widehat{ACB}=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45^\circ=a^2$

(trong đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ ).

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 37.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$, cạnh bằng $a$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=a^2$ | | |

*Lời giải*

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$;

Do $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=AB\cdot DC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=a\cdot a\cdot\cos 0^\circ=a^2$.

» **Chọn** SAI.

(b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$;

Hai vectơ $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)=\widehat{BAO}=45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=AB\cdot OC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$;

Hai vectơ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}\right) = 180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}\right) = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) = a^2$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ (trong đó $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ).

Ta có: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = CA \cdot CB \cdot \cos\widehat{ACB} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

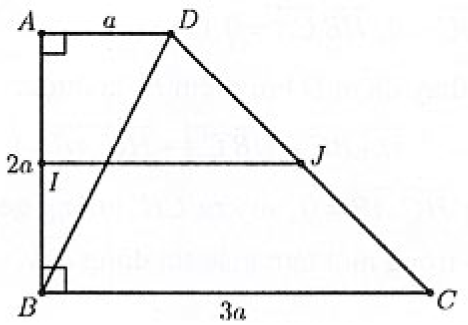
Vậy $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) = a^2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 38.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $B$, biết $AD = a, BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$ | | |
| **(d)** | Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$ | | |

***Lời giải***




*(a)* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{0}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = BC \cdot BD \cdot \cos\widehat{DBC}$

$= BC \cdot BD \cdot \cos\widehat{BDA} = BC \cdot BD \cdot \dfrac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3$.

(trong đó $\widehat{DBC} = \widehat{BDA}$ vì là hai góc so le trong).

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}^2+0+0+BC\cdot AD\cdot\cos 0^0=-AB^2+3a\cdot a\cdot 1=-(2a)^2+3a^2=-a^2$.

**» Chọn** SAI.

*(d) Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AB,CD$. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$*

Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}}_{0}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IJ}=BC\cdot IJ\cdot\cos 0^0=3a\cdot 2a\cdot 1=6a^2$.

**» Chọn** ĐÚNG.

**» Câu 39.** Cho tam giác đều $ABC$, đường cao $AH$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$ | | |
| **(b)** | $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$ | | |
| **(c)** | $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$ | | |
| **(d)** | $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=60^\circ$.

**» Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$

Dựng hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{BAD}=180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

**» Chọn** ĐÚNG.

*(c)* $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$

Tam giác $ABC$ đều nên $AH\perp BC$. Suy ra $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$

**» Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ$

Dựng hình bình hành $ABEH$, ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HE}$.

Suy ra: $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HE}\right)=\widehat{AHE}=180^\circ-\widehat{BAH}=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

**» Chọn** SAI.

**» Câu 40.** Cho tam giác $ABC$ đều có cạnh $a$, có trọng tâm $G$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{4}$ | | |
| **(c)** | $\widehat{AGB}=120^\circ$ | | |
| **(d)** | $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a^2$$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(b)* $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{4}$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}\right)=AG\cdot AC\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}a^2$$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\widehat{AGB}=120^\circ$

Tam giác $AGB$ có $\widehat{GAB}=\widehat{GBA}=30^\circ\Rightarrow\widehat{AGB}=120^\circ$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\cdot GB\cdot\cos\widehat{AGB}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{6}$$

» **Chọn** SAI.

**» Câu 41.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=2a, AC=3a, \widehat{BAC}=60^\circ$. Gọi $I$ là trung điểm đoạn thẳng $BC$. Điểm $J$ thuộc đoạn $AC$ thỏa mãn: $12AJ=7AC$. Khi đó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$ | | |
| **(b)** | $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(c)** | $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ | | |
| **(d)** | $AI\perp BJ$ | | |

***Lời giải***

*(a)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cos\widehat{BAC}=2a\cdot 3a\cdot\cos 60^\circ=3a^2$$

» **Chọn** SAI.

*(b)* $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Do $I$ là trung điểm $BC$ nên $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

» **Chọn** SAI.

*(c)* $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

» **Chọn** ĐÚNG.

*(d)* $AI\perp BJ$

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-4a^2+\frac{7}{12}\cdot 3a^2-3a^2+\frac{7}{12}\cdot 9a^2\right)=0$$

Vậy $AI\perp BJ$

» **Chọn** ĐÚNG.

## *C. Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 42.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8$; đáy nhỏ $CD=4$; đường cao $AD=6$; $I$ là trung điểm của $AD$. Tính $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{ID}$.

***Lời giải***

***✓Trả lời: -18***

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}$

$=-\overrightarrow{IA}^2+IB\cdot ID\cdot\cos BID$

$=-IA^2-IB\cdot ID\cdot\cos BIA$

$=-IA^2-IB\cdot ID\cdot\frac{IA}{IB}=-IA^2-IA^2=-2IA^2=-2\cdot 3^2=-18$

» **Câu 43.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=1, AC=2\sqrt{3}$ và $AM$ là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

***Lời giải***

***✓Trả lời: -0,5***

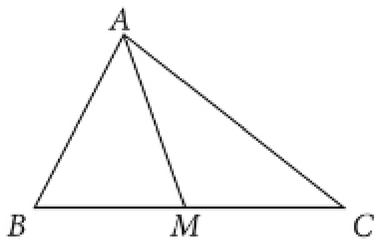
Tam giác $AMB$ có $AM=BM=AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $\widehat{MAB}=60^\circ$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-1.1\cdot\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$.

» **Câu 44.** Cho tam giác $ABC$, trung tuyến $AM$. Khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AM^2-kBC^2$. Vậy $k=?$

***Lời giải***

***✓Trả lời: 0,25***



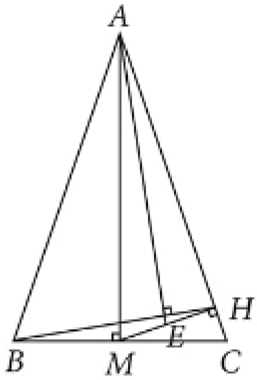

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}{4}=\dfrac{4AM^2-BC^2}{4}=AM^2-\frac{1}{4}BC^2$.

» **Câu 45.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A; M$ là trung điểm của $BC, H$ là hình chiếu của $M$ trên $AC; E$ là trung điểm của $MH$. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

***Lời giải***

***✓Trả lời: 0***

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:




$2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BH}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MH})$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH})\cdot\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MH}$

$=\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}^2=0.$

Suy ra $AE\perp BH$ (đpcm).

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=0$

**» Câu 46.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a, CA=b, AB=c$. Biết $M$ là trung điểm của $BC$. Tính $\overrightarrow{AM}^2$ ta thu được kết quả $\dfrac{m\left(b^2+c^2\right)-a^2}{n}$, với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m^n$

*Lời giải*

***✓Trả lời: 16***

Vì $M$ là trung điểm của $BC$, nên: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$;

$\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$. Mà $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$;

Suy ra: $\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}\left(c^2+2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+b^2\right)=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=4\end{cases}\Rightarrow S=m^n=16$.

*(đây cũng là công thức để tính độ dài đường trung tuyến tam giác).*

**» Câu 47.** Cho nửa đường tròn đường kính $AB$. Biết rằng $AC$ và $BD$ là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại $E$. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$ biết $AB=2$.

*Lời giải*

***✓Trả lời: 4***

Ta có: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BE}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}.$

Vì $AB$ là đường kính nửa đường tròn nên

$\widehat{ADB}=90^\circ, \widehat{ACB}=90^\circ\Rightarrow\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=0.$

Khi đó: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=4$

» **Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm $M$ nằm trên đoạn thẳng $AC$ sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi $N$ là trung điểm $CD$. Khi đó $BMN$ là tam giác vuông và $MB=k\cdot MN$, với $k$ là số tự nhiên. Xác định $k$.

*Lời giải*

*✓Trả lời: 1*

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\left(-\vec{a}+3\vec{b}\right)$ và

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Hơn nữa: $\overrightarrow{MB}^2=\frac{1}{16}\left(-\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=\frac{1}{16}\left(\vec{a}^2+9\vec{b}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\left(AD^2+9AB^2-0\right)=\frac{5}{8}AB^2$;

$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{16}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\frac{1}{16}\left(9\vec{a}^2+\vec{b}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\left(9AD^2+AB^2+0\right)=\frac{5}{8}AB^2$.

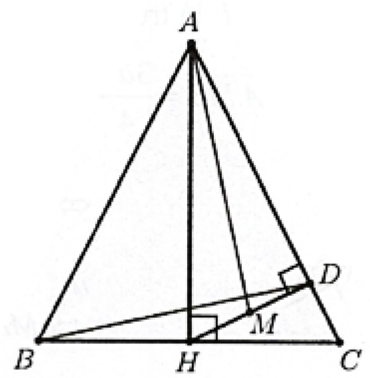
Suy ra $MB=MN$

Vậy $k=1$

» **Câu 49.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Gọi $H$ là trung điểm của $BC,D$ là hình chiếu của $H$ trên $AC,M$ là trung điểm của $HD$. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 0*




*Ta cần chứng minh:* $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}$ và $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD}\right)$

mà $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=0(\text{ do } AH\perp BC)\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD}=0(\text{ do } HD\perp AC)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}\right)\cdot\overrightarrow{HC}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}}_{0}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

**» Câu 50.** Cho hai điểm $A,B$ cố định có khoảng cách bằng $1$. Tập hợp điểm $M$ sao cho: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

*Lời giải*

*✓Trả lời: 1*

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$ ta có:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow MI^2-IA^2=\frac{3}{4}$

$\overset{IA=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} MI^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow MI=1$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $R=1$.

**» Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ và số thực $k$. Tập hợp điểm $M$ sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính dạng $R=n\cdot\sqrt{\frac{k+a^2}{m}}$, với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m+n$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 3*

Gọi $I$ là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2-IB^2$.

Khi đó: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k\Leftrightarrow 2MI^2-IA^2-IB^2=k\Leftrightarrow 2MI^2-2IA^2=k$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+IA^2\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$

(trong đó $IA^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$).

Nếu $k<-a^2$: Tập hợp điểm $M$ là tập rỗng.

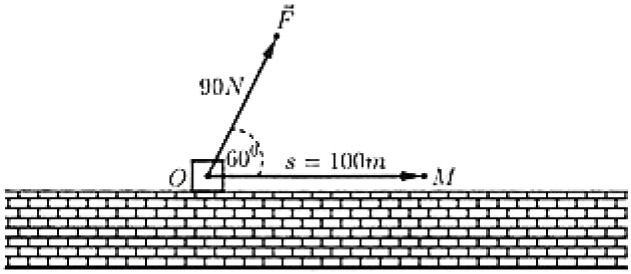
Nếu $k=-a^2$ thì $MI=0\Leftrightarrow M\equiv I$ (điểm $M$ trùng với điểm $I$).

Nếu $k>-a^2$ thì $MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $I$, bán kính $R=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

Khi đó $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow S=m+n=3$

» **Câu 52.** Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc $60^\circ$. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là bao nhiêu Jun?




*Lời giải*

✓ ***Trả lời: 4500***

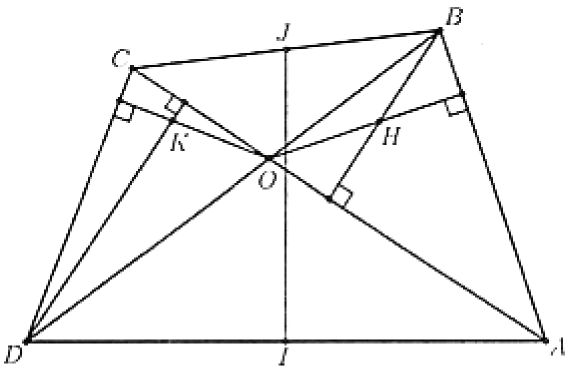
Đặt $OM=s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với $O$ là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{OM}=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\cos\left(\vec{F},\overrightarrow{OM}\right)=90\cdot100\cdot\cos60^\circ=4500\,J.$

» **Câu 53.** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo $AC$ và $BD$ cắt nhau tại $O$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là trực tâm các tam giác $ABO$ và $CDO$. Gọi $I,J$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$. Tính $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}$?

*Lời giải*

✓ ***Trả lời: 0***




Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.$

Suy ra: $\overrightarrow{HK}\cdot2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HK}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{DB}$

$=\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DK}\right)\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}\right)\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{0}=0.$

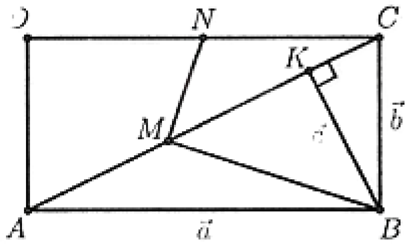
Vậy $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$

» **Câu 54.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK\perp AC, K\in AC$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AK$ và $CD$. Tìm số đo góc $\widehat{BMN}$.

**Trả lời**: $90^\circ$

*Lời giải*

✓ ***Trả lời:***




Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BK}=\vec{c}$ và $BA=a,BC=b,BK=c$.

Khi đó: $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\dfrac{1}{2}(2\vec{b}-\vec{c})$.

Do đó: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{4}(2\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}+\vec{c})=\dfrac{1}{4}(2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2)$

$=\dfrac{1}{4}\left[2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}+(\vec{b}-\vec{c})\vec{c}\right]$

Ta thấy rằng: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ do $\vec{a}\perp\vec{b}$; $(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{c}=0$

Do $AC\perp BK$; $(\vec{b}-\vec{c})\vec{c}=\overrightarrow{KC}\cdot\vec{c}=0$ do $CK\perp BK$.

Vì vậy $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Rightarrow\widehat{BMN}=90^\circ$.

**» Câu 55.** Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm $M$ sao cho $T=3MA^2+2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

*Lời giải*

***✓Trả lời: 480***

Gọi điểm $I$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$

Vậy điểm $I$ thuộc đoạn $AB$ và $IA=\dfrac{2}{5}\cdot AB=\dfrac{2}{5}\cdot 20=8, IB=12$.

Ta có $T=3MA^2+2MB^2=3\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$

$=3\overrightarrow{MI}^2+6\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}^2+4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}^2$

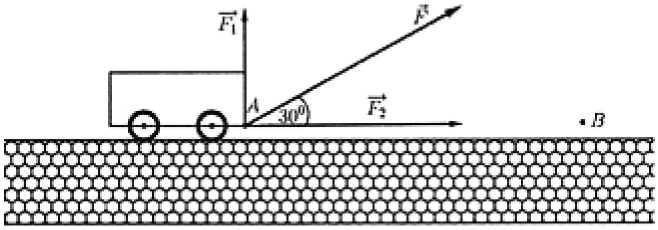
$=5MI^2+3IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}\Big(\underbrace{3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\Big)=5MI^2+3IA^2+2IB^2.$

Ta có $(3IA^2+2IB^2)$ là hằng số do ba điểm $A,B,I$ cố định.

Do đó: $T$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm $M$ trùng với điểm $I$.

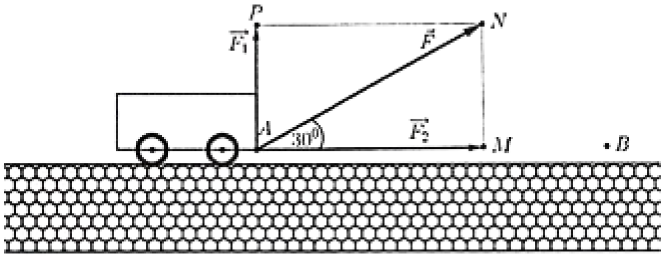
Khi đó giá trị $T$ nhỏ nhất là : $T_{\min}=3IA^2+2IB^2=3\cdot 8^2+2\cdot 12^2=480$.

**» Câu 56.** Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ $A$ đến $B$ có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng $30^\circ$ và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$. Gọi $m;n;k$ lần lượt là các công sinh ra bởi các lực $\vec{F},\vec{F_1},\vec{F_2}$. Khi đó tính $S=m-n-k$.




**Lời giải**

*✓Trả lời: 0*




Đặt $\vec{F} = \overrightarrow{AN}, \vec{F_1} = \overrightarrow{AP}, \vec{F_2} = \overrightarrow{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có: $AN = 50, AM = AN \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25.$

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot 200 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3}\, J$.

Lực $\vec{F_1}$ có độ lớn $25N$ và tạo với phương dịch chuyển góc $90^\circ$ nên công sinh ra là

$A_1 = \left|\vec{F_1}\right| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 90^\circ = 0\, J$.

Lực $\vec{F_2}$ có độ lớn $25\sqrt{3}N$ và tạo với phương dịch chuyển góc $0^\circ$ nên công sinh ra là

$A_2 = \left|\vec{F_2}\right| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 0^0 = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot 1 = 5000\sqrt{3}\, J$.

Khi đó $S = m - n - k = 5000\sqrt{3} - 0 - 5000\sqrt{3} = 0$

**» Câu 57.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có cạnh $AC = 7cm$ và $BC = 14cm$. Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

**Lời giải**

*✓Trả lời: -0,5*

Ta có: $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Mà $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ hay $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$

**» Câu 58.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$ sao cho $BM = 1$, trên cạnh $CD$ lấy điểm $N$ sao cho $DN = 1$ và $P$ là trung điểm $BC$. Tính $\cos \widehat{MNP}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*

**Lời giải**

*✓Trả lời: 0,8*

Ta có $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},\overrightarrow{NP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=\frac{2}{9}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{13}{2}$

Mặt khác $\left|\overrightarrow{NM}\right|=\sqrt{10},\left|\overrightarrow{NP}\right|=\frac{5}{2}\Rightarrow\cos\widehat{MNP}=\frac{13}{5\sqrt{10}}$.

**» Câu 59.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M,N,E$ lần lượt là trung điểm của $BC,CA,AB$. Tính: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

*Lời giải*

*✓Trả lời: 0*

Vì $M$ là trung điểm $BC$ nên:

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\quad(1)$

Tương tự ta có: $2\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}\quad(2)$,

$2\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\quad(3)$

Cộng từng vế (1), (2), (3) được:

$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ hay $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

**» Câu 60.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh 1 nội tiếp đường tròn $(O)$ bán kính $R,M$ là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn $(O)$. Tính $MA^2+MB^2+MC^2$.

*Lời giải*

*✓Trả lời: 2*

Tam giác đều $ABC$ cạnh $a$ nội tiếp đường tròn $(O)$ bán kính $R$ nên $O$ là trọng tâm của tam giác $ABC\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $R=OA=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét: $MA^2+MB^2+MC^2$

$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=3\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

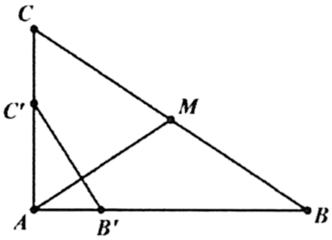
$=6R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}=6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=2$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2=2$.

**» Câu 61.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, trên hai cạnh $AB$ và $AC$ lần lượt lấy hai điểm $B'$ và $C'$ sao cho $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 0*




Vì $M$ là trung điểm của $BC$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Do đó, $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB'}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}=0-AB\cdot AB'+AC\cdot AC'=0$

» **Câu 62.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=\sqrt{2}$. Gọi $K$ là trung điểm của cạnh $AD$. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

***Lời giải***

***✓Trả lời: 0***

Ta có: $AC=BD=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Suy ra

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=-1^2+0+0+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2=0.$

» **Câu 63.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^\circ$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

***Lời giải***

***✓Trả lời: 1,9***

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}\approx 1,9$

» **Câu 64.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $1$. Tập hợp điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=1^2$ là đường tròn bán kính $R=?$

***Lời giải***

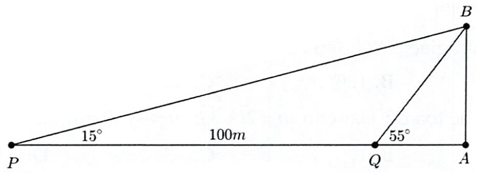
***✓Trả lời: 1***

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=1^2\Leftrightarrow MO^2-OA^2+MO^2-OB^2=1^2\Leftrightarrow MO^2=1^2$

$\Leftrightarrow MO=1\left(OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Vậy tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $O$, bán kính $R=1$.

» **Câu 65.** Hai chiếc tàu thủy $P$ và $Q$ trên biển cách nhau $100\,m$ và thẳng hàng với chân $A$ của tháp hải đăng $AB$ ở trên bờ biển. Từ $P$ và $Q$ người ta nhìn chiều cao $AB$ của tháp dưới các góc $\widehat{BPA}=15^\circ$ và $\widehat{BQA}=55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).*




**Lời giải**

*✓Trả lời: 33*

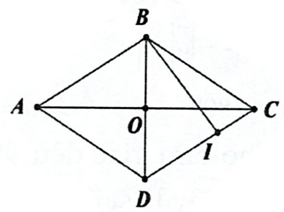
$\dfrac{BQ}{PQ}=\dfrac{\sin BPQ}{\sin PBQ}=\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\Rightarrow BQ=\dfrac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}$.

$\dfrac{AB}{BQ}=\sin 55^\circ \Rightarrow AB=BQ\sin 55^\circ=\dfrac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\sin 55^\circ\approx 33\,m.$

**» Câu 66.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm $O$ có cạnh bằng 1 và $\widehat{ABD}=60^\circ$. Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}$.

**Lời giải**

*✓Trả lời: 0,5*




Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1 và $\widehat{ABD}=60^\circ$

Nên $ABD$ và $BCD$ là các tam giác đều cạnh 1.

Ta có:

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DI}\right)=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}$$

**» Câu 67.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh là 3. Điểm $M$ thỏa mãn: $MA^2+MB^2=18$, khi đó tập hợp điểm $M$ thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

**Lời giải**

*✓Trả lời: 2,6*

Gọi I là trung điểm $AB$. Đưa về vectơ bằng cách chèn điểm I vào tính ra

$$2MI^2+IA^2+IB^2=18\Leftrightarrow MI^2=\frac{27}{4}\Leftrightarrow MI=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy quỹ tích điểm $M$ là đường tròn tâm $I$ bán kính $R=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

**» Câu 68.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh là 3. Điểm $M$ thỏa mãn: $MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm $M$ thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

**Lời giải**

*✓Trả lời: 1,4*

Gọi $G$ là trong tâm tam giác $ABC$ suy ra $GA=GB=GC=\sqrt{3}$

Chèn $G$ vào biến đổi suy ra $3ME^2+GA^2+GB^2+GC^2=18\Leftrightarrow ME^2=2\Leftrightarrow ME=\sqrt{2}$

Vậy quỹ tích điểm $M$ là đường tròn tâm $E$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

» **Câu 69.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh là 3. Điểm $M$ thỏa mãn: $2MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm $M$ thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

*Lời giải*

*✓Trả lời: 1,7*

Gọi $N$ là điểm thỏa mãn $2\cdot\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và $D$ là trung điểm $BC$. Suy ra $N$ là trung điểm $AD.NA=ND=AD:2=\frac{3\sqrt{3}}{4};NB=NC=\frac{\sqrt{39}}{4}$;

Chèn $N$ vào đề ta được $4MN^2+2NA^2+NB^2+NC^2=18$ suy ra $MN=\frac{\sqrt{183}}{8}$

Vậy tập hợp điểm $M$ thỏa đường tròn tâm $N$ bán kính $R=MN=\frac{\sqrt{183}}{8}$

» **Câu 70.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ và $H$ là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=kBC^2$. Khi đó $k=?$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 0,25*

Ta có $M$ là trung điểm $BC$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right);\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2=\frac{1}{4}BC^2$

» **Câu 71.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

*Lời giải*

*✓Trả lời: 0*

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AD}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2=0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{BD}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot 2\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

---------------------------------- Hết ----------------------------------