

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

Ngày thi: 17/8/2024

Đề thi này có 01 trang

Bài 1: (5,0 điểm)

Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6$ và $u_{n+1} = 3u_n + \frac{3^n}{u_n}$, với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{u_n}{3^n}$, với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 2: (5,0 điểm)

a) Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x)), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Biết $f(0)$ khác 0. Chứng minh rằng f đơn ánh.

b) Số nguyên dương n được gọi là “đẹp” nếu như tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n , có hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $P(x) > -15, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Tập nghiệm của $P(x)$ có chứa các số $-3; -1; 1$ và 3 .

Chứng minh rằng $n = 4$ và $n = 6$ không phải là số đẹp. Từ đó tìm tất cả các số đẹp.

Bài 3: (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) , hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn, BC không là đường kính của (O) , điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC không cân tại A . Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D . Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm E khác A . Kẻ đường kính EF của (O) , gọi M là giao điểm của BF và CE , N là giao điểm của CF và BE , P là giao điểm của AF và MN .

a) Chứng minh rằng D là trung điểm của MN .

b) Chứng minh rằng P thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4: (5,0 điểm)

Với k là số nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = k.$$

a) Chứng minh rằng với $k = 2025^{2024}$ thì phương trình trên vô nghiệm.

b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $k \leq 2024$ để phương trình trên có nghiệm nguyên dương?

--- HẾT ---

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của Giám thị 1: Chữ ký của Giám thị 2:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

Ngày thi: 18/8/2024

Đề thi này có 01 trang

Bài 5: (6,0 điểm)

a) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{3}{ab + bc + ca}.$$

b) Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2024) = 2024$ và

$$a(f(x) - f(f(y))) \leq x - y, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6: (7,0 điểm)

a) Có bao nhiêu cách chọn ra hai số phân biệt từ 2024 số nguyên dương đầu tiên sao cho hai số được chọn hơn kém nhau không quá 5 đơn vị?

b) Một lớp học có 45 học sinh. Các học sinh tham gia vào tổng cộng m câu lạc bộ. Chứng minh rằng nếu mỗi câu lạc bộ có đúng 5 học sinh và hai học sinh bất kỳ tham gia chung nhiều nhất một câu lạc bộ thì $m \leq 99$.

c) Với số nguyên dương n ($n \geq 2$), xét tập hợp A gồm n số nguyên dương. Ký hiệu $f(A)$ là số các giá trị phân biệt tạo thành từ việc lấy tổng hai phần tử tùy ý của A . Chứng minh rằng $f(A) \geq 2n - 3$. Tìm tất cả các tập hợp A sao cho đẳng thức xảy ra.

Bài 7: (7,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng bán kính R , cắt nhau tại A, B và $O_1O_2 > R$. Đường thẳng qua A , vuông góc với AB , cắt lại $(O_1), (O_2)$ theo lần lượt tại C, D . Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa B , xét tia Ax tạo với tia AC góc 60° và tia Ax cắt (O_2) tại E , cắt (O_1) tại F .

a) Chứng minh rằng O_1, O_2, E, F cùng thuộc một đường tròn, đồng thời DE, CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B và vuông góc với Ax .

b) Trên nửa đường tròn đường kính CA , khác phía với O_1 , dựng T sao cho $CT = R$. Chứng minh rằng $O_1E + O_2F \geq 2TA$.

--- HẾT ---

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của Giám thị 1: Chữ ký của Giám thị 2:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

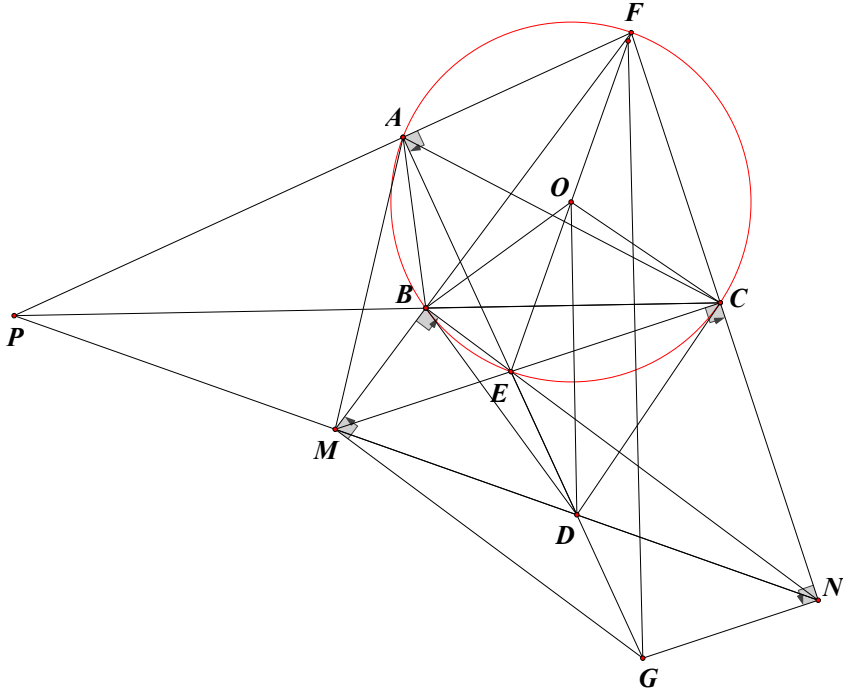
Ngày thi: 17/8/2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
1	Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6$ và $u_{n+1} = 3u_n + \frac{3^n}{u_n}$, với mọi $n \geq 1$. a) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	
	Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Kết hợp giả thiết, ta được $u_{n+1} > 3u_n, \forall n \geq 1$. Khi đó $u_n > 3 \cdot u_{n-1} > 3^2 \cdot u_{n-2} > \dots > 3^{n-1} \cdot u_1 = 2 \cdot 3^n$. Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot 3^n = +\infty$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	2,0
	b) Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{u_n}{3^n}$, với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.	
	Ta có $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{u_n}{3^n} = \frac{3u_n + \frac{3^n}{u_n}}{3^{n+1}} - \frac{u_n}{3^n} = \frac{1}{3u_n} > 0, \forall n \geq 1$. Do đó $v_{n+1} > v_n$ nên dãy số (v_n) tăng ngặt.	1,0
	Ta có $v_1 = 2$ và $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3u_n} < \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}, \forall n \geq 1.$ Khi đó $v_n - v_{n-1} < \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ và cứ thế $v_2 - v_1 < \frac{1}{2 \cdot 3^2}$. Cộng các đánh giá lại, ta được $v_n < v_1 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^n} = 2 + \frac{1}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{25}{12}.$ Từ đó ta được dãy số (v_n) tăng ngặt và bị chặn trên nên sẽ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.	2,0
2	a) Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x))$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Biết $f(0)$ khác 0. Chứng minh rằng f đơn ánh.	

	Đặt $f(0) = a$ ($a \neq 0$), thay y bởi 0, ta có $(x-2)a + f(2f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$ Giả sử $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó $f(2f(x_1)) = f(2f(x_2))$. Thay $x = x_1, x = x_2$ vào $(*)$, ta có $\begin{cases} (x_1-2)a + f(2f(x_1)) = f(x_1) \\ (x_2-2)a + f(2f(x_2)) = f(x_2) \end{cases}.$ Trừ vế theo vế hai phương trình trên ta được $(x_1 - x_2)a = 0$. Từ đó ta suy ra $x_1 = x_2$. Do vậy f đơn ánh.	2,0
	b) Số nguyên dương n được gọi là “đẹp” nếu như tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n, có hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn đồng thời các điều kiện sau: i) $P(x) > -15, \forall x \in \mathbb{R}$. ii) Tập nghiệm của $P(x)$ có chứa các số $-3; -1; 1$ và 3. Chứng minh rằng $n = 4$ và $n = 6$ không phải là số đẹp. Từ đó tìm tất cả các số đẹp.	
	Nếu $n = 4$ thì $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3) = x^4 - 10x^2 + 9.$ Ta cần có $P(x) > -15, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 24 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, điều này là không thoả mãn vì vế trái có nghiệm là $x = \pm 2$.	1,0
	Nếu $n = 6$ thì $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 + ax + b) \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$ Ta cần có $(x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 + ax + b) > -15, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$. - Thay $x = 0$ vào $(*)$ được $9b > -15$ nên $b > -\frac{5}{3}$. - Thay $x = 2$ vào $(*)$ được $-15(4 + 2a + b) > -15$ nên $2a + b < -3$. - Thay $x = -2$ vào $(*)$ được $-15(4 - 2a + b) > -15$ nên $-2a + b < -3$. Cộng từng vế của hai đánh giá cuối, ta được $b < -3 < -\frac{5}{3}$. Điều mâu thuẫn này cho thấy không tồn tại $(a; b)$ để có $(*)$ nên $n = 6$ không thoả mãn.	1,0
	Nếu n lẻ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ nên điều kiện i) không được thoả mãn. Vì thế số n phải chẵn. Ngoài ra $P(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực phân biệt nên $\deg P \geq 4$. Theo chứng minh ở trên thì $n = 4$ và $n = 6$ đều không thoả mãn nên ta xét $n \geq 8$. Nếu $\deg P = 8$ thì chọn $P(x) = (x^2 - 1)^2(x^2 - 9)^2 \geq 0 > -15, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó, nếu n chẵn và $n \geq 8$, ta chọn $P(x) = x^{n-8}(x^2 - 1)^2(x^2 - 9)^2 \geq 0$. Vậy tất cả các số đẹp cần tìm là n chẵn và $n \geq 8$.	1,0
3	Cho đường tròn (O), hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn, BC không là đường kính của (O), điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác	

	ABC không cân tại A. Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D. Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm E khác A. Kẻ đường kính EF của (O), gọi M là giao điểm của BF và CE, N là giao điểm của CF và BE, P là giao điểm của AF và MN. a) Chứng minh rằng D là trung điểm của MN.	
		
	a) Ta có $\widehat{MBN} = \widehat{MCN} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $BCNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MN. Ta có $\widehat{FMC} = \widehat{FNB}$ (cùng chắn $\widehat{BC}$). Mà $\widehat{BFC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{DOC}$. Và $\widehat{DOC}$ phụ với góc $\widehat{ODC}$ nên $\widehat{FNB} = \widehat{ODC}$. Do vậy $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{BDC}$. Mặt khác $DB = DC$ nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCNM$ đường kính MN. Suy ra D là trung điểm MN.	2,0
	b) Chứng minh rằng P thuộc một đường thẳng cố định.	
	Gọi G đối xứng với E qua D, ta có tứ giác $EMGN$ là hình bình hành. Ta thấy tứ giác $AFGM$ nội tiếp đường tròn đường kính FG. Và tứ giác $AFGN$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính FG. Nên tứ giác $AFNM$ nội tiếp. Dựa vào tâm đẳng phương của ba đường tròn $(AFNM)$, (O), $(BCNM)$ ta suy ra P thuộc đường thẳng BC cố định.	3,0
4	Với k là số nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên dương $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = k.$ a) Chứng minh rằng với $k = 2025^{2024}$ thì phương trình trên vô nghiệm.	
	Trước hết, ta phân tích thành nhân tử cho vế trái của phương trình như sau $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ $= x^3(y-z) + y^3(z-y+y-x) + z^3(x-y)$	2,0

$= (y-z)(x^3 - y^3) - (x-y)(y^3 - z^3)$ $= (y-z)(x-y)(x^2 + xy + y^2 - y^2 - yz - z^2)$ $= (y-z)(x-y)[(x-y)(x+y) - y(x-y)]$ $= (x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z).$ Trong các số x, y, z phải có hai số cùng tính chẵn lẻ, nên một trong các hiệu $x-y, y-z$ và $x-z$ phải chẵn, tức là $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$ luôn chẵn. Mà 2025^{2024} là một số lẻ. Vì thế phương trình $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = 2025^{2024}$ vô nghiệm.	
b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $k \leq 2024$ để phương trình trên có nghiệm nguyên dương?	
Ta tiếp tục chỉ ra rằng biểu thức $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$ luôn chia hết cho 3 với mọi x, y, z nguyên. Nếu trong x, y, z có hai số cùng chia hết cho 3 thì đúng, còn ngược lại, chúng phải có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 3. Khi đó $x+y+z \equiv 0+1+2 \equiv 0 \pmod{3}.$ Kết hợp với a), suy ra k phải chia hết cho 6.	1,0
Giả sử $z = \min\{x; y; z\}$ thì $x > y > z$ nên $x-y \geq 1, y-z \geq 1, x-z \geq 2 \text{ và } x+y+z \geq 3z+3 \geq 6.$ Khi đó $k \geq 1.1.2.6 = 12$. Vì thế điều kiện cần là k chia hết cho 6 và $k \geq 12$.	1,0
Đặt $k = 6m$ với $(m \in \mathbb{Z}, m \geq 2)$. Chọn $x-y=1, y-z=1$ thì $x-z=2$ và $x+y+z=3z+3$. Khi đó thay vào phương trình được $1.1.2.(3z+3) = 6m \text{ hay } z = m-1.$ Khi đó, phương trình luôn có nghiệm nguyên dương là $(m+1; m; m-1)$. Vậy số giá trị k cần tìm là $\left[\frac{2024}{6} \right] - 1 = 336$.	1,0

----- Hết -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

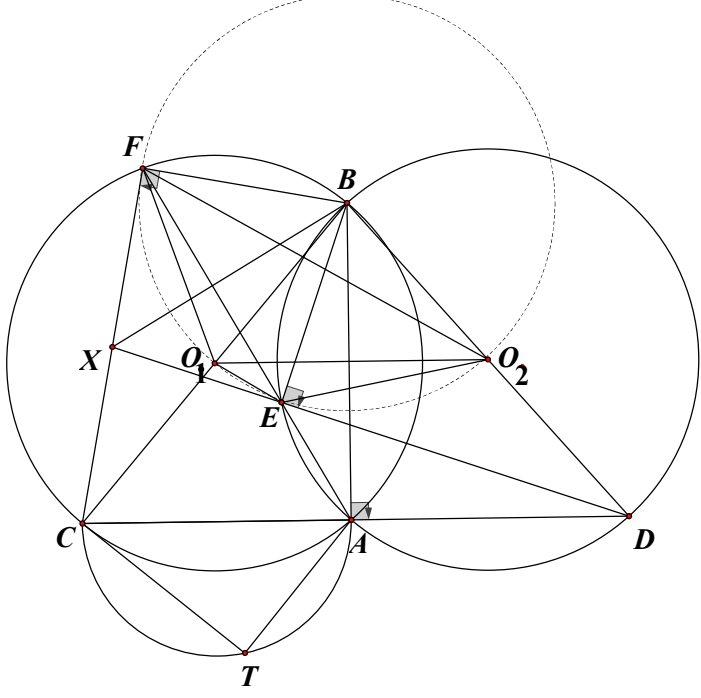
Ngày thi: 18/8/2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
5	a) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{3}{ab + bc + ca}.$	
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \quad (1)$ Ta có $c < a + b$ nên $c^2 < ac + bc$. Tương tự, ta có $a^2 < ab + ac$ và $b^2 < ab + bc$. Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$. Nên $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca < 3(ab + bc + ca)$ (2) Từ (1) và (2), suy ra $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{3}{ab + bc + ca}$.	3,0
	b) Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2024) = 2024$ và $a(f(x) - f(f(y))) \leq x - y \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$	
	Thay x bởi $f(y)$ vào (1), ta được $f(y) \geq y, \forall y \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(f(x)) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2).	0,5
	Khi $a = 0$, thì (1) trở thành $x - y \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (điều này vô lí)	0,5
	Khi $a < 0$, thay $x = y$ vào (1), ta được $a(f(x) - f(f(x))) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \geq f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ (3). Từ (2) và (3), ta được $f(x) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (1), ta được $a(f(x) - f(y)) \leq x - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$ hay $af(x) - x \leq af(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Đổi vai trò x, y trong đánh giá trên, ta được $af(x) - x = af(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4).$ Thay x bởi $f(x)$, y bởi $f(y)$ vào (4), ta được $af(f(x)) - f(x) = af(f(y)) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Hay $(a - 1)f(x) = (a - 1)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.	1,0

	Vì $a < 0$ nên $a - 1 \neq 0$, suy ra $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ hay f là hàm hằng. Thay vào đề thì $0 \leq x - y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (điều vô lý).	
	Do đó $a > 0$. Thay $y = 2024$ vào giả thiết thì $a(f(x) - 2024) \leq x - 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mà $f(x) - 2024 \geq x - 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $a(x - 2024) \leq x - 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $a = 1$. Với $a = 1$, ta chọn $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì đánh giá ban đầu trở thành đẳng thức nên thỏa mãn. Vậy tất cả giá trị cần tìm là $a = 1$.	1,0
6	a) Có bao nhiêu cách chọn ra hai số phân biệt từ 2024 số nguyên dương đầu tiên sao cho hai số được chọn hơn kém nhau không quá 5 đơn vị?	
	Gọi hai số được chọn là $n, n + x$. Điều kiện: $\begin{cases} n, x \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq n < n + x \leq 2024 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n, x \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq n \leq 2024 - x \\ x \leq 5 \end{cases}$ Với mỗi giá trị $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ có đúng $2024 - x$ cách chọn n . Do đó, ta có số cách chọn là $\sum_{x=1}^5 (2024 - x) = 10105$.	2,0
	b) Một lớp học có 45 học sinh. Các học sinh tham gia vào tổng cộng m câu lạc bộ. Chứng minh rằng nếu mỗi câu lạc bộ có đúng 5 học sinh và hai học sinh bất kỳ tham gia chung nhiều nhất một câu lạc bộ thì $m \leq 99$.	
	Gọi S là số bộ $(\{A; B\}, C)$ mà trong đó học sinh A, B cùng tham gia vào câu lạc bộ C . Chọn câu lạc bộ trước, có m cách, chọn cặp học sinh cùng tham gia câu lạc bộ đó có $C_5^2 = 10$ cách nên $S = 10m$. Chọn cặp học sinh trước, có C_{45}^2 cách, chọn câu lạc bộ mà hai học sinh đó cùng tham gia, có không quá 1 cách nên $S \leq C_{45}^2$. Từ đó suy ra $10m \leq C_{45}^2 \Leftrightarrow m \leq 99$.	2,0
	c) Với số nguyên dương n ($n \geq 2$), xét tập hợp A gồm n số nguyên dương. Ký hiệu $f(A)$ là số các giá trị phân biệt tạo thành từ việc lấy tổng hai phần tử tùy ý của A . Chứng minh rằng $f(A) \geq 2n - 3$. Tìm tất cả các tập hợp A sao cho đẳng thức xảy ra.	
	Đặt $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ là các phần tử có trong A . Ta sắp thứ tự $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < \dots < x_1 + x_n < x_2 + x_n < x_3 + x_n < \dots < x_{n-1} + x_n$. Khi đó, có tất cả $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ tổng phân biệt có thể được tạo thành nên $f(A) \geq 2n - 3$.	1,0
	Ta lại xét các số $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < \dots < x_2 + x_{n-1} < x_3 + x_{n-1} < \dots < x_{n-2} + x_{n-1} < x_{n-1} + x_n$ Rõ ràng ở đây cũng có $2 + n - 2 + n - 3 = 2n - 3$ số nên để đẳng thức xảy ra, ta phải có hai dãy số ở trên là trùng nhau theo đúng thứ tự đó. Khi đó, ta có $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $x_1 + x_5 = x_2 + x_4 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_5 - x_4$.	1,0

	Cứ thế, suy ra $x_1 + x_k = x_2 + x_{k-1}, \forall k = 3, 4, \dots, n$ nên $x_k - x_{k-1} = x_2 - x_1 = d$. Cuối cùng, ta có $x_2 + x_n = x_3 + x_{n-1}$ nên $x_3 - x_2 = d$, suy ra các số của tập A lập thành cấp số cộng.	
	Kiểm tra lại, ta thấy rằng nếu có $A = \{a + md \mid 1 \leq m \leq n; m, d \in \mathbb{Z}^+\}$ thì tổng hai số trong A đều có dạng $2a + (i + j)d \text{ với } 1 \leq i < j \leq n.$ Chú ý các tổng $i + j$ có thể nhận được mọi giá trị từ 3 đến $2n - 3$ nên sẽ có tất cả $2n - 3$ tổng được tạo thành, thoả mãn đề bài. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A là cấp số cộng.	1,0
7	Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng bán kính R, cắt nhau tại A, B và $O_1O_2 > R$. Đường thẳng qua A, vuông góc với AB, cắt lại $(O_1), (O_2)$ theo lần lượt tại C, D. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa B, xét tia Ax tạo với tia AC góc 60° và tia Ax cắt (O_2) tại E, cắt (O_1) tại F. a) Chứng minh rằng O_1, O_2, E, F cùng thuộc một đường tròn, đồng thời DE, CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B và vuông góc với Ax.	
		
	Vì $AB \perp CD$ nên dễ thấy B, C, O_1 và B, D, O_2 thẳng hàng. Ta có $\widehat{O_1BF} = \widehat{CBF} = \widehat{CAF} = 60^\circ$ nên ΔO_1BF đều, suy ra $BF = O_1B = R$. Ta cũng có $\widehat{BAE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ nên $\widehat{BO_2E} = 2\widehat{BAE} = 60^\circ$ nên ΔO_2BF đều, suy ra $BE = O_2B = R$. Do đó $BO_1 = BO_2 = BE = BF = R$ nên O_1, O_2, E, F cùng thuộc đường tròn tâm B, bán kính R.	2,0
	Vì $AB \perp AD$ nên BD là đường kính của (O_2), Suy ra $BE \perp ED$. Vì thế DE tiếp xúc với đường tròn (B). Tương tự thì CF cũng tiếp xúc (B).	2,0

	Gọi X là giao điểm của DE, CF thì $XE = XF$. Mà $BE = BF$ nên $XB \perp EF$, tức là DE, CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B và vuông góc với Ax.	
	b) Trên nửa đường tròn đường kính CA, khác phía với O_1, dựng T sao cho $CT = R$. Chứng minh rằng $O_1E + O_2F \geq 2TA$.	
	Vì $O_2E = O_1F = R$ nên O_1EO_2F là hình thang cân và $EF = O_1O_2$. Ngoài ra $BC = BD = 2R$ nên $\triangle BCD$ cân tại B và $AC = AD$. Do O_1O_2 là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên $O_1O_2 = AC$.	2,0
	Theo định lý Ptolemy cho tứ giác O_1EO_2F thì $O_1E.O_2F = O_1O_2.EF - O_1F.O_2E = AC^2 - R^2 = AC^2 - CT^2 = TA^2.$ Theo bất đẳng thức AM-GM thì $\sqrt{O_1E.O_2F} \leq \frac{O_1E + O_2F}{2}$. Do đó $O_1E + O_2F \geq 2TA$.	1,0

----- Hết -----