Chuyên đề

ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Diễn đàn Toán học

Chuyên đề

ĐẲNG THỨC
TỔ HỢP

Vol.1

Chế bản

Hoàng Xuân Thanh [hxthanh]
Trần Quốc Nhật Hân [perfectstrong]
Trần Trung Kiên [Ispectorgadget]
Nguyễn Bảo Phúc [dark templar]

Lời giới thiệu

Bạn đọc thân mến!

Đại Số Tổ Hợp ngày nay đã trở thành một môn học không thể thiếu trong chương trình trung học phổ thông. Khi nói về các bài toán Tổ hợp, chúng ta không thể không nhắc tới một dạng toán rất hay và quen thuộc đó là: Đẳng thức tổ hợp.

Đẳng thức tổ hợp (ĐTTH) là những đẳng thức có chứa các hệ số nhị thức thường được phát biểu dưới dạng tính tổng. Có thể nói ĐTTH là một trong những đề tài khó nhất và hấp dẫn nhất của Đại Số Tổ Hợp. Việc ĐTTH xuất hiện thường xuyên trong các kỳ thi Đại Học, học sinh giỏi những năm gần đây, cũng là một dấu hiệu cho thấy sự quan tâm và đầu tư một cách tích cực hơn về vấn đề này.

Nhân sự kiện đón xuân Quý Tỵ và kỷ niệm tròn một năm Diễn đàn Toán học khai trương trang chủ mới (16/01/2012 - 16/01/2013), nhóm biên tập chúng tôi cùng nhiều thành viên tích cực của diễn đàn đã chung tay biên soạn một chuyên đề gửi đến bạn đọc.

Với một số phương pháp từ cơ bản đến nâng cao về Đại Số Tổ Hợp nói chung và ĐTTH nói riêng, chúng tôi, những người thực hiện chuyên đề này, mong muốn đem đến cho bạn đọc một chút gì đó mới mẻ trong các bài toán về ĐTTH, chẳng hạn như phương pháp Sai Phân, Sai phân từng phần, v.v... Bạn đọc sẽ tìm thấy trong chuyên đề này một số dạng bài toán quen thuộc được nhìn nhận và tiếp cận theo phong cách hoàn toàn mới, qua những ví dụ và bài tập điển hình.

Chuyên đề là tập hợp các bài viết của các tác giả: Trần Quốc Nhật Hân (perfectstrong), Bùi Đức Lộc (supermember), Hoàng Xuân Thanh (hxthanh), Lê Kim Nhã (gogo123), Nguyễn Bảo Phúc (Dark Templar), Trần Trung Kiên (Ispectorgadget), Lưu Giang Nam (namheo1996), Hoàng Minh Quân (batigoal), Nguyễn Hiền Trang (tranghieu95) ... cùng sự góp sức của nhiều thành viên tích cực khác trên DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC như thầy Châu Ngọc Hùng (hungchng), Lê Hữu Điền Khuê (Nesbit), Đinh Ngọc Thạch (T*genie*), HeilHittler, trungpbc, ...

Chuyên đề gồm 6 chương. Chương 1 tóm tắt **Tổng quan về hệ số nhị thức**. **Phương pháp cân bằng hệ số của khai triển nhị thức** quen thuộc sẽ được nghiên cứu ở chương 2. **Tính tổng bằng Sai Phân và Sai Phân Từng Phần** chiếm vị trí ở chương 3. Chương 4 viết về **Hàm Sinh và những ứng dụng** mạnh mẽ trong chứng minh ĐTTH. Chương 5 là **Một số ứng dụng của nhị thức trong các bài toán Số Học**. Khép lại chuyên đề là chương 6 **Phương pháp đếm bằng hai cách**.

Những phương pháp và bài tập được giới thiệu trong chuyên đề này có thể chưa phải là hay nhất, chưa phải là tổng quát nhất. Nhưng hy vọng bạn đọc hãy tiếp tục nghiên cứu, sáng tạo. Đó mới là tinh thần học toán mà chuyên đề muốn mang tới.

Tài liệu này cũng thay cho lời chúc mừng năm mới của DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC gửi đến quý bạn đọc!

Do thời gian chuẩn bị gấp rút, một số nội dung chưa được đầu tư một cách tỉ mỉ và không thể tránh khỏi sai sót, chúng tôi mong bạn đọc thông cảm. Mọi sự ủng hộ, đóng góp, phê bình của độc giả sẽ là nguồn động viên tinh thần to lớn cho ban biên tập cũng như các tác giả để những phiên bản cập nhật sau của chuyên đề được tốt hơn. Mọi trao đổi góp ý xin gửi về địa chỉ email : contact@diendantoanhoc.net.

Trân trọng!
Nhóm biên tập Chuyên đề Đẳng Thức Tổ Hợp.

Mục lục

i Lời giới thiệu

1 Chương 1
Tổng quan về hệ số nhị thức

1.1 Một số khái niệm *1*
1.2 Các tính chất cơ bản *4*

11 Chương 2
Phương pháp cân bằng hệ số chứng minh đẳng thức tổ hợp

2.1 Khai triển số thực *12*
2.2 Ứng dụng số phức *22*

41 Chương 3
Tính tổng, chứng minh ĐTTH bằng phương pháp Sai phân từng phần

3.1 Sai Phân (Difference) *42*

3.2 Sai Phân Từng Phần 43
3.3 Một số bài toán và Ví dụ minh hoạ 44
3.4 Bài tập tự luyện 68

71 Chương 4
Sử dụng hàm sinh chứng minh đẳng thức tổ hợp

4.1 Thay lời mở đầu 72
4.2 Những biến đổi đại số thường gặp với $\binom{n}{k}$ 74
4.3 Những dạng khai triển hàm sinh cần biết 75
4.4 Những định lý cơ bản trong tính tổng dùng hàm sinh 76
4.5 Bài tập minh họa 81
4.6 Các bài toán không mẫu mực 108
4.7 Bài tập tự luyện 121

125 Chương 5
Ứng dụng đẳng thức tổ hợp vào Số học

5.1 Định lý 125
5.2 Một số hệ thức cơ bản 126
5.3 Các bài toán 127
5.4 Bài tập 148

151 Chương 6
Kỹ thuật đếm bằng hai cách chứng minh đẳng thức tổ hợp

6.1 Nguyên lí đếm bằng hai cách 152
6.2 Ứng dụng chứng minh đẳng thức tổ hợp 153

6.3 Ứng dụng phương pháp đếm giải các bài toán đồ thị *165*
6.4 Ứng dụng đếm hai cách giải các bài toán rời rạc *167*
6.5 Bài tập *169*

171 | Tài liệu tham khảo

Chương

1 Tổng quan về hệ số nhị thức

1.1 Một số khái niệm *1*
1.2 Các tính chất cơ bản *4*

Hoàng Xuân Thanh (hxthanh)

Tóm tắt nội dung

Đẳng thức tổ hợp (ĐTTH) được giới thiệu trong bài viết này được hiểu là các đẳng thức có chứa các hệ số nhị thức (binomial coefficient) $\binom{n}{k}$. ĐTTH là một đề tài rất hay và khó, cùng với đó là rất nhiều phương pháp tiếp cận khác nhau cho một bài toán.

Trong phần này, tác giả sẽ hệ thống cho bạn đọc một số khái niệm và những công thức thường sử dụng.

1.1 Một số khái niệm

1.1.1 Hệ số nhị thức

Định nghĩa 1.1 (Hệ số nhị thức)

Hệ số nhị thức ký hiệu $\binom{n}{k}$ *là hệ số của* x^k *trong khai triển của nhị thức*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

$\binom{n}{k}$ *đọc là số tổ hợp n chập k (n choose k).* △

Lưu ý rằng, một số quốc gia Châu Á trong đó có Việt Nam, thường ký hiệu tổ hợp n chập k là C_n^k.
Trong toàn bộ chuyên đề này chúng ta sử dụng ký hiệu quốc tế $\binom{n}{k}$

TÍNH CHẤT 1.1 (QUY ƯỚC)–
$\binom{n}{k} = 0$ *nếu* $k > n \geq 0$ *hoặc* $k < 0 \leq n$. □

ĐỊNH LÝ 1.1 (CÔNG THỨC GIAI THỪA)–
Với mọi số nguyên không âm n và k ta có

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1}$$

với $n! = 1.2...n$ trong đó quy ước $0! = 1$. □

1.1.2 Luỹ thừa giảm, lũy thừa tăng

Định nghĩa 1.2 (Luỹ thừa giảm)
Lũy thừa giảm n của x là

$$x^{\underline{n}} = \underbrace{x(x-1)...(x-n+1)}_{n \text{ nhân tử}}$$

Quy ước $x^{\underline{0}} = 1$. △

Định nghĩa 1.3 (Luỹ thừa tăng)
Lũy thừa tăng n của x là

$$(x)_n = \underbrace{x(x+1)...(x+n-1)}_{n \text{ nhân tử}}$$

Quy ước $(x)_0 = 1$ △

TÍNH CHẤT 1.2– $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(n-k+1)_k}{k!} = \frac{(-1)^k(-n)_k}{k!}$ □

1.1.3 Khai triển nhị thức suy rộng với số mũ thực

ĐỊNH LÝ 1.2– *Với mọi số thực x và s ta có*

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k \tag{1.2}$$

$$= 1 + \frac{s^{\underline{1}}}{1!}x + \frac{s^{\underline{2}}}{2!}x^2 + \cdots + \frac{s^{\underline{k}}}{k!}x^k + \cdots \tag{1.3}$$

□

Chứng minh. Đặt $f(x) = (1+x)^s$, áp dụng khai triển Maclaurin cho $f(x)$, ta có lần lượt

$$\begin{aligned}
f(0) &= (1+x)^s\big|_{x=0} = s^{\underline{0}} \\
f'(0) &= s(1+x)^{s-1}\big|_{x=0} = s^{\underline{1}} \\
f''(0) &= s^{\underline{2}}(1+x)^{s-2}\big|_{x=0} = s^{\underline{2}} \\
\cdots &= \cdots \\
f^{(k)}(0) &= s^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

Do đó

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\underline{k}}}{k!} \cdot x^k$$

■

Vì lý do trên nên người ta mở rộng hệ số nhị thức cho "cơ số" thực s bất kỳ như sau:

Định nghĩa 1.4 *Với $s \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{N}$*

$$\binom{s}{k} = \frac{s^{\underline{k}}}{k!} = \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!}$$

$\binom{s}{k}$ *xác định như trên được gọi là hệ số nhị thức mở rộng.* △

1.2 Các tính chất cơ bản

Tính chất 1.3 (Tính chất đối xứng)–
Với mọi số nguyên n, k thoả mãn $0 \le k \le n$ ta có

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$ □

Tính chất 1.4 (Công thức Pascal)–

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$ □

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa. ■

Từ công thức Pascal, người ta lập được bảng số sau, được gọi là Tam giác Pascal

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & & \downarrow \\ & & \bullet \end{array}$$

Tam giác Pascal cho phép ta tính dần được các hệ số nhị thức. Mỗi số trong tam giác Pascal được xác định bởi tổng của hai số hạng hàng trên gần nhất phía bên trái (theo hướng mũi tên)

Tính chất 1.5 (Tổng theo cột)–

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$ □

Ví dụ 1.1.

n	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$
2		1	
3		3	
4		6	
5		10	
6		15	
7			$\boxed{35}$

$$1+3+6+10+15=35$$

△

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{k+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}\right] && \text{(Theo công thức Pascal)}\\ &= \binom{n+1}{m+1}-\binom{0}{m+1} && \text{(Sai phân)}\\ &= \binom{n+1}{m+1}\end{aligned}$$

■

Tính chất 1.6 (Tổng theo đường chéo chính)–

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$$

□

Ví dụ 1.2.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$
2	1				
3		3			
4			6		
5				10	
6					15
7					$\boxed{35}$

$$1+3+6+10+15=35$$

△

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m} && \text{(Đối xứng)}\\ &= \binom{m+n+1}{m+1} && \text{(Tổng theo cột)}\\ &= \binom{m+n+1}{n} && \text{(Đối xứng)}\end{aligned}$$

■

Tính chất 1.7 (Tổng theo đường chéo phụ (số Fibonacci))–

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}$$

□

Ví dụ 1.3.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	
2				F_6	F_7	$1+4+3=8=F_6$
3			3	1	F_8	$1+5+6+1=13=F_7$
4		4	6	4		$1+6+10+4=21=F_8$
5	1	5	10			
6	1	6				
7	1					

△

Chứng minh.
Ta chứng minh đẳng thức trên bằng quy nạp theo n
Với $n=1$ và $n=2$ dễ thấy các tổng là: $\binom{0}{0}=1=F_1$ và

$$\binom{1}{0}+\binom{0}{1}=1=F_2$$

Giả sử đẳng thức đúng đến $n-1$.
Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1-k}{k-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1-k}{k} \quad \text{(Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2-k}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1-k}{k}\\
&= F_{n-2}+F_{n-1} \quad \text{(giả thiết quy nạp)}\\
&= F_n \quad \text{(Công thức truy hồi dãy Fibonacci)}
\end{aligned}$$

■

Tính chất 1.8 (Quy tắc "hút" (absorption))–
Với $0<k\le n$, ta có:

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

□

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa ■

TÍNH CHẤT 1.9 (CÔNG THỨC LÙI "CƠ SỐ")–
Với $0 \leq k < n$*, ta có:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$ □

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa. ■

TÍNH CHẤT 1.10– *Tập con của tập con*
Với $0 \leq k \leq m \leq n$*, ta có:*

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$ □

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa ■

Một đẳng thức cũng hay được dùng đến là đẳng thức *Vandermonde*

TÍNH CHẤT 1.11 (ĐẲNG THỨC VANDERMONDE (2 THỪA SỐ))–
Cho các số nguyên không âm n, m, r*. Ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$ □

Chứng minh.
Dựa vào đẳng thức: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$
Khai triển ra ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{j}x^{j+k} = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

So sánh hệ số của x^r ở hai vế ta có:

$$\sum_{j+k=r} \binom{n}{k}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{r}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r} \quad \blacksquare$$

Chứng minh tương tự ta có đẳng thức mở rộng sau:

Tính chất 1.12 (Đẳng thức Vandermonde (mở rộng))–
Cho các số nguyên không âm $n_1, \ldots, n_r, k = k_1 + k_2 + ... + k_r$. *Ta có:*

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_r=k} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_r}{k_r} = \binom{n_1+n_2+\cdots+n_r}{k} \quad \square$$

Chương

2

Phương pháp cân bằng hệ số chứng minh đẳng thức tổ hợp

2.1 Khai triển số thực 12
2.2 Ứng dụng số phức 22

Trần Trung Kiên (Ispectorgadget)
Trần Quốc Nhật Hân (perfectstrong)
Hoàng Xuân Thanh (hxthanh)
Lê Kim Nhã (gogo123)

Tóm tắt nội dung

Phương pháp cân bằng hệ số là một trong những phương pháp khá hay và mạnh trong các bài toán tính tổng có chứa hệ số nhị thức. Cơ sở của phương pháp là việc đồng nhất hai đa thức bằng nhau (có thể là chuỗi luỹ thừa).
Từ một hằng đẳng thức, ta khai triển thành đa thức theo 2 cách khác nhau, thì hai đa thức thu được vẫn phải là như nhau. Từ đó ta suy ra được hệ số của số hạng bậc nào đó trong 2 khai triển là bằng nhau, là điều cần chứng minh hoặc yêu cầu tính của đề bài.

2.1 Khai triển số thực

Ví dụ 2.1. *Chứng minh đẳng thức*

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2 = (-1)^n\binom{2n}{n}$$

△

Lời giải.
Xét đẳng thức

$$(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n} \tag{2.1}$$

Khai triển Vế Trái của (2.1), ta có:

$$(1-x^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

Hệ số của x^{2n} trong khai triển trên tương ứng với số hạng $k=n$ là $(-1)^n\binom{2n}{n}$.
Khai triển Vế Phải của (2.1), ta được:

$$\begin{aligned}(1-x)^{2n}(1+x)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^k \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{j}x^{j+k}\end{aligned}$$

Như vậy, hệ số của x^{2n} trong khai triển trên tương ứng với các số hạng thoả $k+j=2n$ là

$$\sum_{k+j=2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{j} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. ■

Ví dụ 2.2.

a) *Chứng minh đẳng thức:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{3n}{n+k}$$

b) *Tính* S_{2m} $(m \in \mathbb{N})$ △

Lời giải.

Ta có đẳng thức: $(1-x^2)^n(1+x)^{2n} = (1-x)^n(1+x)^{3n}$.

Khai triển ra ta được:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k\sum_{j=0}^{2n}\binom{3n}{j}x^j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{j}x^{2k+j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{j}x^{i+j}$$

Tìm hệ số của x^{2n} trong cả hai khai triển trên ta có:

$$\sum_{2k+j=2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{2n-2k} = \sum_{k+j=2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{2n-k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{n+k}$$

Đẳng thức a) được chứng minh. Ta tiếp tục chứng minh đẳng thức b).

Ta có:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!(3n)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n+k)!(2n-k)!} \\
&= \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!(2n)!(-1)^k}{k!(2n-k)!(n+k)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{n-k}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{2m} = \frac{(2m)!(6m)!}{(4m)!(4m)!} \sum_{k+j=2m} (-1)^k \binom{4m}{k}\binom{4m}{j}$$

Xét đẳng thức:

$$(1-x^2)^{4m} = (1-x)^{4m}(1+x)^{4m}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4m}(-1)^k\binom{4m}{k}x^{2k} = \sum_{k=0}^{4m}\sum_{j=0}^{4m}(-1)^k\binom{4m}{k}\binom{4m}{j}x^{k+j}$$

Cân bằng hệ số x^{2m} ở đẳng thức trên ta có:

$$(-1)^m\binom{4m}{m} = \sum_{k+j=2m}(-1)^k\binom{4m}{k}\binom{4m}{j}$$

Từ đó suy ra:

$$S_{2m} = \frac{(2m)!(6m)!}{(4m)!(4m)!}\cdot\frac{(-1)^m(4m)!}{m!(3m)!} = \frac{(-1)^m(2m)!(6m)!}{m!(3m)!(4m)!} \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 2.3. *Tìm hệ số x^{10} trong khai triển*

$$P(x) = (1+x+x^2+x^3)^{15} \qquad \triangle$$

Lời giải (1). - Dùng hệ số nhị thức mở rộng

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(1-x^4)^{15}}{(1-x)^{15}} \\ &= (1-x)^{-15}(1-x^4)^{15} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-15}{k}(-1)^k x^k \sum_{j=0}^{15}\binom{15}{j}(-1)^j x^{4j} \\ &= \sum_{\substack{0\le j\le 15\\ k\ge 0}}(-1)^j\binom{14+k}{k}\binom{15}{j}x^{k+4j} \end{aligned}$$

Ta cần tìm hệ số x^{10}, nghĩa là phải tìm tất cả nghiệm nguyên không âm của $k+4j=10$.

Suy ra $(j,k) \in \{(0,10);\ (1,6);\ (2,2)\}$
Hệ số cần tìm có tất cả 3 số hạng tương ứng với (j,k) như trên là:

$$\binom{14+10}{10}\binom{15}{0} - \binom{14+6}{6}\binom{15}{1} + \binom{14+2}{2}\binom{15}{2} = 1\,392\,456 \quad \blacksquare$$

Lời giải (2). - Khai triển trực tiếp
Một cách tổng quát:

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x+x^2+x^3)^n = (1+x)^n(1+x^2)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{2j} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}x^{k+2j} \end{aligned}$$

Hệ số của x^m trong khai triển trên sẽ tương ứng với các số hạng thoả $k+2j=m$ hay $k=m-2j$. Nghĩa là:

$$\langle x^m \rangle (1+x+x^2+x^3)^n = \sum_{j\geq 0}\binom{n}{j}\binom{n}{m-2j}$$

Ký hiệu: $\langle x^m \rangle f(x)$ nghĩa là hệ số của x^m trong khai triển $f(x)$
Với $n=15$ và $m=10$, ta có:

$$\begin{aligned} \langle x^{10} \rangle (1+x+x^2+x^3)^{15} &= \sum_{j\geq 0}\binom{15}{j}\binom{15}{10-2j} \\ &= \binom{15}{0}\binom{15}{10} + \binom{15}{1}\binom{15}{8} + \binom{15}{2}\binom{15}{6} \\ &\quad + \binom{15}{3}\binom{15}{4} + \binom{15}{4}\binom{15}{2} + \binom{15}{5}\binom{15}{0} \\ &= 1\,392\,456 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nhận xét.
Bằng việc khai triển đẳng thức trên theo 2 cách khác nhau, ta thu được đẳng thức sau:

$$\sum_{\substack{k+4j=m\\ k,j\in\mathbb{N}}} (-1)^j \binom{n+k-1}{k}\binom{n}{j} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{n}{m-2k}$$

Ví dụ 2.4. *Với các số tự nhiên m, n thoả $m \leq n$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{k+n}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k = (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

△

Lời giải.
Ta tìm hệ số x^n trong các khai triển:

$$(-1)^m[1-2(1+x)]^m(1+x)^n = (1+2x)^m(1+x)^n = [x+(1+x)]^m(1+x)^n \tag{2.2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(1+2x)^m(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^kx^k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{j}2^kx^{k+j}\end{aligned}$$

Hệ số của x^n bao gồm tổng các số hạng thoả: $k+j=n$ hay $j=n-k$. Đó là:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{n-k}2^k \tag{2.3}$$

Ta có tiếp:

$$\begin{aligned}[x+(1+x)]^m(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}(1+x)^{k+n}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}x^j\\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{m}{k}\binom{n+k}{j}x^{m-k+j}\end{aligned}$$

Hệ số của x^n bao gồm tổng các số hạng thoả: $m-k+j=n$ hay $j=n+k-m$. Đó là:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{n+k-m} \tag{2.4}$$

Tiếp theo:

$$\begin{aligned}(-1)^m[1-2(1+x)]^m(1+x)^n &= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-2)^k(1+x)^{k+n}\\ &= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-2)^k\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}x^j\\ &= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{m}{k}\binom{n+k}{j}(-2)^kx^j\end{aligned}$$

Như vậy hệ số của x^n tương ứng với $j=n$. Đó là:

$$(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{n}(-2)^k \tag{2.5}$$

Từ (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ta thu được các đẳng thức cần chứng minh. ■

Ví dụ 2.5. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sum_{k=0}^{n}4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k}=\binom{8n}{2n}$$

△

Lời giải.
Biểu thức của vế phải cho ta thấy đó là hệ số của số hạng thứ $2n+1$ trong khai triển của nhị thức với bậc $8n$.
Ta có:

$$(x+y)^{8n} = \sum_{k=0}^{8n} \binom{8n}{k} x^{8n-k} y^k$$

Như vậy số hạng thứ $2n+1$ (tương ứng với $k=2n$) là $\binom{8n}{2n} x^{6n} y^{2n}$
Để cho đơn giản, ta cho $y = x^{-1}$ tức là $\binom{8n}{2n} = \langle x^{4n} \rangle (x+x^{-1})^{8n}$
Ký hiệu $\langle x^n \rangle f(x)$ ở đây nghĩa là *Hệ số của x^n trong khai triển $f(x)$*
Ta có:

$$\begin{aligned}
\binom{8n}{2n} &= \langle x^{4n} \rangle (x+x^{-1})^{8n} = \langle x^{4n} \rangle \left(x^2 + x^{-2} + 2\right)^{4n} \\
&= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \left(x^2 + x^{-2}\right)^{4n-k} 2^k \\
&= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^{4n-k} \binom{4n}{k} \binom{4n-k}{j} 2^k x^{8n-2k-2j} x^{-2j} \\
&= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^{4n-k} \binom{4n}{k} \binom{4n-k}{j} 2^k x^{8n-4j-2k}
\end{aligned}$$

Như vậy các số hạng chứa x^{4n} tương ứng với k, j thoả $8n-4j-2k = 4n$ hay $k = 2n-2j$, khi đó $0 \le 2n-2j \le 2n \Rightarrow 0 \le j \le n$
Thay giá trị $k = 2n-2j$ và giới hạn của j vào biểu thức trên ta được:

$$\binom{8n}{2n} = \sum_{j=0}^{n} 2^{2n-2j} \binom{4n}{2n-2j} \binom{2n+2j}{j} = \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{4n}{2n+2k} \binom{2n+2k}{k} \blacksquare$$

Nhận xét. Cái hay của phương pháp này đó là: Bằng cách khai triển theo những cách khác nhau, ta có thể mở rộng được nhiều đẳng thức khác nhau từ bài toán ban đầu! Ví dụ: Từ đẳng thức:

$$\binom{8n}{2n} = \langle x^{4n} \rangle (x+x^{-1})^{8n}$$

Ta khai triển như sau:

$$\begin{aligned}(x+x^{-1})^{8n}=\left(2+x^2+x^{-2}\right)^{4n}&=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}2^{4n-k}(x^2+x^{-2})^k\\&=\sum_{k=0}^{4n}\sum_{j=0}^{k}\binom{4n}{k}\binom{k}{j}2^{4n-k}x^{2k-2j}x^{-2j}\\&=\sum_{k=0}^{4n}\sum_{j=0}^{k}\binom{4n}{k}\binom{k}{j}2^{4n-k}x^{2k-4j}\end{aligned}$$

Từ đó: $2k-4j=4n$ hay $0\le k=2n-2j\le 2n\Rightarrow 0\le j\le n$
Do đó hệ số x^{4n} của khai triển trên sẽ là:

$$\left\langle x^{4n}\right\rangle\sum_{k=0}^{4n}\sum_{j=0}^{k}\binom{4n}{k}\binom{k}{j}2^{4n-k}x^{2k-4j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{4n}{2n-2j}\binom{2n-2j}{j}4^{n+j}$$

Từ đó ta có thêm đẳng thức:

$$\binom{8n}{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n-2k}{k}4^{n+k}$$

Bây giờ mà đảo chiều của tổng Vế Phải (thay k bởi $n-k$), ta có tiếp:

$$\binom{8n}{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k}4^{2n-k}$$

Kết hợp với đề bài thì ta có đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n}4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k}=\sum_{k=0}^{n}4^{2n-k}\binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k}$$

Lưu ý rằng $\binom{2k}{n-k}$ chỉ $\neq 0$ khi $2k\ge n-k$ hay $k\ge\dfrac{n}{3}$
Như vậy:

$$\sum_{k=0}^{n}4^{2n-k}\binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k}=\sum_{k=\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor}^{n}4^{2n-k}\binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k}$$

Ví dụ 2.6. *Với các số nguyên n, m thoả $0 \leq m \leq n$.*
Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n+m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

△

Lời giải.
Quan sát vế phải của đẳng thức cần chứng minh ta thấy rằng:

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \langle x^m \rangle (2+x)^n$$

Mặt khác quan sát thấy vế phải của đẳng thức có nhị thức $\binom{2n-2k}{n+m}$, điều này chứng tỏ biểu thức đó là hệ số bậc $(n+m)$ của một khai triển bậc cao hơn n
Do đó ta sẽ nhân thêm x^n vào khai triển trên

$$\begin{aligned}
\langle x^m \rangle (2+x)^n &= \left\langle x^{n+m} \right\rangle (2x+x^2)^n = \left\langle x^{n+m} \right\rangle [(x+1)^2 - 1]^n \\
&= \left\langle x^{n+m} \right\rangle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+1)^{2(n-k)} (-1)^k \\
&= \left\langle x^{n+m} \right\rangle \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{2n-2k} \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{j} (-1)^k x^j
\end{aligned}$$

Suy ra $j = n + m$ và do đó ta có:

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n+m}$$

Để ý rằng với $k > \dfrac{n-m}{2}$ thì $2n - 2k < n + m$ và khi đó $\binom{2n-2k}{n+m} = 0$
Từ đó ta có đẳng thức cần chứng minh ■

Bài tập

BÀI 1. Cho các số tự nhiên m, n thoả mãn $m \leq 2n$
Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2n}{2k} \binom{2n-2k}{m-k} 4^k = \binom{4n}{2m}$$

BÀI 2. Cho các số tự nhiên m, n thoả mãn $2m+1 \leq 3n$
Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+2m-4k}{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{2m+1-2k}$$

BÀI 3. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n} (-3)^k \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{n-k} = (-2)^n \binom{2n}{n}$$

BÀI 4. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$$

BÀI 5. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k}^2 = 2^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{k}$$

2.2 Ứng dụng số phức

Việc tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức chứa các hệ số nhị thức, đôi khi ta cũng cần dùng đến công cụ *số phức*. Vậy khi nào ta cần dùng đến số phức?

Đó là những tổng có dạng $\sum\limits_{k=0}^{n} f(m,pk)$ hoặc $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k.f(m,pk)$ với

$p > 1$

Ý nghĩa của những tổng dạng trên đó là "khoảng cách" giữa hai số hạng liên tiếp là một bội của biến chạy k.

Ví dụ:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k};\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k};\quad \text{v.v...}$$

Tại sao ta cần dùng số phức? Ta cần đến tính chất gì của số phức? Để trả lời cho câu hỏi trên, chúng ta hãy cùng tìm hiểu một số vấn đề sau:

Ta có $i^2 = -1$; $i^{2n} = (-1)^n$; .... Xét phương trình

$$x^n - 1 = 0 \tag{2.6}$$

Phương trình (2.6) có nghiệm $x = \sqrt[n]{1}$. Những nghiệm này (cả nghiệm phức) bao gồm n giá trị $\{1; \varepsilon; \varepsilon^2; ...; \varepsilon^{n-1}\}$ trong đó:

$$\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Mặt khác: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$

Như vậy ngoại trừ nghiệm $x = 1$ thì $n-1$ nghiệm phức còn lại đều thoả mãn phương trình:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 = 0 \tag{2.7}$$

Thay lần lượt các giá trị nghiệm vào (2.7), ta được:

$$\begin{gathered}\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}+\ldots+\varepsilon+1=0\\ \varepsilon^{2(n-1)}+\varepsilon^{2(n-2)}+\ldots+\varepsilon^2+1=0\\ \cdots\end{gathered}$$

Một cách tổng quát ta có

Định lý 2.1 (Định lý RUF - Root of Unity Filter)–

$$\frac{1}{n}\sum_{\varepsilon^n=1}\varepsilon^k=\begin{cases}1 & \textit{nếu} \quad n\mid k\\ 0 & \textit{nếu} \quad n\nmid k\end{cases}$$ □

Hiểu một cách đơn giản là: Trung bình cộng với luỹ thừa bậc k của n giá trị căn phức bậc n của 1 bằng 1 nếu k là bội của n, ngược lại giá trị này bằng 0.

Ngoài ra một tính chất rất cơ bản đó là:

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)\end{cases}$$

Để tìm hiệu cách sử dụng các tính chất trên như thế nào, ta hãy xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 2.7. *Tính tổng*

$$S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}$$ △

Lời giải.
Xét khai triển $(1+i)^{2n}$, ta có:

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}i^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}i^{2k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}i^{2k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} + \sum_{k=1}^{n}i.(-1)^{k-1}\binom{2n}{2k-1}\end{aligned}$$

Như vậy ta dễ dàng nhận ra được:

$$S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = \mathrm{Re}[(1+i)^{2n}]$$

Và nhân tiện ta cũng có luôn:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n}{2k-1} = \mathrm{Im}[(1+i)^{2n}]$$

Mặt khác:

$$(1+i)^{2n} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2n} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = 2^n\cos\frac{n\pi}{2}$$

và:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n}{2k-1} = 2^n\sin\frac{n\pi}{2}$$

■

Nhận xét. Liệu bài toán này có phải bắt buộc phải dùng công cụ số phức? Các bạn thử tìm cách khác xem nhé!

Ví dụ 2.8. *Tính tổng*

$$S = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k}$$

△

Lời giải.
Nhìn vào đề bài, gợi ý cho ta liên hệ ngay đến khai triển $(1+i)^{12n}$? Nhưng liệu có ra được kết quả cuối cùng không? Ta hãy tính thử xem!

$$(1+i)^{12n} = \sum_{k=0}^{12n} \binom{12n}{k} i^k$$

Các số hạng của ta "cách đều" một khoảng bội của 4, như vậy một cách tự nhiên ta sẽ tách khai triển trên thành 4 tổng theo phân đoạn module 4 (theo $k \mod 4$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{12n} \binom{12n}{k} i^k &= \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} i^{4k} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} i^{4k+1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} i^{4k+2} + \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3} i^{4k+3} \\ &= \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} + i \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} - i \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+3}\end{aligned}$$

Đến đây, ta gặp một "vướng mắc nhỏ", đó là:

$$\text{Re}\left[(1+i)^{12n}\right] = \sum_{k=0}^{3n} \binom{12n}{4k} - \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{12n}{4k+2} \tag{2.8}$$

Như vậy là so với tổng cần tính giá trị của ta "thừa ra" một tổng ... tương tự.

Không vấn đề gì, trở lại với số thực ta xét khai triển:

$$\begin{aligned}(1+x)^{12n} &= \sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}x^{4k} + \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}x^{4k+1}\\ &\quad + \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}x^{4k+2} + \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}x^{4k+3}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(1-x)^{12n} &= \sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}(-1)^k x^k\\ &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}x^{4k} - \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}x^{4k+1}\\ &\quad + \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}x^{4k+2} - \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}x^{4k+3}\end{aligned}$$

Cộng 2 đẳng thức trên theo từng vế ta được:

$$(1+x)^{12n} + (1-x)^{12n} = 2\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}x^{4k} + 2\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}x^{4k+2}$$

Cho $x = 1$, thì ta được:

$$2^{12n} = 2\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k} + 2\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}$$

hay

$$2^{12n-1} = \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k} + \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}$$

Cộng vế theo vế với (2.8), ta sẽ có:

$$2^{12n-1} + \operatorname{Re}\left[(1+i)^{12n}\right] = 2\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k} = 2S$$

Việc còn lại ta chỉ phải tìm $\operatorname{Re}\left[(1+i)^{12n}\right]$.
Ta có:

$$\begin{aligned}(1+i)^{12n} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12n}\\ &= 2^{6n}\left(\cos(3n\pi) + i\sin(3n\pi)\right)\\ &= (-1)^n 2^{6n}\end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$S = \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k} = 2^{12n-2} + (-1)^n 2^{6n-1}$$

■

Nhận xét. Ngoài ra ta còn thu được đẳng thức:

$$\operatorname{Im}\left[(1+i)^{12n}\right] = \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1} - \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3} = 0$$

hay

$$\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1} = \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3} \tag{2.9}$$

Thêm một câu hỏi cho các bạn: Tổng (2.9) bằng bao nhiêu?

Ví dụ 2.9. *Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng*

$$\left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots\right]^2 = 2^n$$

△

Lời giải (1).
Ta có:

$$(1+i)^n = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right] + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots\right]$$

Lại có:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right) = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} + \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right]^2 &= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^2\\ \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]^2 &= 2^n\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2\end{aligned}$$

Cộng 2 đẳng thức trên, ta có đẳng thức cần chứng minh. ■

Lời giải (2).
Xét số phức $z = 1 + i$. Khi đó

$$\begin{aligned} z^n &= (1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k\\ &= \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right] + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]\end{aligned}$$

Suy ra

$$|z^n|^2 = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]^2$$

Mà $|z^n| = |z|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$. Từ đó ta có được đpcm. ■

Ví dụ 2.10. *Tính tổng*

$$A = 3^n\binom{2n}{0} - 3^{n-1}\binom{2n}{2} + ... + (-1)^{n-1}3\binom{2n}{2n-2} + (-1)^n\binom{2n}{2n}$$

$$B = 3^{2m}\binom{4m}{0} + 3^{2m-2}\binom{4m}{4} + 3^{2m-4}\binom{4m}{8} + ... + 3^2\binom{4m}{4m-4} + \binom{4m}{4m}$$

△

Lời giải.
Xét các khai triển

$$(\sqrt{3}+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\sqrt{3})^{2n-k} x^k$$
$$(\sqrt{3}-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\sqrt{3})^{2n-k} (-1)^k x^k$$

Vậy

$$T = 3^n \binom{2n}{0} + 3^{n-1}x^2 \binom{2n}{2} + 3^{n-2}x^4 \binom{2n}{4} + ... + +x^{2n} \binom{2n}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+x)^{2n} + (\sqrt{3}-x)^{2n}\right]$$

Chọn $x = i$ thì
$(\sqrt{3}+i)^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$
$(\sqrt{3}-i)^{2n} = 2^{2n}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$
Suy ra $A = 2^{2n}\cos\frac{n\pi}{3}$.
Với $n = 2m$, chọn $x = 1$ thì

$$A' = 3^{2m}\binom{4m}{0} + 3^{2m-1}\binom{4m}{2} + 3^{3m-2}\binom{4m}{4} + ... + 3\binom{4m}{4m-2} + \binom{4m}{4m}$$
$$= 2^{2m-1}[(2+\sqrt{3})^{2m} + (2-\sqrt{3})^{2m}]$$
$$A = 3^{2m}\binom{4m}{0} - 3^{2m-1}\binom{4m}{2} + 3^{2m-2}\binom{4m}{4} + ... + \binom{4m}{4m} = 2^{4m}\cos\frac{2m\pi}{3}$$

Do đó

$$B = \frac{A+A'}{2} = 2^{2m-2}[(2+\sqrt{3})^{2m} + (2-\sqrt{3})^{2m}] + 4^{4m-1}\cos\frac{2m\pi}{3} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.11. *Chứng minh*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{\pi n}{3}\right)$$
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\binom{n}{10}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right)$$
$$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\binom{n}{11}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Ta có:
$$1+\cos\varphi+i\sin\varphi=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, ta có $\varepsilon^k=1 \Leftrightarrow k=3m$ và
$$1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=\frac{1-\varepsilon^{3k}}{1-\varepsilon^k}=0$$
với mọi k không là bội của 3.
Xét các khai triển
$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\\
(1+\varepsilon)^n &= \binom{n}{0}+\varepsilon\binom{n}{1}+\ldots+\varepsilon^{n-1}\binom{n}{n-1}+\varepsilon^n\binom{n}{n}\\
(1+\varepsilon)^{2n} &= \binom{n}{0}+\varepsilon^2\binom{n}{1}+\ldots+\varepsilon^{2n-2}\binom{n}{n-1}+\varepsilon^{2n}\binom{n}{n}
\end{aligned}$$

Ta có:
$$(1+\varepsilon)^n=\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=2^n\cos^n\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$(1+\varepsilon^2)^n=\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n=2^n\cos^n\frac{2\pi}{3}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$
$$=2^n\cos^n\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi n}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

Gọi vế trái các đẳng thức cần chứng minh lần lượt là S_1, S_2, S_3 thì

$$3S_1 = (1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2.2^n \cos^n \frac{\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{3}$$

Hay

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{9} + ... = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} 3S_1 &= (1+1)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n \\ &= 2^n + \varepsilon^2\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \varepsilon\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi n}{3}\right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + ... &= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right) \\ &= 2^n\varepsilon^2\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \varepsilon\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \binom{n}{11} + ... = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right) \qquad \blacksquare$$

Nhận xét. Điểm mấu chốt của lời giải là sử dụng tính chất căn bậc 3 của đơn vị và công thức Moivre. Chúng ta xét thêm một ví dụ nữa để làm rõ hơn nữa cách giải dạng toán này (Hoàn toàn tương tự cho lời giải bài toán tổng quát).

Ví dụ 2.12. *Tính tổng*

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \binom{n}{18} + ... \qquad \triangle$$

Lời giải.
Khoảng cách của hai chỉ số trên liên tiếp là 6 nên xét số phức

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

Ta thấy $\varepsilon^k = 1$ khi và chỉ khi k là bội của 6, và với mọi k không chia hết cho 6 thì

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{4k} + \varepsilon^{5k} = \frac{1 - \varepsilon^{6k}}{1 - \varepsilon^k} = 0$$

Ta có:

$$(1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n + (1+\varepsilon^3)^n + (1+\varepsilon^4)^n + (1+\varepsilon^5)^n = 6S$$

Rõ ràng $\overline{\varepsilon} = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}, \varepsilon^3 = -1$ và $\varepsilon^6 = 1 = \varepsilon.\overline{\varepsilon}$ nên $\varepsilon^{6-p} = \overline{\varepsilon^p}$
Do đó:

$$(1+\varepsilon^5)^n = (1+\overline{\varepsilon})^n,\ (1+\varepsilon^4)^n = (1+\overline{\varepsilon}^2)^n$$

$$\begin{aligned}
1+\varepsilon &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
1+\overline{\varepsilon} &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
1+\varepsilon^2 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\\
1+\overline{\varepsilon}^2 &= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
6S &= 2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\overline{\varepsilon})^n + (1+\varepsilon^2)^n + (1+\overline{\varepsilon}^2)^n\\
&= 2^n + (\sqrt{3})^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right) + (\sqrt{3})^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\\
&= 2^n + 2(\sqrt{3})^n\cos\frac{n\pi}{6} + 2\cos\frac{n\pi}{3}
\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$S = \frac{1}{3}\left[2^{n-1} + (\sqrt{3})^n\cos\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{3}\right]$$

■

Ví dụ 2.13. *Tính tổng*

$$T_2 = 1\binom{8n}{1} - 3\binom{8n}{3} + \ldots - (8n-1)\binom{8n}{8n-1}$$

△

Lời giải.
Trước tiên ta phải dùng đạo hàm để có được hệ số đứng trước tổ hợp.
Xét đa thức

$$f(x) = (1+x)^{8n} = \binom{8n}{0} + \sum_{k=1}^{8n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\Rightarrow f'(x) = 8n(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

Lại nhân với x ta đươc $g(x) = 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} k\binom{n}{k} x^k$ Nhận thấy T_2 chính là phần ảo của

$$g(i) = 8ni(1+i)^{8n-1} = 4n.16^n + 4n.16^n i$$

Do đó $T_2 = 4n.16^n$
Tương tự ta dùng đạo hàm 2 lần để tính tổng

$$2^2\binom{8n}{2} - 4^2\binom{8n}{4} + 6^2\binom{8n}{6} - \dots - (8n)^2\binom{8n}{8n}$$

$$\begin{aligned}
& (1+x)^{8n} &&= \binom{8n}{0} + \sum_{k=1}^{8n} \binom{8n}{k} x^k \\
\Rightarrow\quad & 8n(1+x)^{8n-1} &&= \sum_{k=1}^{8n} k\binom{8n}{k} x^{k-1} \\
\Leftrightarrow\quad & 8nx(1+x)^{8n-1} &&= \sum_{k=1}^{8n} k\binom{8n}{k} x^{k} \\
\Rightarrow\quad & 8n(1+x)^{8n-2}(1+8nx) &&= \sum_{k=1}^{8n} k^2\binom{8n}{k} x^{k-1} \\
\Leftrightarrow\quad & 8nx(1+x)^{8n-2}(1+8nx) &&= \sum_{k=1}^{8n} k^2\binom{8n}{k} x^{k} = f(x)
\end{aligned}$$

Tổng cần tìm chính là phần thực của

$$f(i) = 8nf(1+i)^{8n-2}(1+8ni) = 16^{n-1} + 128n^2.16^{n-2}i.$$ ■

Ví dụ 2.14 (T7/248-THTT).
Chứng minh đẳng thức sau với n là số nguyên dương:

$$\left[\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]^2 + \left[\sum_{0\le 2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\right]^2 = 2^n$$ △

Lời giải.
Xét số phức $z = 1+i$, sử dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} z^n = (1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n} i^k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k} + i.\sum_{0\le 2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1} \end{aligned}$$

Lấy module hai vế

$$|z^n| = \sqrt{\left[\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]^2 + \left[\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\right]^2}$$

Mặt khác:

$$z^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Từ đó ta có $|z^n|^2 = 2^n$, là điều phải chứng minh
Chú ý: Nếu số phức $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ thì:

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k}.\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi + i.\sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi$$

Do đó lấy module hai vế ta có:

$$\left[\sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k}.\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi\right]^2 + \left[\sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi\right]^2 = 1$$

Xét $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ta có kết quả bài toán trên.
Xét $\varphi = \frac{\pi}{3}$ thì $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta có đẳng thức:

$$\left[\sum_{0\le 2k\le n} (-3)^k \binom{n}{2k}\right]^2 + 3\left[\sum_{0\le 2k+1\le n} (-3)^k \binom{n}{2k+1}\right]^2 = 4^n$$

■

Ví dụ 2.15. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cos kx = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\cos\frac{nx}{2}, \quad x\in[0;\pi]$$

△

Lời giải.
Đặt

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cos kx, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \sin kx$$

Ta có:

$$A_n + iB_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (\cos x + i\sin x)^k$$

Xét hệ số y^n từ hằng đẳng thức $(1+y)^n(1+zy)^n = [1+(1+z)y+zy^2]^n$ ta có

$$\sum_{\substack{k+l=n \\ 0\le k,l\le n}} \binom{n}{k}.\binom{n}{l} z^l = \sum_{\substack{k+l+s=n \\ 0\le k,l,s\le n}} \frac{n!}{k!l!s!}(z+1)^l z^s$$

Hay viết lại dưới dạng

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}(z+1)^{n-2k} z^k$$

Xét $z = \cos x + i\sin x$ thì
$1 + z = 1 + \cos x + i\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)$ nên với $x \in [0;\pi]$
ta có

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (\cos x + i\sin x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}(z+1)^{n-2k} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\left[\cos\frac{x(n-2k)}{2}\right. \\
&\qquad\qquad\left. + i\sin\frac{x(n-2k)}{2}\right](\cos kx + i\sin kx) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}.\binom{2k}{k}\left(2.\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Vì thế

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\cos\frac{nx}{2}$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\sin\frac{nx}{2}$$

Vậy ta có đpcm. ■

Nhận xét. Theo kết quả trên thì

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \sin kx = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\sin\frac{nx}{2}$$

Nếu $x = 0$ thì

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}$$

Nếu $x = \pi$ thì

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n = 2m+1 \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}} & n = 2m \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}$$

Bài tập

BÀI 1. Cho n, k là hai số nguyên dương với $n > 2k+1$, chứng minh rằng:

a) $$\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j(2k+1)} = \frac{2^n}{2k+1}\left[1+2\sum_{m=1}^{k}\left(\cos\frac{m\pi}{2k+1}\right)^n\cos\frac{mn\pi}{2k+1}\right]$$

b) $$\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j2k} = \frac{2^n}{2k}\left[1+2\sum_{m=1}^{k}\left(\cos\frac{m\pi}{2k+1}\right)^n\cos\frac{mn\pi}{2k+1}\right]$$

c) (Tổng quát)

$$\sum_{r\geq 0}\binom{n}{j+rk} = \frac{2^n}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\left(\cos\frac{m\pi}{k}\right)^n\cos\frac{(n-2j)m\pi}{k}$$

BÀI 2. Cho các dãy số a_n, b_n, c_n được xác định theo công thức:

$$a_n = \binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$$
$$b_n = \binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots$$
$$c_n = \binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots$$

Chứng minh rằng:

a) $a_n^3+b_n^3+c_n^3-3a_nb_nc_n = 2^n$

b) $a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-b_nc_n-a_nc_n = 1$

BÀI 3. Cho số nguyên dương n và các số thực x, y. Chứng minh rằng:

a) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos[(n-k)x+ky] = 2^n\cos^n\frac{x-y}{2}\cos\frac{n(x+y)}{2}$$

b) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin[(n-k)x+ky] = 2^n\cos^n\frac{x-y}{2}\sin\frac{n(x+y)}{2}$$

BÀI 4. Cho khai triển $(x^2 + 3x + 1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$.
Tính tổng

a) $T_1 = a_0 + a_4 + a_8 + ... + a_{20}$

b) $T_2 = a_1 + a_5 + a_9 + ... + a_{17}$

Chương

3

Tính tổng, chứng minh ĐTTH bằng phương pháp Sai phân từng phần

3.1 Sai Phân (Difference) 42
3.2 Sai Phân Từng Phần 43
3.3 Một số bài toán và Ví dụ minh hoạ 44
3.4 Bài tập tự luyện 68

Nguyễn Bảo Phúc (dark templar)
Trần Quốc Nhật Hân (perfectstrong)
Hoàng Xuân Thanh (hxthanh)

Tóm tắt nội dung

Sai Phân Từng Phần (tên gọi do tác giả tự đặt) còn được biết đến với cái tên *Summation by Parts*. Đây là một phương pháp tính tổng có cấu trúc gần giống với phương pháp Tích Phân Từng Phần *(Integration by Parts)*. Sai phân từng phần (SPTP) là một trong những công cụ sơ cấp khá hiệu quả trong các bài toán tính tổng hữu hạn. Trong khuôn khổ bài viết này, tác giả muốn giới thiệu đến bạn đọc một trong những ứng dụng của SPTP đó là:
Sử dụng phương pháp SPTP trong các bài toán tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức Tổ Hợp.

3.1 Sai Phân (Difference)

Định nghĩa 3.1 (Sai Phân)

$$\text{Cho dãy } f(k) : \{f(1), f(2), ..., f(k), f(k+1), ...\}$$
$$\text{Khi đó dãy } \Delta f(k) : \{f(2) - f(1), f(3) - f(2), ..., f(k+1) - f(k), ...\}$$

được gọi là Dãy Sai Phân của $f(k)$
Một cách đơn giản, ta gọi:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

là Sai Phân (cấp 1) của $f(k)$ △

Tính chất 3.1 (cơ bản)–

$$\Delta(C) = 0 \quad (C = const) \tag{3.1}$$
$$\Delta[Cf(k)] = C\Delta f(k) \quad (C = const) \tag{3.2}$$
$$\Delta[f(k) + g(k)] = \Delta f(k) + \Delta g(k) \tag{3.3}$$

□

Định lý 3.1 (Tổng Sai Phân)–

$$\sum_{k=a}^{b} \Delta f(k) = f(k)\Big|_{k=a}^{b+1} = f(b+1) - f(a)$$

□

Chứng minh.

$$\sum_{k=a}^{b} \Delta f(k) = [f(a+1) - f(a)] + [f(a+2) - f(a+1)] + ...$$
$$+ [f(b+1) - f(b)]$$
$$= f(b+1) - f(a)$$

■

Ví dụ 3.1.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n}(2^{k+1} - 2^k) = \sum_{k=0}^{n} \Delta 2^k$$

Theo 3.1 ta có

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta 2^k = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1$$

△

Ví dụ 3.2. *Với số n là số nguyên dương*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta \left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right]\end{aligned}$$

Theo 3.1 ta có

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta \left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\Bigg|_{k=0}^{n+1} = 0$$

△

3.2 Sai Phân Từng Phần

Định lý 3.2 (SPTP)–

$$\sum_{k=a}^{b} g(k).\Delta f(k) = g(k)f(k)\Bigg|_{k=a}^{b+1} - \sum_{k=a}^{b} f(k+1).\Delta g(k)$$

□

Chứng minh.
Đặt $h(k) = g(k).f(k)$
Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta h(k) &= g(k+1).f(k+1) - g(k).f(k) \\ &= g(k+1).f(k+1) - g(k).f(k+1) + g(k).f(k+1) - g(k)f(k) \\ &= f(k+1)\Delta g(k) + g(k)\Delta f(k)\end{aligned}$$

Lấy tổng hai vế từ a đến b, ta được:

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} g(k).\Delta f(k) &= \sum_{k=a}^{b} \Delta h(k) - \sum_{k=a}^{b} f(k+1).\Delta g(k) \\ &= g(k)f(k)\Big|_{k=a}^{b+1} - \sum_{k=a}^{b} f(k+1).\Delta g(k) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Trường hợp $g(k) \equiv 1$ ta có được hệ quả là công thức 3.1
Vấn đề của việc tính tổng bằng phương pháp SPTP 3.2 là phải "nhìn thấy" sai phân $\Delta f(k)$ trong biểu thức lấy tổng mà đề bài cho. Đó quả thực là một điều không hề đơn giản và hết sức thú vị của phương pháp này!

3.2.1 Một số sai phân thường dùng

$$2^k = \Delta(2^k) \tag{3.4}$$

$$a^k = \Delta\left[\frac{a^k}{a-1}\right] \quad (a \neq 1) \tag{3.5}$$

$$mk^{\underline{m-1}} = \Delta\left(k^{\underline{m}}\right) \tag{3.6}$$

$$(-1)^k\binom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \tag{3.7}$$

$$\binom{n+k}{n} = \Delta\left[\binom{n+k}{n+1}\right] \tag{3.8}$$

3.3 Một số bài toán và Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 3.3. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+k}{k}$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{cases} \binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \Delta\left[\binom{n+k}{n+1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta(k) = k+1-k = 1 \end{cases}$$

Từ đó, áp dụng SPTP 3.2 ta được:

$$\begin{aligned} S &= k\binom{n+k}{n+1}\Bigg|_{k=1}^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n+k+1}{n+1} \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n}\Delta\left[\binom{n+k+1}{n+2}\right] \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n+1} - 1 - \left[\binom{2n+2}{n+2} - 1\right] \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n+2} \end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.4. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

△

Nhận xét. Trong biểu thức lấy tổng đã cho, cả hai thừa số đều có thể dễ dàng viết được dưới dạng sai phân. Vì vậy ta phải cân nhắc việc chọn một trong hai cách để tiếp cận.

Giả sử ta làm như sau:

Lời giải (Lời giải 1).

$$\begin{cases} (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} \\ \qquad\qquad = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] = \Delta f(k) \\ \\ \Delta g(k) = \Delta\left[\binom{n+k}{k}\right] = \binom{n+k+1}{k+1} - \binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{k+1} \end{cases}$$

Từ đó, áp dụng SPTP 3.2 ta được:

$$\begin{aligned} S &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n+k}{k}\Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k+1} \end{aligned}$$

Quan sát sự thay đổi của tổng sau 1 lần áp dụng SPTP thì ta thấy rằng, nếu đặt:

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k+m}\binom{n-m}{k}\binom{n+k}{k+m}$$

rồi áp dụng SPTP 3.2 như trên ta sẽ có:

$$\begin{cases} (-1)^{k+m}\binom{n-m}{k} = (-1)^{k+m}\binom{n-m-1}{k} - (-1)^{k+m-1}\binom{n-m-1}{k-1} \\ \qquad\qquad = \Delta\left[(-1)^{k+m-1}\binom{n-m-1}{k-1}\right] = \Delta f(k) \\ \\ \Delta g(k) = \Delta\left[\binom{n+k}{k+m}\right] = \binom{n+k+1}{k+m+1} - \binom{n+k}{k+m} = \binom{n+k}{k+m+1} \end{cases}$$

Theo 3.2 ta được:

$$\begin{aligned}
S_{(m,n)} &= (-1)^{k+m-1}\binom{n-m-1}{k-1}\binom{n+k}{k+m}\Bigg|_{k=0}^{n-m+1} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k+m}\binom{n-m-1}{k}\binom{n+k}{k+m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1}(-1)^{k+m+1}\binom{n-m-1}{k}\binom{n+k}{k+m+1} \\
&= S_{(m+1,n)}
\end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
S = S_{(0,n)} = S_{(1,n)} = \ldots = S_{(n,n)} &= \sum_{k=0}^{n-n}(-1)^{k+n}\binom{n-n}{k}\binom{n+k}{k+n} \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

■

Lời giải (2).

Ta có:

$$\begin{cases}
\dbinom{n+k}{n} = \dbinom{n+k+1}{n+1} - \dbinom{n+k}{n+1} = \Delta\left[\dbinom{n+k}{n+1}\right] = \Delta f(k) \\[2ex]
\Delta g(k) = \Delta\left[(-1)^k\dbinom{n}{k}\right] = (-1)^{k+1}\dbinom{n}{k+1} - (-1)^k\dbinom{n}{k} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = (-1)^{k+1}\dbinom{n+1}{k+1}
\end{cases}$$

Từ đó, áp dụng SPTP 3.2 ta được:

$$\begin{aligned}
S &= \binom{n+k}{n+1}(-1)^k\binom{n}{k}\Bigg|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+k+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\binom{n+1+k}{n+1}
\end{aligned}$$

Quan sát sự thay đổi của tổng sau 1 lần áp dụng SPTP thì ta thấy rằng, nếu đặt:

$$S'_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{n-k} \binom{m+k}{m}$$

rồi áp dụng SPTP 3.2 như trên ta sẽ có:

$$\begin{cases} \binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1} = \Delta\left[\binom{m+k}{m+1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta\left[(-1)^k \binom{m}{n-k}\right] = (-1)^{k+1}\binom{m}{n-k-1} - (-1)^k \binom{m}{n-k} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (-1)^{k+1}\binom{m+1}{n-k} \end{cases}$$

Theo 3.2 ta được:

$$\begin{aligned} S'_{(m,n)} &= \binom{m+k}{m+1}(-1)^k \binom{m}{n-k}\Bigg|_{k=0}^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{m+1}{n-k}\binom{m+1+k}{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m+1}{n-k}\binom{m+1+k}{m+1} \\ &= S'_{(m+1,n)} \end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} S = S'_{(n,n)} = S'_{(n-1,n)} = \ldots = S'_{(0,n)} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{0}{n-k}\binom{0+k}{0} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

(Chỉ có số hạng cuối cùng khác 0)

■

Nhận xét. Phải nói là ta đã gặp may mắn khi tiếp cận bài này theo cách thứ hai. Trong đa số trường hợp, việc "nhìn thấy" sai phân từ biểu thức lấy tổng mang yếu tố quyết định xem có thể giải bài toán theo phương pháp SPTP được không!

Ví dụ 3.5. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+1}$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n-1}{k} + (-1)^k \binom{n-1}{k-1} = \Delta \left[(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \right] \\ \Delta \left(\dfrac{1}{2k+1} \right) = \dfrac{1}{2k+3} - \dfrac{1}{2k+1} = -\dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)} \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho S, ta được

$$\begin{aligned} S &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} \binom{n-1}{k-1} \Bigg|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{-2}{(2k+3)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{2}{(2k+3)(2k+1)} \\ &= S_1 \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{n-1}{k} = (-1)^k \binom{n-2}{k} + (-1)^k \binom{n-2}{k-1} = \Delta \left[(-1)^{k-1} \binom{n-2}{k-1} \right] \\ \Delta \left(\dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)} \right) = \dfrac{2}{(2k+5)(2k+3)} - \dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)} \\ \qquad = -\dfrac{2.4}{(2k+5)(2k+3)(2k+1)} \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho S_1, ta được

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2(-1)^{k-1}}{(2k+3)(2k+1)}\binom{n-2}{k-1}\Bigg|_{k=0}^{n} \\ &\quad -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-2}{k}\frac{-2.4}{(2k+5)(2k+3)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{n-2}{k}\frac{2.4}{(2k+5)(2k+3)(2k+1)} \\ &= S_2 \end{aligned}$$

$\cdots$ Tiếp tục quá trình trên, cuối cùng ta thu được:

$$\begin{aligned} S = S_1 = ... = S_n &= \sum_{k=0}^{n-n}(-1)^k\binom{n-n}{k}\frac{2.4...(2n)}{(2k+2n+1)(2k+2n-1)...(2k+1)} \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.6. *Cho dãy Fibonacci*

$$\begin{cases} F_0 = 0; \quad F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

Chứng minh đẳng thức:

$$S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$$

△

Lời giải.
Để ý rằng: $(-1)^k.(-1)^k = 1$ nên ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k\binom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ \Delta\left[(-1)^k F_k\right] = (-1)^{k+1}F_{k+1} - (-1)^k F_k = (-1)^{k+1}F_{k+2} \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho S, ta được

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k \\
&= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k F_k \Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n-1}{k}(-1)^{k+1} F_{k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F_{k+2} \\
&= S_1
\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự áp dụng SPTP 3.2 cho S_1, ta được

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F_{k+2} \\
&= (-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}(-1)^k F_{k+2} \Big|_{k=0}^{n} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n-2}{k}(-1)^{k+1} F_{k+4} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} F_{k+4} \\
&= S_2
\end{aligned}$$

Sau n bước áp dụng SPTP 3.2, cuối cùng ta thu được:

$$S = S_1 = ... = S_n = \sum_{k=0}^{n-n} \binom{n-n}{k} F_{k+2n} = F_{2n}$$

■

Ví dụ 3.7 (dark templar). *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(-1)^k \binom{n}{k}}{k^2 + 3k + 2}$$

△

Lời giải.
Ta viết lại tổng đã cho dưới dạng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(-1)^k \binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{n+2}{k+2} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k+1}\right] \\ \Delta(k) = k+1-k = 1 \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)S &= \sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n+2}{k+2} \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n+1}{k+1} k\Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+1}{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n+1}{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n}{k+1}\right] \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n}{k+1}\Big|_{k=0}^{n} \\ &= -n \end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$S = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}$$ ■

Ví dụ 3.8. *Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+2k) = 2^n \cos^n(1)\cos(x+n)$$ △

Lời giải.
Một cách quen thuộc, ta phân tích:

$$\begin{cases} (-1)^k\binom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ \Delta\left[(-1)^k\cos(x+2k)\right] = (-1)^{k+1}\cos(x+2+2k)-(-1)^k\cos(x+2k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = (-1)^{k+1}2\cos(1)\cos(x+1+2k) \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được

$$\begin{aligned} S_{(n,x)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+2k) \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\cos(x+2k)\Big|_{k=0}^{n+1} \\ &\quad -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}(-1)^{k+1}2\cos(1)\cos(x+1+2k) \\ &= 2\cos(1)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}cos(x+1+2k) \\ &= 2\cos(1)S_{(n-1,x+1)} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S_{(n,x)} &= 2\cos(1)S_{(n-1,x+1)} = 2^2\cos^2(1)S_{(n-2,x+2)} = \ldots = 2^n\cos^n(1)S_{(0,x+n)} \\ &= 2^n\cos^n(1)\cos(x+n) \end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.9. *Với các số nguyên dương m, n*
Đặt:

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n}2^{n-k}\binom{m+k}{k}$$

Chứng minh rằng:

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{m+n+1}{m+1+k}$$

Từ kết quả đó, chứng minh:

$$S_{(m,n)} + S_{(n,m)} = 2^{m+n+1}$$

△

Nhận xét. Bài toán này là sự kết hợp giữa các phép biến đổi tổng đại số và áp dụng SPTP 3.2.

Lời giải.

- Từ đề bài ta có: (đảo chiều lấy tổng)

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{m+n-k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{m+n-k}{m}$$

Phân tích sai phân:

$$\begin{cases} \binom{m+n-k}{m} = \binom{m+n+1-k}{m+1} - \binom{m+n-k}{m+1} \\ \qquad\qquad\;\; = -\Delta\left[\binom{m+n+1-k}{m+1}\right] \\ \Delta(2^k) = 2^k \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được

$$\begin{aligned} S_{(m,n)} &= -2^k \binom{m+n+1-k}{m+1}\Bigg|_{k=0}^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{m+n-k}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{m+n-k}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m+1} + S_{(m,n,1)} \end{aligned}$$

Áp dụng SPTP 3.2 hoàn toàn tương tự cho tổng $S_{(m,n,1)}$

$$\begin{aligned}
S_{(m,n,1)} &= -2^k\binom{m+n+1-k}{m+2}\Big|_{k=0}^{n} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k\binom{m+n-k}{m+2} \\
&= \binom{m+n+1}{m+2} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k\binom{m+n-k}{m+2} \\
&= \binom{m+n+1}{m+2} + S_{(m,n,2)}
\end{aligned}$$

...Thực hiện liên tiếp quá trình trên đến khi

$$\begin{aligned}
S_{(m,n,n-1)} &= \binom{m+n+1}{m+n} + \sum_{k=0}^{n-n} 2^k\binom{m+n-k}{m+n} \\
&= \binom{m+n+1}{m+n} + \binom{m+n+1}{m+n+1}
\end{aligned}$$

Từ các đẳng thức trên, suy ra:

$$\begin{aligned}
S_{(m,n)} &= \binom{m+n+1}{m+1} + \binom{m+n+1}{m+2} + ... + \binom{m+n+1}{m+n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{m+1+k}
\end{aligned}$$

- Như vậy ta có:

$$\begin{aligned}
S_{(m,n)} + S_{(n,m)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{m+1+k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n+1}{n+1+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n+1}{n+1+k} \\
&\quad \text{(Đối xứng)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{k} \\
&\quad \text{(Đảo chiều)} \qquad \text{(Tịnh tiến } n+1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{k} \quad \text{(Gộp lại)} \\
&= 2^{m+n+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Qua những ví dụ trên chắc hẳn các bạn đã được thấy việc áp dụng linh hoạt phương pháp SPTP có hiệu quả mạnh như thế nào. SPTP sẽ biến đổi được từ một tổng tổ hợp phức tạp trở thành một tổng đơn giản hơn và đương nhiên cũng dễ tính toán và tìm ra kết quả hơn.
Bên cạnh việc tính toán thông thường, một số bài toán ta có thể dễ dàng tìm được dạng khái quát hơn từ đề bài, khi quan sát được sự thay đổi của tổng mới sau một bước áp dụng SPTP.
Sau đây là một số bài toán khó, được áp dụng phương pháp SPTP 3.2 để giải.

Bài toán 3.1. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \qquad \triangle$$

Nhận xét. Đối với bài toán này ta rất khó đoán biết được đâu sẽ là $\Delta f(k)$ đâu sẽ là $g(k)$ trong biểu thức lấy tổng.
Trong đa số trường hợp như vậy, ta phải tiếp cận bài toán bằng cách giả tính sai phân $\Delta f(k)$ trước!
$f(k)$ có thể là một thành phần (phức tạp nhất) hoặc toàn bộ biểu thức lấy tổng.
Trong trường hợp này ta sẽ tính Sai phân của cả biểu thức lấy tổng.

Lời giải.
Ta có:

$$\Delta\left[\frac{(-1)^k\dbinom{4n}{2k}}{\dbinom{2n}{k}}\right] = \frac{(-1)^{k+1}\dbinom{4n}{2k+2}}{\dbinom{2n}{k+1}} - \frac{(-1)^k\dbinom{4n}{2k}}{\dbinom{2n}{k}}$$
$$= (-1)^{k+1}\left[\frac{\dfrac{(4n-2k)(4n-2k-1)}{(2k+2)(2k+1)}\dbinom{4n}{2k}}{\dfrac{2n-k}{k+1}\dbinom{2n}{k}} + \frac{\dbinom{4n}{2k}}{\dbinom{2n}{k}}\right]$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}4n\dbinom{4n}{2k}}{(2k+1)\dbinom{2n}{k}}$$

Như vậy là sau khi ta lấy sai phân của toàn bộ biểu thức lấy tổng ta được một biểu thức mới, "thừa ra" một nhân tử $\left(-\dfrac{4n}{2k+1}\right)$

Nhưng nếu ta viết:

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \frac{-2k-1}{4n}\Delta\left[\frac{(-1)^k\dbinom{4n}{2k}}{\dbinom{2n}{k}}\right]$$

thì không ổn, vì sao?
Vì khi áp dụng SPTP thì biểu thức trong dấu Δ sẽ thay k bởi $k+1$,

khi đó $\binom{2n}{k+1} = 0$ khi $k = 2n$ và phân thức khi đó sẽ không xác định!
Để tránh điều đó xảy ra ta cần phải tính tách riêng số hạng cuối.
Ta có:

$$S = 1 + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-2k-1}{4n} \Delta \left[\frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \right]$$

Dễ dàng tính được $\Delta \left(\frac{-2k-1}{4n} \right) = -\frac{1}{2n}$
Bây giờ, áp dụng SPTP 3.2 thì ta được:

$$S = 1 + \left[\frac{-2k-1}{4n} \cdot \frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \right] \Bigg|_{k=0}^{2n} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-1}{2n} \cdot \frac{(-1)^{k+1} \binom{4n}{2k+2}}{\binom{2n}{k+1}}$$

$$= 1 + \frac{-4n-1}{4n} - \frac{-1}{4n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1} \binom{4n}{2k+2}}{\binom{2n}{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \quad \text{(Tịnh tiến 1)}$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot S - \frac{1}{2n} \quad \text{(Thêm bớt số hạng } k=0\text{)}$$

Từ đó suy ra

$$S = \frac{-1}{2n-1}$$

■

Bài toán 3.2. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

△

Nhận xét. Bài này ta không thể đem cả biểu thức lấy tổng mà sai phân được, khi đó tổng thu được còn phức tạp hơn nhiều!
Điều tương tự cũng xảy ra khi ta đem sai phân các thành phần.
Vậy ta phải làm thế nào?
Ý tưởng là ta sẽ biến đổi đề bài để làm xuất hiện một biểu thức sai phân quen thuộc: $(-1)^k\binom{n}{k}$

Lời giải.
Để ý rằng:

$$(2n)! = [1.3...(2n-1)].[2.4...(2n)] = 2^n.n!(2n-1)!! \quad (n > 0)$$

Còn nếu $n = 0$ thì: $1 = 0! = (2.0)! = 2^0.0!(2.0-1)!! = (-1)!!$
Ta viết lại tổng đã cho dưới dạng:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!(2n-2k)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^n.n!(2n-1)!!2^{n-k}.(n-k)!(2n-2k-1)!!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^n(2k-1)!!(2n-2k-1)!!n!}{k!(n-k)!n!}\\
&= \frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!\\
&= \frac{2^n}{n!}A
\end{aligned}$$

Với tổng:

$$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!$$

Ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{n}{k} = \Delta \left[(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \right] \\ \Delta \left[(-1)^k (2k-1)!!(2n-2k-1)!! \right] = (2n)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-3)!! \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A, ta được:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k(2k-1)!!(2n-2k-1)!!\Big|_{k=0}^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}(2n)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-3)!! \\ &= (2n)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-3)!! \\ &= (2n)A_1 \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{n-1}{k} = \Delta \left[(-1)^{k-1} \binom{n-2}{k-1} \right] \\ \Delta \left[(-1)^k (2k-1)!!(2n-2k-3)!! \right] = \\ \qquad\qquad = (2n-2)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-5)!! \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A_1, ta được:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}(-1)^k(2k-1)!!(2n-2k-3)!!\Big|_{k=0}^{n} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-2}{k}(2n-2)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-5)!! \\ &= (2n-2)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(2k-1)!!(2n-2k-5)!! \\ &= (2n-2)A_2 \end{aligned}$$

...Tiếp tục quá trình trên cho đến khi, ta được:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-n} \binom{n-n}{k} (2k-1)!!(2n-2k-(2n+1))!! = 1$$

Từ các đẳng thức trên suy ra:

$$A = (2n)(2n-2)...2.A_n = 2^n.n!$$

Vậy ta có:

$$S = \frac{2^n}{n!} \cdot A = 4^n$$

■

Bài toán 3.3. *Với các số tự nhiên m, n thoả mãn $n \geq m$*
Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2n}{2k} \binom{n-k}{m-k} = \frac{2^{2m}.n(n+m-1)!}{(2m)!(n-m)!}$$

△

Lời giải.
Tư tưởng bài này hoàn toàn tương tự bài toán trên.
Ta phân tích đề bài dưới dạng:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2n}{2k} \binom{n-k}{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(2n)!(n-k)!}{(2k)!(2n-2k)!(n-m)!(m-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(2n)!(n-k)!m!}{2^k.k!(2k-1)!!2^{n-k}.(n-k)!(2n-2k-1)!!(n-m)!(m-k)!m!} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n.m!(n-m)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n.m!(n-m)!} \cdot A
\end{aligned}$$

Xét tổng:

$$A = \sum_{k=0}^{m} \frac{\dbinom{m}{k}}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}$$

Ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k \dbinom{m}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\dbinom{m-1}{k-1}\right] \\ \Delta\left[\dfrac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}\right] = \\ \qquad = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!!(2n-2k-3)!!} - \dfrac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!} \\ \qquad = \dfrac{(-1)^{k+1}(2n)}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!} \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A, ta được:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}\Bigg|_{k=0}^{m+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m}\left[(-1)^k\binom{m-1}{k} \cdot \frac{(-1)^{k+1}(2n)}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\right] \\ &= (2n)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\dbinom{m-1}{k}}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!} \\ &= (2n)A_1 \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{m-1}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{m-2}{k-1}\right] \\ \Delta\left[\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\right] = \\ \qquad = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!!(2n-2k-3)!!} - \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!} \\ \qquad = \dfrac{(-1)^{k+1}(2n+2)}{(2k+3)!!(2n-2k-1)!!} \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A_1, ta được:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{k-1}\binom{m-2}{k-1} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\Bigg|_{k=0}^{m} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-1}\left[(-1)^k\binom{m-2}{k} \cdot \frac{(-1)^{k+1}(2n+2)}{(2k+3)!!(2n-2k-1)!!}\right] \\ &= (2n+2)\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\binom{m-2}{k}}{(2k+3)!!(2n-2k-1)!!} \\ &= (2n+2)A_2 \end{aligned}$$

...Tiếp tục quá trình trên cho đến khi, ta được:

$$A_m = \sum_{k=0}^{m-m}\frac{\binom{m-m}{k}}{(2k+2m-1)!!(2n-2k-1)!!} = \frac{1}{(2m-1)!!(2n-1)!!}$$

Từ các đẳng thức trên suy ra:

$$A = (2n)(2n+2)...(2n+2m-2).A_m = \frac{2^m.n(n+1)...(n+m-1)}{(2m-1)!!(2n-1)!!}$$

Vậy ta có:

$$S = \frac{(2n)!}{2^n.m!(n-m)!} \cdot A = \frac{(2n)!2^m.n(n+1)...(n+m-1)}{2^n.m!(n-m)!(2m-1)!!(2n-1)!!}$$
$$= \frac{2^{2m}.n(n+m-1)!}{(2m)!(n-m)!}$$ ■

Bài toán 3.4. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$ △

Nhận xét. Đây là một bài toán rất khó! Tưởng như ngoài cách giải bằng hàm sinh và kiến thức về chuỗi hàm luỹ thừa, thì không có một phương pháp sơ cấp nào có thể tiếp cận được bài này!
Tác giả đã khá "may mắn" khi tìm được một lời giải bằng SPTP 3.2 sau đây:

Lời giải.
Trước hết ta đưa tổng cần tính về dạng:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} n!(2k)!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} n!2^k k!(2k-1)!!2^{n-k}(n-k)!(2n-2k-1)!!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$
$$= \frac{2^n.n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2k+1}$$

Như vậy đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2k+1}=\frac{2^{3n}.(n!)^3}{(2n+1)!}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}&\Delta\left[\binom{n-1}{k-1}(2k-3)!!(2n-2k+1)!!\right]=\\&=\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!-\binom{n-1}{k-1}(2k-3)!!(2n-2k+1)!!\\&=-\binom{n}{k}(2k-3)!!(2n-2k-1)!!\end{aligned}$$

Như vậy thừa số còn "sót" lại là $\left(-\dfrac{2k-1}{2k+1}\right)$

với:

$$\Delta\left(-\frac{2k-1}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2k+3}+\frac{2k-1}{2k+1}=-\frac{4}{(2k+1)(2k+3)}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được:

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2k+1}\\&=\binom{n-1}{k-1}(2k-3)!!(2n-2k+1)!!\left(-\frac{2k-1}{2k+1}\right)\Bigg|_{k=0}^{n+1}\\&\quad-\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!(-4)}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2k+1)(2k+3)}\end{aligned}$$

Quan sát sự thay đổi của tổng thu được, sau một lần áp dụng SPTP, ta nhận thấy dạng tổng quát của tổng cần tính là:

$$S_{(p,n)} = \sum_{k=0}^{n-p} \frac{[(2p)!!]^2 \binom{n-p}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2p-1)!! \prod\limits_{j=0}^{p}(2k+1+2j)}$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned}
&\Delta\left[\binom{n-p-1}{k-1}(2k-3-2p)!!(2n-2k+1)!!\right] = \\
&= \binom{n-p-1}{k}(2k-1-2p)!!(2n-2k-1)!! \\
&\quad - \binom{n-p-1}{k-1}(2k-3-2p)!!(2n-2k+1)!! \\
&= (2k-3-2p)!!(2n-2k-1)!!\left[\binom{n-p-1}{k}(2k-1-2p)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \binom{n-p-1}{k-1}(2n-2k+1)\right] \\
&= -(2p+1)\binom{n-p}{k}(2k-3-2p)!!(2n-2k-1)!!
\end{aligned}$$

Còn lại:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\prod_{j=0}^{p}\frac{2k-1-2j}{2k+1+2j}\right] &= \prod_{j=0}^{p}\frac{2k+1-2j}{2k+3+2j} - \prod_{j=0}^{p}\frac{2k-1-2j}{2k+1+2j} \\
&= \frac{(2p+2)^2\prod\limits_{j=0}^{p-1}(2k-1-2j)}{\prod\limits_{j=0}^{p+1}(2k+1+2j)}
\end{aligned}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được:

$$S_{(n,p)} = \left[-\frac{[(2p)!!]^2\binom{n-p-1}{k-1}}{(2p-1)!!(2p+1)}(2k-3-2p)!!(2n-2k+1)!! \cdot \prod_{j=0}^{p}\frac{2k-1-2j}{2k+1+2j}\right]\Bigg|_{k=0}^{n-p+1}$$
$$-\sum_{k=0}^{n-p}\left[\frac{[(2p)!!]^2(-1)\binom{n-p-1}{k}(2k-1-2p)!!(2n-2k-1)!!}{(2p-1)!!(2p+1)} \cdot \frac{(2p+2)^2\prod_{j=0}^{p-1}(2k-1-2j)}{\prod_{j=0}^{p+1}(2k+1+2j)}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-p-1}\frac{[(2p+2)!!]^2\binom{n-p-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2p+1)!!\prod_{j=0}^{p+1}(2k+1+2j)}$$
$$= S_{(p+1,n)}$$

Từ đó suy ra:

$$S = S_{(0,n)} = S_{(1,n)} = \ldots = S_{(n,n)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-n}\frac{[(2n)!!]^2\binom{n-n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2n-1)!!\prod_{j=0}^{n}(2k+1+2j)}$$
$$= \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!}$$
$$= \frac{[(2n)!!]^3}{(2n+1)!!(2n)!!}$$
$$= \frac{2^{3n}(n!)^3}{(2n+1)!} \qquad \blacksquare$$

Nhận xét. Luyện tập sử dụng phương pháp Sai Phân Từng Phần giúp cho bạn có nhiều kỹ năng biến đổi Đại Số và mỗi khi nhìn thấy biểu thức tổng bạn sẽ tự tin và đỡ choáng ngợp hơn!
Bên cạnh đó SPTP cũng như tương tự như Tích Phân Từng Phần vậy, đều có những ưu nhược điểm của nó! Nếu không tinh ý, bạn dễ rơi vào vòng "luẩn quẩn" của tổng sau khi lấy SPTP, hoặc sau khi lấy SPTP tổng thu được còn khó hơn!
Nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là bạn phải "nhìn thấy" được Sai Phân trong biểu thức lấy tổng đã cho, giống như kiểu bạn phải tìm được nguyên hàm của $v(x)$ để cho $\mathrm{d}(V(x)) = v(x)\mathrm{d}x$ sau đó mới áp dụng được công thức Tích Phân Từng Phần. Việc làm này không phải lúc nào cũng thực hiện được!
Để kết thúc phần này, mời các bạn cùng luyện tập với các bài tập sau:

3.4 Bài tập tự luyện

BÀI 1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{n+k} = \left[n\binom{2n}{n}\right]^{-1}$$

BÀI 2. Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+1)(k+3)}$$

BÀI 3. (dark templar) Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{4k^2-1}$$

BÀI 4. Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}(2k^2+5k+2)}{k+3}$$

BÀI 5. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4^n}{(2n+3)\binom{2n+1}{n}}$$

BÀI 6. Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k) \binom{2n}{k}$$

BÀI 7. Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \frac{2k^2+k}{n+k+1}$$

BÀI 8. Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n+k}{2k}$$

BÀI 9. Với số nguyên dương n và số thực α. Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \binom{n}{k}$$

BÀI 10. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{2k}{k} \binom{2n+1}{k+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

Bài 11. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}=2^{2n}\binom{2n}{n}$$

Bài 12. Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+2k)$$

Bài 13. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\cos[2(n-k)x]=4^n\cos^{2n}(x)$$

Bài 14. Cho dãy Fibonacci

$$\begin{cases}F_0=0; \quad F_1=1\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n\geq 0)\end{cases}$$

Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{3k}=2^nF_{2n}$$

Chương

4

Sử dụng hàm sinh chứng minh đẳng thức tổ hợp

4.1 Thay lời mở đầu 72
4.2 Những biến đổi đại số thường gặp với $\binom{n}{k}$ 74
4.3 Những dạng khai triển hàm sinh cần biết 75
4.4 Những định lý cơ bản trong tính tổng dùng hàm sinh 76
4.5 Bài tập minh họa 81
4.6 Các bài toán không mẫu mực 108
4.7 Bài tập tự luyện 121

Bùi Đức Lộc (supermember)
Lê Kim Nhã (gogo123)

Tóm tắt nội dung

Hàm sinh (General Funtion), được biến đến như là một công cụ rất mạnh trong các bài toán Tổ Hợp và Rời Rạc. Rất nhiều bài toán tổ hợp, rời rạc khó, khi đưa về ngôn ngữ hàm sinh thì được giải quyết một cách nhanh chóng và sáng tỏ. Hàm sinh có rất nhiều ứng dụng, đặc biệt dùng để tính tổng. Để bạn đọc hiểu rõ phương pháp và vai trò của hàm sinh trong các bài toán chứng minh ĐTTH, người viết sẽ từng bước nêu lên các bài toán, ví dụ, từ đơn giản đến phức tạp. Qua

mỗi ví dụ sẽ là những đúc kết ngắn gọn về đặc điểm và tính chất của từng bài toán...

4.1 Thay lời mở đầu

Câu chuyện số 1

Cách đây khoảng hơn 2 tháng (tháng 11/2012), trên VMF xuất hiện bài toán sau:

Bài toán 4.1. *Chứng minh rằng:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

△

Bài Toán này được người gửi đưa vào box THPT và nó đã được một số thành viên VMF dành cho sự quan tâm đặc biệt. Tuy nhiên, hơn 1 tuần sau đó thì bài này mới có lời giải đầu tiên sử dụng so sánh hệ số trong khai triển đa thức và sau đó; thành viên perfectstrong có đưa thêm 1 lời giải nữa sử dụng nội suy Lagrange. Cả 2 lời giải này đều không làm hài lòng người viết chuyên đề.

Thực ra; nếu bạn là một học sinh học Toán ở mức độ bình thường; có thể có một giờ rảnh rỗi ở nhà thì sẽ không khó để tìm ra 1 lời giải rất *"sơ cấp-cơ bản-ngắn gọn"* dựa vào khai triển đa thức: $\left(1-x^2\right)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$. Tuy nhiên, có khi nào bạn tự đặt mình vào hoàn cảnh đối diện bài toán trên trong kỳ thi kiểu như Đại Học: chỉ có 20 phút để làm bài này thì sẽ ra sao? Bài toán này đâu khó đến mức chiếm được vị trí chốt điểm trong đề của bài BĐT? Không lẽ các bạn chấp nhận quan điểm: "Tìm ra đa thức để có khai triển phù hợp là sự may mắn"? Thực sự thì đa thức $\left(1-x^2\right)^{2n}$ có được là do may mắn hay là từ đâu? Suy nghĩ thêm về bài này thì có thể thấy nó có nét hao hao giống bài toán rất quen thuộc: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ với lời giải dựa vào khai triển $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

Câu chuyện số 2

Cách đây cũng khoảng hơn 2 tháng (tháng 11/2012), tác giả Dark Templar có đưa ra bài toán sau:

Bài toán 4.2. *Với F_n là số Fibonacci thứ n. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

△

Tác giả yêu cầu một lời giải dựa vào đại số thuần tuý, và người viết đã để mở vấn đề này trong một thời gian để có thể tiết lộ nó trong chuyên đề này. Thực ra, bài toán này cũng đã rất cũ, có thể điểm ra 1 vài vũ khí để tiêu diệt nó: tìm công thức truy hồi, sử dụng phép đặt quân domino... Tuy nhiên, nếu để ý kỹ là hàm sinh cho dãy Fibonacci sẽ là đơn giản để thiết lập. Vậy từ hàm sinh đó, tại sao ta không bước thêm một bước, đó là chứng minh $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$ là hệ số của x^{n+1} trong khai triển hàm sinh đó?

Thật vậy, theo cái cách ta thường làm, khi dự đoán ra hàm sinh tương ứng để chứng minh đẳng thức tổ hợp, thường ta biến đổi hàm sinh đó theo 2 cách khác nhau - mục đích là để *mô tả* hệ số của x^k $(k \in \mathbb{N})$ theo 2 cách khác nhau. Ở đây rõ ràng ta đã có 1 số vốn khá lớn khi hàm sinh tương ứng và 1 cách mô tả thì đã tìm ra rồi. Vậy chỉ còn một bước *khá ngắn* là tìm thêm một cách để mô tả nó mà thôi.

Trên đây là những điều trăn trở đầu tiên của tác giả khi tiếp cận chuyên đề này. Tác giả muốn chia sẻ sự trăn trở đó cho những người sẽ xem, sẽ nhận xét chuyên đề này; để từ đó có những sự hứng thú nhất định trong việc mở những cánh cửa mà tác giả đặt cho các bạn trong những phần tiếp theo. Nào, tạm quên và trước hết hãy trang bị cho mình vài thứ...

4.2 Những biến đổi đại số thường gặp với $\binom{n}{k}$

Tích chéo của 2 hệ số tổ hợp

[Tập con của tập con]

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$$

Giảm tử-mẫu của hệ số tổ hợp

[quy tắc hút]

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Hệ số tổ hợp viết ở dạng truy hồi

[Công thức Pascal]

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

Hệ số tổ hợp kèm phân số

$$\begin{aligned}\binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k} &= \binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\\ \binom{x+k}{k}\frac{1}{x+k} &= \frac{1}{x}\left[\binom{x+k}{k}-\binom{x+k-1}{k-1}\right]\end{aligned}$$

Nhận xét. Từ nay, ta cần hiểu tổ hợp chập ở dạng suy rộng của nó: Với x là số thực tuỳ ý thì

$$\binom{x}{k}=\begin{cases}1 & \text{với } k=0\\ \dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!} & \text{với } k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

4.3 Những dạng khai triển hàm sinh cần biết

Hệ số tổ hợp đơn giản

$$G\left(\binom{s}{k}a^k\right) = (1+at)^s \quad (k \in \mathbb{N})$$

Hệ số tổ hợp với mẫu số là hằng số

$$G\left(\binom{p+k}{m}\right) = \frac{t^{m-p}}{(1-t)^{m+1}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hệ số tổ hợp tăng dần đều nhau ở tử và mẫu

$$G\left(\binom{x+k}{k}a^k\right) = \frac{1}{(1-at)^{x+1}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Hệ số tổ hợp trung tâm

$$G\left(\binom{2k}{k}x^k\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4xt}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Dãy Fibonacci

$$G(F_n) = \frac{t}{1-t-t^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dãy Fibonacci chỉ số chẵn

$$G(F_{2n}) = \frac{t}{1-3t+t^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Tức là hệ số của x^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của hàm $\dfrac{t}{1-3t+t^2}$ bằng F_{2n}.

Dãy Fibonacci chỉ số lẻ

$$G\left(F_{2n+1}\right) = \frac{1-t}{1-3t+t^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Tức là hệ số của x^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của hàm $\dfrac{1-t}{1-3t+t^2}$ bằng F_{2n+1}.

Số Catalan

$$G\left(\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\right) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Một số dạng khác

- $G\left(\dfrac{a^n}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{1-at}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $G\left(\dbinom{r+2k}{k}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^r \quad (r, k \in \mathbb{N})$
  (Chứng minh bằng quy nạp)
- $G(k^p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \left\{ {p \atop k} \right\} \frac{k!t^k}{(1-t)^{k+1}}$ (trong đó, $\left\{ {p \atop k} \right\}$ là số Stirling loại 2)
  Chứng minh đẳng thức này có thể dựa vào đẳng thức: $k^p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j! \left\{ {p \atop j} \right\}$, vốn rất quen thuộc của số Stirling loại 2. Tác giả không muốn đề cập đến chứng minh tại đây vì nó tương đối dài và không đi thẳng vào chuyên đề

4.4 Những định lý cơ bản trong tính tổng dùng hàm sinh

Quy ước: *ký hiệu $[t^n]f(t)$ được hiểu là hệ số của t^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của hàm số $f(t)$*

ĐỊNH LÝ 4.1 (ĐỊNH LÝ SO SÁNH HỆ SỐ (CONVOLUTION))–

$$[t^n]\, f(t)\, g(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[t^k\right] f(t) \,.\, \left[y^{n-k}\right] g(y)$$

□

Đây là định lý ứng dụng nhiều nhất trong giải bài toán ĐTTH dùng hàm sinh. Chẳng hạn như sau:

$$[t^n]\, \frac{1}{(1+rt)(1+st)} = \frac{r^{n+1}-s^{n+1}}{r-s}(-1)^n$$

Công thức này đôi khi rất hữu ích khi tránh cho ta khỏi phải tính toán quá phức tạp.

ĐỊNH LÝ 4.2 (ĐỊNH LÝ A)–

$$\sum_k \binom{n+ak}{m+bk} z^{n-m+(a-b)k} f_k = [t^n]\, \frac{t^m}{(1-zt)^{m+1}} f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-zt)^b}\right) \quad (b>a)$$

(f_k là hệ số của x^k trong khai triển thành luỹ thừa hình thức của hàm f)
Do trong đa số các trường hợp thì xét với $z=1$ nên ta thường dùng định lý ở dạng:

$$\sum_k \binom{n+ak}{m+bk} f_k = [t^n]\, \frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-zt)^b}\right) \quad (b>a)$$

□

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh định lý 4.2 ở dạng tổng quát.

$$\begin{aligned}
&\binom{n+ak}{m+bk} z^{n-m+(a-b)k}\\
&= \binom{n+ak}{n+ak-m-bk} z^{n-m+(a-b)k}\\
&= \binom{-n-ak+n+ak-m-bk-1}{n+ak-m-bk} (-z)^{n-m+(a-b)k}\\
&= \binom{-m-bk-1}{n+ak-m-bk} (-z)^{(n-m)+(a-b)k}\\
&= \left[t^{(n-m)+(a-b)k}\right] \frac{1}{(1-zt)^{m+bk+1}}\\
&= [t^n] \frac{t^m}{(1-zt)^{m+1}} \left(\frac{t^{b-a}}{(1-zt)^b}\right)^k \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Nhận xét. Bây giờ thử dùng viên kim cương này để cắt cái bánh số 2 nhé.

Bài toán 4.3 (Bài toán 4.2). *Chứng minh rằng* $\forall n \geq 1$*:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1} \qquad \triangle$$

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} &\stackrel{A}{=} [t^n] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{1-u} \middle| u = \frac{t^2}{1-t}\right]\\
&= [t^n] \frac{1}{1-t-t^2} = \left[t^{n+1}\right] \frac{t}{1-t-t^2} = F_{n+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Còn gì để nói ngoài 2 từ "không tưởng" cho lời giải trên ?

Tuy nhiên, ngay đến tác giả cũng không thích phải chứng minh lại định lý A (4.2). Nên nếu cần dùng, các bạn hãy dùng tư tưởng lời giải trên để lách qua quá trình chứng minh lại định lý, cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \left[t^{n+1}\right] \frac{t}{1-t-t^2} = [t^n] \frac{1}{1-t-t^2} = [t^n] \frac{1}{1-t} \frac{1}{1-\dfrac{t^2}{1-t}} \\
&= [t^n] \frac{1}{1-t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(1-t)^k} = [t^n] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(1-t)^{k+1}} \\
&= [t^n] \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{t^{2k}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-2k+k+1-1}{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k}
\end{aligned}$$

(Hơi dài hơn 1 chút nhưng xem ra sơ cấp hơn 1 chút, dù bản chất là như nhau)
Rõ ràng: ở đây ta đã tận dụng tối đa được lợi thế ban đầu là có sẵn hàm sinh tương ứng của dãy Fibonacci. Định lý A (4.2) này còn chỉ ra cách *mô tả* một vế của ĐTTH

Định lý 4.3 (Định lý B)–

$$\sum_k \binom{n+ak}{m+bk} f_k = [t^m] (1+zt)^n f\left(t^{-b} (1+zt)^a\right) \quad (b<0)$$

Do trong đa số các trường hợp thì xét với $z=1$ nên ta thường dùng định lý ở dạng:

$$\sum_k \binom{n+ak}{m+bk} f_k = [t^m] (1+t)^n f\left(t^{-b} (1+t)^a\right) \quad (b<0)$$

□

Chứng minh.

$$\binom{n+ak}{m+bk} z^{m+bk} = \left[t^{m+bk}\right] (1+zt)^{n+ak} = [t^m] (1+zt)^n \left(t^{-b} (1+zt)^a\right)^k$$

■

Nhận xét. Đôi khi ta cần cân nhắc lựa chọn giữa 2 định lý A (4.2), B (4.3) , vì đôi khi cả 2 điều kiện áp dụng đều thoả mãn.
Hãy xem con dao này cắt cái bánh đầu tiên thế nào nhé!

Bài toán 4.4 (Bài toán 4.1). *Chứng minh rằng:*$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

△

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \binom{2n}{k} \\ &\overset{B}{=} \left[t^{2n}\right] (1+t)^{2n} \left[(1-u)^{2n} \Big| u = t \right] \\ &= \left[t^{2n}\right] \left(1-t^2\right)^{2n} = (-1)^n \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

■

Nhận xét. Rất ấn tượng với cũng chỉ hơn một dòng!
Quan trọng hơn là từ lời giải không sơ cấp trên, ta lại được gợi ý về lời giải rất sơ cấp. Để ý kỹ lời giải trên thì rõ ràng là khai triển

$$(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$$

đã ở ngay trước mắt ta. Rõ ràng không có gì là may mắn cả!
Tất nhiên là với một công cụ mạnh như định lý trên thì ta đã được tiếp sức rất nhiều, nhưng điều đó không có nghĩa là không cần sự khéo léo và xoay sở. Chẳng hạn: nếu áp dụng thẳng định lý A cho bài toán trên thì bài toán lại đi ngay vào ngõ cụt!
Các bạn hãy sử dụng định lý này để làm luôn bài toán rất quen thuộc:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

ĐỊNH LÝ 4.4 (ĐỊNH LÝ E (PHÉP CHUYỂN ĐỔI EULER))–

$$\sum_k \binom{n}{k} z^{n-k} f_k = [t^n] \frac{1}{1-zt} f\left(\frac{t}{1-zt}\right)$$

□

ĐỊNH LÝ 4.5 (ĐỊNH LÝ P (FORMULA OF PARTIAL SUMS))–

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = [t^n] \frac{f(t)}{1-t}$$

□

4.5 Bài tập minh họa

Ví dụ 4.1. *Chứng minh rằng* $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} 3^{n-2k}$$

△

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k} &\overset{E}{=} [t^n] \frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-4u}} \mid u = \frac{t}{1-t}\right] \\
&= [t^n] \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1-5t)}} \\
&= [t^n] \frac{1}{\sqrt{1-6t+5t^2}} \\
&= [t^n] \frac{1}{1-3t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4\dfrac{t^2}{(1-3t)^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [t^n]\frac{1}{1-3t}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{t^{2k}}{(1-3t)^{2k}}\\
&= [t^n]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{t^{2k}}{(1-3t)^{2k+1}}\\
&= [t^n]\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}\frac{t^{2k}}{(1-3t)^{2k+1}}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}3^{n-2k}\binom{2k+1+n-2k-1}{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}3^{n-2k}\binom{n}{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}3^{n-2k}\binom{n}{2k}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Bài này có thể có cách làm khác dựa trên hàm sinh đa thức. Đó là cách xét đa thức $(x^2+3x+1)^n$. Chú ý là ta có 2 cách để khai triển đa thức này thông qua nhị thức Newton: $\left(x^2+3x+1\right)^n = \left((x+1)^2+x\right)^n = \left((x^2+1)+3x\right)^n$. Cụ thể xét hệ số nào, xin được nhường cho bạn đọc. Đây cũng là 1 cách thú vị, tuy nhiên theo quan điểm tác giả, thì lời giải ban đầu như trên là tự nhiên hơn. Ngoài ra, với cách giải hoàn toàn tương tự, ta còn giải được bài toán sau:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k} \quad (n \geq 1)$$

Ví dụ 4.2. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$$

△

Lời giải.
Tham khảo lời giải tại địa chỉ

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/65986-cm-sum-k0n-c-2kkc-2n-2kn-k4n/

(Bài viết số 2-3)
Xét khai triển hàm:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} (-x)^n \text{ với } |x| < 1$$

Trong đó

- $\binom{\frac{-1}{2}}{n} = 1$ nếu $n = 0$
- $\binom{\frac{-1}{2}}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$

$$= \frac{(-1)^n n! 2^n (2n-1)!!}{4^n (n!)^2} = \frac{(-1)^n (2n)!!(2n-1)!!}{4^n (n!)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} \text{ nếu } n \geq 1$$

Suy ra $\mathcal{A}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $a_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$

Ta có

$$(\mathcal{A}(x))^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

Nên nếu vận dụng tính chất của 2 chuỗi số bằng nhau, ta có thể đồng nhất hệ số x^n như sau:

$$\begin{aligned}1 = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^{n-k}}\binom{2n-2k}{n-k}\\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\\ \Rightarrow 4^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\end{aligned}$$

Và ta có điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Đây là bài Toán rất cơ bản - đẹp và tiêu biểu cho việc áp dụng hàm sinh chứng minh ĐTTH. Lời giải dùng hàm sinh dựa trên khai triển liên quan đến $\binom{2k}{k}$ của hàm số $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (hoặc có thể là $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$); đồng thời phần "mẫu số" với $k, n-k$ thoả : $k+n-k=n$ cũng góp phần định hướng lời giải cho ta.
Đẳng thức trên đóng vai trò là bổ đề trong nhiều bài toán khác. Chẳng hạn: dùng đẳng thức này có thể tính tổng:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2i-1)!!\,(2\,(n-i)-1)!!$$

(Coi $(-1)!!=1$). *Gợi ý:* $=(2n)!!$
Trong đường link trên, còn có 1 lời giải rất sáng tạo - đẹp, sử dụng đếm 2 cách với ý tưởng là tô màu n đoạn thẳng liên tiếp bởi 4 màu khác nhau. Lời giải này đẹp và sử dụng được 1 trong những phương pháp truyền thống của đếm 2 cách: tô màu, chia thẻ,... nhưng xét về khía cạnh hiệu quả thì lời giải bằng hàm sinh chỉ đòi hỏi một lượng kiến thức tối thiểu.

Ví dụ 4.3. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, m, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{m}{k} = n\binom{m+n-1}{n}$$

△

Lời giải.

Sử dụng công thức $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{m}{k} &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{m}{k} \\
&\overset{E}{=} n\left[t^m\right]\frac{1}{1-t}\left[u(1+u)^{n-1}\,\middle|\, u = \frac{t}{1-t}\right] \\
&= n\left[t^m\right]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1}{(1-t)^{n-1}} \\
&= n\left[t^{m-1}\right]\frac{1}{(1-t)^{n+1}} \\
&= n\binom{n+1+m-1-1}{m-1} \\
&= n\binom{n+m-1}{n}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.4. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n-4k}{2n-2k}\binom{4k}{2k} = \frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}4^n + 16^n\right)$$

△

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{4n-4k}{2n-2k}\binom{4k}{2k} &\overset{conv}{=} \left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} + \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-4t} + \frac{2}{\sqrt{1-(4t)^2}} + \frac{1}{1+4t}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{2}{1-(4t)^2}+\frac{2}{\sqrt{1-(4t)^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-(4t)^2}+\frac{1}{\sqrt{1-4.\left(4t^2\right)}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(4^{2n}+4^n\binom{2n}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(16^n+4^n\binom{2n}{n}\right)$$

Nên từ đây suy ra đpcm. ■

Nhận xét. Một lần nữa, ta lại sử dụng khai triển $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ quen thuộc. Tuy có phức tạp hơn một chút nhưng bản chất thì vẫn là tổ hợp chập trung tâm (central binomial); xét phần mẫu số để định hướng: $2k+(2n-2k)=2n$. Bài này còn đòi hỏi một chút khôn khéo để "loại" ra những phần tử không cần thiết trong khai triển.

Ví dụ 4.5. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{2n-1}{k}^{-1} = \frac{2n}{n+1}$$

△

Lời giải.

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{2n-1}{k}^{-1} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!k!\,(2n-1-k)!}{k!\,(n-k)!\,(2n-1)!}$$
$$= \binom{2n-1}{n}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-1-k}{n-k}k$$
$$\overset{B}{=} \binom{2n-1}{n}^{-1}\left[t^n\right](1+t)^{2n-1}\left[\frac{u}{(1-u)^2}\middle| u=\frac{t}{1+t}\right]$$

$$= \binom{2n-1}{n}^{-1} [t^n] (1+t)^{2n-1} \frac{t}{1+t} (1+t)^2$$
$$= \binom{2n-1}{n}^{-1} [t^n] (1+t)^{2n} t$$
$$= \binom{2n-1}{n}^{-1} \left[t^{n-1}\right] (1+t)^{2n}$$
$$= \binom{2n-1}{n}^{-1} \binom{2n}{n-1} = \frac{2n}{n+1}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Thông thường những bài tính tổng có tổ hợp chập ở mẫu số sẽ đòi hỏi kỹ năng biến đổi, vì ta thường không có hàm sinh tương ứng cho dạng phân thức có tổ hợp chập ở mẫu số.

Chú ý là trong 2 công thức A, B thì hệ số cần xét là khác nhau, cần chú ý để tránh nhầm lẫn. Ngoài ra, từ bài toán trên, các bạn hãy tự giải bài tương tự sau:

Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-1}{k}^{-1} = 2$

Ví dụ 4.6. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4n+1}{2n-2k} \binom{k+n}{n} = 4^n \binom{3n}{n}$$

△

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{4n+1}{2n-2k}\binom{k+n}{n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{4n+1}{2n+2k+1}\binom{k+n}{k}\\ &\overset{A}{=} \left[t^{4n+1}\right]\frac{t^{2n+1}}{(1–t)^{2n+2}}\left[\frac{1}{(1–u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1–t)^2}\right]\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+2}}\left[\frac{1}{(1–u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1–t)^2}\right]\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+2}}\frac{(1-t)^{2n+2}}{(1-2t)^{n+1}}\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-2t)^{n+1}}\\ &= 2^{2n}\binom{n+1+2n-1}{2n}\\ &= 4^n\binom{3n}{2n}=4^n\binom{3n}{n}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Không phải lúc nào tổng tổ hợp cũng ở ngay dấu hiệu để ta áp dụng định lý. Đôi khi ta cần phải thực hiện một vài biến đổi, như ở trong trường hợp này:

$$\binom{4n+1}{2n-2k}\to\binom{4n+1}{2n+2k+1}\text{ và }\binom{n+k}{n}\to\binom{n+k}{k}$$

Với bài này, ta thấy được đầy đủ sức mạnh của định lý A (4.2). Vì nếu theo cách làm dự đoán hàm sinh mà đa số người dùng thường chọn, thì dù có dự đoán đúng hàm sinh: $\dfrac{1}{(1-2t)^{n+1}}$ cũng rất khó để hoàn thành bài toán, do những bước biến đổi đòi hỏi là tương đối lòng vòng, thiếu tự nhiên.

Ví dụ 4.7. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{k}{j}2^{n-2k} = \binom{n}{j}\binom{2n-2j}{n}$$

△

Lời giải. Ta có :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{k}{j} &= \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{k}{j}2^{n-2k} \\
&= \binom{n}{j}\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{n-2k}2^{n-2k} \\
&\overset{B}{=} \binom{n}{j}[t^n]\ (1+2t)^n\left[u^j(1+u)^{n-j}\middle|\, u=\frac{t^2}{1+2t}\right] \\
&= \binom{n}{j}[t^n]\ (1+2t)^n\frac{t^j}{(1+2t)^j}\frac{\left(1+2t+t^2\right)^{n-j}}{(1+2t)^{n-j}} \\
&= \binom{n}{j}\left[t^{n-2j}\right](1+2t)^{2n-2j} \\
&= \binom{n}{j}\binom{2n-2j}{n}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra đpcm. ■

Ví dụ 4.8. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}^{-1}\binom{x}{k-1}\binom{y-k}{n-k} &= \frac{1}{x+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{x+1}{k}\binom{y}{k}^{-1} \\
&= \frac{1}{x-y}\left(\binom{x}{n}-\binom{y}{n}\right)
\end{aligned}$$

(x, y là 2 số nguyên và $y \geq x+1 > n$). △

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}^{-1}\binom{x}{k-1}\binom{y-k}{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x!\,(y-k)!k!\,(n-k)!}{k!\,(x-k+1)!\,(n-k)!\,(y-n)!n!}\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\sum_{k=1}^{n}\binom{y-k}{x-k+1}\\
&\overset{B}{=}\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left[t^{x+1}\right](1+t)^y\left[\frac{u-u^{n+1}}{1-u}\middle|\,u=\frac{t}{1+t}\right]\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left[t^{x+1}\right](1+t)^y\frac{\left(\dfrac{t}{1+t}-\dfrac{t^{n+1}}{(1+t)^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{t}{1+t}}\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left(\left[t^{x}\right](1+t)^y-\left[t^{x-n}\right](1+t)^{y-n}\right)\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left(\frac{y!}{x!\,(y-x)!}-\frac{(y-n)!}{(y-x)!\,(x-n)!}\right)\\
&=\frac{1}{x-y}\left(\binom{x}{n}-\binom{y}{n}\right)
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Cái khôn khéo của người giải toán là cần phải linh hoạt sử dụng hàm $\dfrac{u-u^{n+1}}{1-u}$ thay vì hàm $\dfrac{1}{1-u}$ quen thuộc. Các bạn hãy tự lý giải vì sao lại chọn như thế.
Ngoài ra, bằng cách làm hoàn toàn tương tự, các bạn hãy giải bài toán:

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{z}{k}\binom{x}{k}^{-1}=\frac{x+1}{x-z+1}\left(\binom{z}{j}\binom{x+1}{j}^{-1}-\binom{z}{n+1}\binom{x+1}{n+1}^{-1}\right)$$

Gợi ý: $f(u)=\dfrac{u^j-u^{n+1}}{1-u}$

Ví dụ 4.9. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k} = \binom{2x}{2n}; \forall x \in \mathbb{R}$$

△

Lời giải. Ta có :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k}\\
&\overset{B}{=}[t^n](1+t)^x\left[\frac{(1+2\sqrt{u})^x+(1-2\sqrt{u})^x}{2}\middle| u=\frac{t}{(1+t)^2}\right]\\
&=[t^n](1+t)^x\left(\frac{\left(1+2\sqrt{t}+t\right)^x+\left(1-2\sqrt{t}+t\right)^x}{2(1+t)^x}\right)\\
&=[t^n]\frac{\left(1+\sqrt{t}\right)^{2x}+\left(1-\sqrt{t}\right)^{2x}}{2}\\
&=\left[t^{2n}\right](1+t)^{2x}\\
&=\binom{2x}{2n}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Với cùng cách giải trên, ta cũng giải được bài toán sau do giáo sư H.W.Gould đề xuất:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+1}{2k+1}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k+1} = \binom{2x+2}{2n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 4.10. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+k-i-1}{k-i} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \geq 1\\ 1 & \text{nếu } k=0\end{cases}$$

△

Lời giải.
Ta có :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+k-i-1}{k-i} &= \sum_{i=0}^{k}\binom{n+k-i-1}{k-i}(-1)^i\binom{n}{i}\\ &\overset{B}{=} \left[t^k\right](1+t)^{n+k-1}\left[(1-u)^n\Big|u=\frac{t}{1+t}\right]\\ &= \left[t^k\right](1+t)^{n+k-1}\frac{1}{(1+t)^n}\\ &= \left[t^k\right](1+t)^{k-1}\end{aligned}$$

Với $k=0$: $\left[t^0\right](1+t)^{-1} = \left[t^0\right]\dfrac{1}{1+t} = \left[t^0\right]\left(1-t+t^2-t^3+...\right) = 1.$

Còn với $k \geq 1$ thì hiển nhiên bậc lớn nhất của t trong khai triển nhị thức $(1+t)^{k-1}$ là $k-1$.

Suy ra $\left[t^k\right](1+t)^{k-1} = 0.$

Nên từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.11. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n-4k-2}{2n-2k-1}\binom{4k+2}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(16^n-\binom{2n}{n}4^n\right)$$ △

Lời giải.

Ta có :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n-4k-2}{2n-2k-1}\binom{4k+2}{2k+1}\\
&=\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}}-\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\right)\right)^2\\
&=\frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-4t}+\frac{1}{1+4t}-\frac{2}{\sqrt{1-4\left(4t^2\right)}}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{2}{1-16t^2}-\frac{2}{\sqrt{1-4\left(4t^2\right)}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-16t^2}-\frac{1}{\sqrt{1-4\left(4t^2\right)}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(16^n-4^n\binom{2n}{n}\right)
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Cách xét $(C(x))^2$ với $C(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{\sqrt{1+4x}}\right)$ ở đây đã là tương đối quen thuộc. Cách này nhìn chung là hữu ích với những tổng dạng $\sum a_k a_{n-k}$; $\sum a_{2k}a_{n-2k}$; $\sum a_{2k+1}a_{n-2k-1}$....Cũng có thể để ý thêm là dãy $(a_k)_{k\geq 0}$ không nhất thiết phải có hàm sinh tương ứng là hàm $C(x)$, như trường hợp bài toán trên là một điển hình.

Ví dụ 4.12. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\binom{2k}{k}\frac{2k+1}{4^k}=\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)\,4^n}$$ △

Lời giải. Bài này cần một chút “gia cố - thêm thắt” từ khai triển quen thuộc của $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Thật vậy, nếu tinh ý 1 chút ta sẽ nhận ra:

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/4)^k (2k+1) \binom{2k}{k} x^k$$

Hoặc nếu viết theo ngôn ngữ hàm sinh :

$$G\left((-1/4)^k (2k+1) \binom{2k}{k}\right) = \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$$

Tức là hệ số của x^k trong khai triển thành chuỗi luỹ thừa hình thức của $\dfrac{1}{(1+x)^{3/2}}$ là $(-1/4)^k (2k+1) \dbinom{2k}{k}$
Ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} \frac{2k+1}{4^k} &\overset{E}{=} -[t^n] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{(1+u)^{3/2}} \middle| u = \frac{t}{1-t} \right] \\
&= -[t^n] \sqrt{1-t} \\
&= -\binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \\
&= \frac{(-1)^n (-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} \\
&= \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n (2n-1)}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Theo quan điểm chủ quan của tác giả, bạn đọc chỉ cần nhớ thật kỹ dạng khai triển luỹ thừa hình thức của hàm $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$, và tất cả những dãy số có liên quan như:

$$G\left(k\binom{2k}{k}\right); G\left(\frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\right); G\left((2k+1)\binom{2k}{k}\right), \ldots$$

Khi cần thiết, ta có thể tự thiết lập hàm sinh tương ứng thông qua các phép biến đổi, lấy đạo hàm tương đối đơn giản.

Ví dụ 4.13. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$4^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k} 5^k$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned} 4^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} &\overset{E}{=} 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{\sqrt{1-4u}} \middle| u = \frac{t}{1-t} \right] \\ &= 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1-5t)}} \\ &= \left[t^n\right] \frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1-20t)}} \end{aligned}$$

Đồng thời ta cũng có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k} 5^k &\overset{conv}{=} \left[t^n\right] \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-20t}} \\ &= \left[t^n\right] \frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1-20t)}} \end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Có thể nói, trong tổng tổ hợp có chứa $\binom{n}{k}$ là dấu hiệu hay để áp dụng phép chuyển đổi Euler. Đồng thời, cách biến đổi hàm sinh để làm mất đi số 4^n cũng là một kỹ thuật đẹp cần lưu ý.

Ví dụ 4.14. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$4^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k} (-3)^k$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
4^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{k} &\overset{E}{=} 4^n\,[t^n]\,\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4u}}\,\middle|\, u=\frac{t}{1-t}\right]\\
&= 4^n\,[t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}\\
&= [t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1+12t)}}
\end{aligned}$$

Đồng thời ta cũng có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}(-3)^k &\overset{conv}{=} [t^n]\,\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+12t}}\\
&= [t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1+12t)}}
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.15. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}\frac{4^{n-k}}{k+1} = \frac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+2}$$

△

Lời giải.

Ta có:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{4^{n-k}}{k+1} \\
&= 4^n \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{(-1/4)^k}{k+1} \\
&\overset{A}{=} 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \left[\frac{-1}{\frac{u}{4}} \ln \frac{1}{1+\frac{u}{4}} \middle| \, u = \frac{t^2}{1-t} \right] \\
&= 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \cdot \frac{-4(1-t)}{t^2} \ln \frac{(1-t)}{\frac{t^2}{4} - t + 1} \\
&= 4^{n+1} \left[t^{n+2}\right] \left(\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) - 2\ln\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}\right) \right) \\
&= 4^{n+1} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{2}{2^{n+2}(n+2)} \right) \\
&= \frac{4^{n+1} - 2^{n+1}}{n+2}
\end{aligned}
$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.16. *Cho trước các số nguyên dương p, m, q.*
Chứng minh rằng $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$*:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p-k}{p-n} \binom{q+k+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{q-k}{q-n} \binom{p+k+1}{n} = \binom{p+q+2}{n-m+q+1}$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{p-k}{p-n}\binom{q+k+1}{m} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{p-k}{n-k}\binom{q+k+1}{m}\\
&\overset{B}{=}[t^n](1+t)^p\left[\frac{u^{m-q-1}}{(1-u)^{m+1}}\middle| u=\frac{t}{1+t}\right]\\
&=[t^n](1+t)^p\frac{t^{m-q-1}}{(1+t)^{m-q-1}}(1+t)^{m+1}\\
&=\left[t^{n-m+q+1}\right](1+t)^{p+q+2}\\
&=\binom{p+q+2}{n-m+1+q}\end{aligned}$$

Đẳng thức còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự.
Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.17. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+1}\equiv\frac{2x-n}{2}(n+1)!$$

△

Lời giải.
Trước tiên ta cần điểm qua bổ đề sau:

BỔ ĐỀ 4.1–

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j=\left\{{j\atop n}\right\}(-1)^n n!$$

□

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^j &\overset{E}{=}[t^n]\frac{1}{1-t}\left[\sum_{k=0}^{j}\left\{{j\atop k}\right\}\frac{k!(-u)^k}{(1+u)^{k+1}}\middle| u=\frac{t}{1-t}\right]\\
&=[t^n]\sum_{k=0}^{j}\left\{{j\atop k}\right\}k!(-1)^k t^k\\
&=\left\{{j\atop n}\right\}(-1)^n n!\end{aligned}$$

■

Trở lại với vấn đề chính. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n=1}{r}x^{n+1-r}(-1)^r k^r\\
&=\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}x^{n+1-r}(-1)^r\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^r\\
&=\binom{n+1}{n}x(-1)^n\left\{\begin{matrix}n\\n\end{matrix}\right\}(-1)^n n!\\
&\quad+\binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1}\left\{\begin{matrix}n+1\\n\end{matrix}\right\}(-1)^n n!\\
&=x(n+1)!-\frac{n(n+1)}{2}n!\\
&=\frac{2x-n}{2}(n+1)!
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.18. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+2}\equiv\frac{3n^2+n+12x^2-12nx}{24}(n+2)!$$

△

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+2}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{n+2}\binom{n+2}{r}x^{n+2-r}(-1)^r k^r\\
&=\sum_{r=0}^{n+2}\binom{n+2}{r}x^{n+2-r}(-1)^r\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^r\\
&=\binom{n+2}{n}x^2\left\{{n \atop n}\right\}n!-\binom{n+2}{n+1}x\left\{{n+1 \atop n}\right\}n!+\binom{n+2}{n+2}\left\{{n+2 \atop n}\right\}n!\\
&=\frac{x^2}{2}(n+2)!-\frac{xn}{2}(n+2)!+\frac{3n+1}{24}n(n+2)!\\
&=\frac{3n^2+n+12x^2-12nx}{24}(n+2)! \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Nhận xét.

Bằng việc sử dụng định lý: $G\left(k^p\right)=\sum_{k=0}^{p}\left\{{p \atop k}\right\}\frac{k!t^k}{(1-t)^{k+1}}$. các bạn có thể tự luyện tập bằng bài toán sau:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 k^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}\left\{{r \atop k}\right\}k!$$

Ví dụ 4.19. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n-2k}\binom{k+n}{n}=\frac{2}{3}\cdot 4^n\binom{3n}{n} \qquad \triangle$$

Lời giải.
Ta có :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n-2k}\binom{k+n}{n}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n+2k}\binom{k+n}{k}\\
&\overset{A}{=}\left[t^{4n}\right]\frac{t^{2n}}{(1-t)^{2n+1}}\left[\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1-t)^2}\right]\\
&=\left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+1}}\left[\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1-t)^2}\right]\\
&=\left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+1}}\cdot\frac{(1-t)^{2n+2}}{(1-2t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{2n}\right]\frac{1-t}{(1-2t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-2t)^{n+1}}-\left[t^{2n-1}\right]\frac{1}{(1-2t)^{n+1}}\\
&=2^{2n}\binom{n+1+2n-1}{2n}-2^{2n-1}\binom{2n-1+n+1-1}{2n-1}\\
&=4^n\binom{3n}{n}-4^n\cdot\frac{1}{2}\binom{3n-1}{n}\\
&=4^n\binom{3n}{n}-4^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\binom{3n}{n}=4^n\cdot\frac{2}{3}\binom{3n}{n}
\end{aligned}
$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.20. *Cho bộ ba số nguyên (m,n,r) thỏa mãn $0\le r\le n\le m-2$. Ký hiệu :*$P(m;\,n;\,r)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{m+n-2(k+1)}{n}\binom{r}{k}$.
Chứng minh rằng:

$$\sum_{r=0}^{n}P(m;\,n;\,r)=\binom{m+n}{n}$$

△

Nhận xét. Bài Toán này là một trong những bài tác giả thích nhất, vì nó rất đúng với dụng ý về hàm sinh của tác giả khi viết chuyên đề. Rõ ràng các cách khác như, đếm 2 cách, quy nạp, ... gần như không hiệu quả khi ngoại hình bài toán quá cồng kềnh, rối rắm.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
P(m;\, n;\, r) &= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{m+n-2(k+1)}{n}\binom{r}{k} \\
&\overset{A}{=} \left[t^{n+m-2}\right] \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}} \left[(1-u)^r \middle| u = t^2\right] \\
&= \left[t^{m-2}\right] \frac{\left(1-t^2\right)^r}{(1-t)^{n+1}} \\
\Rightarrow \sum_{r=0}^{n} P(m;\, n;\, r) &= \sum_{r=0}^{n} \left[t^{m-2}\right] \frac{\left(1-t^2\right)^r}{(1-t)^{n+1}} \\
&= \left[t^{m-2}\right] \frac{\sum\limits_{r=0}^{n} \left(1-t^2\right)^r}{(1-t)^{n+1}} \\
&= \left[t^{m-2}\right] \frac{\dfrac{1-\left(1-t^2\right)^{n+1}}{1-\left(1-t^2\right)}}{(1-t)^{n+1}} \\
&= \left[t^{m-2}\right] \frac{1-\left(1-t^2\right)^{n+1}}{t^2(1-t)^{n+1}} \\
&= \left[t^{m}\right] \frac{1-\left(1-t^2\right)^{n+1}}{(1-t)^{n+1}} \\
&= \left[t^{m}\right] \left(\frac{1}{(1-t)^{n+1}} - (1+t)^{n+1}\right) \\
&= \left[t^{m}\right] \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \\
&= \binom{m+n+1-1}{m} = \binom{m+n}{m}
\end{aligned}$$

Do $n+1 \leq m-1 < m \Rightarrow [t^m](1+t)^{n+1} = 0$.
Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.21 (Hoàng Xuân Thanh). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n+k}{2k} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$$

△

Nhận xét. Tất nhiên là so với những bài toán nêu ở trên, bài này chỉ là bài dễ. Tuy nhiên, dụng ý tác giả đưa ra bài này là một mục đích khác, tức là: Trong trình bày lời giải, đôi khi ta không muốn phải chứng minh lại các định lý A (4.2); B (4.3), khi đó, ta sẽ ngầm dùng chúng và sử dụng luôn kết quả hàm sinh tìm được để lời giải ngắn gọn. Và cũng là để làm "vừa ý" những người đọc vốn không quen với kiểu trình bày có các ẩn u.
Chẳng hạn với bài toán này: khi dùng định lý A (4.2), ta tìm ra được ngay hàm sinh cần tìm: $f(t) = \dfrac{1-t}{1+t^2}$, và hệ số cần xét là t^n.

Lời giải. Bây giờ, tuỳ theo số dư của n trong phép chia cho 4, ta có:

$$\begin{aligned}
(-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} &= [t^n]\frac{1}{1+t^2} - [t^n]\frac{t}{1+t^2} \\
&= [t^n]\frac{1-t}{1+t^2} \\
&= [t^n]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^2}{1+t^2} \\
&= [t^n]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2t}{(1-t)^2}}
\end{aligned}$$

(Biến đổi này thực ra cũng là từ định lý A (4.2))

$$= [t^n]\frac{1}{1-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2t)^k}{(1-t)^{2k}}\right) = [t^n]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2t)^k}{(1-t)^{2k+1}}$$
$$= [t^n]\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2t)^k}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n-k+2k+1-1}{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n+k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n+k}{2k} \quad \blacksquare$$

Nhận xét. Ở đây đã dùng tới khai triển quen thuộc:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n+k-1}{k}x^k + \dots$$

Ví dụ 4.22. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}\frac{4^{n-k}}{n-k} = \frac{2^{n+1}}{n} \quad \triangle$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức: $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$

Ta có đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}\frac{4^{n-k}}{n-k} = \frac{2^{n+1}}{n}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right)4^{n-k} = 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}4^{n-k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k-1}{k-1}4^{n-k} = 2^{n+1}$$

Ta có theo định lí A (4.2) thì:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 4^{n-k} = 4^n \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1/4)^k \binom{n-k}{k}$$

$$= 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{1+\frac{u}{4}} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right]$$

$$= 4^n \left[t^n\right] \frac{4}{(t-2)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} 4^{n-k} = 4^n \left[t^{n-1}\right] \frac{1}{t} \left[\frac{1}{1+\frac{u}{4}} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right]$$

$$= 4^n \left[t^n\right] \frac{4(1-t)}{(t-2)^2}$$

Suy ra:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 4^{n-k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} 4^{n-k}$$

$$= 4^{n+1} \left[t^n\right] \frac{2-t}{(t-2)^2}$$

$$= 4^{n+1} \left[t^n\right] \frac{1}{2-t} = \frac{4^{n+1}}{2} \left[t^n\right] \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{4^{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = 2^{n+1}$$

Từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.23. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{6^k}{n-k} = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$$

△

Lời giải.
Ta có :

$$nS = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{n}{n-k} 6^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) 6^k$$

Ta lại có:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 6^k \stackrel{A}{=} [t^n] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{1-6u} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right] = [t^n] \frac{1}{1-t-6t^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k-1} 6^k \stackrel{A}{=} [t^{n-1}] \frac{1}{t} \left[\frac{1}{1-6u} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right] = [t^n] \frac{1-t}{1-t-6t^2}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
nS &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{n}{n-k} \cdot 6^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) 6^k \\
&= [t^n] \frac{2-t}{-6t^2-t+1} \\
&= [t^n] \frac{2-t}{(1-3t)(1+2t)} \\
&= [t^n] \left(\frac{1}{1-3t} + \frac{1}{1+2t} \right) \\
&= 3^n + (-2)^n \\
\Rightarrow S &= \frac{3^n + (-2)^n}{n}
\end{aligned}$$

■

Ví dụ 4.24 (Hoàng Xuân Thanh). *Chứng minh rằng* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor}{k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+2} \right)$$

△

Lời giải.
Đây có lẽ nên là một bài Toán đẹp mà không quá khó. Ngoại hình của bài toán có thể khiến bạn hơi rối, nhưng trước tiên, theo thói quen, ta hãy làm một bước nhỏ để đưa mọi thứ trở lại quỹ đạo.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - (-1)^{n+2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) = F_{n+2}
\end{aligned}$$

Kể ra cũng gọn được một ít rồi, tuy chưa đáng kể, cái ta muốn khử là cái dấu phần nguyên, vốn hơi khó chịu trong tính toán. Số 2 ở mẫu số trong $\left\lfloor \dfrac{n+k}{2} \right\rfloor$ gợi ý cho ta cách xét số dư trong phép chia của n cho 2, nói cách khác là tính chẵn lẻ của n.

Một cách tự nhiên, sau khi xét tính chẵn lẻ của n, ta chia tổng ban đầu tiếp thành hai thành phần theo tính chẵn lẻ của k, và như vậy hiển nhiên sẽ phá hết được những dấu phần nguyên $\left\lfloor \dfrac{n+k}{2} \right\rfloor$. Một ý tưởng hết sức đẹp và đơn giản!

Bây giờ, ta xét thử $n = 2m + 1$, trường hợp $n = 2m$ hoàn toàn tương tự.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{\left\lfloor\frac{n+k}{2}\right\rfloor}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\left\lfloor\frac{2m+1+k}{2}\right\rfloor}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{\left\lfloor\frac{2m+1+2k}{2}\right\rfloor}{2k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{\left\lfloor\frac{2m+1+2k+1}{2}\right\rfloor}{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m+k}{2k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m+k+1}{2k+1}\\
&\stackrel{A}{=} [t^m]\,\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{1-u}\bigg| u=\frac{t}{(1-t)^2}\right]\\
&\quad + [t^{m+1}]\,\frac{t}{(1-t)^2}\left[\frac{1}{1-u}\bigg| u=\frac{t}{(1-t)^2}\right]\\
&= [t^m]\,\frac{1-t}{1-3t+t^2} + [t^m]\,\frac{1}{1-3t+t^2} \qquad (*)\\
&= [t^m]\,\frac{2-t}{1-3t+t^2}\\
&= [t^m]\,\frac{2(1-t)}{1-3t+t^2} + [t^m]\,\frac{t}{1-3t+t^2}\\
&= 2F_{2m+1} + F_{2m}\\
&= F_{2m+1} + (F_{2m+1} + F_{2m})\\
&= F_{2m+1} + F_{2m+2}\\
&= F_{2m+3} = F_{(2m+1)+2} = F_{n+2}
\end{aligned}$$

Bước (*) là dạng quen thuộc của các hàm sinh liên quan dãy Fibonacci. Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. Một bài toán rất - rất đẹp! ■

4.6 Các bài toán không mẫu mực

Bài toán 4.5. *Chứng minh rằng* $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{0\le k\le i\le n}(i-k)\binom{n}{i}\binom{n}{k} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$$

△

Lời giải.
Tham khảo lời giải tại địa chỉ

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/82111-sum-0-le-k-le-i-le-n-lefti-kbinomnibinomnkright-dfracn2binom2nn/

(Bài viết số 2).
Ta có đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}\sum_{0\le k\le i\le n}(i-k)\binom{n}{i}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right]\\ &\quad\cdot\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\\ &= a_{n-1}\end{aligned}$$

Với một số nguyên dương n cho trước, xét dãy số $(b_k)_{k\ge 0}$ xác định như sau:

$$b_k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}$$

Bây giờ xét khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của: $\mathcal{C}(x)=\dfrac{(1+x)^n}{1-x}$ với $|x|<1$.
Ta có:

$$\mathcal{C}(x)=(1+x+x^2+\cdots)\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

Bằng cách xem xét hệ số của x^k $(0\le k\le n)$; ta có: $b_k=c_k\ \forall 0\le k\le n$

$$\Rightarrow\qquad (\mathcal{C}(x))^2=\frac{(1+x)^{2n}}{(1-x)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad &\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}\right]\cdot(1+2x+3x^2+\ldots)\\ &=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)\end{aligned}$$

Bây giờ so sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế, ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r) &= c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+...+c_{n-1}c_0\\ &= b_0b_{n-1}+b_1b_{n-2}+...+b_{n-1}b_0\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right]\\ &\quad\cdot\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\\ &= a_{n-1}\end{aligned}$$

Như vậy, công việc còn lại của ta là đi chứng minh đẳng thức sau:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r)=\frac{n}{2}\binom{2n}{n} \tag{4.1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r) &= n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}-\sum_{r=0}^{n-1}r\binom{2n}{r}\\ &= \frac{n}{2}\left[\sum_{r=0}^{2n}\binom{2n}{r}-\binom{2n}{n}\right]-\sum_{r=0}^{n-1}r\binom{2n}{r}\\ &= n.2^{2n-1}-\frac{n}{2}\cdot\binom{2n}{n}-\sum_{r=0}^{n-1}r\binom{2n}{r}\end{aligned}$$

Nên (5.1) tương đương với

$$n.2^{2n-1}=\sum_{r=0}^{n}r\binom{2n}{r} \tag{4.2}$$

Bây giờ với $r = 1; 2; ...; n$, ta có:

$$\begin{aligned} r\binom{2n}{r} &= \frac{r \cdot (2n)!}{r! \cdot (2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)! \cdot (2n-r)!} \\ &= \frac{2n \cdot (2n-1)!}{(r-1)! \cdot (2n-r)!} = 2n\binom{2n-1}{r-1} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n} r\binom{2n}{r} &= 2n\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-1}{r-1} = 2n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n-1}{r} \\ &= 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{r} = n.2^{2n-1} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra (5.2) đúng; suy ra (5.1) đúng.
Do đó đẳng thức ban đầu được chứng minh hoàn toàn. ■

Nhận xét. Đây là một trong những bài Toán khó nhất trong tài liệu này. Bước biến đổi đầu tiên là tương đối khó để xây dựng. Hàm sinh đưa ra cũng không phải là hàm sinh tương ứng với cả 1 dãy số cần xét, mà nó chỉ là hàm sinh tương ứng với những số hạng đầu tiên của dãy mà thôi. Ngoài ra, bài này còn đòi hỏi các kỹ năng biến đổi thành thạo với tổ hợp chập (ở phần 3-4).
Nhìn chung; đây là 1 bài toán hay - khó - ngoạn mục!
Điều dễ dàng bù lại là kỹ năng xét $(\mathcal{C}(x))^2$ tương đối quen thuộc.
Suy ngẫm về bài toán này ta thấy, có mối liên hệ mật thiết với định lý tổng từng phần
(Định lý P): $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k = [t^n]\,\frac{f(t)}{1-t}$
Như vậy, dù là một bài toán không mẫu mực nhưng lời giải trên cũng có những cơ sở nhất định, chứ không hẳn là cảm tính và kỹ năng.

Bài toán 4.6. *Chứng minh rằng*

$$(x+m+1)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x+y+j}{m-j}\binom{y+2j}{j}-\sum_{j=0}^{m}\binom{x+j}{m-j}(-4)^j$$
$$=(x-m)\binom{x}{m} \qquad \triangle$$

Lời giải.

Chú ý: Hàm sinh tương ứng của dãy $(-1)^j\binom{y+2j}{j} \quad (j\in\mathbb{N})$ là:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2(-t)}\right)^y=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2t}\right)^y$$

Ta có:

$$(x+m+1)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x+y+j}{m-j}\binom{y+2j}{j}$$
$$\overset{B}{=}(x+m+1)\,[t^m]\,(1+t)^{x+y}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4u}}\left(\frac{\sqrt{1+4u}-1}{2u}\right)^y\Bigg|\,u=t(1+t)\right]$$
$$=(x+m+1)\,[t^m]\,(1+t)^{x+y}\frac{1}{1+2t}\cdot\frac{(2t)^y}{2^yt^y(1+t)^y}$$
$$=(x+m+1)\,[t^m]\,(1+t)^{x}\frac{1}{1+2t}$$
$$=(x+m+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}$$

Ta cũng có:

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{x+j}{m-j}(-4)^j\overset{B}{=}[t^m]\,(1+t)^x\left[\frac{1}{1+4u}\Bigg|u=t(1+t)\right]=[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}$$

Từ đó suy ra:

$$
\begin{aligned}
&(x+m+1)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x+y+j}{m-j}\binom{y+2j}{j}-\sum_{j=0}^{m}\binom{x+j}{m-j}(-4)^j\\
&\qquad=(x+m+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&\qquad=(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+m\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}
\end{aligned}
$$

(Mẫu số $(1+2t)^2$ chính là mấu chốt gợi cho ta liên tưởng đến việc xét đạo hàm)

$$
\begin{aligned}
&(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+m\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&=(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+\left[t^{m-1}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(1+t)^x}{1+2t}\right)-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&=(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+\left[t^{m-1}\right]\left(\frac{x(1+t)^{x-1}(1+2t)-2(1+t)^x}{(1+2t)^2}\right)\\
&\qquad\qquad-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&=(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+x\,[t^m]\,\frac{t(1+t)^{x-1}}{1+2t}-[t^m]\,\frac{2t(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&\qquad\qquad-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&=(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+x\,[t^m]\,\frac{t(1+t)^{x-1}}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}\\
&=[t^m]\,\frac{(1+t)^{x-1}\left((x+1)(1+t)+xt-(1+t)\right)}{1+2t}\\
&=[t^m]\,\frac{(1+t)^{x-1}(1+2t)x}{1+2t}\\
&=[t^m]\,x(1+t)^{x-1}=x\binom{x-1}{m}\\
&=(x-m)\binom{x}{m}
\end{aligned}
$$

■

Nhận xét. Đây là bài toán khó nhất trong chuyên đề này!
Bài toán này được đưa vào mục các bài toán không mẫu mực vì phép biến đổi trong bài này là tương đối lạ và ít gặp, hàm sinh đưa ra cũng không quá quen thuộc, dù sao thì phép biến đổi $m\left[t^m\right]\dfrac{(1+t)^x}{1+2t} = \left[t^{m-1}\right]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{(1+t)^x}{1+2t}\right)$ cũng là phép biển đổi đẹp và nên nhớ!

Bài toán 4.7. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n}{k}F_{2k+1} = 5^n F_{2n+1}$$

△

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\binom{2n}{k}F_{2k+1} &\overset{A}{=} \left[t^{2n}\right]\frac{1}{1-t}\left[\frac{1-u}{1-3u+u^2}\,\middle|\, u=\frac{t}{1-t}\right] \\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1-\frac{t}{1-t}}{1-3\frac{t}{1-t}+\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^2-t(1-t)}{(1-t)^2-3t(1-t)+t^2} \\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1-2t}{5t^2-5t+1} \\
&= 5^n\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1}
\end{aligned}$$

Tức là ta cần chứng minh $\left[t^{2n}\right]\dfrac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1} = F_{2n+1}$

Ta có:

$$\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1}=\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{\left(t-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

$$=\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-t\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t\right)}$$

$$=\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{\left(1+t\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+t\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

$$=\left[t^{2n}\right]\frac{1}{\left(1+t\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+t\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5}\left[t^{2n-1}\right]\frac{1}{\left(1+t\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+t\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

$\left(\text{Tới đây ta dùng đến công thức } \left[t^n\right]\dfrac{1}{(1+rt)(1+st)}=\dfrac{r^{n+1}-s^{n+1}}{r-s}(-1)^n\right)$

$$=\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}(-1)^{2n}$$

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}(-1)^{2n-1}$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n+1}$$

$$+\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right)$$
$$= F_{2n+1}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét.

Hãy để ý kỹ cách xử lý $\left[t^{2n}\right]\dfrac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1}$, vì cách xử lý này cũng là cách làm tổng quát với dạng phân thức có mẫu thức là hàm bậc 2 có nghiệm thực.

Trong topic http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/68310-sum-kge-0-binom2nk-f-2k1-5n-f-2n1/ nickname hxthanh có đưa ra một lời giải khá ngắn gọn dựa trên nhị thức Newton và tính toán Đại Số thuần tuý. Tuy nhiên, theo quan điểm của người viết, lời giải trên tuy "cồng kềnh" nhưng lại có nhiều cái để học tập hơn.
Dựa trên tư tưởng lời giải trên, các bạn hãy giải bài tương tự:
Với mọi số nguyên dương n. Chứng minh:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$$

Tuy nhiên, cách này sẽ không thể dùng để giải bài sau: Với mọi số nguyên dương n. Chứng minh:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}2^k\binom{n}{k}F_{2k} = F_{3n}$$

Các bạn hãy tự tìm cho mình cách giải thích tại sao như vậy. Đồng thời giải nó bằng cách của hxthanh xem sao? Đây có thể xem là một dịp để đối chiếu các cách giải khác nhau.

Bài toán 4.8. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n,ta có :*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}3^k\binom{3n}{k}\binom{3n-k-2}{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}(n-k)\,2^k$$ △

Lời giải.
Tham khảo lời giải (bằng tiếng Anh) tại địa chỉ:

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=41&t=491174

(Bài viết số 3).
Ta có tính chất sau: (Định lý Convolution (4.1))

$$[t^n]\left(f(t)g(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[t^k\right]f(t)\cdot\left[t^{n-k}\right]g(t) \tag{4.3}$$

Ta thấy:

- $n-k$ là hệ số của x^{n-k} trong khai triển $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
- $2^k\dbinom{3n}{k}$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1+2x)^{3n}$.

Do đó theo (4.3), ta có:

$$\begin{aligned}[x^n]\frac{(1+2x)^{3n}x}{(1-x)^2} &= [x^n]\left(\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(2x)^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}2^k(n-k)\end{aligned}$$

Mặt khác để tính hệ số của x^n trong khai triển hàm $f(x) = \dfrac{(1+2x)^{3n}.x}{(1-x)^2}$

theo cách khác (theo hướng có số 3^k) ở vế trái, ta có :

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{(1+2x)^{3n}x}{(1-x)^2} &= [x^n]\frac{((1-x)+3x)^{3n}x}{(1-x)^2}\\
&= [x^n]\frac{\sum\limits_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}3^k x^{k+1}\cdot(1-x)^{3n-k}}{(1-x)^2}\\
&= [x^n]\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}3^k x^{k+1}\cdot(1-x)^{3n-k-2}\\
&= [x^n]\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}3^k x^{k+1}\cdot(1-x)^{3n-k-2}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}3^k\binom{3n}{k}\binom{3n-k-2}{n-1-k}
\end{aligned}$$

Vậy ta có kết quả cuối cùng:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}3^k\binom{3n}{k}\binom{3n-k-2}{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}(n-k)2^k \qquad \blacksquare$$

Bài toán 4.9. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm r, s, t thỏa mãn $t \geq r+s$, ta có :*

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}} + \ldots + \frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}} = \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}} \qquad \triangle$$

Lời giải.
Đặt $q = t-r-s$. Rõ ràng q là số nguyên không âm.

Với $i = 0, ..., s$, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{\dbinom{s}{i}}{\dbinom{t}{r+i}} &= \frac{s!}{i!\,(s-i)!}\cdot\frac{(r+i)!\,(t-r-i)!}{t!}\\
&= \frac{s!}{i!\,(s-i)!}\cdot\frac{(r+i)!\,(q+s-i)!}{t!}\\
&= \frac{s!q!r!}{t!}\cdot\frac{(r+i)!}{r!i!}\cdot\frac{(q+s-i)!}{(s-i)!q!}\\
&= \frac{s!q!r!}{t!}\binom{r+i}{i}\binom{q+s-i}{s-i}\\
&= \frac{s!q!r!}{t!}\binom{r+i}{r}\binom{q+s-i}{q}
\end{aligned}$$

Suy ra :

$$\frac{\dbinom{s}{0}}{\dbinom{t}{r}} + \frac{\dbinom{s}{1}}{\dbinom{t}{r+1}} + ... + \frac{\dbinom{s}{s}}{\dbinom{t}{r+s}} = \frac{s!q!r!}{t!}\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{r}\binom{q+s-i}{q}$$

Xét khai triển hàm sinh dựa trên chuỗi luỹ thừa hình thức:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^{r+q+2}} &= \frac{1}{(1-x)^{r+1}}\frac{1}{(1-x)^{q+1}}\\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+i}{i}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{q+i}{i}x^i\right)\\
\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+q+1+i}{i}x^i &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+i}{i}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{q+i}{i}x^i\right)
\end{aligned}$$

Xét hệ số của x^s cả 2 vế, ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{i}\binom{q+s-i}{s-i} &= \binom{r+q+s+1}{s} \\
\Rightarrow \frac{s!q!r!}{t!}\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{i}\binom{q+s-i}{q} &= \frac{s!q!r!}{t!}\binom{r+q+s+1}{s} \\
&= \frac{s!(t-s-r)!r!}{t!}\binom{t+1}{s} \\
&= \frac{s!\,(t-s-r)!r!}{t!}\,\frac{(t+1)!}{(t+1-s)!s!} \\
&= \frac{(t-s-r)!r!\,(t+1)}{(t+1-s)!} \\
&= \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Với cách dùng hàm sinh như trên, các bạn hãy thử luyện tập bằng cách giải bài toán đơn giản sau:
Chứng minh rằng với các số nguyên $0 \le s \le k \le n$, ta có :

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{t}{s}\binom{n-t}{k-s} = \binom{n+1}{k+1}$$

Gợi ý: Sử dụng định lý: $G\left(\binom{p+k}{m}\right) = \dfrac{t^{m-p}}{(1-t)^{m+1}}$

Bài toán 4.10. *Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k}$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k}\overset{conv}{=}[t^n]\,\frac{1}{(1-t)^{x+1}}\cdot\frac{1}{(1-t)^{y+1}}$$
$$=[t^n]\,\frac{1}{(1-t)^{x+y+2}}$$
$$=\binom{x+y+2+n-1}{n}=\binom{x+y+n+1}{n}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

4.7 Bài tập tự luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng với các số nguyên dương m, n thoả mãn: $1 \le m \le n-1$ thì ta luôn có đẳng thức :

$$\binom{2n-m-1}{2n-2m-1}-\binom{n-1}{m}=\sum_{k}\sum_{j}\binom{k+j}{k}\binom{2n-m-2k-j-3}{2\,(n-m-k-1)}$$

BÀI 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có :

$$\sum_{0\le k\le \frac{n}{3}} 2^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k}=2^{n-1}+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

BÀI 3. Cho trước 2 số nguyên dương $n; r$ với $r < n$. Chứng minh rằng nếu có các bộ số nguyên không âm $(k_1; k_2; \ldots; k_n)$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = r\sum_{i=1}^{n} ik_i = n$$

thì ta luôn có

$$\sum\frac{1}{k_1!\,k_2!\ldots\ldots k_n!}=\frac{1}{r!}\binom{n-1}{r-1}$$

BÀI 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\sum (-1)^{j_1+j_2+...+j_n+1} \frac{(j_1+j_2\ +...+j_n\ -1)!}{j_1!j_2!...j_n!} = \frac{1}{n}$$

Trong đó tổng trên được lấy trên tất cả các bộ số nguyên không âm $(j_1; j_2; ...; j_n)$ thoả mãn $j_1 + 2j_2 + ... + nj_n = n$

Lời kết

Chỉ bằng vài chục trang thì đương nhiên không thể truyền tải hết những gì người viết chuyên đề muốn gửi gắm. Tuy nhiên, tác giả đã cố gắng để có thể có một chuyên đề cô đọng - dễ hiểu và dễ áp dụng. Xin được điểm lại một vài ý lớn trong chuyên đề:

- Luyện tập để sử dụng thành thạo những dạng khai triển hàm sinh cơ bản.
- Giới thiệu một vài kiểu khai triển hàm sinh tương đối khó.
- Giới thiệu những định lý có ứng dụng nhiều trong tính tổng dùng hàm sinh.
- Các bài tập không mẫu mực có nhiều ứng dụng.

Vẫn còn nhiều điều khác trong tính tổng dùng hàm sinh mà tác giả chưa thể mang đến: các tổng có liên quan đến số nghịch đảo (harmonic number), tổng lượng giác, dạng hàm sinh của số phức... Cũng như là những cách tiếp cận để tìm ra cụ thể hàm tương ứng với dãy ví dụ như phương pháp sử dụng hàm siêu hình (hypergeometric function); phương pháp sử dụng định lý nghịch đảo Lagrange (Lagrange's Inversion Theorem)... Tác giả rất tiếc nhưng chưa thể nói ra được do những giới hạn về thời gian và kiến thức.

Hi vọng là có thể gặp được các bạn trong một chuyên đề khác, có thể là 1 ấn phẩm khác của VMF, tác giả có thể có dịp để chia sẻ và thảo luận nhiều hơn về những vấn đề này. Còn hiện tại, nếu thật sự quan tâm, các bạn có thể tìm hiểu thông qua các từ khoá tiếng Anh mà tác giả cung cấp, hoặc trao đổi thêm thông qua địa chỉ mail: loc_lhp@yahoo.com

Tạm biệt và cảm ơn các bạn vì đã theo dõi chuyên đề. Chúc các bạn học tốt.

Chương

5 Ứng dụng đẳng thức tổ hợp vào Số học

5.1 Định lý 125
5.2 Một số hệ thức cơ bản 126
5.3 Các bài toán 127
5.4 Bài tập 148

Trần Trung Kiên (Ispectorgadget)
Lê Kim Nhã (gogo123)

Tóm tắt nội dung

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số định lý và các bài toán Số học sử dụng Tổ hợp và ĐTTH. Để giải được chúng, các bạn phải biết kết hợp các phương pháp, kỹ thuật với nhau.

5.1 Định lý

Định lý 5.1–
Cho p là số nguyên tố. Khi đó $\binom{p}{k} \vdots p$ *với mọi* $p = 1, 2, ..., p-1$ □

Chứng minh.
$\binom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$ Do p nguyên tố và $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$ nên $(p, k!) = 1$

Mà $\binom{p}{k}$ nguyên liên tiếp nên $(p-1)(p-2)...(p-k+1) \vdots k!$
Hay $\dfrac{(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!} = a \in \mathbb{Z}$
Vậy ta có điều cần chứng minh. ■

ĐỊNH LÝ 5.2 (ĐỊNH LÝ TƯƠNG ỨNG CỦA LUCAS.)–
Cho p là một số nguyên tố và n là một số nguyên dương với $n = (\overline{n_m n_{m-1}...n_0})_p$.
Giả sử i là một số nguyên dương nhỏ hơn n, viết $i = i_0 + i_1 p + \cdots i_m p^m$, ở đó $0 \le i_0, ..., i_m \le p-1$.
Khi đó
$$\binom{n}{i} \equiv \prod_{j=0}^{m} \binom{n_j}{i_j} \pmod{p}$$
□

ĐỊNH LÝ 5.3 (ĐỊNH LÍ RUF)–
Cho số nguyên dương n, Gọi ε là nghiệm phức khác 1 bất kì của phương trình $x^n = 1$.
Xét hàm đa thức:
$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i . x^i$$
thì $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} = \frac{1}{n}\left(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + ... + f(\varepsilon^{n-1})\right)$
Khi sử dụng định lí này nên chú ý từ định nghĩa ε thì ta có:
$$1 + \varepsilon + ... + \varepsilon^{n-1} = 0$$
□

5.2 Một số hệ thức cơ bản

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Đối xứng)
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (Hệ thức Pascal)

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < ... < \binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$ (Hệ thức Vandermonde)

5.3 Các bài toán

Ví dụ 5.1 (Định lý Wolstenholme). *Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$$

△

Lời giải (1).
Theo hệ thức Vandermonde, ta có

$$\binom{2p}{p} = \binom{p}{0}\binom{p}{p} + \binom{p}{1}\binom{p}{p-1} + ... + \binom{p}{p}\binom{p}{0}$$

Mà $\binom{p}{k} \vdots\ p \ ,\forall k = \overline{1, p-1}$. Do đó $\binom{p}{i}\binom{p}{p-1} \vdots\ p^2 \ ,\forall i = \overline{1, p-1}$■

Lời giải (2).
Với $p = 2$ điều khẳng định đúng vì $\binom{4}{2} - 2 = 4$ chia hết cho $2^2 = 4$.

Xét số nguyên tố $p > 2$, trước hết ta có đẳng thức

$$\binom{2p}{p} = 2\binom{2p-1}{p-1}$$

Từ hệ thức $(2p-k)(p+k) \equiv k(p-k) \pmod{p^2}$ đúng với mọi $k = 1, 2, ..., \frac{p-1}{2}$ (số $p-1$ chẵn), ta có tích

$$\begin{aligned}
&(2p-1)(2p-2)...(p+1)\\
&= [(2p-1)(p+1)][(2p-2)(p+2)]...\left[\left(2p - \frac{p-1}{2}\right)\left(p + \frac{p-1}{2}\right)\right]\\
&\equiv [1.(p-1)]\,[2.(p-2)]\,...\left(\frac{p+1}{2} \cdot \frac{p+2}{2}\right) \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

đồng dư với số $(p-1)!$ theo modulo p^2.
Lập luận tiếp được $\binom{2p}{p} = 2\binom{2p-1}{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2}$. ■

Ví dụ 5.2. *Chứng minh rằng với n là các số nguyên dương lẻ thì tập*

$$S = \left\{ \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; ...; \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

chứa lẻ các số lẻ. △

Lời giải.
Đặt

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

Khi đó

$$2S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} - 2 = 2^n - 2 \Rightarrow S_n = 2^{n-1} - 1 \text{ là số lẻ}$$

Vậy tập S phải chứa lẻ các số lẻ. ■

Ví dụ 5.3. *Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Tìm ƯCLN của các số*

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, ..., \binom{2n}{2n-1}$$

△

Lời giải.
Ta có: $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + ... + \binom{2n}{2n-1} = 2^{2n-1}$
Suy ra ước chung của các số $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{2}, ..., \binom{2n}{2n-1}$ có dạng 2^m.
Giả sử $n = 2^p q$, với q lẻ.
Ta có: $\binom{2n}{1} = 2^{p+1} q \Rightarrow$ ước chung đang xét sẽ $\leq 2^{p+1}$.
Ta cần chứng minh ước chung chính là 2^{p+1}.
Ta có: $\binom{2^{p+1}q}{m} = \frac{2^{p+1}q}{m}\binom{2^{p+1}q-1}{m-1} \Rightarrow 2^{p+1} \Big| \binom{2^{p+1}q}{m}$ ■

Ví dụ 5.4 (Đề thi HSG tỉnh Đắk Lắk 2011-2012). *Cho* m *là số nguyên thỏa* $0 < m < 2011$. *Chứng minh rằng* $\dfrac{(m+2010)!}{m!2011!}$ *là một số nguyên.* $\triangle$

Lời giải.
Để ý rằng

$$\binom{m+2010}{2010} = \frac{(m+2010)!}{m!2010!} = \frac{2011}{m+2011}\binom{m+2011}{2011}$$

Suy ra

$$(m+2011)\binom{m+2010}{2010} = 2011\binom{m+2011}{2011}$$

Tức là $2011 \mid (m+2011)\dbinom{m+2010}{2010}$

$\left(\text{do } \dbinom{m+2010}{2010}; \dbinom{m+2011}{2011} \in \mathbb{N}\right)$.

Vì 2011 là số nguyên tố và $0 < m < 2011$ nên ƯCLN$(m, 2011) = 1$, từ đó: ƯCLN$(m+2011, 2011) = 1$.

Vậy $2011 \left| \dbinom{m+2010}{2010} \right.$ hay $\dfrac{(m+2010)!}{m!2011!}$ là một số nguyên. ■

Ví dụ 5.5 (Hungari 2001). *Cho* m, n *là các số nguyên dương và* $1 \leq m \leq n$.
Chứng minh rằng

$$n\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} \vdots\, m$$

$\triangle$

Lời giải.
Áp dụng hệ thức Pascal $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$, ta có:

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} = \binom{n-1}{0} - \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}\right)$$
$$= (-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}$$

Suy ra:

$$n\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^{m-1}n\binom{n-1}{m-1}=(-1)^{m-1}m\binom{n}{m}\ \vdots\ m$$

■

Ví dụ 5.6. *Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $\binom{2n}{n}=(2n)^k$, trong đó k là số các ước nguyên tố của $\binom{2n}{n}$.* △

Lời giải.

Giả sử p là một ước nguyên tố của $\binom{2n}{n}$. Gọi m là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $\binom{2n}{n}$.

Ta sẽ chứng minh $p^m \le 2n$. Giả sử ngược lại, $p^m > 2n$.

Khi đó $\left\lfloor \dfrac{2n}{p^m}\right\rfloor = 0$.

Suy ra :

$$m=\left(\left\lfloor\frac{2n}{p}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^2}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor\right)+\ldots+\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^{m-1}}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^{m-1}}\right\rfloor\right) \quad (*)$$

Với $x\in\mathbb{R}$ ta có $\lfloor 2x\rfloor+2>2x\ge\lfloor 2x\rfloor \Rightarrow \lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor\le 1$

Do đó từ (*) suy ra $m\le m-1$ mâu thuẫn. Suy ra điều phải chứng minh.

Từ kết quả vừa chứng minh ở trên ta được:

$$\binom{2n}{n}=(2n)^k \Leftrightarrow k=1 \text{ và } \binom{2n}{n}=2n \Leftrightarrow n=1$$

■

Ví dụ 5.7 (T7/245-THTT). *Cho $m,n,p\in\mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$p\le m+n \text{ và } a=\max\{0;p-m\};\ b=\min\{p;n\}$$

Chứng minh:

$$(m+n-b)!p!\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\binom{m}{p-i}\Big|(m+n-a)!$$

△

Lời giải.
Theo đẳng thức Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p}$$

Dễ thấy rằng tổng này tương đương với

$$\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\binom{m}{p-i}$$

nên :

$$(m+n-p)!p!\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\binom{m}{p-i}=(m+n)!$$

$\forall a\geq 0$ thì $(m+n-a)!\big|(m+n)!$ và $(m+n-p)!\big|(m+n-b)!$.
Từ đó suy ra ngay đpcm. ■

Ví dụ 5.8 (China MO 1998). *Tìm số tự nhiên $n\geq 3$ sao cho*

$$2^{2000}\ \vdots\ 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

△

Lời giải.
Theo đề bài ta có:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=2^k\ (0\leq k\leq 2000, k\in\mathbb{Z})$$

$$\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}=2^k$$
$$\Leftrightarrow (n+1)(n^2-n+6)=3.2^{k+1}$$

Đặt $m=n+1\,(m\geq 4)$. Khi đó ta có

$$m(m^2-3m+8)=3.2^{k+1}$$

Do đó chỉ có thể xảy ra 1 trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m = 2^s$ Do $m \geq 4$ nên $s \geq 2$

$$\Rightarrow m^2 - 3m + 8 = 2^{2s} - 3.2^s + 8 = 3.2^{k+1-s}$$

Nếu $s \geq 4$ thì $2^{2s} - 3.2^s + 8 \equiv 8 \pmod{16}$
$\Rightarrow 8 \equiv 3.2^{k+1-s} \pmod{16} \Rightarrow 2^{k+1-s} = 8 \Rightarrow m^2 - 3m + 8 = 24$ (không có nghiệm nguyên)
Nếu $s = 2 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow n = 3$ (thỏa mãn)
Nếu $s = 3 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow n = 7$ (thỏa mãn)
Trường hợp 2: $m = 3.2^s$ Làm tương tự như trên ta tìm được $n = 23$
Vậy $n = 3, n = 7, n = 23$ là những giá trị cần tìm. ■

Ví dụ 5.9. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2(n-k)} \binom{n-k}{1} \vdots 4^{n-1}$$

△

Lời giải (1).

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2(n-k)} \binom{n-k}{1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n+1}{2i} i$$

Sử dụng công thức: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Ta có:

$$2S = \sum_{i=1}^{n} 2i\binom{2n+1}{2i} = \sum_{i=1}^{n} (2n+1)\binom{2n}{2i-1} = (2n+1)\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}$$

Bây giờ đặt $A = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i}$.
Xét hàm $f(x) = (1+x)^{2n}$, theo định lí RUF ta có:

$$A = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) = \frac{1}{2}.2^{2n} = 4^n$$

Hay $S = (2n+1)\dfrac{A}{2} = (2n+1)4^{n-1} \vdots 4^{n-1}$. Suy ra đpcm. ■

Lời giải (2). Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2(n-k)}{2n+1}\binom{n-k}{1}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{2n+1}{2(n-k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\binom{2n+1}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(2n+1)!}{2(2k)!(2n-2k+1)!}=\frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$$

Mặt khác $4^n=(1+1)^{2n}-(1-1)^{2n}=2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n+1}{2(n-k)}\binom{n-k}{1}=\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^n=(2n+1)4^{n-1}\ \vdots\ 4^{n-1}$$

Vậy ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.10 (USA MO). *Cho p là số nguyên tố chứng minh*

$$\binom{n}{p}\equiv\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\pmod p$$

△

Lời giải.

Xét n số liên tiếp $n,n-1,...,n-p+1$. Chúng đồng dư theo module p với các số $1,2,...,p$.

Ngoài ra một trong chúng, chẳng hạn số N, chia hết cho p, từ đó $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor=\frac{N}{p}$.

Xóa số N sẽ được bộ số đồng dư với hệ thặng dư khác $0,1,2,...,p-1$ theo modulo p.

Giả sử $\prod$ là tích cách số còn lại sau khi loại số N:

$$\prod\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{N}$$

Thế thì $\prod\equiv(p-1)!\pmod p$. Nhân với $\frac{N}{p}$ được:

$$\frac{N\prod}{p}=\frac{(p-1)!N}{p}\pmod p\qquad(5.1)$$

và chia cho số $(p-1)!$ nguyên tố cùng nhau với p, ta biến đổi (5.1) dưới dạng

$$\frac{N\prod}{p!} \equiv \frac{N}{p} \pmod p \tag{5.2}$$

trong đó $\dfrac{N\prod}{p!}$ là số nguyên bằng $\dbinom{n}{p}$.

Vậy ta đã chứng minh xong điều kiện khẳng định đầu tiên của bài toán.

Nếu số $\dfrac{N}{p} = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ chia hết cho p^s thì (5.1),(5.2) vẫn đúng theo module p^{s+1}.

Suy ra $\dfrac{N\prod}{p} = \dbinom{n}{p} \ \vdots\ p^s$. Vậy khẳng định thứ hai được chứng minh. ■

Ví dụ 5.11 (Trường Đông toán học miền Nam 2012-2013). *Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i}\binom{p+i}{i} \equiv 2^p \pmod{p^2}$$

△

Lời giải.

$$\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod p; \quad \binom{p+i}{i} \equiv 1 \pmod p\ \forall i = \overline{1, p-1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \binom{p}{i}\left(\binom{p+i}{i} - 1\right) &\ \vdots\ p^2 \\ \Rightarrow \binom{p}{i}\binom{p+i}{i} &\equiv \binom{p}{i} \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{p+i}{i} \equiv \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \equiv 2^p \pmod{p^2}$$

■

Ví dụ 5.12. *Cho $p \in \mathbb{P}$ và $p \neq 2$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$$

△

Lời giải.
Ta có 2 bổ đề:

$$\forall j=\overline{1,p-1}:\begin{cases}\binom{p}{j}\ \vdots\ p\\ \binom{p+j}{j}-1\ \vdots p\end{cases}$$

Và định lý Wolstenholme: $\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p^2}$ (đã chứng minh ở bài 5.1)
Áp dụng vào bài toán:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}-2^p-1\\ &=1-1+\binom{2p}{p}+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}-(1+1)^p\\ &=\binom{2p}{p}-2+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\left(\binom{p+j}{j}-1\right)\ \vdots\ p^2\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.13. *Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $k=\left\lfloor\frac{2p}{3}\right\rfloor$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{p}{i}\vdots p^2$$

△

Lời giải.
Dễ thấy $\binom{p}{i}\ \vdots\ p,\ \forall i=\overline{1,p-1}$
Để chứng minh $\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+...+\binom{p}{k}\vdots p^2$ ta chỉ cần chứng minh

$$S=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p}\binom{p}{i}\vdots p \qquad (5.3)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\binom{p}{i} = \frac{p!}{p(p-i)!i!} &= \frac{(p-i+1)(p-i+2)...(p-1)}{i!} \\ &\equiv \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{i} \equiv \frac{(-1)^{i-1}}{i} \pmod p \\ \Rightarrow S &\equiv 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod p\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $p=3h+1$ thì

$k=\left\lfloor\frac{2p}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2(3h+1)}{3}\right\rfloor=\left\lfloor 2h+\frac{2}{3}\right\rfloor=2h$

$\Rightarrow p-k-1=h \Rightarrow p-h=k+1$

Khi đó

$$\begin{aligned}S &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k}\right) \\ &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{h}\right) \pmod p\end{aligned}$$

Ta có $-\frac{1}{h}\equiv\frac{1}{p-h} \pmod p$ nên

$$S\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...\frac{1}{p-1} \pmod p$$

Trường hợp 2: $p=3h+2$ thì

$$k=\left\lfloor\frac{2p}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2(3h+2)}{3}\right\rfloor=\left\lfloor 2h+1+\frac{1}{3}\right\rfloor=2h+1\Rightarrow p-h=k+1$$

Khi đó

$$\begin{aligned}S &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k-1}\right) \\ &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{h}\right) \pmod p\end{aligned}$$

Ta có $-\frac{1}{h}\equiv\frac{1}{p-h} \pmod p$ nên

$$S\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...\frac{1}{p-1} \pmod p$$

Tóm lại ta luôn có $S \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \pmod p$

Theo định lí Wolstenholme ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod p \Rightarrow S \equiv 0 \pmod p$$

$$\Rightarrow S \,\vdots\, p$$

■

Ví dụ 5.14. *Cho các số nguyên không âm $i; j; n$ thoả mãn : $i + j \le n$. Chứng minh rằng:*

$$2^{n-i-j} \,\Bigg|\, \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{p}{i}\binom{p}{j}$$

△

Lời giải.

Không mất tính tổng quát giả sử $i \ge j$.

Ta có: $\binom{n}{p}\binom{p}{i}\binom{p}{j} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-p}\binom{p}{j}$

Đặt $A_j = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-p}\binom{p}{j}$

Xét biểu thức

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=0}^{n} A_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-p}\binom{p}{j} x^j \\ &= \binom{n}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{n-i}{n-p}\sum_{j=0}^{n}\binom{p}{j} x^j \\ &= \binom{n}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{n-i}{n-p}(1+x)^p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{i}(1+x)^n \sum_{p=0}^{n} \binom{n-i}{n-p} \frac{1}{(1+x)^{n-p}} \\
&= \binom{n}{i}(1+x)^n \left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}(1+x)^i(2+x)^{n-i}
\end{aligned}
$$

Vậy $F(x) = \binom{n}{i}(1+x)^i(2+x)^{n-i}$ và A_j là hệ số của x^j trong khai triển của $F(x)$.
Dễ thấy là hệ số của các đơn thức của x có bậc bé hơn j trong khai triển $(2+x)^{n-i}$ đều chia hết cho 2^{n-i-j}
Do đó $2^{n-i-j}|A_j$. Đây là đpcm. ■

Ví dụ 5.15 (Australia MO). *Tìm giá trị k tự nhiên nhỏ nhất sao cho số*

$$\forall n \geq m : \frac{k}{m+n+1}\binom{2n}{n+m} \in \mathbb{N}$$

△

Lời giải.
Trước hết ta chứng minh $\dfrac{1}{m+1}\dbinom{2m}{m} \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} &= \left(1-\frac{m}{m+1}\right)\binom{2m}{m} = \binom{2m}{m} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} \\
&= \binom{2m}{m} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} = \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Giả sử cho trước số $m \in \mathbb{N}$. Vì với $n = m$, số $\dfrac{k}{m+n+1}\dbinom{2n}{n+m} = \dfrac{k}{2m+1}$ phải là số tự nhiên nên giá trị phải tìm $k \in \mathbb{N}$ phải chia hết cho $2m+1$, vì thế $k \geq 2m+1$.

Giả sử $k = 2m+1$, thế thì với $n = m$, số dương $\dfrac{k}{n+m+1}\dbinom{n+m}{2n}$ là số tự nhiên và với $n > m$ nó bằng

$$\begin{aligned}
\frac{2m+1}{n+m+1}\binom{2n}{n+m} &= \left(1 - \frac{n-m}{n+m+1}\right)\binom{2n}{n+m} \\
&= \binom{2n}{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!} \\
&= \binom{2}{n+m} - \binom{2n}{n+m+1} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Vậy giá trị k nhỏ nhất bằng $2m+1$. ■

Ví dụ 5.16 (T8/419-THTT). *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương n, k thỏa mãn điều kiện*

$$\binom{3n}{n} = 3^n.n^k$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
\binom{3n}{n} &= 3^n.n^k \\
\Leftrightarrow \frac{(3n)!}{n!(2n)!} &= 3^n.n^k \\
\Leftrightarrow \frac{(3n-2)!(3n-1).3n}{2n^2(n-1)!(2n-1)!} &= 3^n.n^k \\
\Leftrightarrow \frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} &= \frac{2.3^{n-1}n^{k+1}}{3n-1}
\end{aligned}$$

Vì

$$\frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} = \binom{3n-2}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2.3^{n-1}.n^{k+1} \vdots 3n-1 \qquad (5.4)$$

Lại có $(3, 3n-1) = 1$ và $(n, 3n-1) = 1$ nên từ (5.4) suy ra

$$2 \vdots 3n-1 \Rightarrow 3n-1 \leq 2 \Rightarrow n \leq 1$$

Do đó $n = 1$. Ta được $\binom{3n}{n} = 3^n.n^k \Leftrightarrow \binom{3}{1} = 3.1^k$
Đẳng thức này thỏa mãn với mọi số k nguyên dương.
Vậy cặp số (n, k) cần tìm là $(1, k)$ với k là số nguyên dương bất kì. ■

Nhận xét. Có thể giải bài toán này bằng cách khác như sau:
Với $n = 1$, ta có kết quả như trên; với $n \geq 2$, bằng quy nạp ta chứng minh rằng $\binom{3n}{n} \not\vdots\ 3^n$ nên bài toán không thỏa mãn.

Ví dụ 5.17 (IMO 1974). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} \not\vdots\ 5$$

△

Lời giải (1).
Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{3(n-k)}$$

Mặt khác vì 16 chia 5 dư 1 nên ta có:

$$2^{3(n-i)} \equiv \frac{1}{2^{n-i}} = \frac{2^i}{2^n} \pmod 5$$

Suy ra $2^n.\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}.2^{3k} \equiv S_{2n+1} \pmod 5$
với $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^i$
Do vậy, giờ ta sẽ đi tính $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^i$
Xét hàm sinh $f(x) = (1 + x\sqrt{2})^{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{i}{2n+1} 2^i$,theo định lí RUF thì:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) = \frac{1}{2}\left((1 + \sqrt{2})^{2n+1} + (1 - \sqrt{2})^{2n+1}\right)$$

Đây là một con số quen thuộc, $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2-2x-1=0$ nên S_{2n+1} là công thức tổng quát của một dãy số cho bởi công thức truy hồi :

$$u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n$$

Và $u_0=1; u_1=1$ nên u_n không chia hết cho 5. ■

Lời giải (2).

Gọi $S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$

Vì $2^3=8=10-2$ chia cho 5 dư -2, nên 2^{3k} chia cho 5 có số dư bằng số dư của $(-2)^k$ khi chia cho 5. Do đó, ta chỉ cần chứng minh $S_n \not\vdots\ 5$ với $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{2n+1}{2k+1}$

Đặt $R_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k}2^k$

Theo khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(1+i\sqrt{2})^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(i\sqrt{2})^k=R_n+i\sqrt{2}S_n$$

Lấy module 2 vế suy ra $3^{2n+1}=R_n^2+2S_n^2$.

Vì $3^{2n+1}=3.9^n$ chia cho 5 sẽ có số dư là ± 3 nên nếu $S_n \vdots 5$ thì R_n^2 chia cho 5 sẽ dư ± 3.

Nhưng R_n^2 là bình phương của một số nguyên nên chia cho 5 chỉ có thể dư $0;1;4$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $S_n \not\vdots\ 5$. Vậy ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.18. *Cho p là một số nguyên tố và các số tự nhiên m,n,p thỏa mãn $2\le n\le m$ và $(p,q)=1$. Chứng minh rằng $\binom{qp^m}{n}\vdots\ p^{m-n+1}$* △

Lời giải (1).

Viết số tự nhiên n dưới dạng $n=kp^\alpha$ với $(k,p)=1; k,\alpha\in\mathbb{N}^*$.

Nếu $\alpha\ge n$ thì $n=kp^\alpha\ge kp^n\ge p^n$. Điều này vô lý vì vậy $\alpha\le n-1$.

Ta có: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ nên

$$\binom{qp^m}{n} = \binom{qp^m}{kq^\alpha} = \frac{q}{k}p^{m-\alpha}\binom{qp^{m-1}}{kq^{\alpha-1}}$$

Do $(k,p)=1$ và $\binom{qp^{m-1}}{kp^{\alpha-1}}$ là số nguyên dương suy ra $\binom{qp^m}{n} \vdots\, p^{m-\alpha}$

Mà $\alpha \leq n-1$ nên $p^{m-\alpha} \vdots\, p^{m-n+1}$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Lời giải (2).

Ta có:

$$\binom{qp^m}{n} = \frac{qp^m(qp^m-1)(qp^m-n+1)}{n!} \tag{5.5}$$

Gọi a và b thứ tự là số mũ cao nhất của p trong phân tích tiêu chuẩn của tử và mẫu trong (5.5) thì $\binom{qp^m}{n} \vdots\, p^{a-b}$.

Nhận thấy $a \geq m$.

$$\begin{aligned} b &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \text{ với } k \in \mathbb{N}^*, p^k \leq n \leq p^{k+1} \\ &\leq n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k}\right) < \frac{n}{p-1} \leq n \end{aligned}$$

Nên $a - b \geq m - n + 1$. Do đó ta có đpcm. ■

Nhận xét. Ta có kết quả mạnh hơn $\binom{qp^m}{n} \vdots\, p^{m-n+2}$.

Ví dụ 5.19. *Cho p là số nguyên tố và n là số nguyên thoả mãn $n \geq p$. Chứng minh rằng :*

$$\binom{n+p}{p}^2 - \binom{n+2p}{2p} - \binom{n+p}{2p} \vdots\, p^2$$

△

Lời giải.
Trước tiên ta có:

$$\binom{2p}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}^2 \equiv 2 \pmod{p^2}$$

Đặt $S = \binom{n+p}{p}^2 - \binom{n+2p}{2p} - \binom{n+p}{2p}$. Ta có

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p}S &= \binom{n+p}{p}\left[\binom{n+p}{p}\binom{2p}{p} - \binom{n}{p} - \binom{n+2p}{p}\right]\\ &\equiv \binom{n+p}{p}\left[2\binom{n+p}{p} - \binom{n}{p} - \binom{n+2p}{p}\right] \pmod{p^2}\end{aligned}$$

Giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$\binom{n}{p} + \binom{n+2p}{p} - 2\binom{n+p}{p} \vdots\ p^2$$

.
Mà $\binom{n}{p} + \binom{n+2p}{p} - 2\binom{n+p}{p}$ là hệ số của x^p trong khai triển:

$$\begin{aligned}(1+x)^n + (1+x)^{n+2p} - 2(1+x)^{n+p} &= (1+x)^n\left((1+x)^p - 1\right)^2\\ &= (1+x)^n\left(\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}x^i\right)^2\end{aligned}$$

Dễ thấy trong khai triển $\left(\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}x^i\right)^2$ thì hệ số của x^j là
$\sum_{i=1}^{j-1}\binom{p}{i}\binom{p}{j-i} \vdots\ p^2$
Do đó hệ số của x^p trong khai triển $(1+x)^n\left((1+x)^p - 1\right)^2$ chia hết cho p^2, ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.20 (Nghệ An 2011-2012). *Cho số nguyên tố $p > 3$ và tập hợp $M = \{1, 2, ..., p\}$. Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $1 \le k \le p$ ta đặt*

: $E_k = \{A \subset M : |A| = k\}$ và $x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A)$.

Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p^3}$$

△

Lời giải.
Giả sử $A = \{m_1; m_2; ...; m_k\} \in E_k$.
Suy ra $A' = \{p+1-m_1; ...; p+1-m_k\} \in E_k$. Ta có nhận xét sau:
Nếu $m_1 = \min A$ thì $p+1-m_1 = \max A'$ và $m_k = \max A$
thì $p+1-m_k = \min A'$
Suy ra:

$$2x_k = \sum_{A \in E_k} (m_1 + p + 1 + a_k + p + 1 - a_k) = \sum_{A \in E_k} 2(p+1) = \binom{p}{k} 2(p+1)$$

hay $x_k = \binom{p}{k}(p+1)$.

Do đó ta cần chứng minh $(p+1)\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$ hay

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}^2 \equiv 0 \pmod{p^3} \tag{5.6}$$

Thật vậy,ta có:

$$\binom{p}{k} \vdots\, p \Rightarrow \frac{1}{p}\binom{p}{k} = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

Do đó (5.6) tương đương với: $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$

Đặt $a_k = \dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$

$$\Rightarrow \quad k!a_k = (p-1)(p-2)...(p-k+1) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}$$
$$\Rightarrow \quad ka_k \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p}$$

Đặt $b_k = \dfrac{(p-1)!}{k} \Rightarrow kb_k = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
Suy ra: $a_k \equiv (-1)^k.b_k \pmod{p}$
Ta có: $\forall k \in \{1; 2; ...; p-1\}, \exists! j \in \{1; 2; ...; p-1\} : jk \equiv 1 \pmod{p}$.
Do đó:

$$\sum_{k=1}^{p-1} b_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} b_k^2 (kj)^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (b_k k)^2 j^2 \equiv \sum_{j=1}^{p-1} j^2 \equiv \frac{(p-1)(2p-1)p}{6} \pmod{p}$$

Mặt khác $p > 3$ nên

$$p-1 \vdots 2 \text{ và } (p-1)(2p-1) = 2p^2 + 1 - 3p \equiv 2.1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

hay $(p-1)(2p-1) \vdots 6$. Suy ra

$$\sum_{k=1}^{p-1} a_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} b_k^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

Tức (5.6) đúng. Ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.21. *Cho m, n là các số nguyên dương, biết m lẻ. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{n3^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k \in \mathbb{Z}$$

△

Lời giải.
Ta sẽ chứng minh $S = \sum\limits_{k=0}^{m} \dbinom{3m}{3k} (3n-1)^k \vdots n3^m$.
Xét $f(x) = (x + \sqrt[3]{3n-1}x)^{3m}$. Gọi $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ thì ta có:

$$S = \frac{1}{3}(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2))$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^i)^{3m} &= (1 + 3n - 1 + 3\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^i + 3\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^{2i})^m \\ &= 3^m(n + \sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^i + \sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^{2i})^{3m}\end{aligned}$$

Nên:

$$\begin{aligned}\frac{S}{3^{m-1}} &= (n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^2)^{3m}\\ &+(n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^2+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon)^{3m}\\ &+(n+\sqrt[3]{3n-1}+\sqrt[3]{(3n-1)^2})^{3m}\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases}(n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^2)^{3m} &= a_m\\ (n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^2+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon)^{3m} &= b_m\\ (n+\sqrt[3]{3n-1}+\sqrt[3]{(3n-1)^2})^{3m} &= c_m\end{cases}$

Chú ý $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0; \varepsilon^3=1$ và $a_n+b_n+c_n$ là số nguyên với mọi n

Ta có: $a_1+b_1+c_1=3n$; $a_3+b_3+c_3 \vdots 3n$; $a_5+b_5+c_5 \vdots 3n$.

Giả sử $a_{2i+1}+b_{2i+1}+c_{2i+1} \vdots 3n$ với mọi $i<k$ ta có:

$$\begin{aligned}a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1} &= (a_{2k-1}+b_{2k-1}+c_{2k-1})(a_2+b_2+c_2)\\ &-(a_{2k-3}+b_{2k-3}+c_{2k-3})(a_2b_2+c_2b_2+a_2c_2)\\ &+a_2b_2c_2(a_{2k-5}+b_{2k-5}+c_{2k-5})\end{aligned}$$

chia hết cho $3n$ theo giả thiết quy nạp.

Nên theo nguyên lí qui nạp thì $a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1} \vdots 3n$ với mọi k nguyên dương, tức là S chia hết cho $n3^m$.

Hay $\frac{1}{n3^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{3m}{3k}(3n-1)^k \in \mathbb{Z}$ ■

Ví dụ 5.22 (Mongolia TST 2011). *Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}$$

△

Lời giải.

Xét hàm sinh:

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}x^p$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}x^p\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}x^{p-k}\sum_{p=0}^{\infty}\binom{p+k}{k}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}x^{p-k}\cdot\frac{1}{(1-x)^{p+1}}\\
&= \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k\\
&= \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^p\\
&= -\frac{1}{1-x} = -1-x-x^2-\ldots
\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}$ ■

Ví dụ 5.23. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$T = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} - (2^p+1) \,\vdots\, p^2$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$T = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} - (2^p+1) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} - \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}+1\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T &= \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\binom{p+k}{p} + 1 + \binom{2p}{p} - \left(\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}+3\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\left(\binom{p+k}{k}-1\right) + \left(\binom{2p}{p}-2\right)
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\left(\binom{p+k}{k}-1\right) \vdots p^2$ thì ta chỉ cần chứng minh $\binom{p+k}{k}-1 \vdots p$ với $1 \leq k \leq p-1$ vì $\binom{p}{k} \vdots p$.

Thật vậy :

$$\binom{p+k}{k}-1=\frac{(p+k)!}{p!.k!}-1=\frac{(p+1)(p+2)...(p+k)-k!}{k!}$$

Vì $(p+1)(p+2)...(p+k) \equiv k! \pmod p$

$\Rightarrow (p+1)(p+2)...(p+k)-k!$ chia hết cho p và $k!$.

Mà $(p,k!)=1 \Rightarrow (p+1)(p+2)...(p+k)-k! \vdots k!p \Rightarrow \binom{p+k}{k}-1 \vdots p$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\left[\binom{p+k}{k}-1\right] \vdots p^2$$

Mà ta lại có $\binom{2p}{p}-2 \vdots p^2$ (định lý Wolstenholme, xem bài 5.1)

Do đó, ta có $T \vdots p^2$. ■

5.4 Bài tập

Bài 1. Cho p là số nguyên tố và $p \geq 5$. Chứng minh rằng $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$

Bài 2. (Putnam 1997) Cho p là số nguyên tố và a,b là số dương thỏa mãn $a \geq b > 0$. Chứng minh

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod p$$

Bài 3. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng

$$\forall k=\overline{0,p-1}: \binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$$

Bài 4. Cho p là số nguyên tố và gọi bất kì $k, a \in \mathbb{N} : 0 \leq a \leq p^k - 1$. Chứng minh rằng

$$\binom{p^k - 1}{a} \equiv (-1)^a \pmod{p}$$

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $n = 2^m - 1$ thì $\forall k = \overline{0, n} : \binom{n}{k}$ là số lẻ.

Bài 6. Tìm số dư của $\binom{2009}{k}$ khi chia cho 2011.

Bài 7. Cho k là số tự nhiên chẵn và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu k không chia hết cho $p-1$ thì $\sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i}^k \vdots\ p^{k+1}$

Bài 8. Tìm tất cả số nguyên $n > 1$ sao cho $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \binom{kn}{n} \vdots\ k^n$.

Bài 9. Chứng minh rằng:

$$2.1\binom{2000}{2} + 3.2\binom{2000}{3} + .. + 2000.1999\binom{2000}{1999} \vdots\ 3998000$$

Bài 10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq k$:

$$\text{ƯCLN}\left[\binom{n}{k}; \binom{n+1}{k}; \ldots; \binom{n+k}{k}\right] = 1$$

Chương

6

Kỹ thuật đếm bằng hai cách chứng minh đẳng thức tổ hợp

6.1 Nguyên lí đếm bằng hai cách *152*
6.2 Ứng dụng chứng minh đẳng thức tổ hợp *153*
6.3 Ứng dụng phương pháp đếm giải các bài toán đồ thị *165*
6.4 Ứng dụng đếm hai cách giải các bài toán rời rạc *167*
6.5 Bài tập *169*

Hoàng Minh Quân (batigoal)
Nguyễn Hiền Trang (tranghieu95)

Tóm tắt nội dung

Kỹ thuật đếm bằng hai cách là một phương pháp phổ biến và đã có nhiều tác giả viết về nó. Tuy nhiên để bạn đọc hiểu tại sao lại giải được như thế, hoặc cách xây dựng các bước giải cho bài toán sử dụng kĩ thuật này như thế nào thì nhiều bài viết lại chưa đề cập đến. Trong khuôn khổ bài viết nhỏ này tác giả hy vọng cung cấp được phần nào ý tưởng của phương pháp này tới bạn đọc.

6.1 Nguyên lí đếm bằng hai cách

"Cùng một số lượng thì kết quả đếm được theo hai cách là như nhau".

Nguyên lí tưởng chừng như rất đơn giản này nhưng lại là khởi nguồn của nhiều ý tưởng để giải các bài toán tổ hợp hay và khó. Bài viết sau đây sẽ phân tích một số ý tưởng cho việc sử dụng nguyên lí này.
Để chứng minh một đẳng thức tổ hợp có dạng $A = B$. Chúng ta có thể thực hiện các bước dự đoán sau đây để sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách:

6.1.1 Các bước thực hiện

- **Bước 1:** Phát biểu lại bài toán về đếm một sự kiện quen thuộc.
- **Bước 2:** Đếm theo vế trái của đẳng thức.
- **Bước 3:** Đếm theo vế phải của đẳng thức.

6.1.2 Ghi nhớ cần thiết

- Nếu vế trái (hoặc vế phải) là tổng các biểu thức thì ở cách đếm vế trái (hoặc vế phải) đó ta chia thành các trường hợp riêng để đếm dùng quy tắc cộng.
- Nếu vế trái (hoặc vế phải) là tích các biểu thức thì ở cách đếm vế trái (hoặc vế phải) đó ta chia thành các công đoạn cùng hoàn thành để đếm dùng quy tắc nhân.

Trong bài viết này, chúng tôi minh họa kỹ thuật đếm bằng hai cách thông qua các bài toán nổi tiếng và đa phần là các bài toán, các định lý có tên nhằm minh họa cho ý tưởng của bài viết.
Sau đây là một số ứng dụng của phương pháp đếm bằng hai cách. Chúng tôi phân tích và trình bày chi tiết hai ví dụ mở đầu, các ví dụ sau ý tưởng phân tích tương tự.

6.2 Ứng dụng chứng minh đẳng thức tổ hợp

Ví dụ 6.1. *(Chứng minh đẳng thức Pascal)*
Với mọi số nguyên dương $n \geq k \geq 1$ *chúng ta có*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc:
  Trại hè toán học có n học sinh tham dự ban tổ chức cần chọn ra k học sinh làm bài thi môn tổ hợp . Như vậy ban tổ chức có hai cách đếm số cách chọn.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Nếu chọn k học sinh bất kì trong n học sinh thì ban tổ chức có $\binom{n}{k}$ cách chọn.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Quan sát vế phải ta thấy vế phải là "tổng" của hai biểu thức tổ hợp nên điều đó gợi cho chúng ta nhớ tới xét các khả năng để dùng quy tắc cộng.
  Giả sử Long là một trong n học sinh đó.

  – *Phương án 1*:
    Nếu Long được chọn tham dự thi môn tổ hợp thì cần chọn $k-1$ người trong số $n-1$ người còn lại. Khi đó ban tổ chức có $\binom{n-1}{k-1}$ cách chọn.

  – *Phương án 2*:
    Nếu Long không được chọn thi môn tổ hợp thì cần chọn ra cho đủ k người trong số $n-1$ người còn lại. Khi đó ban tổ chức có $\binom{n-1}{k}$ cách chọn.

Như vậy theo nguyên lí đếm bằng hai cách chúng ta có đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 6.2. *Chứng minh rằng:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu bài toán dưới lại dưới dạng toán đếm quen thuộc: Tìm số cách chọn một số số từ n số cho trước.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**

  \+ Nếu chọn 0 viên có $\binom{n}{0}$ cách

  \+ Nếu chọn 1 viên có $\binom{n}{1}$ cách

  \+ ... ...

  \+ Nếu chọn n viên có $\binom{n}{n}$ cách

  Vậy tổng cộng có $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$ cách.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Mỗi số sẽ có 2 trạng thái (được chọn và không được chọn), mà có n số như vậy nên có 2^n cách chọn.

Như vậy ta có điều cần chứng minh. ■

Ví dụ 6.3. *(Chứng minh đẳng thức Vandermonde.)*

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{k};\quad \text{với } k\le n\le m.$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc. Công ty X gồm n nhân viên nam và m nhân viên nữ cần chọn ra k người để lập thành đội tình nguyện.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 1)**
  Chọn ngẫu nhiên k người trong công ty gồm $n+m$ người thì có $\binom{m+n}{k}$ cách chọn.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 2)**
  Quan sát vế trái ta thấy vế trái các số hạng thành phần là "tích" của hai biểu thức tổ hợp nên điều đó gợi cho chúng ta nhớ tới xét các khả năng để dùng quy tắc nhân.
  Chọn ra i nhân viên nam và $k-i$ nhân viên nữ thì có $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ cách. Vì số người được chọn là tùy ý trong giới hạn cho phép k người nên cho i chạy từ 0 đến k, ta có tổng tất cả các cách chọn như vậy là:
  $$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+...+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. ■

Nhận xét. Đẳng thức Vandermonde được viết thu gọn như sau:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

Khi đó:
a. Với $m=n$ thì chúng ta có đẳng thức quen thuộc

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

b. Với $(0\le k_i\le n_i)$; $i=\overline{1,r}$ thì

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_r=k}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}...\binom{n_r}{k_r}=\binom{n_1+n_2+...+n_r}{k}$$

Ví dụ 6.4. *Chứng minh rằng với $n \geq m$ thì*

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại bài toán đếm quen thuộc:
  Giả sử rằng từ n học sinh của lớp học, giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một đội văn nghệ số lượng người tùy ý, trong đó có m học sinh cầm micro. Khi đó giáo viên chủ nhiệm có hai phương án thực hiện.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Trước hết giáo viên chọn ra k người từ n người. Khi đó có $\binom{n}{k}$ cách chọn , sau đó từ k người này sẽ chọn lấy m người cầm micro. Cho k chạy từ 0 đến n chúng ta có

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Chọn ngay m học sinh cầm Micro từ n học sinh của lớp, sau đó chọn bổ sung thêm một nhóm tùy ý từ $n-m$ người còn lại. Trong $n-m$ người này đối với mỗi người có thể được chọn hoặc không được chọn nên có 2^{n-m} cách chọn.
  Vậy cả thảy có $\binom{n}{m} 2^{n-m}$

Do đó chúng ta có $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$ ■

Nhận xét. Với ý tưởng tương tự ví dụ trên, bạn đọc có thể chứng minh đẳng thức sau:
Chứng minh rằng với $n, m \in \mathbb{N}$ thì

$$\sum_{r=0}^{m} 2^{n-r} \binom{n}{r} \binom{m}{r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n+m-r}{m} \binom{n}{r}.$$

Ví dụ 6.5. *Với n nguyên dương cho trước. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc:
  Một đoạn thẳng có độ dài n được tô bằng 4 màu, D, X, V, T.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Ta sẽ chọn ra một tập cách tô màu D và X sao cho $D+X=k$
  thì số cách chọn sẽ là $\sum_{i=0}^{k}\binom{i}{k}\binom{k}{k-i}=\binom{2k}{k}$
  khi đó số cách chọn ra các đoạn màu V, T sẽ là
  $\sum_{j=0}^{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k}{k-j}=\binom{2n-2k}{n-k}$
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Rõ ràng ta có 4^n cách như thế.

Do đó với mỗi k cố định thì ta được số cách tô sẽ là $\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$

Cho k chạy từ 0 đến n ta được số cách tô màu là $\sum_{i=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.6.

$$\sum_{k=0}^{n}4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k}=\binom{8n}{2n};\ n\in\mathbb{N}^*$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc: Xét $8n$ viên bi.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Cho $8n$ viên bi này vào $4n$ hộp, mỗi hộp có 2 viên:
  Đầu tiên chọn ra đúng k hộp sao cho mỗi hộp có đúng 1 viên bi được lấy ra.

  – Số cách chọn $2n-2k$ hộp trong $4n$ hộp là $\binom{4n}{2n-2k}$

  – Trong mỗi hộp trong $2n-2k$ hộp trên ta chọn ra đúng 1 bi, trong 2 viên bi có trong hộp, nên số cách chọn là $2^{2n-2k}=4^{n-k}$

  – Chọn $2k$ viên bi còn lại trong $2n+2k$ hộp còn lại sao cho mỗi hộp sẽ có đúng 2 bi được chọn sẽ là k hộp nên có $\binom{2n+2k}{k}$ cách chọn.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Ta sẽ đếm số cách chọn $2n$ viên bi từ $8n$ viên bi này khi đó có $\binom{8n}{2n}$ cách.

  Từ đó suy ra số cách chọn $2n$ trong $8n$ viên bi theo cách đếm thứ 2 sẽ là $\sum\limits_{k=0}^{n} 4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k}$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.7. *Chứng minh rằng:*

$$1^k+2^k+\ldots+n^k=\sum_{i=0}^{k-1} A_k^{k-i}\binom{n+1}{k-i+1}$$

với $k=1,2,3,\ldots$ △

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc:
  Từ tập các số nguyên dương $A=\{1,2,\ldots,n+1\}$, ta chọn ra bộ sắp thứ tự $(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})$ thỏa mãn điều kiện:

$x_{k+1} > max\{x_1, x_2, ..., x_k\}$
Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
Ứng với mỗi $x_{k+1} = i + 1, (1 \le i \le n)$, ta có i các chọn x_1, i cách chọn x_2, ...; i cách chọn x_k.
Do đó, số các cách chọn là: $S = 1^k + 2^k + ... + n^k$

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
Ta sẽ chọn ra $k+1$ số từ $n+1$ số, số lớn nhất, ta chọn làm x_{k+1}, các số còn lại, ta sếp thứ tự là xong.
Gọi $i(0 \le i \le k)$ là số các phần tử bằng nhau trong nhóm $x_1, x_2, ..., x_k$.
Chọn $k - i + 1$ số khác nhau từ $n + 1$ số, ta có $\binom{n+1}{k-i+1}$ cách.
Xếp thứ tự $k - i$ số khác nhau vào k chỗ trống (các chỗ trống còn lại, hiển nhiên dành cho i số bằng nhau), ta có A_k^{k-i} cách.
Vậy số cách chọn là:
$$S = \sum_{i=0}^{k-1} A_k^{k-i} \binom{n+1}{k-i+1}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.8.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$
△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
Thầy Thế, GVCN lớp 10A gồm n học sinh nam và n học sinh nữ. Tối nay, ở Rạp chiếu phim quốc gia, chiếu một bộ phim rất hay, thầy định tổ chức cho cả lớp đi xem... Cuối cùng thầy Thế chỉ mua được n vé. Thầy suy nghĩ:

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Thầy ghép n học sinh nam và n học sinh nữ thành n đôi. (việc làm này coi như thực hiện từ đầu và không ảnh hưởng gì đến cách chia vé của thầy)

  - Chọn ra k đôi và chia cho mỗi đôi 1 vé - có $2^k\binom{n}{k}$ cách chọn (vì mỗi đôi có 1 vé nên k đôi sẽ có 2^k kết cục khác nhau), như vậy còn lại $n-k$ vé và $n-k$ đôi còn lại. Thầy tiếp tục chọn ra $\left\lfloor \dfrac{n-k}{2} \right\rfloor$ đôi và chia cho mỗi đôi 2 vé - có $\dbinom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor}$ cách.

  - Bây giờ thầy còn lại $S = n-k-2\left\lfloor \dfrac{n-k}{2} \right\rfloor$ vé.
  $S = 0$ nếu $n-k$ là số chẵn (khi đó n vé đã được chia hết)
  $S = 1$ nếu $n-k$ là số lẻ (khi đó chiếc vé còn lại dành cho thầy)

  - Dễ thấy rằng k có thể nhận các giá trị từ 0 đến n

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Nếu n vé được chia ngẫu nhiên cho $2n$ học sinh và cả mình thì xảy ra $\dbinom{2n+1}{n}$ trường hợp.

Do đó, theo cách chia đó của thầy ta có tất cả: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor}$ các cách chia n vé cho $2n+1$ người.
Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.9. *Tính*

$$\sum_{k=3}^{n}(k-2)(k-1)k\binom{n}{k}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Giả sử có n bạn tham gia thi hội khỏe Phù Đổng vòng sơ tuyển cần chọn ra một số bạn vào vòng chung kết.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Sau đó chọn ra 3 bạn cho ba vị trí nhất, nhì, ba,..., bét thế thì tổng cần tính chính là số cách chọn đó.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Chọn luôn hạng nhất, nhì,...bét ngay từ n bạn và bổ sung thêm một số bạn trong $n-3$ bạn còn lại để thi vòng chung kết.

  Nếu chọn kiểu này này thì có $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ giải pháp vì 1 số bạn chọn theo cách kia chính là 1 tập con trong $n-3$ cô còn lại.

Từ đó có kết quả cần tìm là $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$
Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.10.
Chứng minh rằng:

$$\sum_{n}^{k} \binom{n}{k} .2^k = 3^n$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Có n gia đình trong 1 công ty, mỗi gia đình có 2 người con. Nhân ngày trung thu, công ty tổ chức phát quà cho các cháu có kết quả học tập cao, nhưng trong cùng 1 gia đình không có 2 cháu nào cùng được nhận quà. Hỏi có bao nhiêu cách phát quà?

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**

  + Nếu không có gia đình nào có con được nhận quà thì có $\binom{n}{0}.2^0$ cách phát quà.

  + Nếu có 1 gia đinh có con được nhận quà thì có $\binom{n}{1}.2^1$ cách phát quà.

  + ...

+ Nếu tất cả các gia đình đều có con được nhận quà thì có $\binom{n}{n}.2^n$ cách phát quà.

Vậy tổng cộng có $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^k$ cách phát quà.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Mỗi gia đình thì có 3 cách (cả 2 con đều không có quà, cả 2 con đều có quà, hoặc 1 đứa có quà 1 đứa không có quà).

Như vậy có tất cả 3^n cách phát quà.
Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.11.
Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$$ △

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Một lớp học có n học sinh đi dã ngoại. Cô giáo chia thành một số nhóm và trong mỗi nhóm chọn ra một nhóm trưởng để tiện quản lí.
  Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia?

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Xét số nhóm là k. Mô hình hóa bài toán như sau:
  Ta cho trưởng nhóm cầm một cái cột, giữa 2 nhóm có 1 cái cột nên có tất cả $2k-1$ cái cột trong $n+k-1$ vị trí.
  Do đó với k nhóm thì có $\binom{n+k-1}{2k-1}$ cách chia.
  Như vậy có tất cả $\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{2k-1}$ cách chia.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Gọi x_n là số cách chia thỏa mãn bài toán với n học sinh.
  Xét x_{n+1}
  Giả sử nhóm được chia cuối cùng có k người, khi đó có k cách chia nhóm này (thực ra là k cách chọn nhóm trưởng), và g_{n+1-k} cách chia $n-k$ người trước, nên có $k.g_{n+1-k}$ cách chia.

  Quy ước $g_0 = 1$, ta có: $g_1 = 1$

  $$\Rightarrow g_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} k g_{n+1-k}$$

  $$\Rightarrow g_{n+1} = 3g_n - g_{n-1}$$

  Kết hợp với $g_0 = 1, g_1 = 1$ ta được:

  $$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.12. *Tính tổng:*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{i}$$

△

Lời giải.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Ta đếm số tập con có i phần tử của tập hợp $(1; 2; 3; ...; n)$ mà không chứa hai số nguyên liên tiếp.
  Gọi A là họ tất cả các tập con có tính chất nêu trên và B là tất cả các tập con của tập hợp $1; 2; ...; n-(r-1)$.
  Xét ánh xạ $f : A \rightarrow B$ như sau:
  $f : a_1; a_2; ...; a_r \rightarrow b_1; b_2; ...; b_r$ với $b_i = a_i - i + 1, i = \overline{1;r}$
  Dễ thấy f là 1 song ánh nên $|A| = |B| = \binom{n-i+1}{i}$

  $$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{i} \text{ là số các tập con của } 1; 2; ...; n$$

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Gọi a_n là số tập con của tập $(1; 2; ...; n)$ mà không chứa 2 số nguyên liên tiếp.
  Xét a_{n+1}
  Nếu phần tử cuối cùng là $n+1$ thì phần tử liền trước nó không thể là n, nên có a_{n-1} tập con.
  Nếu phần tử cuối cùng không phải là $n+1$ thì có a_n tập con.
  $\Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
  Dễ thấy $a_0 = 1; a_1 = 2$ nên
  $a_n = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Như vậy:

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{i}{n-i+1} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

■

Ví dụ 6.13. *Cho $k_1; k_2; ...; k_n$ là các số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \binom{k_i}{2}\binom{k_j}{2} + 3\sum_{i=1}^{n} \binom{k_i+1}{4} = \binom{\sum_{i=1}^{n} \binom{k_i}{2}}{2}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Gọi $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập gồm $k_1, k_2, ..., k_n$ phần tử.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Nếu 2 cặp này không cùng thuộc 1 tập thì có $\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} \binom{k_i}{2}\binom{k_j}{2}$ cách chọn.
  Nếu 2 cặp này cùng thuộc 1 tập A_i nào đó có k_i phần tử, ta chèn

vào tập này một phần tử ảo là x_i với qui ước nếu trong 4 số được chọn từ A_i trong đó có phần tử x_i thì đồng nghĩa với trong 2 cặp ban đầu có 1 phần tử lặp lại 2 lần trong 3 phần tử còn lại.
Sau khi chọn ra 4 phần tử nếu ko có x_i thì ta có $\binom{3}{2} = 3$ cách tạo chúng thành 2 cặp.
Nếu có x_i thì có 3 cách gán giá trị cho x_i (là một trong 3 giá trị còn lại) với mỗi giá trị x_i chỉ cho đúng 1 cách phân cặp. Tóm lại ở trường hợp này sẽ có $3\sum_{i=1}^{n}\binom{k_i+1}{4}$.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
Từ n tập này ta tạo được $\sum_{i=1}^{n}\binom{k_i}{2}$ cặp phần tử thuộc cùng tập.
Do đó vế phải là số cách chọn ra 2 cặp như vậy.

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

6.3 Ứng dụng phương pháp đếm giải các bài toán đồ thị

Ví dụ 6.14. *Trong một buổi họp có n người tham gia và có một số cái bắt tay (mỗi cái bắt tay tạo thành từ hai người, hai người đã bắt rồi thì không bắt tay lại). Chứng minh rằng nếu số người tham gia bắt tay là một số lẻ thì số cái bắt tay được tạo ra là một số chẵn.*
Bài toán trên tương đương với bài toán sau
Cho đồ thị $G = (V, E)$. Khi đó

$$2|E| = \sum_{v\in V}\deg(v).$$

Trong đó V là số đỉnh và E là số cạnh của đồ thị. △

Lời giải.
Ở đây chúng ta giải bài toán trên theo phương pháp đếm bằng hai cách.

Gọi $A_1, A_2, ..., A_n$ là n người trong buổi họp đó. Khi đó mỗi cặp (A_i, A_j) dùng để chỉ người A_i bắt tay người A_j.
Gọi x_i là số lần bắt tay của người A_i và y là tổng số lần bắt tay xảy ra.
Một mặt chúng ta có số lần bắt tay của các cặp (A_i, A_j) là $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ vì mỗi người A_i có x_i cách chọn bắt tay với người A_j
Mặt khác, số lần bắt tay xảy ra giữa hai cặp (A_i, A_j) và (A_j, A_i) là $2y$.
Do đó theo nguyên lí đếm bằng hai cách chúng ta có: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 2y$
Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.15. *(Định lí Cayley) Có n^{n-2} cây được tạo ra bởi n đỉnh phân biệt.* △

Lời giải.
Công thức Cayley được coi là một trong những công thức đẹp nhất của toán học lí thuyết đồ thị. Để chứng minh công thức này người ta có nhiều cách giải khác nhau, ở đây chúng tôi xin trình bày cách giải bằng kĩ thuật đếm bằng hai cách cho công thức này.
Gọi T_n là số cây được tạo ra từ n đỉnh.

- **Đếm theo cách 1**
  Ta chọn một đỉnh trong số n đỉnh làm gốc và chọn một trong $(n-1)!$ của $n-1$ cạnh để tạo thành một dãy cạnh có hướng. Khi đó tổng số dãy cạnh được tạo theo cách này là: $T_n n(n-1)! = T_n n!$.

- **Đếm theo cách 2**
  Để đếm số dãy cạch có hướng ta có thể xây dựng cây bằng cách bổ sung từng cạnh một vào n đỉnh đã cho. Giả sử chúng ta đã bổ sung $n-k$ cạnh thì ta thu được một rừng có k cây, có $n(k-1)$ cách chọn cạnh kế tiếp để bổ sung mà đỉnh đầu của nó là một trong n đỉnh, đỉnh cuối của nó là một trong số $k-1$ gốc của các cây không chứa đỉnh đầu. Đếm theo cách này chúng ta có tổng số cách chọn là:
  $$\prod_{k=2}^{n} n(k-1) = n^{n-1}(n-1)! = n^{n-2}n!$$

Do hai cách đếm có cùng số lượng như nhau nên chúng ta có: $T_n n! = n^{n-2}n!$. Vậy $T_n = n^{n-2}$. Định lí được chứng minh. ■

6.4 Ứng dụng đếm hai cách giải các bài toán rời rạc

Ví dụ 6.16 (Hồng Kông 1994). *Trong một trường học có b giáo viên và c học sinh thỏa mãn các điều kiện sau:*
(1) *Mỗi giáo viên dạy đúng k học sinh;*
(2) *Cứ hai học sinh bất kì thì học chung đúng h giáo viên.*
Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$$

△

Lời giải.
Nếu giáo viên T_r dạy hai học sinh $S_i, S_j (i \neq j)$thì ta coi $T_r; S_i, S_j$ là một bộ ba có dạng $\{T_r; S_i, S_j\}$ và tổng tất cả các bộ ba $\{T_r; S_i, S_j\}$ là S.

- **Đếm theo cách 1** Với mỗi giáo viên T_r, Thầy giáo (hoặc cô giáo) dạy k học sinh nên có $\binom{k}{2}$ bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$. Vì trường học có b giáo viên nên tổng số bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$ là $S = b\binom{k}{2}$.

- **Đếm theo cách 2** Dựa vào điều kiện cứ hai học sinh $S_i, S_j (i \neq j)$học chung đúng h giáo viên. Do đó chúng ta cũng có h bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$. Vì trường học có c học sinh nên chúng ta có $\binom{c}{2}$cách chọn $S_i, S_j, (i \neq j)$ nên chúng ta cũng có tổng số bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$ là $S = h\binom{c}{2}$

Vậy theo cả hai cách đếm trên chúng ta có:

$$S = b\binom{k}{2} = h\binom{c}{2}$$

Từ đó chúng ta có:

$$\frac{b}{h} = \frac{\binom{c}{2}}{\binom{k}{2}} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$$

■

Ví dụ 6.17 (Nguyên lí bù trừ). *Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập bất kì. Khi đó chúng ta có:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots \quad \triangle$$

Lời giải.
Xét một phần tử x bất kỳ.

- Nếu x không thuộc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ thì x không được đếm lần nào ở vế trái, cũng không được đếm lần nào ở vế phải.

- Nếu x thuộc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ thì x được đếm một lần ở vế trái. Ta chứng minh x cũng được đếm một lần ở vế phải. Như thế, một phần tử x bất kỳ được đếm như nhau ở cả hai vế, do đó hai vế bằng nhau.

  Thật vậy, vì x thuộc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ nên x thuộc vào một số tập con A_i. Giả sử x thuộc r tập con. Khi đó x sẽ được đếm r lần ở tổng thứ nhất ở vế phải, $\binom{r}{2}$ lần ở tổng thứ hai,... Như vậy, x sẽ được đếm $\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \binom{r}{i}$ lần ở vế phải.

Để ý rằng $0 = (1-1)^r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i} = 1 - \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\binom{r}{i}$.

Vậy chúng ta có $\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\binom{r}{i} = 1$, tức là x được đếm 1 lần ở vế phải.

Vậy nguyên lí bù trừ được chứng minh. ■

Nhận xét.
Qua một số bài toán và ví dụ ở trên các bạn có thể thấy, phương pháp đếm bằng hai cách được diễn tả bằng ngôn ngữ hoàn toàn dễ hiểu. Bằng cách đó chúng ta có thể áp dụng giải được nhanh gọn một số bài toán mà các phương pháp khác tỏ ra kém hữu hiệu và phức tạp hơn.

Bên cạnh ưu điểm trên thì phương pháp đếm bằng hai cách cũng có nhiều nhược điểm và tương đối yếu đối với các bài toán phức tạp (như tổng đan dấu, tổng chứa phân thức). Vấn đề quan trọng trong việc sử dụng phương pháp này đó là ta phải phân tích được đề bài dưới dạng một bài toán đếm! Điều này cần tới sự quan sát và khả năng nhạy bén của mỗi người. Tuy nhiên còn một số cách nhận biết dấu hiệu và chuyển đổi hệ thống cho phương pháp này, song do thời gian gấp rút nên tác giả chưa có điều kiện giới thiệu đến bạn đọc trong chuyên đề này.
Hẹn gặp lại các bạn vào một dịp khác!

Sau cùng, mời các bạn cùng luyện tập với một số bài toán sau:

6.5 Bài tập

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq k \geq 1$ chúng ta có:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ chúng ta có:

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Bài 3. (IMO 1989) Cho n, k là các số nguyên dương và S là tập hợp gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:
(1) Không có ba điểm nào thuộc tập S thẳng hàng.
(2) Với mỗi điểm P thuộc tập S thì có ít nhất k điểm thuộc S cách đều với điểm P.
Chứng minh rằng: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

Bài 4. (IMC 2002) Trong một cuộc thi toán học có 200 sinh viên tham dự. Họ được đề nghị giải 6 bài toán và mỗi bài toán được giải đúng bởi ít nhất 120 sinh viên . Chứng minh rằng luôn có hai sinh viên mà với mỗi bài toán thì ít nhất một trong hai thí sinh này giải đúng bài toán đó.

Bài 5. Chứng minh rằng: $\sum \frac{k!}{k_1!k_2!...k_n!} = n^k$, trong đó bộ $(k_1, k_2, ..., k_n)$ thỏa mãn $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$.

Bài 6. Cho $m; n$ là những số nguyên không âm . Chứng minh rằng :

$$\mathcal{E}(m;n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{m-k}{m-k-n} = 1$$

Với $m \geq 2n$

Tài liệu tham khảo

[1] http://diendantoanhoc.net/forum/

[2] http://www.artofproblemsolving.com/

[3] http://www.math.net.vn

[4] http://forum.mathscope.org/

[5] 102 Combinatorial Problems, Titu Andreescu, Zuming Feng